
GET00143 – TEORIA DAS PROBABILIDADES II

Variáveis Aleatórias Unidimensionais

Ana Maria Lima de Farias
Jessica Quintanilha Kubrusly
Mariana Albi de Oliveira Souza

Departamento de Estatística

Conteúdo

1	A Distribuição Normal	1
1.1	Distribuição Normal Padrão	1
1.1.1	Função Densidade	1
1.1.2	Esperança e Variância	1
1.1.3	Função de distribuição	2
1.2	Cálculo de Probabilidades da Normal Padrão	3
1.2.1	Tabela 1: $P(0 \leq Z \leq z)$	3
1.2.2	Tabela 2: $\Phi(z) = P(Z \leq z)$	9
1.3	Distribuição Normal	12
1.3.1	Características da Função Densidade Normal	12
1.3.2	Parâmetros Distribuição Normal	13
1.3.3	Função de Distribuição	14
1.4	Cálculo de Probabilidades da Normal	15
1.5	Encontrando a Abscissa da Normal para uma Probabilidade Específica	18
1.6	Exemplos de aplicação da distribuição Normal	22
A	Tabelas da Distribuição Normal	31

Capítulo 1

A Distribuição Normal

1.1 Distribuição Normal Padrão

1.1.1 Função Densidade

Analisando a equação (??), vemos que a função $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ satisfaz as condições para ser uma função de densidade. De fato, essa é uma importante distribuição probabilística, denominada *distribuição normal padrão*.

Definição 1.1 Densidade Normal Padrão

Diz-se que uma variável aleatória X tem **densidade normal padrão** se sua função densidade é dada por

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad -\infty < x < \infty \quad (1.1)$$

Vamos denotar por $N(0; 1)$ a densidade normal padrão e, se uma variável aleatória tem tal distribuição, é comum representá-la pela letra Z , de modo que estabelecemos a notação $Z \sim N(0; 1)$.

Analisando a expressão de $\varphi(z)$, podemos ver que ela é simétrica em torno de 0, ou seja, ela é uma função par: $\varphi(z) = \varphi(-z)$. Na Figura 1.1 temos o gráfico de $\varphi(z)$.

1.1.2 Esperança e Variância

Seja $Z \sim N(0, 1)$. Como $\varphi(z)$ é simétrica em torno do ponto $x = 0$, sabemos, por (??), que $E(Z) = 0$.

Como $E(Z) = 0$, então

$$\text{Var}(Z) = E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} z^2 \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

uma vez que o integrando é par. Esta integral é calculada usando o método de integração por partes. Fazendo:

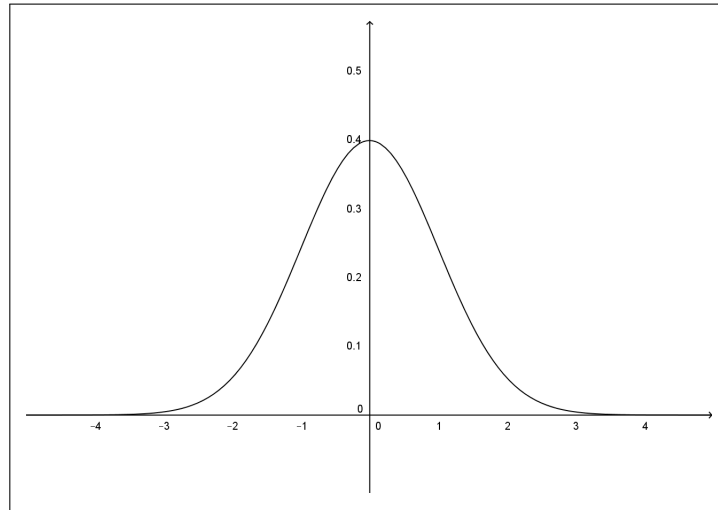


Figura 1.1 – Gráfico da densidade normal padrão $\varphi(z)$

- $z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = dv \Rightarrow v = -\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$
- $z = u \Rightarrow dz = du$

resulta que:

$$-z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \Big|_0^\infty = \int_0^\infty \left[-\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\right] dz + \int_0^\infty z^2 \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \quad (1.2)$$

Pelos resultados (??) e (??)

$$0 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \int_0^\infty z^2 \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \Rightarrow \int_0^\infty z^2 \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Logo,

$$\text{Var}(Z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \text{Var}(Z) = 1 \quad (1.3)$$

Resumindo:

$$Z \sim N(0; 1) \Rightarrow \begin{cases} E(Z) = 0 \\ \text{Var}(Z) = 1 \end{cases} \quad (1.4)$$

1.1.3 Função de distribuição

A função de distribuição acumulada de qualquer variável aleatória X é definida por $F_X(X) = P(X \leq x)$. No caso da densidade normal padrão, essa função é dada pela integral

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt \quad (1.5)$$

para a qual não existe uma antiderivada em forma de função elementar. Assim, cálculos com a distribuição acumulada da normal padrão requerem integração numérica. Todos os pacotes estatísticos possuem rotinas especiais para esse cálculo. No EXCEL, a função DIST.NORMP calcula $P(Z \leq z)$ para qualquer z , onde $Z \sim N(0; 1)$.

1.2 Cálculo de Probabilidades da Normal Padrão

Vimos anteriormente que o cálculo de probabilidades associadas a variáveis aleatórias contínuas envolve cálculo de integrais da função densidade:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

Isso, obviamente, continua valendo para a densidade normal. A diferença está no fato de que o cálculo de tais integrais no caso da densidades normais requer métodos numéricos e, para facilitar esses cálculos, podemos usar uma tabela em que alguns valores já se encontram calculados. A tabela básica fornece probabilidades associadas à densidade normal padrão. Vamos estudar essa tabela e depois veremos como generalizar para uma normal qualquer.

1.2.1 Tabela 1: $P(0 \leq Z \leq z)$

A Tabela 1 será usada para calcular probabilidades associadas a uma variável aleatória normal padrão Z . Assim, com essa tabela, poderemos calcular probabilidades do tipo $P(Z > 1)$, $P(Z \leq 3)$, $P(-1 \leq Z \leq 2)$, etc.

Vamos analisar cuidadosamente esta tabela. A partir do cabeçalho e do gráfico na tabela, podemos ver que as entradas no corpo da tabela fornecem probabilidades do tipo $P(0 \leq Z \leq z)$. Com relação à abscissa z , seus valores são apresentados na tabela ao longo da coluna lateral à esquerda em conjunto com a linha superior, ambas sombreadas de cinza. Na coluna à esquerda, temos a casa inteira e a primeira casa decimal; na linha superior, temos a segunda casa decimal. Por exemplo, ao longo da primeira linha da tabela, temos probabilidades associadas às abscissas 0,00; 0,01; 0,02, ..., 0,09; na segunda linha da tabela, temos probabilidades associadas às abscissas 0,10; 0,11; 0,12; ..., 0,19; na última linha da tabela, temos probabilidades associadas às abscissas 4,00; 4,01; 4,02; ..., 4,09.

A entrada 0,00000 no canto superior esquerdo da tabela corresponde à seguinte probabilidade: $P(0 \leq Z \leq 0,00)$, ou seja, $P(Z = 0)$ e, como visto, essa probabilidade é nula, uma vez que, para qualquer variável aleatória contínua X , $P(X = x_0) = 0$. A segunda entrada na primeira linha, 0,00399, corresponde a $P(0 \leq Z \leq 0,01)$, que é a área sob a curva de densidade normal padronizada compreendida entre os valores 0 e 0,01 (veja o gráfico na tabela).

Note que esta tabela apresenta probabilidades correspondentes a abscissas positivas, ou seja, esta tabela trata de área sob a curva no lado positivo do eixo. Para calcular áreas no lado negativo, teremos que usar o fato de a curva da densidade normal ser simétrica. Sempre faça um esboço da curva de densidade, sombreando a área correspondente à probabilidade desejada; isso lhe ajudará no cálculo da probabilidade. Vamos terminar esta seção apresentando vários exemplos de cálculos de probabilidades de uma v.a. Z com distribuição normal padrão, ou seja, no que segue, $Z \sim N(0; 1)$. Os exemplos apresentados cobrem todas as situações possíveis. Assim, é importante que você entenda bem a situação ilustrada por cada um dos exemplos, para poder aplicar o método de solução adequado aos novos exercícios.

Para simplificar a solução dos exercícios, vamos adotar a seguinte notação.



Entradas da Tabela 1 do Apêndice A

Vamos representar por $tab(z)$ as entradas da Tabela 1 do Apêndice A, ou seja,

$$tab(z) = P(0 \leq Z \leq z)$$

Exemplo 1.2

A partir da Tabela 1 do Apêndice A calcule $P(0 \leq Z \leq 1,22)$.

Solução:

Veja as Figuras 1.2 e 1.3. Essa probabilidade é dada diretamente na Tabela 1, utilizando a entrada correspondente à linha 1,2 e à coluna com o valor 2. O resultado é

$$P(0 \leq Z \leq 1,22) = tab(1,22) = 0,3888$$

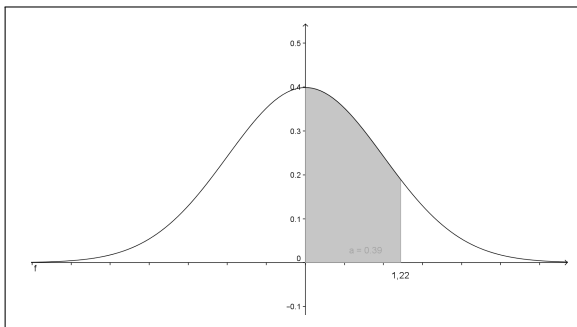


Figura 1.2 – $P(0 \leq Z \leq 1,22)$ como área

e 1ª. Decimal	0	1	2	3
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082

Figura 1.3 – $P(0 \leq Z \leq 1,22)$ - Uso da tabela



Exemplo 1.3

A partir da Tabela 1 do Apêndice A calcule $P(1 \leq Z \leq 2)$.

Solução:

Note que este exemplo trata da área (probabilidade) entre duas abscissas positivas. Na Figura 1.4 ilustra-se a área (probabilidade) desejada. Note que esta área pode ser obtida pela diferença entre as áreas das Figuras 1.5 e 1.7, cujos valores são encontrados na Tabela 1 conforme ilustram as Figuras 1.6 e 1.8.

