# PRONÓSTICOS CON RESTRICCIONES EN SERIES DE TIEMPO UNIVARIADAS: APLICACIÓN AL SEGUIMIENTO DEL PIB DE MEXICO EN 2001

**Article** · March 2002

DOI: 10.21919/remef.v1i1.118



Victor M. Guerrero
Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM)

# PRONÓSTICOS CON RESTRICCIONES EN SERIES DE TIEMPO UNIVARIADAS: APLICACIÓN AL SEGUIMIENTO DEL PIB DE MEXICO EN 2001

**Víctor M. Guerrero***

*Departamento de Estadística, Instituto Tecnológico Autónomo de México*

*(Recibido 12 de julio 2001, aceptado de 14 enero 2002)*

## Resumen

En este trabajo, se presenta de manera unificada la metodología de pronósticos restringidos, con la cual se pueden incorporar a los pronósticos que surgen de un modelo lineal para series univariadas otras piezas de información adicional a la provista por la serie histórica con la cual se construyó el modelo. Si las piezas de información son restricciones lineales sobre los valores futuros de la serie original pueden incorporarse de manera óptima y formal a los pronósticos del modelo, que en particular se considera un modelo ARIMA. Como complemento del método, se presenta un estadístico que permite decidir si los datos adicionales son compatibles con la serie histórica. Este estadístico amplía las posibilidades de análisis en función de la certidumbre asociada con las fuentes de información: histórica y adicional. Para ilustrar la metodología, se da seguimiento a la meta anual del PIB real de México, anunciada por las autoridades gubernamentales para el año 2001. En este ejemplo, los resultados que se obtienen, conforme más datos de la serie se van observando, justifican los cambios en la metas durante el año.

## Abstract

This paper presents, in a unified way, the restricted forecasting methodology that serves to incorporate additional information into the forecasts arising from a linear model built from historical data of a univariate time series. If the additional information is in the form of linear constraints about future values of the series, it can be optimally and formally incorporated into the model forecasts. The linear model considered is an ARIMA type. As a complement of the method, a statistic is introduced to decide whether the additional data are compatible with the historical series or not. Such a statistic is the basis for wider possibilities of analysis in terms of the certainty associated with the two sources of information: historical and additional. Finally, in order to illustrate the methodology, the annual target of Mexico's real GDP, announced by the government authorities for year 2001, is examined. In this example, the results that are obtained while more data of the series are observed justify changing the target with the course of the year.

*Clasificación JEL: C32, and C53.*
*Palabras clave: Modelos ARIMA, Pronósticos.*

* Departamento de Estadística, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Río Hondo 1, Col. Tizapán San Ángel, Del. Alvaro Obregón, 01000 México, D.F., Teléfono (52)56284000 ext. 3803, Correo Electrónico: guerrero@itam.mx

El autor agradece los comentarios de dos dictaminadores anómimos. Asimismo, el autor agradece el apoyo brindado por la Asociación Mexicana de Cultura, A. C., a través de la Cátedra sobre Análisis de Series de Tiempo y Pronósticos en Econometría para la realización de este trabajo.

# 1. Introducción

La idea que respalda a la metodología que se presenta a continuación es muy simple: utilizar la mayor cantidad de información que esté disponible, en un momento dado, para mejorar la calidad de los pronósticos que produce un modelo Auto-Regresivo Integrado y de Promedios Móviles (ARIMA). En ocasiones, se cuenta con información adicional a los datos históricos que se utilizaron en la construcción del modelo para la serie en cuestión; no hacer uso de esa información es un desperdicio que debe ser evitado. Si la información se refiere al comportamiento futuro de la variable, y está dada en forma de restricciones lineales, su incorporación en los pronósticos puede realizarse de manera óptima, mediante argumentos formales de la Estadística.

Combinar la información histórica de la variable con la que proviene de otra fuente no representa un problema teórico ni computacional. Sin embargo, no toda la información adicional acerca del futuro de la variable, debe incorporarse en los pronósticos de manera automática. El analista debe cuestionarse si tal información es compatible con el comportamiento histórico de la serie de tiempo, la cual se resume en el modelo ARIMA. A raíz de esta consideración, surgen diversas posibilidades metodológicas.

