Implémentation d'un type abstrait "ensemble d'entiers naturels"

3h
Avec documents

Année 2023-2024 — Session 1

Préambule

- Rappel : VS Code signale parfois des erreurs qui n'en sont pas, il ne faut se fier qu'au retour du compilateur (`dune runtest` ou `dune utop`).
- Pour tester dans utop : **open** Be;; puis ouvrir les modules que vous voulez tester.
- Le code rendu doit **impérativement compiler**. Si une partie ne compile pas, mettez-la en commentaires, ça peut donner lieu à des points.
- Interdiction de modifier les signatures (nom + type) indiquées dans les contrats.
- Même si la non utilisation d'itérateur sera pénalisée, des points seront accordés si les fonctions sont écrites correctement sans itérateur.
- Les documents autorisés sont : vos notes de cours, TD et TP, le site d'OCaml et Moodle. Vous êtes autorisé à utiliser toutes les fonctions de la librairie standard, en particulier le module List : `https://ocaml.org/api/List.html`.
- Utilisez le script `genererRendu.sh` pour générer un fichier `<votre login>.tar` compression d'un répertoire `<votre login>` contenant les fichiers `base.ml`, `liste.ml`, `arbre.ml`, `conversion.ml`, `natset.ml` et les fichiers dune. Avant de déposer le tar, vérifiez qu'il contient bien les fichiers souhaités.
- Le barème est donné à titre indicatif et pourra être modifié.

Introduction

L'objectif de ce bureau d'étude est la réalisation d'un module de gestion d'ensembles contenant uniquement des entiers naturels. Les opérations mises en jeu sont le test d'appartenance, l'ajout et le retrait. Il est naturel d'essayer d'obtenir une implantation plus efficace que l'implantation "naïve" à base de listes, dans laquelle la plupart des opérations ont une complexité linéaire en la taille de l'ensemble. Nous proposons ici de concrétiser cette démarche à l'aide d'une structure de données arborescente permettant l'implantation d'opérations de complexité logarithmique en la taille de l'ensemble.

1 Principe

Les entiers seront décomposés dans une base base et l'ensemble sera représenté par un arbre dont le type OCaml est le suivant :

type arbre = Noeud **of** bool * arbre list | Vide

Chaque fils devra avoir **exactement** base nombre de fils.

Chaque noeud d'un arbre ne représente un entier que s'il contient le booléen `true` et dans ce cas, la décomposition de cet entier en base base est lue depuis ce noeud jusqu'à la racine de l'arbre, du poids faible vers le poids fort. La i-ième branche représente le bit i. Par convention, l'entier 0 est représenté

par une liste vide de bits, par conséquent, s'il appartient à un ensemble, il sera nécessairement stocké à la racine de l'arbre correspondant. Par convention également, et dans un souci d'économie et de simplicité, seuls les bits significatifs seront représentés dans les arbres. Ceci implique que le premier bit est toujours non nul (sauf pour l'entier 0) et que la racine de l'arbre correspondant à un ensemble non vide admet toujours Vide comme premier fils.

Enfin, toujours dans un souci de simplicité, aucune feuille d'un arbre ne doit être de la forme Noeud(false, [Vide ;...; Vide]), ce qui signifie que toutes les suites de bits présentes dans les branches d'un arbre représentent un préfixe (au sens large) du code d'au moins un entier. Aucune branche n'est donc inutile.

On veillera à ce que les différentes opérations implantées préservent bien cette propriété de normalité. Par hypothèse, tous les arbres passés en paramètre seront également normaux.