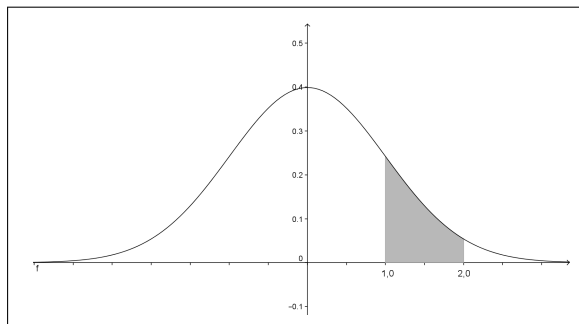
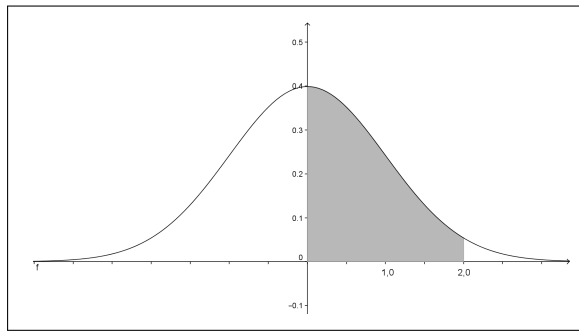
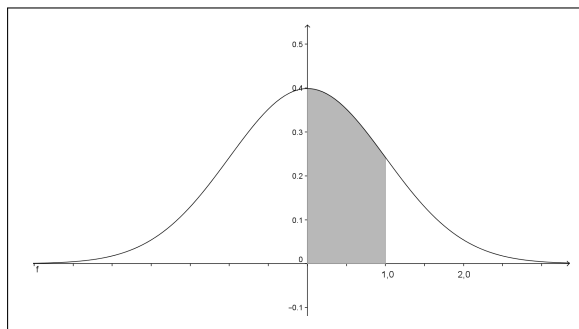


Figura 1.4 – $P(1 \leq Z \leq 2)$ como área

Figura 1.5 – $P(0 \leq Z \leq 2)$ como área

e 1ª. Decimal	0	1	2	3	4
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838

Figura 1.6 – $P(0 \leq Z \leq 2)$ - Uso da tabelaFigura 1.7 – $P(0 \leq Z \leq 1)$ como área

e 1ª. Decimal	0	1	2	3	4
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729

Figura 1.8 – $P(0 \leq Z \leq 1)$ - Uso da tabela

Concluimos, então, que

$$P(1 \leq Z \leq 2) = P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1) = \text{tab}(2,0) - \text{tab}(1,0) = 0,4772 - 0,3413 = 0,1359$$

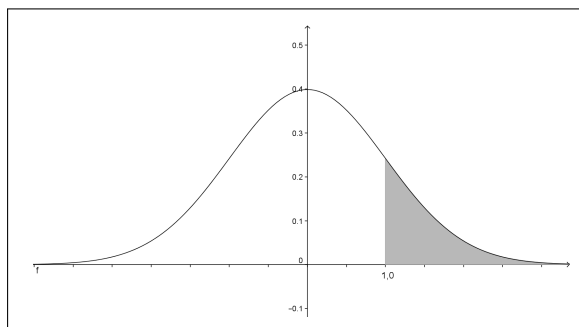
◆◆

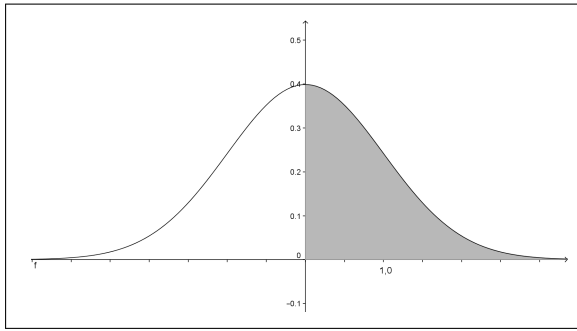
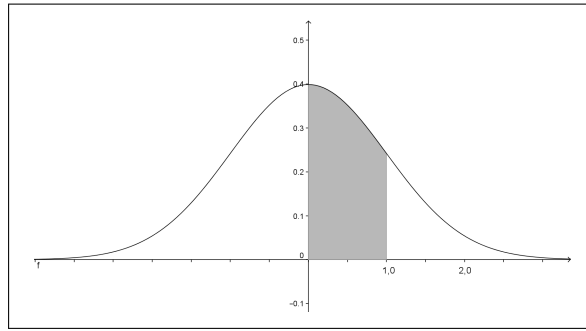
Exemplo 1.4

A partir da Tabela 1 do Apêndice A calcule $P(Z \geq 1)$.

Solução:

Note que este exemplo trata da área (probabilidade) à direita (\geq) de uma abscissa positiva. Na Figura 1.9 ilustra-se a área (probabilidade) desejada. Note que esta área pode ser obtida pela diferença entre as áreas das Figuras 1.10 e 1.11. A primeira área corresponde à probabilidade $P(Z \geq 0)$ e é igual a 0,5, pois a média $\mu = 0$ é o eixo de simetria e a área total é 1. Logo, $P(Z \geq 0) = P(Z \leq 0) = 0,5$. A segunda área vem direto da Tabela 1.

Figura 1.9 – $P(Z \geq 1)$

Figura 1.10 – $P(Z \leq 0)$ Figura 1.11 – $P(0 \leq Z \leq 1)$

Concluimos, então, que

$$P(Z \geq 1) = P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) = 0,5 - \text{tab}(1, 0) = 0,5 - 0,3413 = 0,1587$$

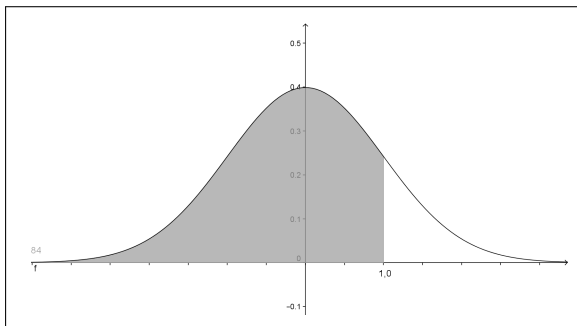
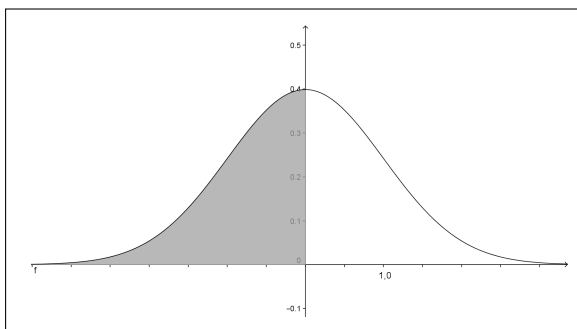
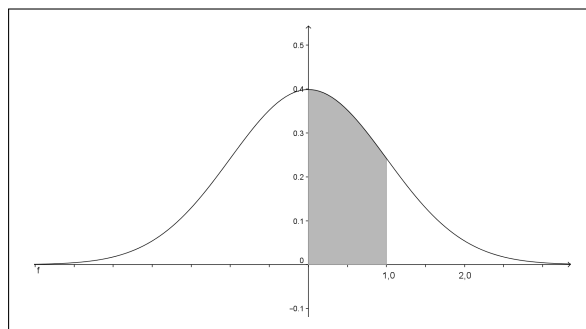


Exemplo 1.5

A partir da Tabela 1 do Apêndice A calcule $P(Z \leq 1)$.

Solução:

Note que este exemplo trata da área (probabilidade) à esquerda (\leq) de uma abscissa positiva. Na Figura 1.12 ilustra-se a área (probabilidade) desejada. Note que esta área pode ser obtida pela soma das áreas das Figuras 1.13 e 1.14. A primeira área corresponde à probabilidade $P(Z \leq 0)$ e é igual a 0,5, conforme visto no exemplo anterior.

Figura 1.12 – $P(Z \leq 1)$ Figura 1.13 – $P(Z \leq 0)$ Figura 1.14 – $P(0 \leq Z \leq 1)$

Concluimos, então, que

$$P(Z \leq 1) = P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) = 0,5 + \text{tab}(1, 0) = 0,5 + 0,3413 = 0,8413$$



Exemplo 1.6

A partir da Tabela 1 do Apêndice A calcule $P(Z \leq -0,5)$

Solução:

Note que este exemplo trata da área (probabilidade) à esquerda (\leq) de uma abscissa negativa e, agora, começamos a trabalhar com abscissas negativas. Na Figura 1.15 ilustra-se a área (probabilidade) desejada. Pela simetria da curva de densidade normal, resulta que essa área é igual à área ilustrada na Figura 1.16.

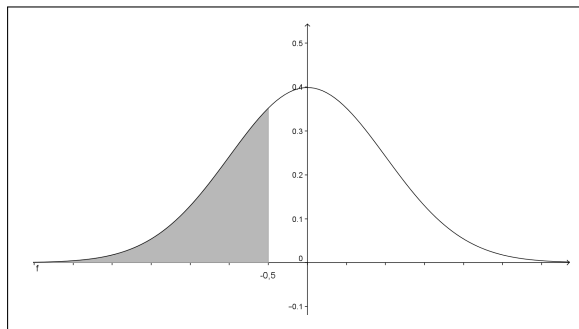


Figura 1.15 – $P(Z \leq -0,5)$

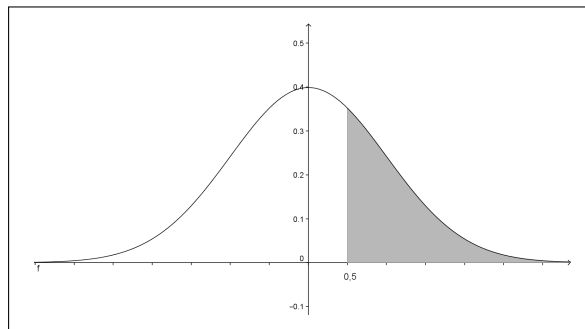


Figura 1.16 – $P(Z \geq 0,5)$

Concluimos, então, que

$$P(Z \leq -0,5) = P(Z \geq 0,5) = 0,5 - P(0 \leq Z < 0,5) = 0,5 - \text{tab}(0,5) = 0,5 - 0,1915 = 0,3085$$

**Exemplo 1.7**

A partir da Tabela 1 do Apêndice A calcule $P(Z \geq -0,5)$

Solução:

Note que este exemplo trata da área (probabilidade) à direita (\geq) de uma abscissa negativa. Na Figura 1.17 ilustra-se a área (probabilidade) desejada. Essa área é a soma das áreas representadas nas Figuras 1.18 e 1.19. Essa última área, por sua vez, é igual à área representada na Figura 1.20, pela simetria da curva de densidade.

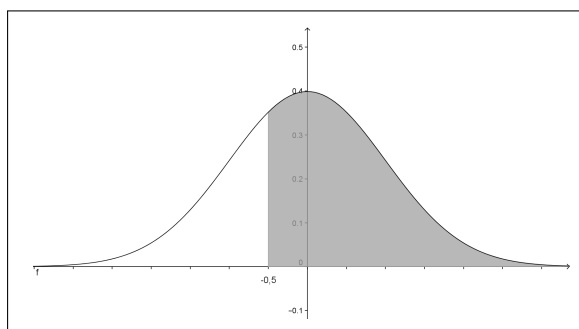


Figura 1.17 – $P(Z \geq -0,5)$

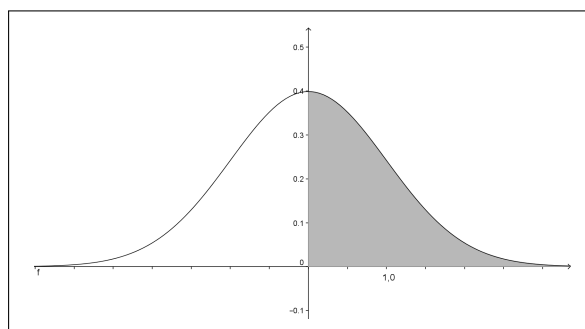
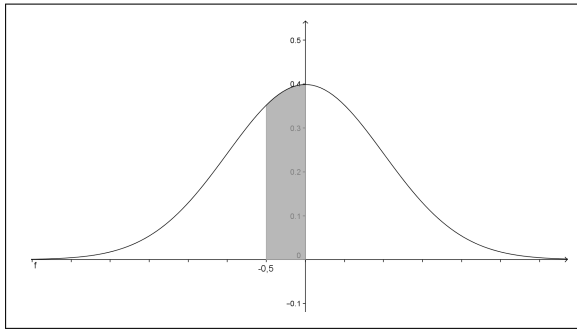
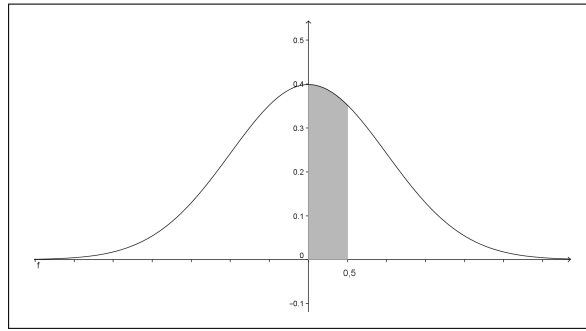


