TD2

▷ **Exercice 1.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ factorisable sans pivotage par l'algorithme de Gauss. Montrer que, si il existe :

- $(L_1, L_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ triangulaires inférieures à diagonale unité (les coefficients de la diagonale principale sont tous égaux à 1) ,
- $(U_1, U_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ triangulaires supérieures inversibles,

telles que $A = L_1U_1 = L_2U_2$, alors $L_1 = L_2$ et $U_1 = U_2$.

▷ **Exercice 2.** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose A inversible et on s'intéresse à la résolution du système linéaire $Ax = b$.

I- Méthode de Richardson

Soit $\alpha > 0$, on définit le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = x_k + \alpha(b - Ax_k) \end{cases} \tag{1}$$

1- Montrer que ce schéma correspond à une méthode de relaxation associée à la résolution du système $Ax = b$, dont vous préciserez les matrices M et N.

2- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer l'équivalence suivante :

λ valeur propre de $A \Leftrightarrow 1 - \alpha\lambda$ valeur propre de $M^{-1}N$, avec M et N définies en 1-.

3- On suppose que toutes les valeurs propres de A sont réelles.

En conclure que la méthode converge $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $0 < \alpha\lambda < 2, \forall\lambda$ valeur propre de A.

4- On suppose que A est symétrique définie positive.

Montrer que le schéma itératif (1) s'écrit

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = x_k - \alpha\nabla f(x_k) \end{cases}$$

pour une fonction f que vous préciserez.

La méthode de Richardson correspond-elle à la méthode de la *steepest descent* (vous justifierez votre réponse)?

II- Méthode de Richardson "préconditionnée"

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On s'intéresse au système préconditionné

$$P^{-1}Ax = P^{-1}b. \tag{2}$$

5- Ecrire le schéma itératif de Richardson pour le système (2) en prenant $\alpha = 1$. On considérera le cas $\alpha = 1$ dans la suite de cette partie.

6- Montrer que ce schéma s'écrit formellement comme une méthode de relaxation associée au système non préconditionné $Ax = b$, dont vous préciserez les matrices M et N.

7- Application

Quel préconditionneur P permet l'obtention de la méthode de relaxation suivante (vous justifierez votre réponse) :

a) Méthode de Jacobi.

b) Méthode de Gauss-Seidel.