

Wyprowadzenie geometrycznych nierówności Bell'a dla wielu kubitów przy użyciu algorytmu Gilberta

Michał Dąbrowski

20 września 2020

Spis treści

1	Wstęp	2
2	Kubity	3
2.1	Stan rozróżnialny makroskopowo	3
2.2	Reguła Feynmana	3
2.3	Zasada superpozycji	3
2.4	Definicja	3
2.5	Różnica pomiędzy bitem, a kubitem	3
3	Nierówności Bell’a	4
3.1	Iloczyn Tensorowy	4
3.2	Stan Splątany	4
3.3	Paradoks EPR	5
3.4	Model lokalnego realizmu	5
3.5	Eksperyment Bell’a	5
3.6	Nierówności CHSH oraz Bell’a	6
3.7	Znaczenie Twierdzenia Bell’a	8
4	Paradoks GHZ	8
4.1	Eksperyment	8
4.1.1	Pomiar X-X-X	9
4.1.2	Pomiar X-Y-Y	9
4.1.3	Pomiar Y-Y-Y	10
4.1.4	Pomiar Y-X-X	10
4.2	Dyskusja otrzymanych wyników	10
4.3	Wniosek	11
5	Algorytm Gilberta	11
5.1	Zbiór wypukły	11
5.2	Uproszczony Algorytm	11
6	Budowa programu	12
6.1	Ogólne omówienie	12
6.2	Otrzymywanie stanu v_2	12
6.3	Stan v_0	12
7	Otrzymane wyniki	13
8	Wnioski	14
9	Dane	15
10	Bibliografia	16

1 Wstęp

E.Gilbert przedstawił algorytm wyliczający odległość pomiędzy zadany punktem, a zbiorem wypukłym. Algorytm jest wykorzystywany do różnych symulacji np. zderzenia dwóch obiektów. W swojej pracy użyję tego algorytmu do wyprowadzenia nierówności Bell'a w najprostszych przypadkach.

Praca składa się ze wstępu, pięciu rozdziałów teoretycznych, dwóch rozdziałów w których omówię otrzymane wyniki, rozdziału zawierającego dane oraz bibliografii.

W pierwszym rozdziale przedstawiam czym są kubity, czy różnią się od bitu oraz wprowadzam kilka pojęć wykorzystanych w definicji kubit.

Drugi i trzeci rozdział omawia czym są nierówności Bell'a, nierówności J.Clauser, M.Horne, A.Shimony i R.Holt (CHSH) oraz paradoks D.Greenberger, M.Horne, and A.Zeilinger (GHZ). W czwartym i piątym rozdziale przedstawiam algorytm Gilberta oraz jak zbudowany jest program w którym go wykorzystuję.

W ostatnich trzech rozdziałach przedstawiam otrzymane wyniki i dlaczego na ich podstawie możemy stwierdzić, że nierówności Bell'a są łamane.

2 Kubity

2.1 Stan rozróżnialny makroskopowo

Weźmy dwie składowe ortogonalne $\langle A|D \rangle = 0$. Stany $|A \rangle$ i $|D \rangle$ możemy rozróżnić w pewnym ujęciu. Jednak pomiar, który to umożliwia, może być bardzo skomplikowany. Parę stanów $|A \rangle$ i $|D \rangle$ możemy nazwać makroskopowo rozróżnialnymi, jeśli niedokładny pomiar nadal pozwala je rozróżnić.^[12]

2.2 Reguła Feynmana

Prawdopodobieństwo procesu, któremu przypisano amplitudę, określa się $P(x) = |x|^a, 0 < a < 2$.^[14]

2.3 Zasada superpozycji

Jeśli $\Psi_1(\vec{r}, t)$ oraz $\Psi_2(\vec{r}, t)$ są funkcjami falowymi układu fizycznego (cząstki) to wówczas ich superpozycja

$$\Psi(\vec{r}, t) = \alpha_1 \Psi_1(\vec{r}, t) + \alpha_2 \Psi_2(\vec{r}, t)$$

jest także funkcją falową i to dla dowolnych liczb zespolonych $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Postulat ten dotyczy kombinacji liniowej dowolnej ilości funkcji falowych, bowiem można stosować go sukcesywnie.^[13]

2.4 Definicja

Kubit to superpozycją stanów $|0\rangle$ oraz $|1\rangle$ i jest on reprezentowany przez unormowany wektor Ψ :

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

Liczba α, β należą do przestrzeni liczb zespolonych \mathbb{C} . Dokonanie pomiaru na kubicie trwale zmienia jego stan.

Gdy wykonamy pomiar kubit to zgodnie z prawdopodobieństwem $|\alpha|^2$ spodziewamy się, że znajduje się on w stanie $|0\rangle$ oraz z prawdopodobieństwem $|\beta|^2$ spodziewamy się, że znajduje się w stanie $|1\rangle$. Ponieważ bezwzględne wartości kwadratów amplitud są równe prawdopodobieństwu wystąpienia danego stanu, wynika z tego, że α i β muszą spełniać warunek $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

W notacji Diracka stan $|0\rangle$ i $|1\rangle$ możemy zapisać w następujący sposób:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Istotnym faktem jest to, że kubit to również podstawowa jednostka informacji kantowej.^[1]

2.5 Różnica pomiędzy bitem, a kubit

Bit:

Jest to pojedyncza jednostka informacji, która ma wartość 0 lub 1 (Tak lub Nie, Fałsz lub Prawda).