Figura 1.18 – $P(Z \geq 0)$

Figura 1.19 – $P(-0,5 \leq Z \leq 0)$ Figura 1.20 – $P(0 \leq Z \leq 0,5)$

Concluimos, então, que

$$\begin{aligned} P(Z \geq -0,5) &= P(-0,5 \leq Z \leq 0) + P(Z \geq 0) \\ &= P(0 \leq Z < 0,5) + 0,5 = \text{tab}(0,5) + 0,5 = 0,1915 + 0,5 = 0,6915 \end{aligned}$$

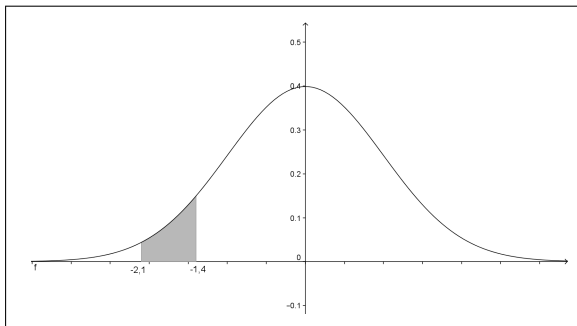
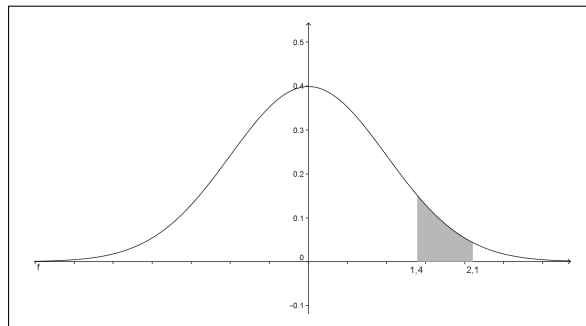


Exemplo 1.8

A partir da Tabela 1 do Apêndice A calcule $P(-2,1 \leq Z \leq -1,4)$

Solução:

Note que este exemplo trata da área (probabilidade) entre duas abscissas negativas. Na Figura 1.21 ilustra-se a área (probabilidade) desejada. Por simetria, essa área é igual à área ilustrada na Figura 1.22, já analisada no Exemplo 1.3.

Figura 1.21 – $P(-2,1 \leq Z \leq -1,4)$ Figura 1.22 – $P(1,4 \leq Z \leq 2,1)$

Concluimos, então, que

$$\begin{aligned} P(-2,1 \leq Z \leq -1,4) &= P(1,4 \leq Z \leq 2,1) = P(0 \leq Z \leq 2,1) - P(0 \leq Z \leq 1,4) \\ &= \text{tab}(2,1) - \text{tab}(1,4) = 0,4821 - 0,4192 = 0,0629 \end{aligned}$$



Exemplo 1.9

A partir da Tabela 1 do Apêndice A calcule $P(-2,1 \leq Z \leq 1,4)$

Solução:

Note que este exemplo trata da área (probabilidade) entre duas abscissas, uma negativa e outra positiva. Na Figura 1.23 ilustra-se a área (probabilidade) desejada. Essa área é a soma das áreas representadas nas Figuras 1.24 e 1.25. Por simetria, essa última área é igual à

área sombreada na Figura 1.26, o que nos leva à conclusão de que

$$\begin{aligned} P(-2,1 \leq Z \leq 1,4) &= P(0 \leq Z \leq 1,4) + P(-2,1 \leq Z \leq 0) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1,4) + P(0 \leq Z \leq 2,1) = \text{tab}(1,4) + \text{tab}(2,1) \\ &= 0,4821 + 0,4192 = 0,9013 \end{aligned}$$

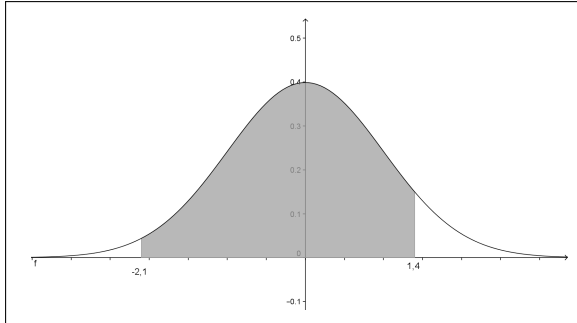


Figura 1.23 – $P(-2,1 \leq Z \leq 1,4)$

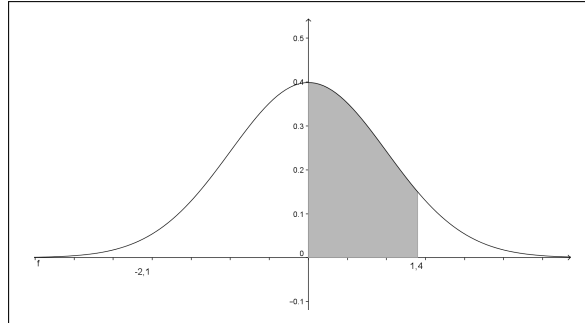


Figura 1.24 – $P(0 \leq Z \leq 1,4)$

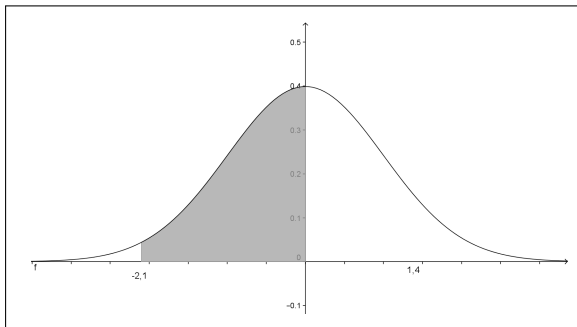


Figura 1.25 – $P(-2,1 \leq Z \leq 0)$

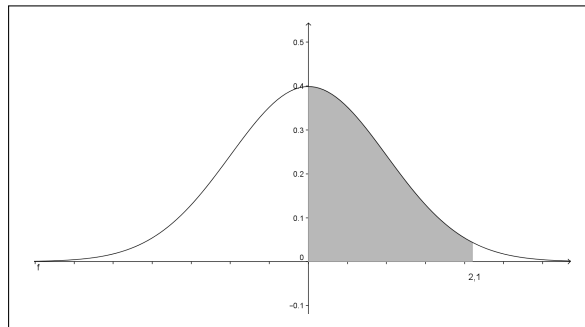


Figura 1.26 – $P(0 \leq Z \leq 2,1)$



1.2.2 Tabela 2: $\Phi(z) = P(Z \leq z)$

Muitos livros trabalham com a tabela da função de distribuição da normal padrão, que, como vimos, representamos pela letra grega Φ maiúscula, Φ :

$$\Phi(z) = P(Z \leq z).$$

A Tabela 2 do Apêndice A apresenta os valores de $\Phi(z)$ para $z \geq 0$. Vamos usar essa tabela para refazer os exemplos vistos anteriormente, que serão apresentados em uma ordem diferente, mais didaticamente apropriada para esse contexto.

Exemplo 1.10

A partir da Tabela 2 do Apêndice A calcule $P(Z \leq 1)$

Solução:

Essa probabilidade resulta diretamente da definição de distribuição acumulada:

$$P(Z \leq 1) = \Phi(1,0) = 0,8413$$



Exemplo 1.11

A partir da Tabela 2 do Apêndice A calcule $P(Z \geq 1)$

Solução:

Pela lei do complementar, temos que

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1)$$

Mas, como Z é uma variável aleatória contínua, sabemos que $P(Z = z) = 0$. Logo

$$P(Z < z) = P(Z \leq z)$$

Logo,

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - \Phi(1, 0) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

**Exemplo 1.12**

A partir da Tabela 2 do Apêndice A calcule $P(Z \leq -0,5)$

Solução:

Vimos, no Exemplo 1.6, que

$$P(Z \leq -0,5) = P(Z \geq 0,5)$$

Logo,

$$P(Z \leq -0,5) = P(Z \geq 0,5) = 1 - P(Z < 0,5) = 1 - P(Z \leq 0,5) = 1 - \Phi(0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$$

**Exemplo 1.13**

A partir da Tabela 2 do Apêndice A calcule $P(Z \geq -0,5)$

Solução:

Veja as Figuras 1.27 e 1.28.

$$\begin{aligned} P(Z \geq -0,5) &= 1 - P(Z < -0,5) = 1 - P(Z > 0,5) = 1 - [1 - P(Z \leq 0,5)] \\ &= P(Z \leq 0,5) = \Phi(0,5) = 0,6915 \end{aligned}$$

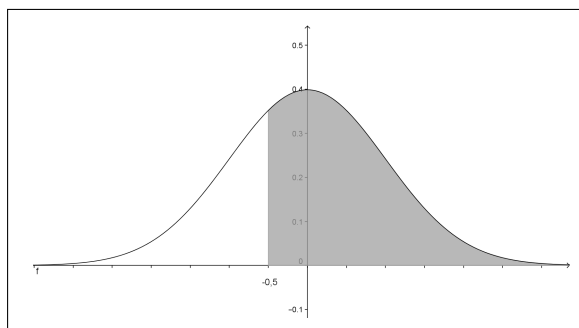


Figura 1.27 – $P(Z \geq -0,5)$

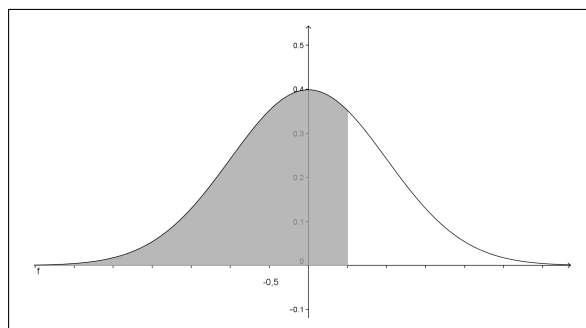


Figura 1.28 – $P(Z \leq 0,5)$

**Exemplo 1.14**

A partir da Tabela 2 do Apêndice A calcule $P(0 \leq Z \leq 1,22)$

Solução:

Veja as Figuras 1.2, 1.29 e 1.30.

$$P(0 \leq Z \leq 1,22) = P(Z \leq 1,22) - P(Z \leq 0) = \Phi(1,22) - 0,5 = 0,8888 - 0,5 = 0,3888$$