## 1.1 Incorporación de Restricciones a los Pronósticos

Para incorporar una restricción lineal en los pronósticos del modelo, se seguirá el enfoque propuesto por Guerrero (1989). En principio se requiere contar con una expresión para los errores de pronóstico, la cual surge como se indica a continuación. Sea $\{Z_t\}$ una serie de tiempo observada en los momentos $t = 1, \ldots, N$, que se puede representar mediante un modelo ARIMA multiplicativo estacional, posiblemente con efectos de intervenciones, cuyos pronósticos son el objetivo del análisis (para una introducción al estudio y construcción de estos modelos, véase Guerrero, 1991a)

$$\phi(B)\Phi(B^E)\nabla^d\nabla_E^D Z_t = \theta_0 + \theta(B)\Theta(B^E)a_t, \tag{1.1}$$

donde $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$ y $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$ son los polinomios regulares, autorregresivo y de promedios móviles respectivamente, en el operador de retraso $B$, tal que $BZ_t = Z_{t-1}$. Mientras que $\Phi(B^E) = 1 - \Phi_1 B^E - \cdots - \Phi_P B^{PE}$ y $\Theta(B^E) = 1 + \Theta_1 B^E + \cdots + \Theta_Q B^{QE}$ son los correspondientes polinomios autorregresivo y de promedios móviles estacionales, donde $E \geq 2$ representa el periodo estacional. Los valores $p$, $q$, $P$ y $Q$ determinan el grado de los polinomios.

Asimismo, los valores $d$ y $D$ indican las veces que se aplican los operadores diferencia regular $\nabla = 1 - B$ y estacional $\nabla_E = 1 - B^E$, con los cuales se vuelve estacionaria la serie en su nivel. Se supone que las raíces de las ecuaciones

$\phi(B) = 0, \theta(B) = 0, \Phi(B^E) = 0$ y $\Theta(B^E) = 0$ están fuera del círculo unitario (lo cual garantiza que el modelo sea estacionario e invertible), y que todos los polinomios son primos entre sí.

El parámetro $\theta_0$ es una constante, asociada con una tendencia determinista en los datos de la serie $\{Z_t\}$. Además, $\{a_t\}$ es un proceso de ruido blanco Gaussiano, con media cero y varianza, $\sigma_a^2$, finita.

Supóngase que se conocen las ponderaciones $\Psi_0 = -1, \Psi_1, \Psi_2, \dots$, que forman el polinomio $\Psi(B)$, denominado de promedios móviles puro. Dichas ponderaciones surgen al igualar los coeficientes de las potencias de $B$ en la ecuación polinomial $\Psi(B) = \theta(B)\Theta(B^E)\phi^{-1}(B)\Phi^{-1}(B^E)$. Conocer tales ponderaciones equivale a suponer que los parámetros del modelo ARIMA son conocidos, aunque en la práctica los parámetros se estiman a partir de los datos disponibles. Entonces, el pronóstico con Error Cuadrático Medio (ECM) mínimo, que es la esperanza condicional de la variable, dada la información histórica constituida por el vector $\mathbf{Z}_0 = (Z_1, \dots, Z_N)'$, produce el error

$$Z_{N+h} - \mathrm{E}(Z_{N+h} \mid \mathbf{Z}_0) = -\sum_{j=0}^{h-1} \Psi_j a_{N+h-j}, \qquad \text{para} \qquad h = 1, 2, \dots \tag{1.2}$$