Kubit:

W komputerach kwantowych kubit to podstawowa jednostka informacji kwantowej - kwantowa wersja klasycznego bitu binarnego. Kubit to dwustanowy układ kwantowo-mechaniczny, jeden z najprostszych układów kwantowych, który wykazuje specyfikę mechaniki kwantowej.

3 Nierówności Bell'a

Zanim przejdę to omawiania w swojej pracy Nierówności Bell'a. Chciałbym tytułem wstępu przedstawić czym jest stan splątany oraz paradoks EPR.

3.1 Iloczyn Tensorowy

Niech U i V będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem K o wymiarach odpowiednio m i n . Iloczynem tensorowym $U \otimes V$ jest mn -wymiarową przestrzenią nad K składającą się z kombinacji liniowych "tensorów prostych" $u \otimes v$, $u \in U$, $v \in V$. Przy tym zakładamy, że

$$\begin{aligned}(ku + lu') \otimes v &= k(u \otimes v) + l(u' \otimes v), \\ u \otimes (kv + lv') &= k(u \otimes v) + l(u \otimes v').\end{aligned}$$

Jeśli rodziny $\{u_i\}$ i $\{v_i\}$ są odpowiednio bazami U i V , to rodzina wszystkich iloczynów $u_i \otimes v_j$ tworzą bazę przestrzeni $U \otimes V$.

3.2 Stan Splątany

Niech $\{|i\rangle_A \otimes |j\rangle_B\} \in H = H_A \otimes H_B$ oraz A i B są rozróżnialne. Dowolny stan:

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} \gamma_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B$$

który nie może być przedstawiony jako iloczyn dwóch stanów nazywamy stanem splątany.^[13]

Stan czysty:

Jest splątany gdy nie daje się zapisać jako stan faktoryzowalny stanów $|\alpha\rangle$ i $|\beta\rangle$.

Stan mieszany:

Stan mieszany nie jest splątany gdy istnieje wypukły rozkład operatora gęstości w stany iloczynowe, t.j.^[13]

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|,$$

$$|\psi_n\rangle = |\psi_n^A\rangle \otimes |\psi_n^B\rangle.$$

Przykładem stanu splątanego jest maksymalnie splątany stan dwóch kubitów :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle).$$

3.3 Paradoks EPR

O nierównościach Bell'a nie można mówić bez uprzedniego omówienia paradoksu Einsteina, Podolskiego i Rosen'a (EPR).

Einstein, Podolsky i Rosen w pracy pod tytułem "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?" zaproponowali eksperyment myślowy w którym badamy dwie cząstki w stanie splątanim. EPR zwrócili uwagę, że przed dokonaniem pomiaru każda z cząstek jest indywidualnie w mieszanym stanie, natomiast po dokonaniu pomiaru położenia jednej z cząstek jesteśmy w stanie przewidzieć jakie będzie położenie drugiej cząstki, to samo dzieje się dla pędu.^[2] Zgodnie z zasadą nieoznaczoności Heisenberga nie jest możliwe zmierzenie jednocześnie pędu i położenia cząstki. Paradoks tego zjawiska polega na przekazywaniu informacji między cząsteczkami, a dokładniej mówiąc, informacja między cząstkami musiała być przekazywana z prędkością większą od prędkości światła co było by niezgodne z ogólną teorią względności Einsteina. Einstein, Podolsky i Rosen doszli do wniosku, że mechanika kwantowa jest teorią niepełną którą należy uzupełnić. Postawili więc pytanie czy nie istnieją pewne "zmienne ukryte", które jeszcze przed dokonaniem pomiaru definiują jego wynik lub w zależności od wykonywanego pomiaru mamy do czynienia z jedną z różnych sytuacji fizycznych.^[2,3]

3.4 Model lokalnego realizmu

Omówmy co oznacza lokalność i realizm:

Realizm jest to zasada mówiąca, że każdy obiekt fizyczny ma z góry zdefiniowany pewne własności niezależnie czy zostały one przez nas zbadane czy też nie.

Lokalność oznacza, że na dowolny badany obiekt mogą wpływać jedynie bliskie niemu siły, pola itp. Czyli np. aby jedna cząstka wpłynęła na drugą która jest oddalona potrzebny jest pewien czas. Oznacza to, że nie ma natychmiastowej przyczyny i skutku.

Istnieje również założenie wolności wyboru obserwacji, które mówi, że jeśli zmienne a i b są dowolne lub losowe, a wybory ustawień są prawdziwie dowolne lub losowe to wartości a i b nie dają żadnych informacji o zmiennych ukrytych (λ). Inaczej możemy powiedzieć, że:

$$P(\lambda|a, b) = P(\lambda).$$

Zmienne a i b , są wartościami pomiaru otrzymanymi na obserwatorach A i B które odbierają splątane cząstki emitowane przez pewne źródło.

Modelem lokalnego realizmu (MLR) nazwiemy połączenie tych dwóch terminów. W skrócie możemy powiedzieć, że MLR jest to model w, którym gdy dokonujemy pomiaru pewnej wartości to jedynie odkrywamy to co z góry jest zdefiniowane.