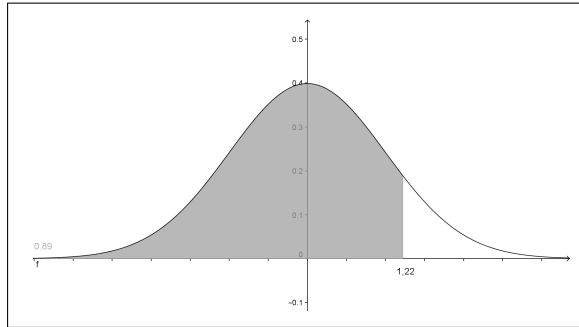


Figura 1.29 – $P(Z \leq 1,22)$

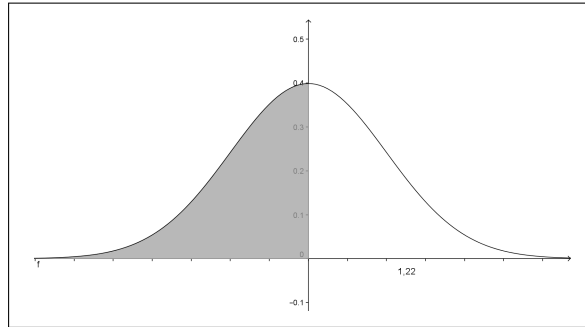


Figura 1.30 – $P(Z \leq 0)$

**Exemplo 1.15**

A partir da Tabela 2 do Apêndice A calcule $P(1 \leq Z \leq 2)$

Solução:

Veja as Figuras 1.4, 1.31 e 1.32.

$$\begin{aligned} P(1 \leq Z \leq 2) &= P(Z \leq 2) - P(Z < 1) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq 1) = \Phi(2,0) - \Phi(1,0) \\ &= 0,9772 - 0,8413 = 0,1359 \end{aligned}$$

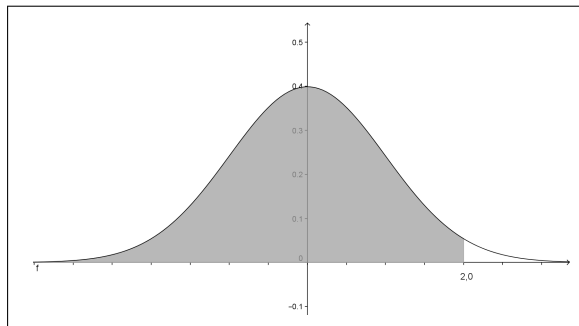


Figura 1.31 – $P(Z \geq -0,5)$

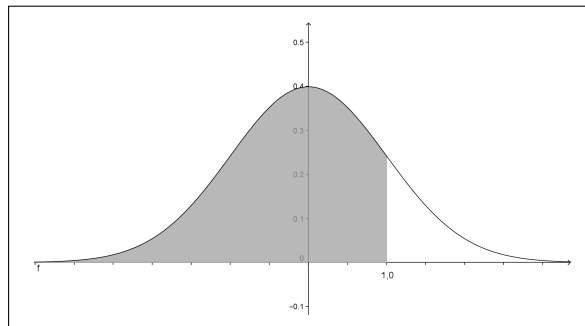


Figura 1.32 – $P(Z \leq 0,5)$

**Exemplo 1.16**

A partir da Tabela 2 do Apêndice A calcule $P(-2,1 \leq Z \leq -1,4)$

Solução:

Usando os resultados do Exemplo 1.15, temos que

$$P(-2,1 \leq Z \leq -1,4) = P(1,4 \leq Z \leq 2,1) = \Phi(2,1) - \Phi(1,4) = 0,9821 - 0,9192 = 0,0629$$

**Exemplo 1.17**

A partir da Tabela 2 do Apêndice A calcule $P(-2,1 \leq Z \leq 1,4)$

Solução:

Usando os resultados do Exemplo 1.12, temos que

$$\begin{aligned} P(-2, 1 \leq Z \leq 1, 4) &= \Phi(1, 4) - P(Z < -2, 1) = \Phi(1, 4) - \Phi(-2, 1) \\ &= \Phi(1, 4) - [1 - \Phi(2, 1)] = 0,9192 - [1 - 0,9821] = 0,9013 \end{aligned}$$



1.3 Distribuição Normal

Seja $Z \sim N(0; 1)$ e vamos definir uma nova variável aleatória por

$$X = g(Z) = \mu + \sigma Z,$$

em que $\sigma > 0$. Usando a Proposição ?? temos que

$$f_X(x) = f_Z\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \times \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \times \frac{1}{\sigma}$$

ou ainda:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

e essa é a densidade normal $N(\mu; \sigma^2)$.

Definição 1.18 Distribuição Normal

Diz-se que, uma variável aleatória contínua X , definida para todos os valores em \mathbb{R} , tem **distribuição normal** com parâmetros μ e σ^2 , onde $-\infty < \mu < \infty$ e $0 < \sigma^2 < \infty$, se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad -\infty < x < \infty.$$

Usaremos a seguinte notação para indicar que uma v.a. X tem distribuição normal com parâmetros μ e σ^2 : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

1.3.1 Características da Função Densidade Normal

1. Simétrica em torno de μ ; note que $f(\mu - x) = f(\mu + x)$.
2. Assíntotas: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$; esse resultado segue diretamente dos resultados sobre a função exponencial dados em (??) e (??) e do fato de que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.
3. Ponto de máximo

Para calcular a primeira e segunda derivadas de $f(x)$, devemos lembrar que $(e^x)' = e^x$ e, pela regra da cadeia, $(e^{g(x)})' = e^{g(x)} g'(x)$. Aplicando esses resultados à densidade normal, obtemos que:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \left[-\frac{1}{\sigma^2} 2(x - \mu)\right] = -f(x) \left(\frac{x - \mu}{\sigma^2}\right) \quad (1.6)$$

Derivando novamente, obtemos:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -f'(x) \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2} \right) - f(x) \frac{1}{\sigma^2} = - \left[-f(x) \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2} \right) \right] \left[\frac{x-\mu}{\sigma^2} \right] - f(x) \frac{1}{\sigma^2} = \\ &= f(x) \left[\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4} \right] - f(x) \frac{1}{\sigma^2} = f(x) \left[\frac{(x-\mu)^2 - \sigma^2}{\sigma^4} \right] \end{aligned} \quad (1.7)$$

Analisando a equação (1.6) e lembrando que $f(x) > 0$, pode-se ver que:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mu$$

e assim, $x = \mu$ é um ponto crítico. Como $f'(x) > 0$ para $x < \mu$ e $f'(x) < 0$ para $x > \mu$, então f é crescente à esquerda de μ e decrescente à direita de μ . Segue, então, que $x = \mu$ é um ponto de máximo e nesse ponto

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \quad (1.8)$$

4. Pontos de inflexão

Analisando a segunda derivada dada por (1.7), tem-se que:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x-\mu)^2 = \sigma^2 \Leftrightarrow |x-\mu| = \sigma \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mu + \sigma \\ x = \mu - \sigma \end{cases} \quad (1.9)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} f''(x) &> 0 \Leftrightarrow (x-\mu)^2 > \sigma^2 \Leftrightarrow |x-\mu| > \sigma \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - \mu > \sigma \quad \text{ou} \quad \mu - x > \sigma \\ &\Leftrightarrow x > \mu + \sigma \quad \text{ou} \quad x < \mu - \sigma \end{aligned} \quad (1.10)$$

e

$$\begin{aligned} f''(x) &< 0 \Leftrightarrow (x-\mu)^2 < \sigma^2 \Leftrightarrow |x-\mu| < \sigma \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - \mu < \sigma \\ \mu - x < \sigma \end{cases} \Leftrightarrow \mu - \sigma < x < \mu + \sigma \end{aligned} \quad (1.11)$$

Logo, $f(x)$ é côncava para cima se $x > \mu + \sigma$ ou $x < \mu - \sigma$ e é côncava para baixo quando $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$.

Na Figura 1.33 é apresentado o gráfico da densidade normal no caso em que $\mu = 3$ e $\sigma^2 = 1$. Aí a linha pontilhada central representa o eixo de simetria e as linhas pontilhadas laterais passam pelos pontos de inflexão 3 ± 1 .

1.3.2 Parâmetros Distribuição Normal

Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, então $X = \mu + \sigma Z$, em que $Z \sim N(0; 1)$. Das propriedades de média e variância, resulta

$$E(X) = \mu + \sigma E(Z) = \mu + 0 \Rightarrow E(X) = \mu \quad (1.12)$$

e

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 \text{Var}(Z) = \sigma^2 \times 1 \Rightarrow \text{Var}(X) = \sigma^2 \quad (1.13)$$

Resumindo:

$$X \sim N(\mu; \sigma^2) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \mu \\ \text{Var}(X) = \sigma^2 \end{cases} \quad (1.14)$$

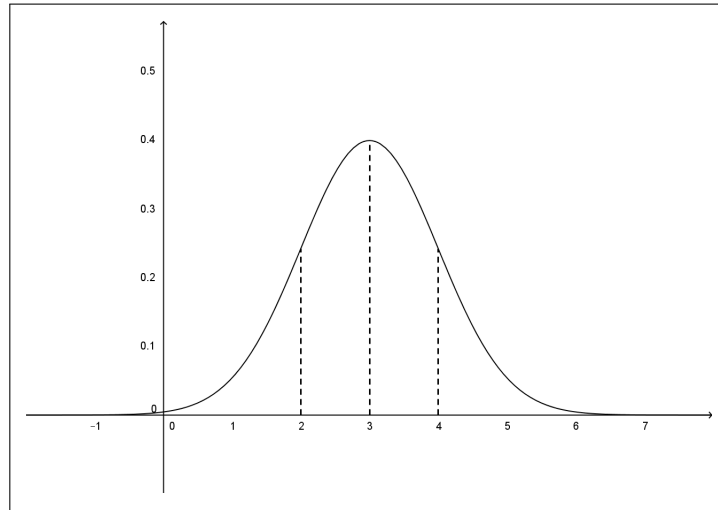


Figura 1.33 – Densidade normal com média $\mu = 3$ e variância $\sigma^2 = 1$

Os parâmetros da densidade normal são, então, a média e a variância, que são medidas de posição e dispersão, respectivamente. Valores diferentes de μ deslocam o eixo de simetria da curva e valores diferentes de σ^2 mudam a dispersão da curva. Quanto maior σ^2 , mais “espalhada” é a curva, mas o ponto de máximo, dado pela equação (1.8), é inversamente proporcional a σ^2 . Logo, quanto maior σ^2 , mais “espalhada” e mais “achatada” é a curva. O importante a observar é que a forma é sempre a de um “sino”. Na Figura 1.34 temos exemplos de densidades normais com a mesma variância, mas com médias diferentes. O efeito é o “delocamento” do eixo de simetria da densidade. Já na Figura 1.35, temos duas densidades com a mesma média, mas variâncias diferentes. O efeito é que a densidade com maior variância é mais dispersa e achatada.