Este hecho fue establecido en general, tanto para el caso de series estacionarias como para el de series no estacionarias por Bell (1984). Si los valores futuros de la serie, para un horizonte que cubre $H \geq 1$ periodos por delante, se agrupan en el vector $\mathbf{Z}_F = (Z_{N+1}, \dots, Z_{N+H})'$ y se define el vector $\mathbf{a}_F = (a_{N+1}, \dots, a_{N+H})'$ y la matriz

$$\Psi = \begin{pmatrix} -\Psi_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\Psi_1 & -\Psi_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Psi_{H-1} & -\Psi_{H-2} & -\Psi_{H-3} & \cdots & -\Psi_0 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

entonces el sistema de ecuaciones (1.2), para $h = 1, \dots H$, toma la forma vectorial

$$\mathbf{Z}_F - \mathrm{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0) = \Psi \mathbf{a}_F \tag{1.4}$$

con $\mathrm{E}(\mathbf{a}_F \mid \mathbf{Z}_0) = \mathbf{0}$ y $\mathrm{E}(\mathbf{a}_F \mathbf{a}_F' \mid \mathbf{Z}_0) = \sigma_a^2 I$.

Por otro lado, si se define un vector de dimensión $m \times 1$, $\mathbf{Y}$, el cual contiene información adicional a la histórica. Esta información impone restricciones sobre los valores futuros de la serie, ya que está dada por la combinación lineal

$$\mathbf{Y} = C\mathbf{Z}_F \tag{1.5}$$

en donde $C$ es una matriz de rango completo, de dimensión $m \times H$ (con $m < H$) que contiene constantes conocidas. Por ejemplo, si $C = (1/H, \dots, 1/H)$ entonces hay una restricción que debe satisfacer el promedio de los valores futuros $C\mathbf{Z}_F = (Z_{N+1} + \cdots + Z_{N+H})/H$; en cambio, si $C = (-1, 0, \dots, 0, 1)$

entonces se impone una restricción sobre el incremento $C\mathbf{Z}_F = Z_{N+H} - Z_{N+1}$ que debe ser igual al valor $Y$, y si

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots 0 & 1 \\ 1 & 1 \cdots 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

entonces hay dos restricciones por satisfacer, o sea $Z_{N+H} = Y_1$ y $Z_{N+1} + \cdots + Z_{N+H} = Y_2$.

Así pues, las dos fuentes de información acerca del vector de valores futuros están expresadas mediante (1.4) y (1.5).

El siguiente resultado, obtenido independientemente por Guerrero (1989) y por Trabelsi y Hillmer (1989), hace uso de estas dos fuentes de información para producir el siguiente pronóstico lineal óptimo (con ECM mínimo);

$$\hat{\mathbf{Z}}_F = \mathrm{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0) + \hat{A}[\mathbf{Y} - C\mathrm{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0)] \tag{1.7}$$

con

$$\hat{A} = \Psi\Psi'C'(C\Psi\Psi'C')^{-1}. \tag{1.8}$$

Además, dicho vector de pronósticos es tal que $\mathrm{E}(\hat{\mathbf{Z}}_F - \mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0, \mathbf{Y}) = \mathbf{0}$, es decir, es condicionalmente insesgado, y tiene la siguiente matriz de ECM

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\hat{\mathbf{Z}}_F - \mathbf{Z}_F) &= \sigma_a^2\Psi\Psi'(I - \hat{A}C)', \\ &= \mathrm{Cov}[\mathrm{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0) - \mathbf{Z}_F] - \sigma_a^2\Psi\Psi'C'\hat{A}', \end{aligned} \tag{1.9}$$

donde la siguiente matriz es definida semipositiva

$$\sigma_a^2\Psi\Psi'C'\hat{A}' = \sigma_a^2\Psi\Psi'C'(C\Psi\Psi'C')^{-1}C\Psi\Psi' \tag{1.10}$$

Esto implica que el pronóstico $\hat{\mathbf{Z}}_F$ es al menos tan preciso como $\mathrm{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0)$. Ahora bien, tener una fórmula que incorpore la información adicional, $\mathbf{Y}$, al pronóstico $\mathrm{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0)$ no significa que siempre sea razonable aplicarla. De hecho, nótese que para obtener el pronóstico restringido, se supone que $\mathbf{Y}$ es de la forma

$$\mathbf{Y} = C\mathbf{Z}_F = C\mathrm{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0) + C\Psi\mathbf{a}_F, \tag{1.11}$$

lo cual implica que $\mathbf{Y}$ es compatible con la información histórica. No obstante, puede suceder que esto no sea así. Por ello conviene verificar la compatibilidad empíricamente, mediante un procedimiento estadístico como el que se presenta en la sección siguiente.