3.5 Eksperyment Bell'a

J.S.Bell w swojej pracy pod tytułem "On the Einstein Podolsky Rosen paradox" zaproponował eksperyment badający parę splątanych cząsteczek. Typowym eksperymentem Bell'a jest obserwacja cząstek np. fotonów, wypromieniowanych z aparatu wytwarzającego ich splątana parę, a następnie pomiar charakterystycznych cech tych

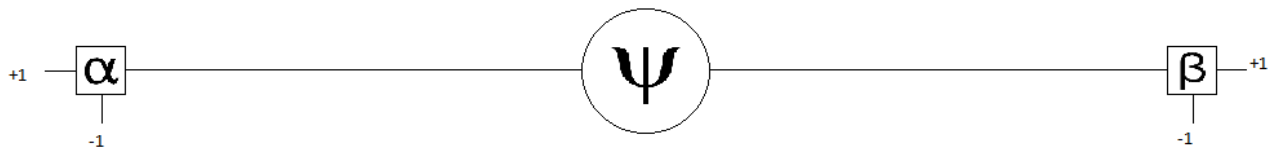
cząstek np. spinu. Teoretycznie wyniki takiego eksperymentu mogą być losowe, dlatego Bell zaproponował matematyczny opis lokalnego realizmu. Jeśli wyniki eksperymentu nie są zgodne z lokalnym realizmem, możemy przyjąć, że ukryte zmienne nie istnieją.^{[5][11]}

3.6 Nierówności CHSH oraz Bell'a

Badamy parę cząstek o spinie połowicznym poruszających się swobodnie w przeciwnych kierunkach. Cząsteczki oddalają się od siebie bardzo daleko, aż trafią do detektora w którym zostanie zbadany ich spin. Każdy pomiar daje wynik $+1$ lub -1 .

W celu lepszego zobrazowania wyżej opisanej sytuacji, przedstawiam stworzony demonstracyjnie układ korelacji pomiędzy dwiema cząsteczkami. Niech badanymi cząsteczkami będą fotony.

Źródło emituje dwa fotony, nadajmy im oznaczenie A i B. Foton A porusza się w



kierunku detektora α , a foton B w kierunku detektora β .

Matematycznie możemy przedstawić pomiar detektorów jako:

$$\begin{aligned} |+\alpha\rangle &= \cos\alpha|H\rangle + \sin\alpha|V\rangle, \\ |-\alpha\rangle &= \cos\alpha|V\rangle - \sin\alpha|H\rangle, \end{aligned}$$

dla fotonu A,

$$\begin{aligned} |+\beta\rangle &= \cos\beta|H\rangle + \sin\beta|V\rangle, \\ |-\beta\rangle &= \cos\beta|V\rangle - \sin\beta|H\rangle, \end{aligned}$$

dla fotonu B.

Możemy dokonać tylko pojedynczego pomiaru dla każdego fotonu. Przyjmijmy że wynik pomiaru oznaczamy $r_A(\alpha) = \pm 1$ dla $|\pm\alpha\rangle$ i $r_B(\beta) = \pm 1$ dla $|\pm\beta\rangle$. Możliwe wyniki jakie otrzymamy z pomiaru to $(+,+), (-,+), (+,-), (-,-)$. Prawdopodobieństwo wystąpienia pary $(+,-)$ oznaczmy jako $P(+ - |\alpha, \beta)$ gdzie $+$ odpowiada α , a $-$ β .

Zdefiniujmy źródło z którego emitowane są fotony:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|V\rangle - |V\rangle|H\rangle).$$

Gdy obliczymy prawdopodobieństwo wystąpienia wyników $P(++|\alpha, \beta), P(--|\alpha, \beta), P(-+|\alpha, \beta), P(+-|\alpha, \beta)$ zobaczymy, że:

$$P(++|\alpha, \beta) = P(--|\alpha, \beta) = \frac{1}{4}[1 - \cos 2(\alpha - \beta)], \quad (1)$$

$$P(+ - |\alpha, \beta) = P(- + |\alpha, \beta) = \frac{1}{4}[1 + \cos 2(\alpha - \beta)],$$

Zbadajmy teraz korelację fotonów:

$$(\alpha, \beta) = P(r_A(\alpha) = r_B(\beta)) - P(r_A(\alpha) \neq r_B(\beta)), \quad (2)$$

Po podstawieniu do (2) wartości z (1) mamy:

$$E(\alpha, \beta) = -\cos(2[\alpha - \beta]).$$

Zauważalne jest teraz, że korelacja zawiera się w przedziale $[-1, +1]$, natomiast wyniki odczytujemy następująco:

- $E=-1$ jest to antykorelacja i oznacza, że wyniki były zawsze przeciwne.
- $E=0$ oznacza, że 50% wyników się pokrywało.
- $E=1$ oznacza to, że wszystkie wyniki się ze sobą pokrywały

Teraz zbadajmy układ w którym źródło emituje ponownie dwa fotony w stronę A i B jednak, na fotony czekają dwa detektory z każdej strony, oznaczmy je jako α i α' oraz β i β' . Niech λ oznacza listę wszystkich możliwych wyników.

$$\begin{aligned} \lambda &= [\lambda_A, \lambda_B], \\ \lambda_A &= [r_A(\alpha), r_A(\alpha')], \\ \lambda_B &= [r_B(\beta), r_B(\beta')], \end{aligned}$$

Zdefiniujemy teraz wyrażenie $S(\lambda)$:

$$S(\lambda) = (r_A(\alpha) + r_A(\alpha'))r_B(\beta) + (r_A(\alpha) - r_A(\alpha'))r_B(\beta'). \quad (3)$$

Wiemy, że wartości przyjmowane przez $r_{A/B}(\alpha, \dots, \beta') = \pm 1$.

Wstawiając wszystkie możliwe wartości dla λ otrzymamy, że $S \in [-2, 2]$.