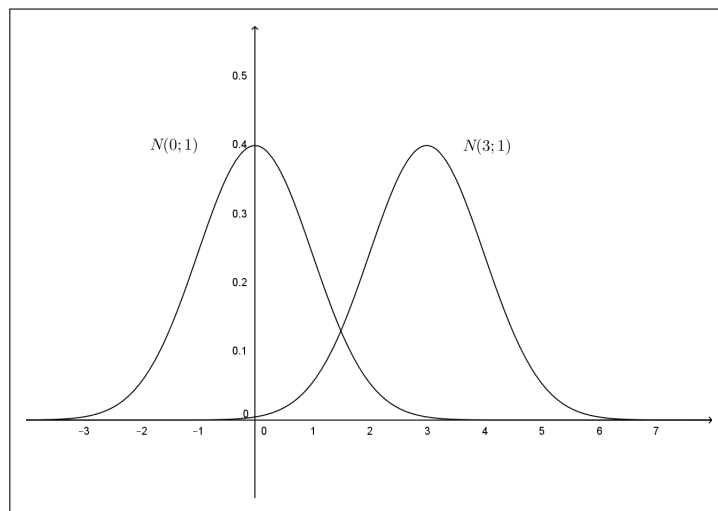


Figura 1.34 – Densidades normais com mesma variância e médias diferentes

1.3.3 Função de Distribuição

A função de distribuição da densidade normal é dada pela integral

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dt \quad (1.15)$$

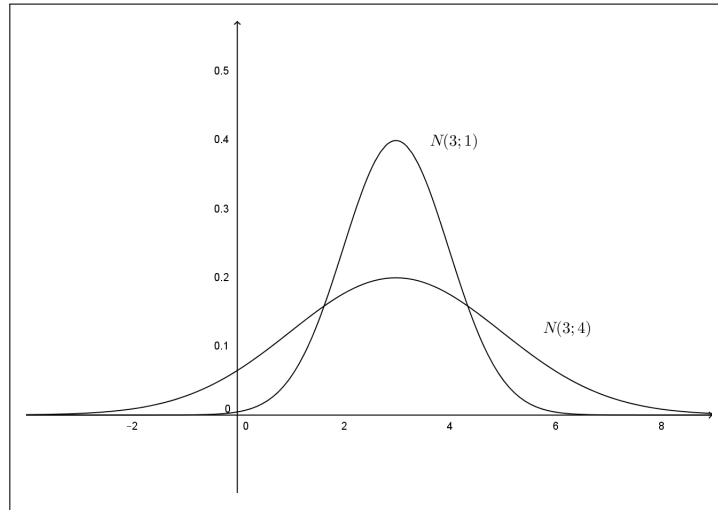


Figura 1.35 – Densidades normais com mesma média e variâncias diferentes

Na Figura 1.36 apresentamos função de distribuição associada às densidades $N(0;1)$, $N(3;1)$ e $N(3;4)$. Note que, pela simetria da densidade em torno da média μ , sempre teremos $F(\mu) = 0,5$. Esse fato é ilustrado com as linhas pontilhadas na figura.

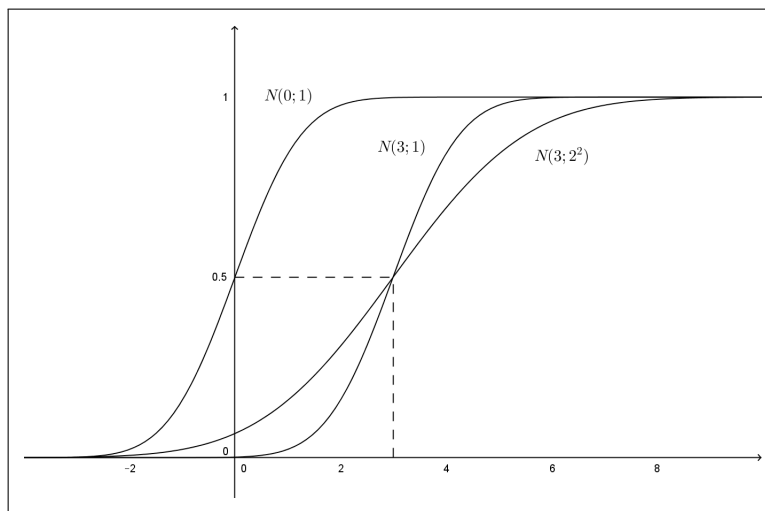


Figura 1.36 – Função de distribuição da $N(0;1)$, $N(3;1)$ e $N(3;4)$

1.4 Cálculo de Probabilidades da Normal

Já foi visto que se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $X = \mu + \sigma Z$, onde $Z \sim N(0,1)$. Vamos ver como utilizar esse resultado para calcular probabilidades da normal. Temos que

$$P(X \leq x) = P(\mu + \sigma Z \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (1.16)$$

Nas Figuras 1.37 e 1.38 ilustra-se esse fato, utilizando as densidades $Z \sim N(0;1)$ e $X \sim N(3;4)$. No gráfico à esquerda, a área sombreada representa $P(X \leq 5)$ e no gráfico à direita, a área sombreada representa a probabilidade equivalente:

$$P(X \leq 5) = P\left(\frac{X - 3}{2} \leq \frac{5 - 3}{2}\right) = P(Z \leq 1)$$

O que o resultado diz é que essas áreas (probabilidades) são iguais.

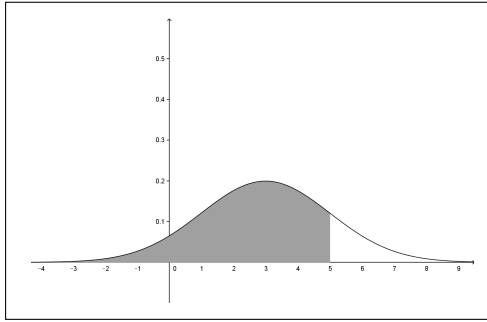


Figura 1.37 – $X \sim N(3; 3^2)$ – $P(X \leq 5)$

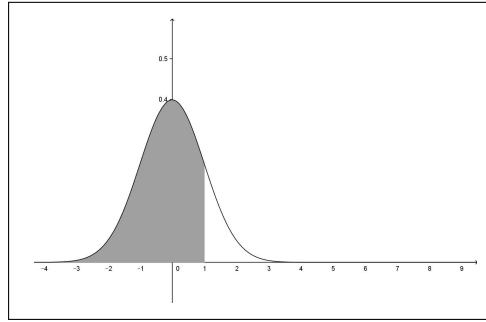


Figura 1.38 – $Z \sim N(0; 1)$ – $P(Z \leq 1, 0)$

Isso significa que probabilidades de uma $N(\mu; \sigma^2)$ podem ser calculadas a partir da operação de padronização.

! Padronização da distribuição normal $N(\mu; \sigma^2)$

Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, então

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (1.17)$$

tem distribuição $N(0; 1)$.

É interessante lembrar que a transformação dada na equação (1.4) corresponde ao cálculo do escore padronizado associado à abscissa x . Assim, cálculos de probabilidades de v.a. normais sempre envolverão o cálculo do escore padronizado da(s) abscissa(s) de interesse.

Exemplo 1.19

Seja $X \sim N(3; 9)$, calcule $P(-1 \leq X \leq 4)$

Solução:

$$\begin{aligned} P(-1 \leq X \leq 4) &= P\left(\frac{-1-3}{\sqrt{9}} \leq \frac{X-3}{\sqrt{9}} \leq \frac{4-3}{\sqrt{9}}\right) \\ &= P(-1,33 \leq Z \leq 0,33) \\ &= \Phi(0,33) - \Phi(-1,33) = 0,62930 - 0,09176 \\ &= \text{tab}(0,33) + \text{tab}(1,33) = 0,12930 + 0,40824 \\ &= 0,53754 \end{aligned}$$



Exemplo 1.20

Seja $X \sim N(2; 5)$, calcule $P(1 \leq X \leq 7)$

Solução:

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 7) &= P\left(\frac{1-2}{\sqrt{5}} \leq \frac{X-2}{\sqrt{5}} \leq \frac{7-2}{\sqrt{5}}\right) \\ &= P(-0,45 \leq Z \leq 2,24) \\ &= \Phi(2,24) - \Phi(-0,45) = \Phi(2,24) - [1 - \Phi(0,45)] = 0,9875 - [1 - 0,6700] \\ &= \text{tab}(2,24) + \text{tab}(0,45) = 0,4875 + 0,1700 \\ &= 0,6575 \end{aligned}$$

**Exemplo 1.21**

Seja $X \sim N(5, 1)$, calcule $P(X > 7)$

Solução:

$$\begin{aligned} P(X > 7) &= P\left(\frac{X-5}{1} > \frac{7-5}{1}\right) \\ &= P(Z > 2) \\ &= 1,0 - \Phi(2, 0) = 1,0 - 0,97725 \\ &= 0,5 - \text{tab}(2, 0) = 0,5 - 0,47725 \\ &= 0,02275 \end{aligned}$$

**Exemplo 1.22 A regra 68-95-99,7**

Seja $X \sim N(\mu; \sigma^2)$. Calcule $P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma)$, para $k = 1, 2, 3$.

Solução:

Note que essa probabilidade corresponde à probabilidade de X estar a uma distância de k desvios-padrão da média.

$$\begin{aligned} P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) &= P\left(\frac{\mu - k\sigma - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + k\sigma - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P(-k \leq Z \leq k) \end{aligned}$$

Note que chegamos a uma probabilidade que não depende de μ ou σ , ou seja, esse resultado vale qualquer que seja a distribuição normal.

- $k = 1$

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 2 \times \text{tab}(1, 0) = 2 \times 0,3414 = 0,6828$$

- $k = 2$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(-2 \leq Z \leq 2) = 2 \times \text{tab}(2, 0) = 2 \times 0,4772 = 0,9544$$

- $k = 3$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = P(-3 \leq Z \leq 3) = 2 \times \text{tab}(3, 0) = 2 \times 0,4987 = 0,9974$$

Essas probabilidades nos dizem que, para *qualquer* distribuição normal, 68,28% dos valores estão a um desvio-padrão da média, 95,44% estão a dois desvios-padrão e 99,73% dos valores estão a três desvios-padrão da média. Veja a Figura 1.39 para uma ilustração desses resultados.

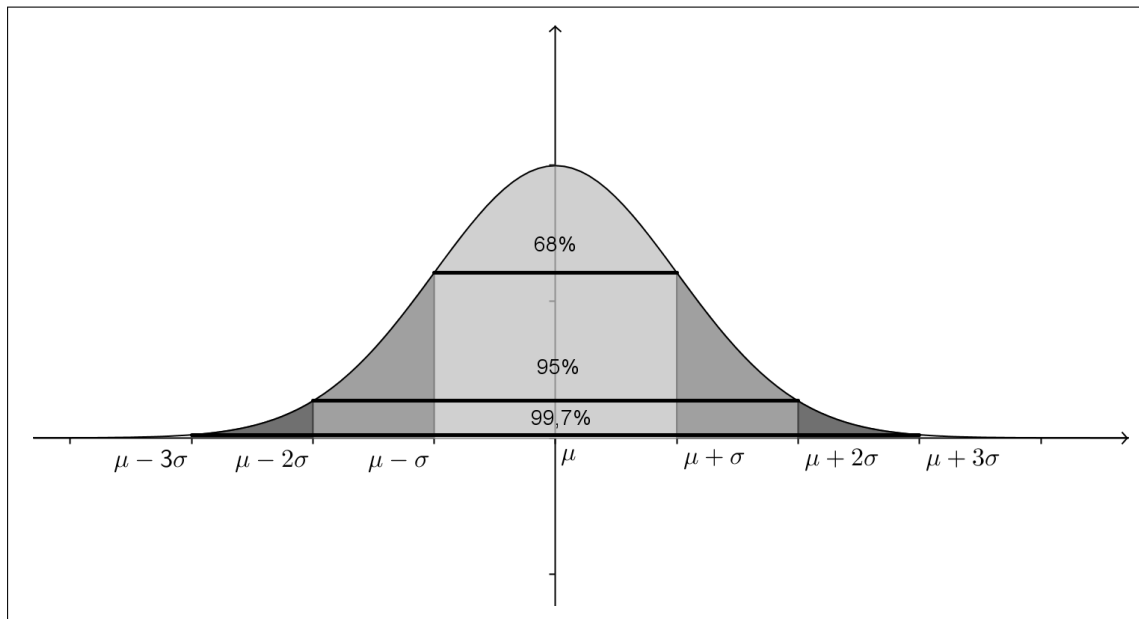


Figura 1.39 – Ilustração da regra 68-95-99,7



1.5 Encontrando a Abscissa da Normal para uma Probabilidade Específica

Nos exemplos vistos até o momento, consideramos situações em que tínhamos uma abscissa de uma distribuição normal e queríamos a probabilidade associada a essa abscissa. Agora, vamos lidar com a situação inversa: dada uma probabilidade, qual é a abscissa correspondente? Eis algumas situações que envolvem esse tipo de problema:

- Em uma turma de Estatística, os 10% melhores alunos receberão um livro de presente.
- Em uma comunidade, as famílias com as 15% piores rendas irão receber um auxílio da prefeitura.

