TRAITEMENT DU SIGNAL
Sciences du Numérique - Première année

SYNTHESE D'UN FILTRE PASSE-BAS DE TYPE RIF

On veut synthétiser un filtre passe-bas en essayant d'approcher par un filtre RIF la fonction de tranfert idéale de la figure 1. Donner l'expression de la réponse impulsionnelle d'un filtre à $2N+1$ coefficients utilisant une fenêtre rectangulaire de troncature et d'un filtre à $2N+1$ coefficients utilisant une fenêtre de troncature de Hamming donnée par $w(n) = 0.54 + 0.46\cos(\frac{2\pi n}{2N+1})$.

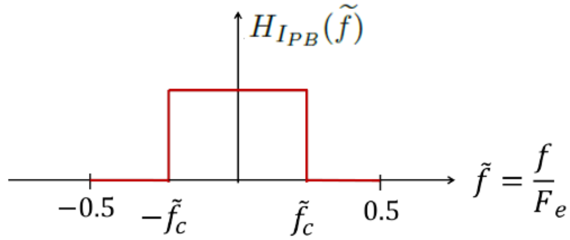

FIGURE 1 – Filtre passe-bas - Fonction de transfert idéale

La réponse en fréquence idéale $H_{I_{PB}}(\tilde{f})$ est périodique, donc décomposable en série de Fourier :

$$H_{I_{PB}}(\tilde{f}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_{I_{PB}}(k)\, e^{j2\pi\widetilde{f}k} \tag{1}$$

où les coefficients de la série de Fourier $h_{I_{PB}}(k)$ représentent les éléments de la réponse impulsionnelle, ou "coefficients", du filtre.
Ici :

$$h_{I_{PB}}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{I_{PB}}(\widetilde{f}) e^{-j2\pi\widetilde{f}k} d\widetilde{f} = \int_{-\widetilde{f}_c}^{\widetilde{f}_c} e^{-j2\pi\widetilde{f}k} d\widetilde{f} \tag{2}$$

conduisant, après calculs, à

$$h_{I_{PB}}(k) = 2\widetilde{f}_c sinc(2\pi\widetilde{f}_c k)$$

En pratique le nombre de coefficients du filtre devra être limité à un nombre $2N+1$, appelé "ordre" du filtre. On modélise cette limitation par l'utilisation d'une fenêtre de troncature, ou de pondération, $w(k)$, de longueur $2N+1$:

$$h_{PB}(k) = h_{I_{PB}}(k) \times w(k)$$

Elle conduit à une réponse en fréquence approchée :

$$H_{PB}(\widetilde{f}) = H_{I_{PB}}(\widetilde{f}) * W(\widetilde{f})$$

où $W(\widetilde{f})$ est la transformée de Fourier de $w(k)$.
On propose d'utiliser ici une fenêtre rectangulaire de troncature ou une fenêtre de Hamming. Dans le cas de la fenêtre rectangulaire on a :

$$\begin{aligned} h_{PB}(k) &= 2\widetilde{f}_c\ sinc(2\pi\widetilde{f}_c k)\ pour\ k = -N, ..., N \\ &= 0\ ailleurs \end{aligned} \tag{3}$$

Dans le cas de la fenêtre de Hamming on a :

$$\begin{aligned} h_{PB}(k) &= 2\widetilde{f}_c\ sinc(2\pi\widetilde{f}_c k) \times \left(0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi k}{2N+1}\right)\right)\ pour\ k = -N, ..., N \\ &= 0\ ailleurs \end{aligned} \tag{4}$$

Les figures 2 et 3 tracent les réponses impulsionnelles et les fonctions de transfert des deux filtres pour une fréquence de coupure $f_c = 100$ Hz, une fréquence d'échantillonnage $F_e = 800$ Hz et un ordre $N = 31$.

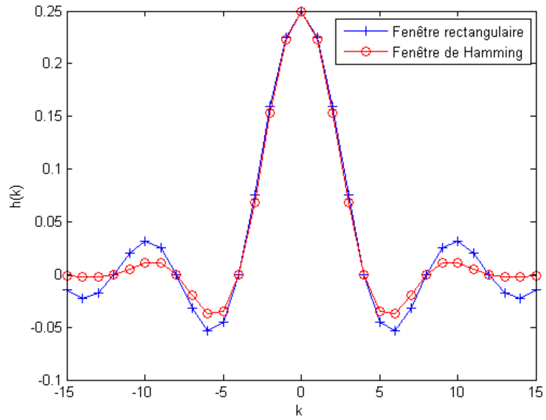

FIGURE 2 – Réponses impulsionnelles du filtre passe-bas de type RIF synthétisé avec les paramètres suivants : $f_c = 100$ Hz, $F_e = 800$ Hz, $ordre = 31$, pour deux fenêtres de troncature : rectangulaire et Hamming.

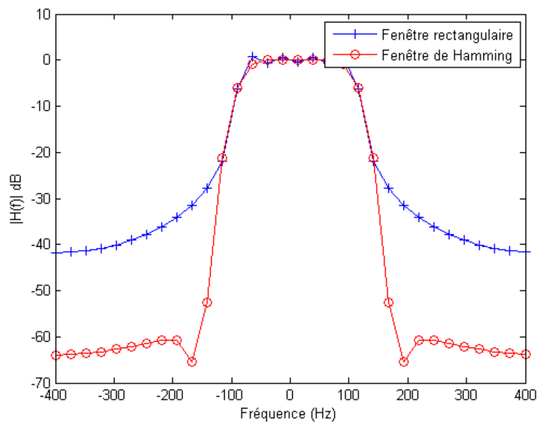

FIGURE 3 – Fonctions de transfert du filtre passe-bas de type RIF synthétisé avec les paramètres suivants : $f_c = 100$ Hz, $F_e = 800$ Hz, $ordre = 31$, pour deux fenêtres de troncature : rectangulaire et Hamming.