Oczywisty jest fakt, że aby móc wyznaczyć S konieczne jest przeprowadzenie eksperymentu dwukrotnie, natomiast jeżeli przeprowadzimy eksperyment wielokrotnie będziemy mogli wyznaczyć średnią wartość $S(\langle S \rangle)$:

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [r_A(\alpha)_k r_B(\beta)_k + r_A(\alpha')_k r_B(\beta)_k + r_A(\alpha)_k r_B(\beta')_k - r_A(\alpha')_k r_B(\beta')_k] \\ &= \langle r_A(\alpha) r_B(\beta) \rangle + \langle r_A(\alpha') r_B(\beta) \rangle + \langle r_A(\alpha) r_B(\beta') \rangle - \langle r_A(\alpha') r_B(\beta') \rangle. \end{aligned}$$

Wiemy, że $\langle r_A(\alpha) r_B(\beta) \rangle = E(\alpha, \beta)$ więc:

$$\langle S \rangle = E(\alpha, \beta) + E(\alpha', \beta) + E(\alpha, \beta') - E(\alpha', \beta').$$

Biorąc teraz pod uwagę, że $r_{A/B}(\alpha, \dots, \beta') = \pm 1$ dostaniemy:

$$-2 \leq \langle S \rangle \leq 2,$$

Więc możemy zapisać to jako:

$$|\langle S \rangle| \leq 2.$$

Tak przedstawiona powyżej relacja zwana jest nierównością Bell'a.^[5]

3.7 Znaczenie Twierdzenia Bell'a

Twierdzenie Bell'a w pewien sposób dokonało rewolucji w mechanice kwantowej, nie była to jednak rewolucja, która zmienia wszystkie dotychczas panujące założenia, a rewolucja, która nakazuje rewizję założeń fizyki klasycznej. Przez dość długi czas część fizyków zajmujących się mechaniką kwantową w pełni i bezkrytycznie przyjmowała poglądy szkoły kopenhaskiej, według której wszystkie znaczące teorie mechaniki kwantowej zostały już odkryte i odpowiednio opisane. To właśnie Bell był pierwszym fizykiem, który zwrócił uwagę, że w tych odpowiednio opisanych teoriach istnieją znaczące błędy, które należy poprawić.^[6]

Twierdzenie Bell'a ma również ogromny wpływ na kryptografię kwantową. A. Ekert w pracy pod tytułem "Quantum Cryptography Based on Bell's Theorem" przedstawia jak można wykorzystać twierdzenie Bell'a do tworzenia kluczy kryptograficznych. Protokół Ekerta pokazuje, że bezpieczeństwo kluczy kryptograficznych jest związane z łamaniem nierówności CHSH.

4 Paradoks GHZ

Greenberger, Horne i Zeilinger (GHZ) wyszli poza nierówności Bell'a i pokazali że splątanie więcej niż dwóch cząstek prowadzi do sprzeczności z teorią zmiennych ukrytych.^[4]

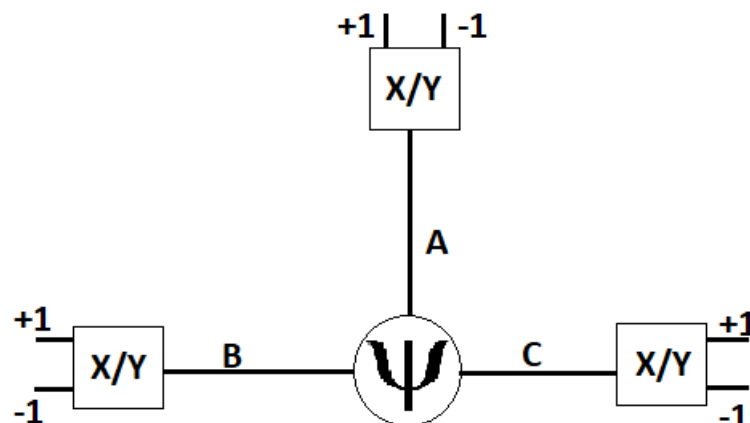
4.1 Eksperyment

Rozważmy układ, układ który produkuje trzy fotony w stanie splątanym

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|H\rangle|H\rangle + |V\rangle|V\rangle|V\rangle). \quad (4)$$

Możemy dokonać pomiaru w dwóch bazach:

- "diagonalnej" - X: $|\pm x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle \pm |V\rangle)$
- "kołowej" - Y: $|\pm y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle \pm i|V\rangle)$



Podobnie jak przy rozważaniach CHSH oznaczmy wyniki poszczególnych pomiarów jako $r_A(x/y), r_B(x/y), r_C(x/y) \in \{-1, +1\}$. Jeśli otrzymamy wynik $|+x\rangle$ lub $|+y\rangle$ to będzie oznaczało, że wynikiem jest +1, w przeciwnym wypadku wynikiem będzie -1. Możliwe jest dokonanie pomiaru na osiem sposobów, ze względu na symetrię stanu $|GHZ\rangle$ wystarczy że zbadamy cztery z nich, czyli X-X-X i X-Y-Y, Y-Y-Y i Y-X-X.