Como antes, vamos apresentar vários exemplos que ilustram essa situação.

Exemplo 1.23

Seja $Z \sim N(0; 1)$, determine o valor de k tal que $P(Z \leq k) = 0,90$.

Solução:

Vamos “traduzir” esse problema: queremos encontrar a abscissa k da normal padrão com 0,90 de área (probabilidade) à esquerda dela. Como 0,9 é a área à esquerda de k , resulta que k tem que ser maior que zero, isto é, temos que ter $k > 0$. Veja a Figura 1.40: à esquerda de k temos área 0,90 e à esquerda de 0 temos área 0,5. Logo, entre 0 e k temos que ter área 0,40.

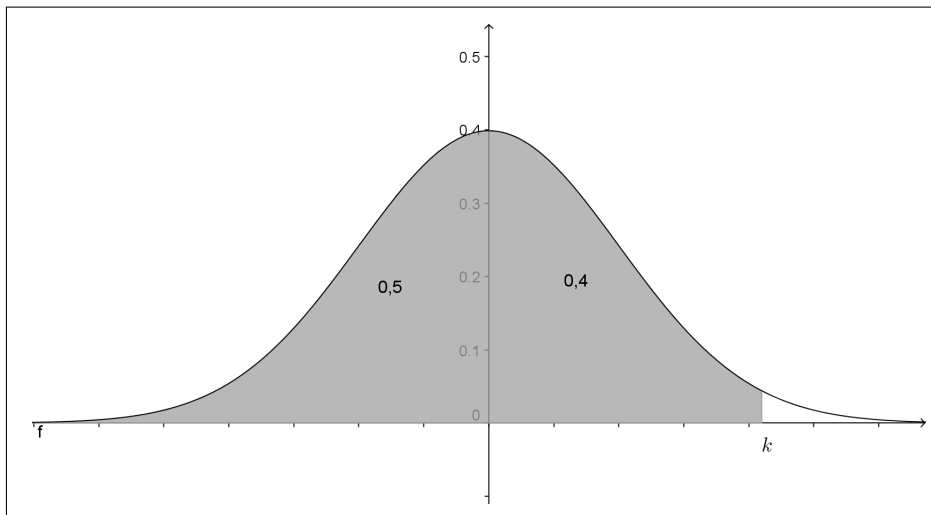


Figura 1.40 – Determinação de k tal que $P(Z \leq k) = 0,90$

Escrevendo essas observações em termos de probabilidade, temos:

$$\begin{aligned}
 P(Z \leq k) &= 0,90 \Leftrightarrow \\
 P(Z \leq 0) + P(0 < Z \leq k) &= 0,90 \Leftrightarrow \\
 0,5 + P(0 < Z \leq k) &= 0,90 \Leftrightarrow \\
 P(0 < Z \leq k) &= 0,40 \Leftrightarrow \\
 \text{tab}(k) &= 0,40
 \end{aligned}$$

Esta última igualdade nos diz que k é a abscissa correspondente ao valor 0,40 na Tabela 1. Para identificar k , temos que buscar no corpo dessa tabela, o valor mais próximo de 0,40. Na linha correspondente ao valor 1,2 encontramos as entradas 0,39973 e 0,40147. Como a primeira está mais próxima de 0,40, olhamos qual é a abscissa correspondente: a linha é 1,2 e a coluna é 8, o que nos dá a abscissa de 1,28, ou seja, $k = 1,28$ e $P(Z \leq 1,28) = 0,90$, completando a solução.



Agora vamos olhar o mesmo exemplo, mas para uma distribuição normal qualquer.

Exemplo 1.24

Seja $X \sim N(3; 4)$, determine o valor de k tal que $P(X \leq k) = 0,90$.

Solução:

Com a probabilidade à esquerda de k é maior que 0,5, resulta que k tem de ser maior que a média. O primeiro passo na solução é escrever a probabilidade dada em termos da normal

padrão.

$$\begin{aligned}
 P(X \leq k) &= 0,90 \Leftrightarrow \\
 P\left(\frac{X-3}{2} \leq \frac{k-3}{2}\right) &= 0,90 \Leftrightarrow \\
 P\left(Z \leq \frac{k-3}{2}\right) &= 0,90 \Leftrightarrow \\
 P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-3}{2}\right) &= 0,90 \Leftrightarrow \\
 0,5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-3}{2}\right) &= 0,90 \Leftrightarrow \\
 P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-3}{2}\right) &= 0,40 \Leftrightarrow \\
 \text{tab}\left(\frac{k-3}{2}\right) &= 0,40 \Leftrightarrow \\
 \frac{k-3}{2} &= 1,28 \Leftrightarrow k = 5,56
 \end{aligned}$$



Exemplo 1.25

Seja $X \sim N(3; 4)$, determine o valor de k tal que $P(X \leq k) = 0,05$.

Solução:

À esquerda de k temos 5% da área total; logo, k tem que estar no lado esquerdo, ou seja, temos de ter $k < 3$ e a abscissa padronizada correspondente tem de ser negativa. Vamos escrever a probabilidade dada em termos da normal padronizada:

$$\begin{aligned}
 P(X \leq k) &= 0,05 \Leftrightarrow \\
 P\left(\frac{X-3}{2} \leq \frac{k-3}{2}\right) &= 0,05 \Leftrightarrow \\
 P\left(Z \leq \frac{k-3}{2}\right) &= 0,05
 \end{aligned}$$

Como a área (probabilidade) à esquerda de $\frac{k-3}{2}$ é menor que 0,5, isso significa que $\frac{k-3}{2}$ tem de ser negativo. Veja a Figura 1.41. Para nos adequarmos à tabela disponível, temos de rabalhar com áreas na metade direita da curva de densidade, ou seja, temos qde usar a simetria da curva. Veja a Figura 1.42 e note que a abscissa simétrica a $\frac{k-3}{2}$ é $-\frac{k-3}{2} = \frac{3-k}{2}$.

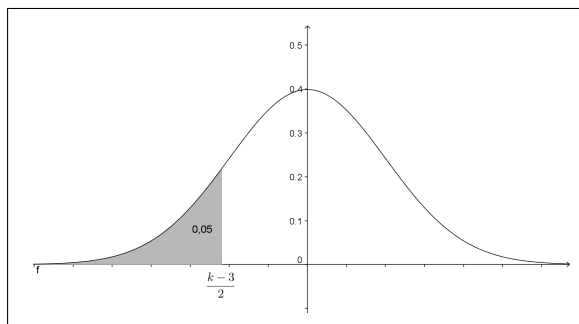


Figura 1.41 – $P(Z \leq \frac{k-3}{2}) = 0,05$

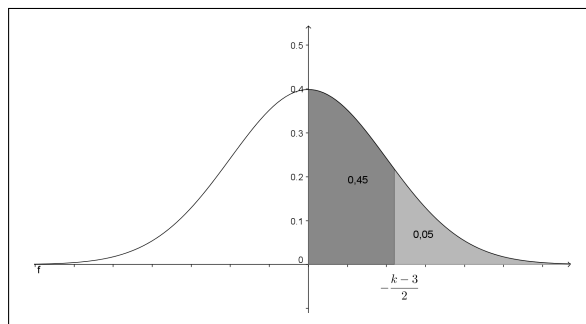


Figura 1.42 – $P(Z \geq \frac{k-3}{2}) = 0,05$

1.5. ENCONTRANDO A ABSCISSA DA NORMAL PARA UMA PROBABILIDADE ESPECÍFICA21

Temos, então, as seguintes probabilidades equivalentes:

$$P\left(Z \leq \frac{k-3}{2}\right) = 0,05 \Leftrightarrow$$

$$P\left(Z \geq -\frac{k-3}{2}\right) = 0,05 \Leftrightarrow$$

$$P\left(0 \leq Z \leq -\frac{k-3}{2}\right) = 0,45 \Leftrightarrow$$

$$\text{tab}\left(-\frac{k-3}{2}\right) = 0,45$$

O valor mais próximo de 0,45 no corpo da Tabela 1 é 0,4495 que corresponde à abscissa 1,64, e isso nos dá que

$$-\frac{k-3}{2} = 1,64 \Rightarrow k = -0,28$$



Exemplo 1.26

Seja $X \sim N(3; 4)$, determine o valor de k tal que $P(|X - 3| \leq k) = 0,95$.

Solução:

Vamos relembrar as propriedades da função módulo. Para isso, veja a Figura 1.43. As duas retas que definem a função $f(x) = |x|$ são $y = x$ e $y = -x$. Os segmentos traçados no gráfico mostram que $|x| = k \Leftrightarrow x = k$ ou $x = -k$. Os valores de y abaixo do segmento horizontal correspondem a valores de $y = |x| \leq k$ e esses valores de y estão associados a valores x tais que $-k \leq x \leq k$. De forma análoga, valores de y acima do segmento horizontal correspondem a valores de $y = |x| > k$ e esses valores de y estão associados a valores x tais que $x > k$ ou $x < -k$. Resumindo:

$$|x| = k \Leftrightarrow \begin{cases} x=k \\ \text{ou} \\ x=-k \end{cases} \quad (1.18)$$

$$|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k \quad (1.19)$$

$$|x| > k \Leftrightarrow \begin{cases} x>k \\ \text{ou} \\ x<-k \end{cases} \quad (1.20)$$

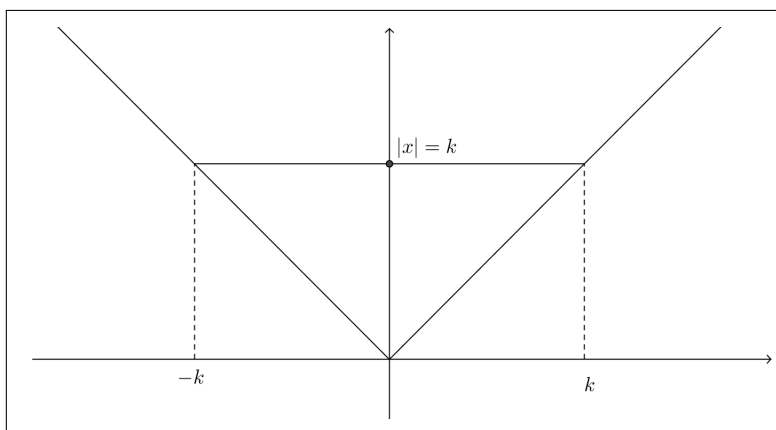


Figura 1.43 – Determinação de k tal que $P(Z \leq k) = 0,90$

Agora, vamos usar esses resultados para resolver o exemplo.

$$\begin{aligned}
 P(|X - 3| \leq k) &= 0,95 \Leftrightarrow \\
 P(-k \leq X - 3 \leq k) &= 0,95 \Leftrightarrow \\
 P(3 - k \leq X \leq k + 3) &= 0,95 \Leftrightarrow \\
 P\left(\frac{3 - k - 3}{2} \leq \frac{X - 3}{2} \leq \frac{k + 3 - 3}{2}\right) &= 0,95 \Leftrightarrow \\
 P\left(-\frac{k}{2} \leq Z \leq \frac{k}{2}\right) &= 0,95
 \end{aligned}$$