Exemple de représentation en utilisant la base 2

A titre d'exemple, nous donnons la représentation graphique simplifiée de l'ensemble $E = \{0, 1, 5, 6, 7\}$ ainsi que sa représentation sous forme de constructeurs.

```
Noeud(true , [Vide;
              Noeud(true , [Noeud(false, [Vide;
                                          Noeud(true , [Vide; Vide ])]) ;
                            Noeud(false, [Noeud(true , [Vide; Vide ]);
                                          Noeud(true , [Vide; Vide ])])])])
```

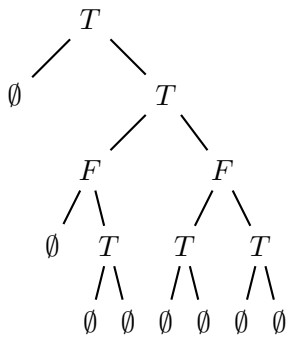
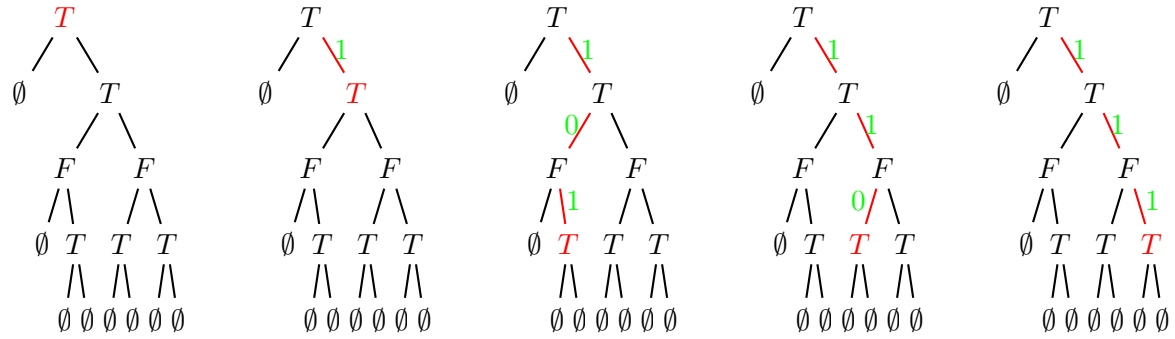


FIGURE 1 – Un exemple d'ensemble basé sur la décomposition en base 2 des entiers



$0 = ||_2 \in E$ $1 = |1|_2 \in E$ $5 = |101|_2 \in E$ $6 = |110|_2 \in E$ $7 = |111|_2 \in E$

Décomposotion en base 5

A titre d'exemple, nous donnons la représentation graphique simplifiée de l'ensemble $E = \{0, 1, 7, 14, 36\}$ ainsi que sa représentation sous forme de constructeurs.

```
Noeud (true ,
 [Vide;
  Noeud (true ,
   [Vide; Vide;
    Noeud (true ,
     [Vide; Noeud (true , [Vide; Vide; Vide; Vide; Vide ]); Vide; Vide; Vide ]);
    Vide; Vide ]);
  Noeud (false ,
   [Vide; Vide; Vide; Vide; Noeud (true , [Vide; Vide; Vide; Vide; Vide ])]);
  Vide;
  Vide ])
```

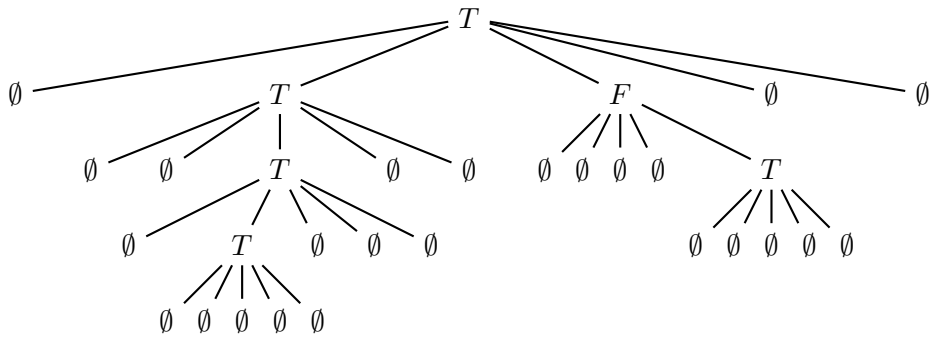
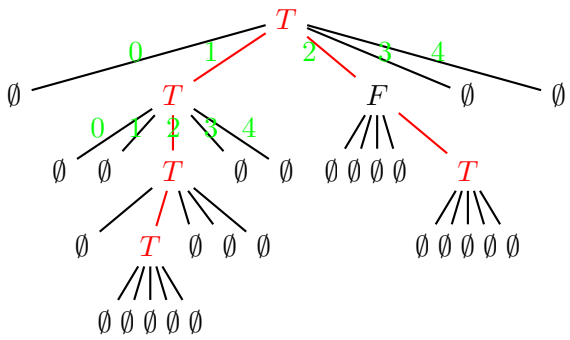