4.1.1 Pomiar X-X-X

Zbadajmy jak wygląda prawdopodobieństwo otrzymania konkretnych wyników :

$$\begin{aligned}
 P(+++|xxx) &= |\langle +x, +x, +x | GHZ \rangle|^2 \\
 | +x, +x, +x \rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle) \right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (|HHH\rangle + |HHV\rangle + |HVH\rangle + |HVV\rangle + |VHH\rangle + |VHV\rangle + |VVH\rangle + |VVV\rangle).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Korzystając z równania (4) oraz (5) otrzymamy:

$$P(+++, xxx) = |\langle +x, +x, +x | GHZ \rangle|^2 = \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right|^2 = \frac{1}{4}$$

Przeprowadzając podobne obliczenia otrzymamy że:

$P(+++ xxx)$	$P(++- xxx)$	$P(-++ xxx)$	$P(--- xxx)$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$P(+++ xxx)$	$P(++- xxx)$	$P(-++ xxx)$	$P(--- xxx)$
0	0	0	0

Widzimy, że pomiar jaki otrzymamy zawsze będzie dawał nam zawsze +1.^[5]

$$r_A(x)r_B(x)r_C(x) = +1 \tag{6}$$

4.1.2 Pomiar X-Y-Y

Ponownie zbadajmy prawdopodobieństwo pojawienia się konkretnych wyników. Pominę tu segment obliczeniowy, ponieważ jest on analogiczny do powyższych obliczeń:

$P(+++ xyy)$	$P(++- xyy)$	$P(-++ xyy)$	$P(--- xyy)$
0	0	0	0
$P(+++ xyy)$	$P(++- xyy)$	$P(-++ xyy)$	$P(--- xyy)$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Widzimy, że pomiar jaki otrzymamy zawsze będzie dawał nam zawsze -1.^[5]

$$r_A(x)r_B(y)r_C(y) = -1, \tag{7}$$

$$r_A(y)r_B(y)r_C(x) = -1, \tag{8}$$

$$r_A(y)r_B(x)r_C(y) = -1. \tag{9}$$

4.1.3 Pomiar Y-Y-Y

Zbadajmy teraz jakie wyniki otrzymamy dla pomiarów Y-Y-Y oraz Y-X-X. Prawdopodobieństwo wystąpienia konkretnych wyników jest następujące:

$$\begin{aligned}
 P(+++|yyy) &= |\langle ++, ++, ++ | GHZ \rangle|^2 \\
 |++ , ++, ++ \rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |iV\rangle) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |iV\rangle) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |iV\rangle) \right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (|HHH\rangle + |HHV\rangle + |HVH\rangle + |HVV\rangle + |VHH\rangle + |VHV\rangle + |VVH\rangle - i|VVV\rangle). \quad (10)
 \end{aligned}$$

Korzystając z równania (4) oraz (10) otrzymamy:

$$P(+++, yyy) = |\langle ++, ++, ++ | GHZ \rangle|^2 = \left| \frac{1}{8} + \frac{i}{8} \right|^2 = \frac{1}{8}$$

Przeprowadzając podobne obliczenia otrzymamy że:

$P(+++ yyy)$	$P(++- yyy)$	$P(-++ yyy)$	$P(-+- yyy)$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$P(+++ yyy)$	$P(+++ yyy)$	$P(-++ yyy)$	$P(-++ yyy)$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Widzimy więc, że prawdopodobieństwo otrzymania wyniku +1 lub -1 jest równe 50%.

4.1.4 Pomiar Y-X-X

Wyniki prawdopodobieństwa będą dla tego pomiaru takie same jak dla pomiaru Y-Y-Y, czyli $\frac{1}{8}$ dla, wszystkich kombinacji.

Podobnie jak powyżej prawdopodobieństwo otrzymania wyniku +1 lub -1 jest równe 50%.

4.2 Dyskusja otrzymanych wyników

Z naszych powyższych rozważań wynika, że wszystkie pomiary są z góry narzucone. Weźmy więc pod uwagę, że fotony mają jakieś własności ustalone przed pomiarem. Matematycznie możemy uznać że fotony opuszczają źródło z listą sześciu numerów której elementy to:

$$\lambda = \{r_A(x), r_A(y); r_B(x), r_B(y); r_C(x), r_C(y)\}.$$

Korzystając z (6)(7)(8)(9) otrzymamy warunki jakie muszą spełniać elementy listy: Zestawiając ze sobą (6) i (7):

$$r_B(x)r_C(x) = -r_B(y)r_C(y).$$

Natomiast z (8) i (9):

$$r_B(x)r_C(y) = r_B(y)r_C(x).$$

Łącząc dwa powyższe równania otrzymujemy warunek:

$$r_C^2(x) = -r_C^2(y).$$

Widzimy że powyższy warunek jest nie do spełnienia ponieważ $r_C^2(x) = r_C^2(y)$ (Warunek ten wynika z tego, że $(\pm 1)^2 = +1$). Oznacza, to że nie jest możliwe by istniała taka lista, która zawiera wartości pomiaru fotonu przed pomiarem.

4.3 Wniosek

Widzimy, że pomiary nie mogą zależeć od żadnych zmiennych ukrytych, które predefiniowałyby wynik pomiaru jeszcze przed jego dokonaniem.

5 Algorytm Gilberta

W celu przejścia do następnego etapu mojej pracy, jakim jest sam algorytm Gilberta, konieczne jest zaznajomienie się z pewnymi pojęciami, które będą niejednokrotnie występować w poniższych opisach

5.1 Zbiór wypukły

Element znajdujący się pomiędzy dwoma elementami zbioru wypukłego również jest elementem zbioru wypukłego.

5.2 Uproszczony Algorytm

Dane wejściowe:

Stan, który testujemy v_0 , oraz dowolny stan v_1 .