Veja a Figura 1.44 para entender que

$$\begin{aligned}
 P\left(-\frac{k}{2} \leq Z \leq \frac{k}{2}\right) &= 0,95 \Leftrightarrow \\
 P\left(-\frac{k}{2} \leq Z \leq 0\right) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{2}\right) &= 0,95 \Leftrightarrow \\
 2 \times P\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{2}\right) &= 0,95 \Leftrightarrow \\
 P\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{2}\right) &= 0,475 \Leftrightarrow \\
 \text{tab}\left(\frac{k}{2}\right) &= 0,475 \Leftrightarrow \\
 \frac{k}{2} &= 1,96 \Leftrightarrow k = 3,92
 \end{aligned}$$

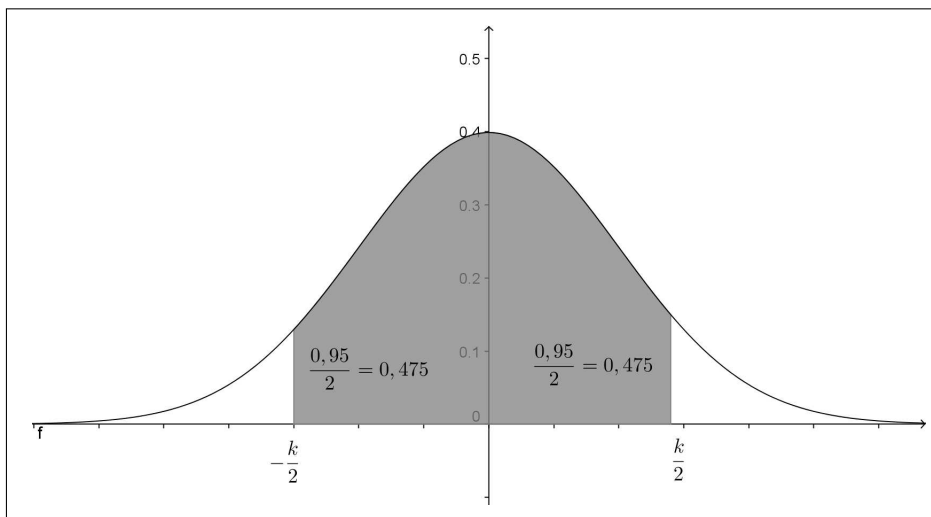


Figura 1.44 – Determinação de k tal que $P(|Z| \leq \frac{k}{2}) = 0,95$



1.6 Exemplos de aplicação da distribuição Normal

A distribuição normal é um modelo probabilístico que se aplica a diversas situações práticas. Vamos finalizar este capítulo com alguns exemplos práticos, mas, na última parte do

curso, você verá mais aplicações no contexto da inferência estatística, em que decisões têm de ser tomadas com base nos resultados obtidos a partir de uma amostra.

Exemplo 1.27 Saldo bancário

O saldo médio dos clientes de um banco é uma v.a. normal com média R\$ 2.000,00 e desvio-padrão R\$ 250,00. Os clientes com os 10% maiores saldos médios recebem tratamento VIP, enquanto aqueles com os 5% menores saldos médios receberão propaganda extra para estimular maior movimentação da conta.

(a) Quanto você precisa de saldo médio para se tornar um cliente VIP?

(b) Abaixo de qual saldo médio o cliente receberá a propaganda extra?

Solução:

Seja $X = \text{"saldo médio"}; \text{ é dado que } X \sim N(2000; 250^2).$

- (a) Temos que determinar o valor de k tal que $P(X \geq k) = 0,10$. Note que isso equivale a calcular o 90º percentil da distribuição. A área à esquerda de k tem de ser 0,90; logo, k tem de ser maior que a média.

$$\begin{aligned}
 P(X \geq k) &= 0,10 \Leftrightarrow \\
 P\left(\frac{X - 2000}{250} \geq \frac{k - 2000}{250}\right) &= 0,10 \Leftrightarrow \\
 P\left(\frac{X - 2000}{250} \leq \frac{k - 2000}{250}\right) &= 0,90 \Leftrightarrow \\
 P\left(Z \leq \frac{k - 2000}{250}\right) &= 0,90 \Leftrightarrow \\
 P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{k - 2000}{250}\right) &= 0,90 \Leftrightarrow \\
 P\left(0 \leq Z \leq \frac{k - 2000}{250}\right) &= 0,90 - 0,50 \Leftrightarrow \\
 \text{tab}\left(\frac{k - 2000}{250}\right) &= 0,40 \Leftrightarrow \\
 \frac{k - 2000}{250} &= 1,28 \Leftrightarrow k = 2320
 \end{aligned}$$

Os clientes com saldo médio maior ou igual a R\$ 2.320,00 terão tratamento VIP.

- (b) Temos de determinar o valor de k tal que $P(X \leq k) = 0,05$. Note que isso equivale a calcular o 5º percentil da distribuição. A área à esquerda de k tem de ser 0,05; logo, k tem de ser menor que a média. Na solução, teremos que usar a simetria da distribuição, invertendo o sinal da abscissa, para lidarmos com área na metade direita da função de densidade.

$$\begin{aligned}
 P(X \leq k) &= 0,05 \Leftrightarrow \\
 P\left(\frac{X - 2000}{250} \leq \frac{k - 2000}{250}\right) &= 0,05 \Leftrightarrow \\
 P\left(Z \geq -\frac{k - 2000}{250}\right) &= 0,05 \Leftrightarrow \\
 P\left(Z \geq \frac{2000 - k}{250}\right) &= 0,05 \Leftrightarrow \\
 \text{tab}\left(\frac{2000 - k}{250}\right) &= 0,45 \Leftrightarrow \\
 \frac{2000 - k}{250} &= 1,64 \Leftrightarrow k = 1590
 \end{aligned}$$

Os clientes com saldo médio inferior a R\$ 1.590,00 receberão a propaganda extra.

Na Figura 1.45 ilustra-se a solução do exercício.

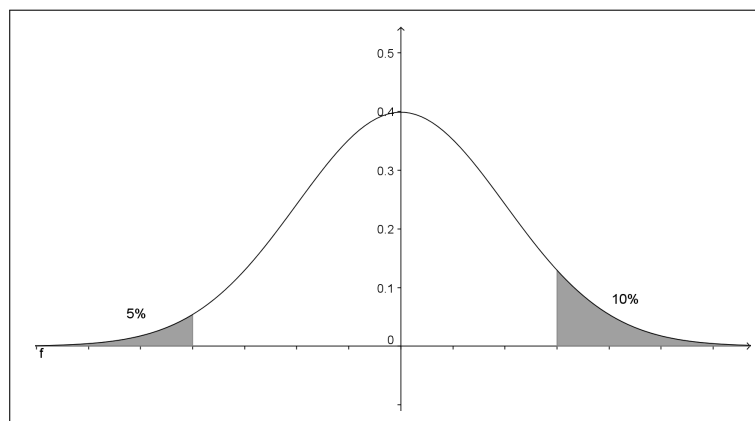


Figura 1.45 – Solução do Exemplo 1.27



Exemplo 1.28 Regulagem de máquinas

Uma máquina de empacotar determinado produto oferece variações de peso que se distribuem segundo uma distribuição normal com desvio padrão de 20 gramas. Em quanto deve ser regulado o peso médio desses pacotes para que apenas 10% deles tenham menos que 500 gramas?

Solução:

Esse é um exemplo clássico de aplicação da distribuição normal. Seja X o peso dos pacotes em gramas. Então, $X \sim N(\mu; 400)$. Temos de ter $P(X \leq 500) = 0,10$. Note que o peso médio

tem de ser superior a 500 g. Note, na solução, a inversão do sinal da abscissa!

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 500) &= 0,10 \Leftrightarrow \\
 P\left(\frac{X - \mu}{20} \leq \frac{500 - \mu}{20}\right) &= 0,10 \Leftrightarrow \\
 P\left(Z \leq \frac{500 - \mu}{20}\right) &= 0,10 \Leftrightarrow \\
 P\left(Z \geq -\frac{500 - \mu}{20}\right) &= 0,10 \Leftrightarrow \\
 P\left(Z \geq \frac{\mu - 500}{20}\right) &= 0,10 \Leftrightarrow \\
 \text{tab}\left(\frac{\mu - 500}{20}\right) &= 0,40 \Leftrightarrow \\
 \frac{\mu - 500}{20} &= 1,28 \Leftrightarrow \mu = 525,6
 \end{aligned}$$

A máquina tem de ser regulada com um peso médio de 525,6g para que apenas 10% dos pacotes tenham peso inferior a 500g. Veja a Figura 1.46.

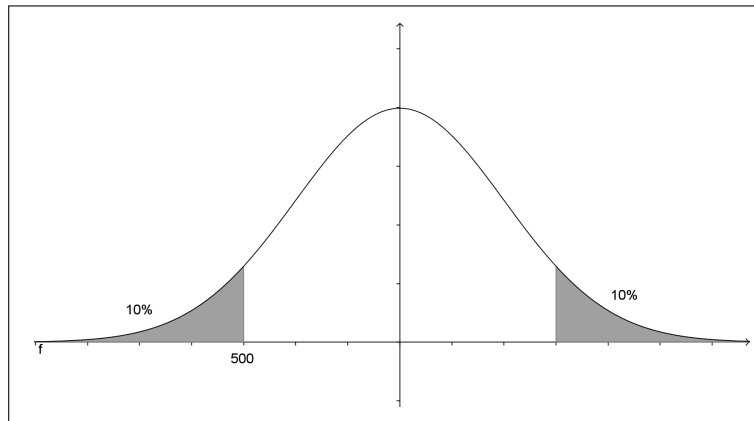


Figura 1.46 – Solução do Exemplo 1.28



Exemplo 1.29 Mais sobre regulação de máquinas

Uma máquina fabrica tubos metálicos cujos diâmetros podem ser considerados uma variável aleatória normal com média 200mm e desvio-padrão 2mm. Verifica-se que 15% dos tubos estão sendo rejeitados como grandes e 10% como pequenos.

- (a) Quais são as tolerâncias de especificação para esse diâmetro?
- (b) Mantidas essas especificações, qual deverá ser a regulação média da máquina para que a rejeição por diâmetro grande seja praticamente nula? Nesse caso, qual será a porcentagem de rejeição por diâmetro pequeno?

Solução:

Seja D = diâmetro dos tubos. Então $D \sim N(200, 2^2)$.