Es importante resaltar el hecho de que los resultados (1.7) a (1.9) permiten realizar inferencia estadística, si se supone que los errores $\{a_t\}$ se comportan como ruido blanco Gaussiano. En tal caso, no sólo se obtienen los pronósticos restringidos de manera puntual, sino que se pueden construir intervalos y regiones de predicción, para niveles predeterminados de probabilidad. Por ejemplo, un intervalo de predicción de $100(1-\alpha)\%$ de probabilidad, para el verdadero valor de la variable $Z_{N+h}$, está dado por

$$\hat{Z}_N(h) + z_{1-\alpha}\ \text{err.est.}(h), \text{ para } h = 1, ..., H, \tag{1.12}$$

donde $\hat{Z}_N(h)$ denota el pronóstico restringido, $h$ periodos por delante, a partir del origen ubicado en el tiempo $N$. El valor $z_{1-\alpha}$ se determina mediante la distribución Normal estandarizada y err.est.$(h)$ es el error estándar del pronóstico restringido, el cual se obtiene como raíz cuadrada del $h$-ésimo elemento en la diagonal de la matriz $\text{Cov}(\hat{\mathbf{Z}}_F - \mathbf{Z}_F)$ que se muestra en (1.9).

## 1.2 Verificación de Compatibilidad entre Fuentes de Información

En primer lugar, se dirá que la información externa al modelo, $\mathbf{Y}$, es compatible con la información provista por el modelo, $C\text{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0)$, si la distancia entre estos dos vectores es cercana a cero. Conviene entonces definir el vector de diferencia

$$\mathbf{d} = \mathbf{Y} - C\text{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0) = C\Psi\mathbf{a}_F, \tag{1.13}$$

el cual, antes de observar los valores de $\mathbf{Y}$ y $C\text{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0)$, se distribuye como $\mathcal{N}_m(\mathbf{0}, \sigma_a^2 C\Psi\Psi'C')$. Por lo tanto, la distancia estadística que tiene en cuenta la variabilidad en $\mathbf{d}$, toma la forma del estadístico

$$K = \mathbf{d}'(\sigma_a^2 C\Psi\Psi'C')^{-1}\mathbf{d} \sim \chi_m^2. \tag{1.14}$$

En consecuencia, de la siguiente afirmación probabilística

$$Pr[K \leq \chi_m^2(\alpha)] = 1 - \alpha \tag{1.15}$$

con $\chi_m^2(\alpha)$ el punto porcentual superior $\alpha$ de la distribución Ji-cuadrada con $m$ grados de libertad, se sigue que $\mathbf{Y} - C\text{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0)$ se encuentra dentro de la región de compatibilidad si el estadístico calculado satisface

$$K_{\text{calc}} = [\mathbf{Y} - C\text{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0)]'(\hat{\sigma}_a^2 C\hat{\Psi}\hat{\Psi}'C')^{-1}[\mathbf{Y} - C\text{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0)] \leq \chi_m^2(\alpha). \tag{1.16}$$

Por lo tanto, se concluye que $\mathbf{Y}$ es incompatible con $C\text{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0)$, al nivel de significación de $100(1-\alpha)\%$, si no se cumple la desigualdad (1.16). Esta regla de decisión es válida asintóticamente, puesto que se basa en la distribución Ji-cuadrada del estadístico $K$. Para ello, se supone que los parámetros involucrados en el estadístico calculado, $\hat{\Psi}$ y $\hat{\sigma}_a^2$, son conocidos. Debido a esto, se requiere que tales parámetros sean estimados de manera consistente, a fin de que la aproximación asintótica sea válida.

A partir de la verificación de compatibilidad entre las dos fuentes de información, se deduce alguna de las siguientes posibilidades.