1. Losujemy dowolny stan v_2 , który dalej będziemy nazywać stanem próbnym.
2. Wykonujemy preselekcję* dla stanu próbnego. Jeśli się nie powiedzie wracamy do punktu 1.
3. Znajdujemy minimum $Tr(v_0 - x \cdot v_1 - (1 - x) \cdot v_2)^2$ względem x .
4. Jeśli minimum pojawia się dla $0 \leq x \leq 1$, aktualizujemy wartość $v_1 = x \cdot v_1 + (1 - x) \cdot v_2$ oraz dodajemy nową wartość $D^2(v_0, v_1)**$ do listy.
5. Wracamy do punktu 1, do czasu aż osiągniemy oczekiwane kryterium powtórzeń.

* Kryterium preselekcji jest $Tr[(v_2 - v_1) \cdot (v_0 - v_1)] > 0$. Geometrycznie oznacza to, że kąt pomiędzy $v_2 - v_1$ i $v_0 - v_1$ jest mniejszy niż $\frac{\pi}{2}$. Oznacza to, że punkty należące do prostej (v_1, v_2) skierowane są w kierunku v_2 .

** Jest to kwadrat odległość między stanem v_0 , a v_1 .

6 Budowa programu

6.1 Ogólne omówienie

W tej sekcji chciałbym omówić to z czego składa się program oraz co otrzymujemy po jego wykonaniu, gdyż w następnej sekcji będę omawiał ów wyniki.

Wiemy, że podczas dokonywania pomiaru fotonu otrzymamy wartość ± 1 , z tego powodu zdefiniowałem funkcję losującą wynik pomiaru dla detektorów $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, a następnie tworzącą wektor, którego elementy to kombinacja wszystkich wylosowanych wyników pomiaru.

Zgodnie z uproszczonym algorytmem Gilberta muszę wykonać preselekcję dla stanu próbnego, a następnie znaleźć minimum. Dla tych dwóch operacji stworzyłem dwie oddzielne funkcje, w pierwszej z nich obliczam wartość wyrażenia $v_0 \cdot (v_2 - v_1)$, jest to równoważne wykonaniu preselekcji. Druga funkcja oblicza wartość zmiennej x , która minimalizuje wartość wyrażenia z trzeciego punktu z 4.3. Dla uproszczenia działania programu zmienną x obliczyłem oddzielnie i otrzymałem:

$$x = \frac{(v_1 - v_2) \cdot (v_0 - v_2)}{(v_1 - v_2) \cdot (v_1 - v_2)}.$$

Łącząc te wszystkie funkcje otrzymamy wszystkie "narzędzia" potrzebne do działania algorytmu, więc potrzebna jest jeszcze jedna funkcja, która będzie sprawdzać czy obliczone wartości z poprzednich funkcji są odpowiednie, zdefiniuje nową wartość dla wektora v_1 (w programie przyjąłem v_1 jako wektor $\vec{0}$) i zwróci wektor $v_0 - v_1$, który jest potrzebny do zdefiniowania nierówności Bell'a. Ostatecznie program przeliczy wartości współczynnik proporcjonalności $k = \frac{v_0}{(v_0 - v_1)}$.

6.2 Otrzymywanie stanu v_2

Zgodnie z algorytmem muszę zdefiniować losowy stan v_2 , który w programie jest listą zawierającą wyniki otrzymanym z badania CHSH lub GHZ.

Aby otrzymać losowy stan v_2 , tworzę dwie listy, jedną zawierającą pomiary detektora α, α' , i drugą zawierającą pomiary β, β' , pomiar detektora to liczba +1 lub -1 wybrana losowo. Następnie tworzymy wektor v_2 poprzez iloczyn tensorowy otrzymanych list. W ten sposób dla badania CHSH lista v_2 ma postać:

$$v_2 = [\alpha \cdot \beta, \alpha \cdot \beta', \alpha' \cdot \beta', \alpha' \cdot \beta'],$$

Natomiast w badaniu GHZ wprowadzamy dodatkowy pomiar detektora γ, γ' , a lista v_2 ma postać:

$$v_2 = [\alpha \cdot \beta \cdot \gamma, \alpha \cdot \beta' \cdot \gamma, \alpha \cdot \beta' \cdot \gamma', \alpha \cdot \beta \cdot \gamma', \alpha' \cdot \beta \cdot \gamma, \alpha' \cdot \beta' \cdot \gamma, \alpha' \cdot \beta' \cdot \gamma', \alpha' \cdot \beta \cdot \gamma'].$$

6.3 Stan v_0

Stan v_0 w moim programie jest zdefiniowany jako lista i przyjmuje różne wartości w zależności od badania.

Dla badania CHSH:

$$v_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right].$$

Dla badania GHZ:

$$v_0 = [1, 0, 0, -1, 0, -1, -1, 0].$$

7 Otrzymane wyniki

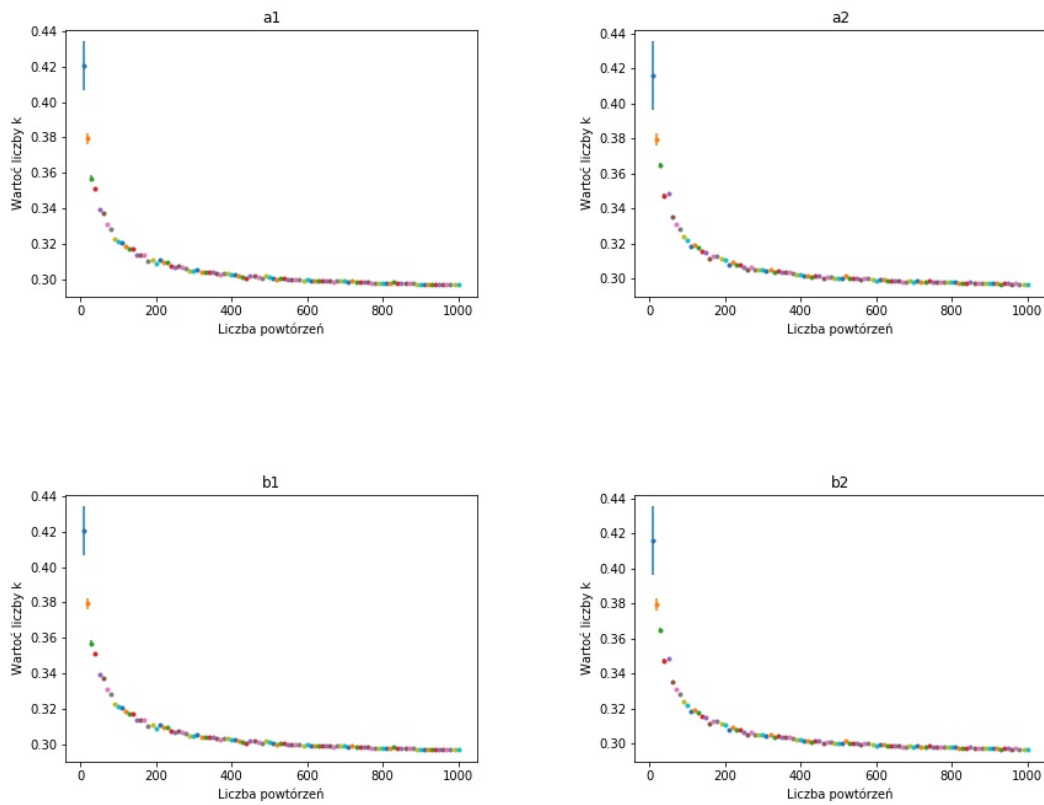
Badam liczby spełniające warunek $k_i = \frac{v_{0,i}}{(v_0 - v_1)_i}$, gdy zachodzi warunek $k_i = k_j$ gdzie $i \neq j$ możemy powiedzieć, że wektory v_0 i $v_0 - v_1$ są proporcjonalne do siebie. Współczynnik proporcjonalności k jest mi potrzebny do zbadania czy nierówność

$$(v_0 - v_1) \cdot k = 0, \quad (11)$$

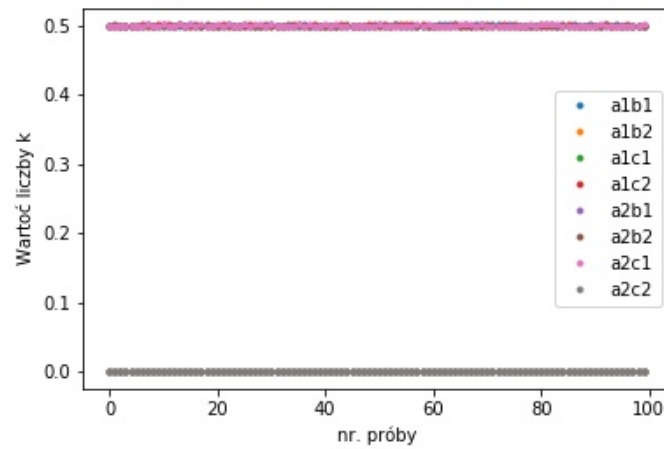
jest prawdziwa.

Jeśli nierówność (11) będzie prawdziwa to można powiedzieć, że definiuje nierówności Bell'a. Nierówność będzie prawdziwa tylko wtedy gdy k będzie równe 0.

Wartości k dla badania CHSH:



Wartości k dla badania GHZ:



Widzimy, że otrzymane wyniki w badaniu CHSH (Tablica 1) dla dowolnej próby są do siebie zbliżone, możemy więc przyjąć, że warunek $k_i = k_j$ jest spełniony. Wyniki dla badania GHZ (Tablica 2) również spełniają warunek $k_i = k_j$, jednak nie wprost. Korzystamy z algorytmu Gilberta, dzięki któremu otrzymaliśmy wartość k przy pomocy v_0 , więc jeśli $k_2, k_3, k_5, k_8 \neq 0$ to i tak wartość v_0 dla tych współczynników jest równa zero, możemy więc powiedzieć że istnieje taka liczba k , że $k \cdot (v_0 - v_1) = v_0$.

8 Wnioski

Z otrzymanych wyników widzimy, że dla rozważanych przypadków mnożąc przez odpowiedni współczynnik k z wektora $(v_0 - v_1)$ otrzymamy wektor v_0 . Oznacza to, że wektor $(v_0 - v_1)$ odtwarza nierówność CHSH i GHZ. Tym samym widać, że nierówność (11) jest łamana, czyli nie istnieją żadne zmienne ukryte z góry definiujące wynik badania.