- (a) Sejam k_I e k_S as especificações inferior e superior, respectivamente. Isso significa que tubos com diâmetro menor que k_I são rejeitados como pequenos e tubos com diâmetro maior que k_S são rejeitados como grandes.

$$\begin{aligned}
P(D < k_I) &= 0,10 \Rightarrow \\
P\left(\frac{D-200}{2} < \frac{k_I-200}{2}\right) &= 0,10 \Rightarrow \\
P\left(Z < \frac{k_I-200}{2}\right) &= 0,10 \Rightarrow \\
P\left(Z > -\frac{k_I-200}{2}\right) &= 0,10 \Rightarrow \\
P\left(Z > \frac{200-k_I}{2}\right) &= 0,10 \Rightarrow \\
P\left(0 \leq Z < \frac{200-k_I}{2}\right) &= 0,40 \Rightarrow \\
\text{tab}\left(\frac{200-k_I}{2}\right) &= 0,40 \Rightarrow \\
\frac{200-k_I}{2} = 1,28 &\Rightarrow k_I = 197,44
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(D > k_S) &= 0,15 \Rightarrow \\
P\left(\frac{D-200}{2} > \frac{k_S-200}{2}\right) &= 0,15 \Rightarrow \\
P\left(0 \leq Z < \frac{k_S-200}{2}\right) &= 0,35 \Rightarrow \\
\text{tab}\left(\frac{k_S-200}{2}\right) &= 0,35 \Rightarrow \\
\frac{k_S-200}{2} = 1,03 &\Rightarrow k_S = 202,06
\end{aligned}$$

Logo, tubos com diâmetro menor que 197,44 cm são rejeitados como pequenos e tubos com diâmetros maiores que 202,06 cm são rejeitados como grandes.

(b) Com a nova regulamentação, temos que $D \sim N(\mu; 2^2)$ e μ deve ser tal que

$$\begin{aligned}
P(D > 202,06) &= 0 \Rightarrow \\
P\left(\frac{D-\mu}{2} > \frac{202,06-\mu}{2}\right) &= 0 \Rightarrow \\
P\left(Z > \frac{202,06-\mu}{2}\right) &= 0 \Rightarrow \\
P\left(0 \leq Z \leq \frac{202,06-\mu}{2}\right) &= 0,5 \Rightarrow \\
\text{tab}\left(\frac{202,06-\mu}{2}\right) &= 0,5 \Rightarrow \\
\frac{202,06-\mu}{2} \simeq 4,5 &\Rightarrow \mu \simeq 193,06
\end{aligned}$$

Com essa média, a porcentagem de rejeição por diâmetro pequeno é

$$\begin{aligned}
 P(D < 197,44) &= P\left(\frac{D - 193,06}{2} < \frac{197,44 - 193,06}{2}\right) \\
 &= P(Z < 2,19) \\
 &= P(Z \leq 0) + P(0 < Z < 2,19) \\
 &= 0,5 + \text{tab}(2,19) = 0,9857
 \end{aligned}$$

Com essa nova regulamentação, a rejeição por diâmetro grande é nula, mas a rejeição por diâmetro pequeno é muito alta! Veja as Figuras 1.47 e 1.48, nas quais ficam claros os resultados obtidos.

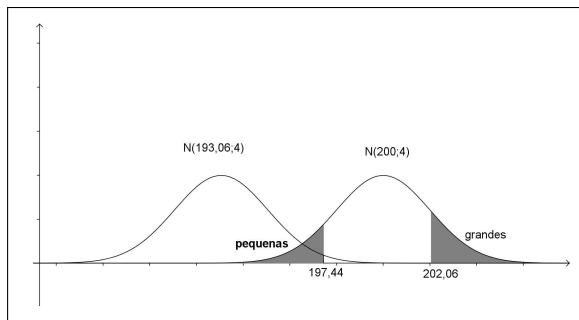


Figura 1.47 – Exemplo 1.29 – regulamentação original

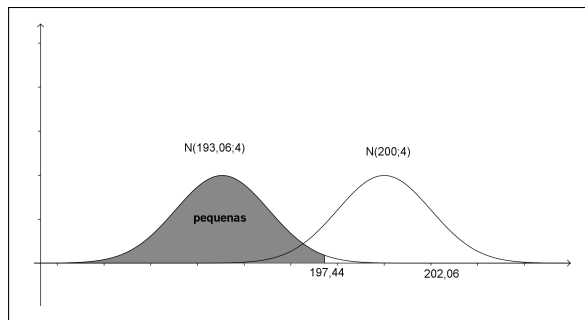


Figura 1.48 – Exemplo 1.29 – regulamentação com 0% de tubos grandes



Exemplo 1.30 Troca de lâmpadas

Em um grande complexo industrial, o departamento de manutenção tem instruções para substituir as lâmpadas antes que se queiem. Os registros indicam que a duração das lâmpadas, em horas, tem distribuição normal, com média de 900 horas e desvio-padrão de 75 horas. Quando devem ser trocadas as lâmpadas, de modo que no máximo 5% delas queimem antes de serem trocadas?

Solução:

Seja T = “tempo de duração (em horas) das lâmpadas”; então, $T \sim N(900; 75^2)$. Temos que determinar t tal que $P(T \leq t) = 0,05$.

$$\begin{aligned}
 P(T \leq t) &= 0,05 \Leftrightarrow \\
 P\left(\frac{T - 900}{75} \leq \frac{t - 900}{75}\right) &= 0,05 \Leftrightarrow \\
 P\left(Z \geq -\frac{t - 900}{75}\right) &= 0,05 \Leftrightarrow \\
 P\left(Z \geq \frac{900 - t}{75}\right) &= 0,05 \Leftrightarrow \\
 P\left(0 \leq Z \leq \frac{900 - t}{75}\right) &= 0,45 \Leftrightarrow \\
 \text{tab}\left(\frac{900 - t}{75}\right) &= 0,45 \Leftrightarrow \\
 \frac{900 - t}{75} &= 1,64 \Leftrightarrow t = 777
 \end{aligned}$$

As lâmpadas devem ser trocadas com 777 horas de uso para que apenas 5% se queimem antes da troca.



Aqui cabe a seguinte observação: em geral, não é apropriado utilizar-se a distribuição normal para modelar o tempo de sobrevivência de lâmpadas ou equipamentos em geral. Modelos tipo exponencial são mais adequados, pois atribuem probabilidade alta de sobrevivência no início da vida do equipamento e probabilidade decrescente à medida que o equipamento envelhece.

Exemplo 1.31 Regulagem de máquinas – controle da variabilidade

Uma enchedora automática enche garrafas de acordo com uma distribuição normal de média 1.000 ml. Deseja-se que no máximo uma garrafa em cada 100 saia com menos de 990ml. Qual deve ser o maior desvio padrão tolerável?

Solução:

Seja X = “conteúdo da garrafa (em ml)”, então $X \sim N(1000; \sigma^2)$.

Queremos que $P(X < 990) \leq 0,01$.

Seja σ_0 o valor do desvio padrão de X tal que $P(X < 990) = 0,01$. Então, qualquer valor de σ tal que $\sigma < \sigma_0$ resulta em $P(X < 990) < 0,01$. Veja a Figura 1.49.

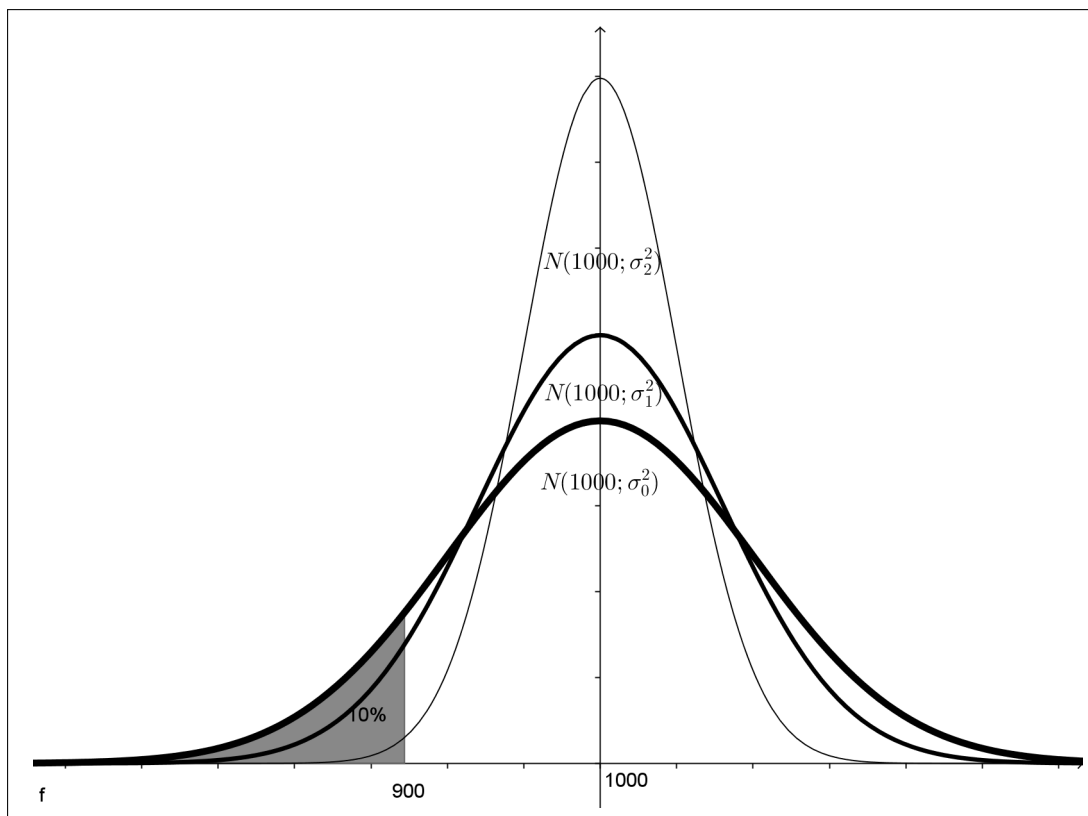


Figura 1.49 – Solução do Exemplo 1.31

A área sombreada corresponde a $P(X < 990) = 0,10$ quando $X \sim N(1000; \sigma_0^2)$ (curva de densidade mais espessa). As duas outras densidades correspondem a distribuições normais com desvios-padrão menores. Note que para essas distribuições, $P(X < 990) < 0,01$. Assim, o desvio-padrão máximo tolerável é tal que:

$$\begin{aligned}P(X < 990) &\leq 0,01 \Leftrightarrow \\P\left(Z < \frac{990 - 1000}{\sigma}\right) &\leq 0,01 \Leftrightarrow \\P\left(Z > -\frac{990 - 1000}{\sigma}\right) &\leq 0,01 \Leftrightarrow \\P\left(Z > \frac{10}{\sigma}\right) &\leq 0,01 \Leftrightarrow \\0,5 - tab\left(Z > \frac{10}{\sigma}\right) &\leq 0,01 \Leftrightarrow \\tab\left(\frac{10}{\sigma}\right) &\geq 0,49 \Leftrightarrow \\\frac{10}{\sigma} &\geq 2,33 \Leftrightarrow \sigma \leq \frac{10}{2,33} = 4,2918\end{aligned}$$



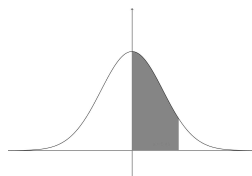
Apêndice A

Tabelas da Distribuição Normal

- Tabela 1: Tabela da normal padrão – $p = P(0 \leq Z \leq z)$
- Tabela 2: Tabela da distribuição acumulada da normal padrão – $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, $z \geq 0$

Tabela 1: $Z \sim N(0; 1)$

Valores de p
 $p = P(0 \leq Z \leq z)$

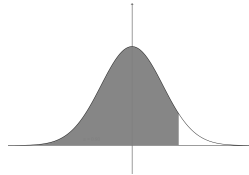


Casa inteira e 1ª Decimal	2ª decimal									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Para abscissas maiores que 4,09, use a probabilidade 0,5000.

Tabela 2: $Z \sim N(0; 1)$ Valores de p

$$p = \Phi(z) = P(Z \leq z)$$



Casa inteira e 1ª Decimal	2ª decimal									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Para abscissas maiores que 4,09, use a probabilidade 1,0000.