FIGURE 2 – Un exemple d'ensemble basé sur la décomposition en base 5 des entiers



$0 = ||_5 \in E$
$1 = |1|_5 \in E$
$7 = |12|_5 \in E : 1 * 5 + 2 = 7$
$14 = |24|_5 \in E : 2 * 5 + 4 = 14$
$36 = |121|_5 \in E : 1 * 25 + 2 * 5 + 1 = 36$

2 Travail demandé

Exercice 1 : `base.ml` – 1 point

Écrire deux modules Base2 et Base5 conforme à Base et correspondant à une base 2 et une base 5.
Indication : Il est normal que vous trouviez cela simple, car en effet, cela l'est.

Exercice 2 : `liste.ml` – 6,5 points

1. Écrire le contrat et les tests unitaires de la fonction l_taille qui construit une liste constituée de n (passé en paramètre) fois le même élément e (passé en paramètre).
2. Écrire la fonction l_taille .
3. Définir l'exception ArgumentInvalide.
4. Écrire la fonction get qui renvoie le i-ième élément d'une liste. Pensez à dé-commenter les tests pour tester la fonction.
5. Écrire la fonction set qui positionne le i-ième élément d'une liste. Pensez à dé-commenter les tests pour tester la fonction.
   Indication : vous pouvez utiliser l'itérateur List.mapi qui est une variante de List.map (voir la documentation OCaml).

Utilisation des tests fournis

Pour les trois exercices suivants, les tests sont donnés dans des modules (ou foncteurs) commentés à différents niveaux. Il faudra dé-commenter au fur et à mesure.

Par exemple pour l'exercice 3 :

```
1  (*
2  module TestConversion2 = struct
3    module Conversion2 = Conversion (Base2)
4    open Conversion2
5
6    let % test_unit _ =
7      print_string "=== Tests du module Conversion en Base 2 ===\n"
8
9    (* decompose *)
10   (*
11   let %test _ = decompose 0 = []
12   ...
13   *)
14   (* recompose *)
15   (*
16   let %test _ = recompose [] = 0
17   ...
18   *)
19 end
20
21 module TestConversion5 = struct
22   module Conversion5 = Conversion (Base5)
23   open Conversion5
24
25   let % test_unit _ =
26     print_string "=== Tests du module Conversion en Base 5 ===\n"
27
28   (* decompose *)
29   (*
30   let %test _ = decompose 0 = []
31   ...
32   *)
33   (* recompose *)
34   (*
```

```
35    let %test _ = recompose [] = 0
36    ...
37    *)
38  end
39  *)
```

— Pour la question 3.1 (écriture du foncteur) supprimer `(*` et `*)` correspondant aux lignes 1 et 39 (évidemment les numéros de lignes ne seront pas celles-ci dans votre code).
— Pour la question 3.2 (écriture de la fonction decompose) supprimer `(*` et `*)` correspondant aux lignes 10, 13, 29 et 32.
— Pour la question 3.3 (écriture de la fonction recompose) supprimer `(*` et `*)` correspondant aux lignes 15, 18, 34 et 37.

Exercice 3 : `conversion.ml` – 4 points

Les contrats des fonctions sont donnés dans le fichier `conversion_contrats.txt`. Reportez les contrats dans le fichier `ml`.

1. Écrire un foncteur Conversion paramétré par une Base. Dé-commenter les modules de tests.
2. Écrire, dans le foncteur Conversion, la fonction decompose : int -> int list qui réalise une décomposition d'un entier. La base de la décomposition est donnée par le module paramétrant le foncteur. Le bit de poids fort sera le premier élément de la liste. Dé-commenter les tests de decompose.
   Indications :
   — Nous choisissons que decompose 0 =[].
   — decompose 14 =[1;1;1;0] en base 2.
      — 14 div 2 : q=7 et r=0
      — 7 div 2 : q=3 et r=1
      — 3 div 2 : q=1 et r=1
      — 1 div 2 : q=0 et r=1
3. Écrire, dans le foncteur Conversion, la fonction recompose : int list -> int qui reconstruit un entier à partir de sa décomposition. La base de la décomposition est donnée par le module paramétrant le foncteur. Dé-commenter les tests de recompose.