La figure 4 trace un exemple de signal d'entrée et de signal de sortie du filtre utilisant la fenêtre rectangulaire. On peut constater le retard du signal de sortie comparé au signal d'entrée. Celui-ci est dû au décalage de la réponse impulsionnelle appliqué afin de rendre le filtre causal. Le signal de sortie est déformé par rapport au signal d'entrée. Certaines fréquences ont effectivement été supprimées, comme le montre la figure 5 qui trace la TFD du signal d'entrée et celle du signal de sortie correspondant.

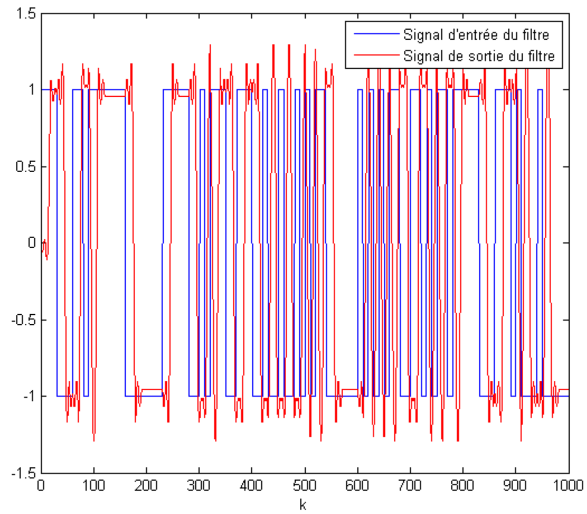

FIGURE 4 – Exemple de signaux d'entrée et de sortie du filtre passe-bas de type RIF synthétisé avec les paramètres suivants : $f_c = 100$ Hz, $F_e = 800$ Hz, $ordre = 31$, fenêtre rectangulaire de troncature.

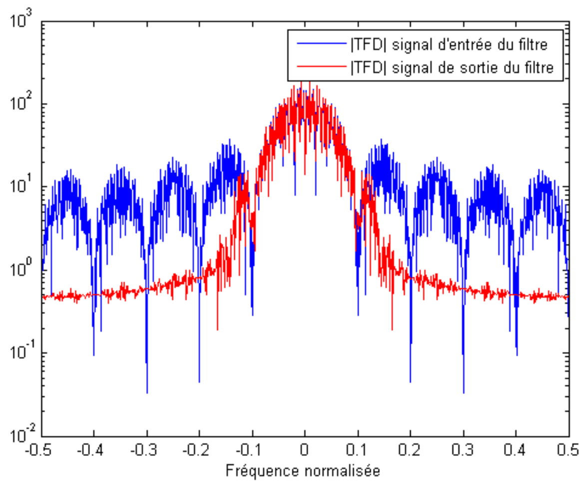

FIGURE 5 – TFD des signaux d'entrée et de sortie du filtre passe-bas de type RIF synthétisé avec les paramètres suivants : $f_c = 100$ Hz, $F_e = 800$ Hz, $ordre = 31$, fenêtre rectangulaire de troncature.

Remarques :

- A partir de la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas il est possible d'obtenir les réponses impulsionnelles des autres filtres de base (passe-haut, passe-bande, rejecteur).
  Par exemple, un filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure $\widetilde{f_c}$ présente une réponse en fréquence
  $$H_{I_{PH}}(\widetilde{f}) = 1 - H_{I_{PB}}(\widetilde{f})$$
  où $H_{I_{PB}}(\widetilde{f})$ est la réponse en fréquence du filtre passe-bas idéal de même fréquence de coupure. On peut donc en déduire la réponse impulsionnelle du filtre passe-haut idéal, $h_{I_{PH}}(n)$, à partir de celle du filtre passe-bas idéal correspondant, $h_{I_{PB}}(n)$:
  $$h_{I_{PH}}(n) = \delta(n) - h_{I_{PB}}(n)$$
  Cette réponse impulsionnelle idéale sera ensuite tronquée à $2N+1$ coefficients pour donner $h_{PH}(n)$, réponse impulsionnelle recherchée.

- La fonction *filter.m* de Matlab permet de réaliser le filtrage du signal x pour donner le signal y en utilisant un filtre défini par les tableaux de coefficients $A = [a_0 ... a_{M-1}]$ et $B = A = [b_0 ... b_{M-1}]$:
  $$y = filter(B, A, x)$$
  Dans le cas d'un filtre RIF le tableau de coefficients A se résume à un seul coefficient $a_0 = 1$ et le tableau B contient les $2N+1$ éléments conservés sur la réponse impulsionnelle pour un filtre d'ordre $2N+1$:
  $$B = [h_{PB}(-N) ... h_{PB}(N)]$$
  Notons qu'un filtrage de type RIF peut également être réalisé en utilisant la fonction *conv.m* de Matlab : $y = conv(x, B,' same')$, le paramètre 'same' n'est pas obligatoire mais il permet de ne pas avoir à gérer soi même le retard introduit par le filtre (permet de gérer les effets de bord de la convolution et renvoie la partie centrale du résultat de la convolution avec une taille égale à celle du premier vecteur).