*Caso 1.* Ambas fuentes son válidas; esta situación, denominada de "pronósticos con restricciones ciertas, compatibles con la historia" se aplica cuando, por ejemplo, hay una restricción de carácter presupuestal que debe cumplirse con certidumbre. O sea, cuando se sabe que la suma de los valores futuros de la variable en un cierto año, debe ser igual a un valor ya conocido al principio del año. Este caso fue estudiado por Guerrero (1989).

*Caso 2.* La información histórica proporciona pronósticos válidos del futuro, mientras que la información externa contiene incertidumbre, es decir, el vector de pronósticos $\mathrm{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0)$ es cierto, mientras que $\mathbf{Y}$ no lo es. Se enfrenta entonces el caso de "pronósticos con restricciones inciertas, compatibles o no con la historia". Ejemplos de esta situación son la combinación de pronósticos de modelos alternativos al de series de tiempo y la incorporación de conjeturas o juicios de expertos a los pronósticos del modelo ARIMA. Una parte fundamental de este método es la asignación de la incertidumbre a $\mathbf{Y}$, la cual, si se usara un modelo alternativo al de series de tiempo, sería la varianza residual de tal modelo. Esta situación fue considerada por Cholette (1982), Pérez-Porrúa (1984), Guerrero (1989), Pankratz (1989) y por Trabelsi y Hillmer (1989), con diferentes enfoques de solución, pero con resultados equivalentes.

*Caso 3.* Información adicional $\mathbf{Y}$ válida, mientras que los pronósticos $\mathrm{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0)$, son inválidos: i) debido a cambios previsibles en la estructura determinista del modelo, lo cual conduce a la necesidad de realizar un análisis de intervención de manera ex-ante; o ii) por cambios en la estructura estocástica del modelo. En estos dos casos, se requiere postular la nueva estructura y estimar los nuevos parámetros. Soluciones a estos problemas fueron propuestas por Guerrero (1991b). Otra posibilidad es que iii) se dé un cambio en los valores de los parámetros del modelo ARIMA original. En este caso se requiere determinar los parámetros que cambiarán significativamente sus valores, dentro del horizonte de pronóstico. Una solución a este problema se presentó en Guerrero (1990). Estas últimas tres posibilidades son útiles cuando, por ejemplo, las condiciones que rigen el sistema en el que se mueve la variable se prevé que cambiarán dentro del horizonte de pronóstico, lo cual no puede ser captado por el modelo, ya que éste se basa sólo en información histórica de la serie. Se enfrenta entonces el caso de "pronósticos con restricciones ciertas, incompatibles con la historia".

Cada una de las alternativas anteriores da origen a fórmulas de pronóstico y metodologías específicas para tener en cuenta la información histórica y las restricciones sobre los valores futuros de la serie. Dichas fórmulas se presentan en la sección que sigue.

## 2. Fórmulas Generales de Pronósticos con Restricciones

Para presentar las fórmulas generales, se necesita primero suponer que la información adicional viene dada por la expresión

$$\mathbf{Y} = C\mathbf{Z}_F + \mathbf{u} \quad \text{con} \quad \mathbf{u} \sim \mathcal{N}_m(\mathbf{0}, U). \tag{2.1}$$

El vector de errores aleatorios $\mathbf{u}$ no está correlacionado con la historia, ni con el futuro de la serie, es decir, $\mathrm{E}(\mathbf{Z}_0\mathbf{u}') = 0$ y $\mathrm{E}(\mathbf{a}_F\mathbf{u}') = 0$. Así, el criterio de minimizar el $ECM$ de los pronósticos conduce a las siguientes expresiones, relacionadas con los casos previamente mencionados. El asterisco de las fórmulas señala el caso particular en consideración.