9 Dane

Tablica 1: Kilka pierwszych prób badania CHSH

Wektor $v_0 - v_1$	Liczba spełniająca warunek $k_i = \frac{v_{0,i}}{(v_0 - v_1)_i}$
[0.20747, 0.20732, 0.20731, -0.20753]	[0.29349, 0.29334, 0.29342, 0.29302]
[0.20744, 0.20732, 0.20734, -0.20753]	[0.29312, 0.29345, 0.2935, 0.29322]
[0.20753, 0.20735, 0.20729, -0.20747]	[0.29311, 0.2935, 0.29331, 0.29337]
[0.20754, 0.20743, 0.20715, -0.20753]	[0.29305, 0.2935, 0.29325, 0.29348]
[0.20734, 0.20753, 0.20754, -0.20724]	[0.29345, 0.29305, 0.2935, 0.29328]
[0.20752, 0.20709, 0.2075, -0.20754]	[0.293, 0.29335, 0.2935, 0.29343]
[0.20754, 0.20735, 0.20729, -0.20747]	[0.29297, 0.2934, 0.29349, 0.29341]
[0.2074, 0.2072, 0.20753, -0.2075]	[0.29346, 0.29321, 0.2935, 0.29313]
[0.20743, 0.20721, 0.20747, -0.20754]	[0.2935, 0.29315, 0.29337, 0.29327]
[0.20722, 0.20748, 0.20754, -0.20741]	[0.29342, 0.29349, 0.29332, 0.29303]
[0.20743, 0.20728, 0.2074, -0.20754]	[0.2935, 0.29315, 0.29316, 0.29349]
[0.20738, 0.20723, 0.20754, -0.2075]	[0.2933, 0.29325, 0.29325, 0.2935]
[0.20735, 0.20754, 0.20739, -0.20738]	[0.29346, 0.2934, 0.2935, 0.29292]
[0.20734, 0.20754, 0.20744, -0.20733]	[0.29351, 0.29332, 0.29298, 0.29351]

Tablica 2: Kilka pierwszych prób badania GHZ

Wektor $v_0 - v_1$	Liczba spełniająca warunek $k_i = \frac{v_{0,i}}{(v_0 - v_1)_i}$
[0.50036, -0.00012, -0.0004, -0.5001, -1e-05, -0.50055, -0.50029, 7e-05]	[0.50047, 0, 0, 0.50038, 0, 0.50007, 0.50036, 0]
[0.50049, -0.0005, 0.0, -0.50015, 0.00036, -0.50049, -0.50015, 0.00012]	[0.50041, 0, 0, 0.5002, 0, 0.5006, 0.50006, 0]
[0.50042, -0.00045, -0.00027, -0.49978, 0.00028, -0.5005, -0.50058, 0.00038]	[0.5002, 0, 0, 0.5002, 0, 0.50044, 0.50044, 0]
[0.50024, 0.0, -0.00021, -0.50041, -0.00039, -0.50052, -0.50014, 9e-05]	[0.50035, 0, 0, 0.50028, 0, 0.50041, 0.50023, 0]
[0.50038, -0.00046, 0.00026, -0.50046, -0.00015, -0.50017, -0.50026, 6e-05]	[0.50038, 0, 0, 0.50049, 0, 0.50037, 0.50005, 0]
[0.50044, -0.00022, -0.00015, -0.4997, 0.00024, -0.50052, -0.5006, 0.00037]	[0.50026, 0, 0, 0.50037, 0, 0.50031, 0.50034, 0]
[0.50044, 0.0001, 0.00022, -0.5003, 7e-05, -0.50012, -0.50043, -0.00024]	[0.50023, 0, 0, 0.50061, 0, 0.50039, 0.50009, 0]

10 Bibliografia

- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Qubit#cite_ref-schumacher1995_1-0
- [2] A.Einstein, B.Podolsky, N.Rosen "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete ?", Physical Review Vol.47 str.779 <http://www.drchinese.com/David/EPR.pdf>
- [3] J.F.Clauser, M.A.Horne, A.Shimony, R.A.Holt " Proposed experiment to test local hidden-variable theories", Physical Review Vol.23, Number 15 s.880
- [4] R.Horodecki, P.Horodecki, M.Horodecki, K.Horodecki "Quantum entanglement" <https://www.fuw.edu.pl/~dragan/Fizyka/MSc.pdf>
- [5] Valerio Scarani, Lynn Chua, Shi Yang Liu "Six Quantum Pieces" str.71-84
- [6] T.Pabjan "DRUGA REWOLUCJA KWANTOWA: DZIEDZICTWO JOHNA S. BELLA" str.123-125
- [7] P.Lindemann "The Gilbert-Johnson-Keerthi Distance Algorithm" str.1
tamże str.2
tamże str.2
- [8] T.Stroiński "O pewnych półgrupach zbiorów zwartych wypukłych oraz o minimalnych reprezentacjach elementów ich przestrzeni ilorazowych" str. 11-15
- [9] A.Dragan "Homodynamic inequalities of Bell for optical states of the type of the Schrodinger's s.10- 11"
- [10] G.Sarbicki " Praca Doktorska " <https://fizyka.umk.pl/~gniewko/publikacionis/doktorat.pdf> str.8-9
- [11] https://en.wikipedia.org/wiki/Bell%27s_theorem
- [12] P.Sekatski, N.Gisin, N.Sangouard "How difficult it is to prove the quantumness of macroscopic states? " str. 2 <https://arxiv.org/pdf/1402.2542.pdf>
- [12] S.Kryszewski "Mechanika kwantowa, Skrypt dla studentów III-ego roku fizyki" <http://iftia9.univ.gda.pl/~sjk/QM-SK.pdf>
- [13] K.Byczuk "O splątaniu kwantowym słów kilka".
- [14] Y.Tikochinsky "Feynman rules for probability amplitudes".