Exercice 4 : `arbre.ml` – 8,5 points

Les contrats des fonctions sont donnés dans le fichier `arbre_contrats_type.txt`. Reportez les contrats dans le fichier `ml`.
Indication : Il est conseillé d'utiliser les fonctions écrites dans l'exercice 2.

1. Écrire un foncteur Arbre paramétré par une Base et contenant le type arbre explicité précédemment. Dé-commenter les modules de tests.
2. Écrire, dans le foncteur Arbre, la fonction conforme : arbre -> bool qui teste si un arbre est conforme à la base qui paramètre le module. Pour être conforme, tous les nœuds doivent avoir le même nombre de fils, qui correspond à la base de décomposition. Dé-commenter les tests de conforme.
3. Écrire, dans le foncteur Arbre, la fonction appartient : int list -> arbre -> bool qui teste l'appartenance d'un entier, décomposé dans la base, à un ensemble. Dé-commenter les tests de appartient .
4. Écrire, dans le foncteur Arbre, la fonction ajouter : int list -> arbre -> arbre qui ajoute un entier, décomposé dans la base, à un ensemble.Dé-commenter les tests de ajouter .

5. Écrire, dans le foncteur Arbre, la fonction retirer : int list -> arbre -> arbre qui retire un entier, décomposé dans la base, d'un ensemble et doit renvoyer un ensemble normalisé. Dé-commenter les tests de retirer .

   Indication : Pour illustrer le problème de la normalisation, la figure 3 trace les différentes étapes pour normaliser le résultat de l'opération $\{0, 1, 5, 6, 7\} \setminus \{5\} = \{0, 1, 6, 7\}$, en base 2. L'arbre de gauche est similaire à celui de la figure 2, la feuille codant l'entier 5 contenant maintenant false . L'arbre de droite est le résultat final attendu.

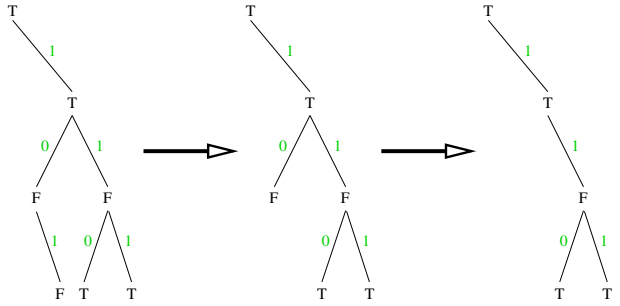


FIGURE 3 – Normalisation de $\{0, 1, 5, 6, 7\} \setminus \{5\} = \{0, 1, 6, 7\}$

Exercice 5 (BONUS) : `natset.ml` – 3,5 points

Les contrats des fonctions sont donnés dans le fichier `natset_contrats.txt`. Reportez les contrats dans le fichier `ml`.

1. Écrire un foncteur NatSet paramétré par une Base. Dé-commenter le foncteur et les modules de tests.
2. Ajouter à ce foncteur deux modules C et A, respectivement l'instanciation du foncteur Conversion et du foncteur Arbre avec la Base paramétrant le foncteur NatSet.
3. Définir le type natset représentant un ensemble dans la base donnée.
4. Définir vide : natset représentant l'ensemble vide.
5. Écrire la fonction ajouter : int -> natset -> natset qui ajoute un entier à un ensemble. Dé-commenter les tests de ajouter .
6. Écrire la fonction appartient : int -> natset -> bool qui teste l'appartenance d'un entier à un ensemble. Dé-commenter les tests de appartient .
7. Écrire la fonction retirer : int -> natset -> natset qui retire un élément d'un ensemble et doit renvoyer un ensemble normalisé. Dé-commenter les tests de retirer .