*Pronóstico restringido óptimo*:

$$\hat{\mathbf{Z}}_{F^*} = \mathrm{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0) + A_*[\mathbf{Y} - C\mathrm{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0)]. \tag{2.2}$$

*Matriz de $ECM$ del vector de pronósticos*:

$$\mathrm{Cov}(\hat{\mathbf{Z}}_{F^*} - \mathbf{Z}_F) = \mathrm{Cov}\ [\mathrm{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0) - \mathbf{Z}_F\ ] - \sigma_a^2\Psi\Psi'C'A_*' - M_*. \tag{2.3}$$

*Estadístico para verificar compatibilidad entre fuentes de información:*

$$\mathrm{K}_{calc^*} = [\mathbf{Y} - C\mathrm{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0)]'J^{-1}[\mathbf{Y} - C\mathrm{E}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0)] \leq \chi^2_{g.l.^*}(\alpha), \tag{2.4}$$

donde

$$J = (\hat{\sigma}_a^2 C\hat{\Psi}\hat{\Psi}'C' + U + M_*).$$

La especificación de las fórmulas previas, en términos de los casos enunciados anteriormente, es como sigue.

*Caso 1.* Pronósticos con restricciones ciertas, compatibles con la historia. En este caso, no hay incertidumbre en las restricciones, así que $U = 0$. Además, $A_* = \Psi\Psi'C'(C\Psi\Psi'C')^{-1}, M_* = 0$ y g.l.* $= m$ (el número de restricciones linealmente independientes) con $m \leq H$. En este caso, las expresiones (1.7) a (1.9) son directamente aplicables.

*Caso 2.* Pronósticos con restricciones inciertas, compatibles o no con la historia. Ahora se tiene $U \neq 0$ y es necesario especificar esta matriz, lo cual se puede lograr (al nivel de significación de $100\alpha\%$) cuando $K_{calc^*} < \chi^2_m(\alpha)$. Además, se tiene $A_* = \sigma_a^2\Psi\Psi'C'(\sigma_a^2 C\Psi\Psi'C' + U)^{-1}, M_* = 0$ y, nuevamente, g.l.* $= m$.

*Caso 3.* Pronósticos con restricciones ciertas, incompatibles con la historia debido a un cambio en la estructura determinista del modelo. Para este caso, $U = 0$ y ahora se debe especificar una función dinámica de intervención, por ejemplo de primer orden, dada por $D_t^{N+1} = \omega(1 - \delta^{t-N})/(1 - \delta)$ si $t > N$. Por otro lado, la matriz $A_*$ resulta ser una inversa generalizada de $C$, mientras que $M_* = 0$ y g.l.* $= m$.

*Caso 4.* Pronósticos con restricciones ciertas, incompatibles con la historia por un cambio en la estructura estocástica del modelo. De nuevo $U = 0$, pero ahora se supone que el cambio es debido a contaminación por otro proceso. La consideración más simple de contaminación es por un proceso de ruido blanco $\mathcal{N}(0,\sigma_v^2)$, lo cual conduce a obtener $A_* = (\sigma_a^2\Psi\Psi'C' + \sigma_v^2C')(\sigma_a^2C\Psi\Psi' + \sigma_v^2CC')^{-1}, M_* = \sigma_v^2 I$ y g.l.* $= m$.

*Caso 5.* Pronósticos con restricciones ciertas, incompatibles con la historia debido a cambios en los valores de los parámetros del modelo. En este caso, el modelo no cambia su estructura y $U = 0$. Los parámetros estimados con datos históricos exclusivamente, producen la matriz $\Psi^0$ y los pronósticos $\mathrm{E}^0(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0)$, y al incorporar la información adicional se obtienen la matriz $\hat{\Psi}$ y los pronósticos $\hat{\mathrm{E}}(\mathbf{Z}_F \mid \mathbf{Z}_0, \mathbf{Y})$. Se obtiene así, $A_* = \hat{\Psi}\hat{\Psi}'C'(C\hat{\Psi}\hat{\Psi}'C')^{-1}, M_* = 0$ y g.l.* $= k \leq m$, con $k$ el número de parámetros del modelo. Ahora, se deben realizar pruebas de significación estadística, global e individuales, para determinar los parámetros que cambiarán su valor dentro del horizonte de pronóstico. Además es posible dar una interpretación a los cambios en los valores de los parámetros, con apoyo en la equivalencia entre modelos ARIMA y modelos del tipo estructural de tendencia + estacionalidad + irregularidad.

## 3. Seguimiento de la Meta del PIB de México para el Año 2001

Para ilustrar la metodología de pronósticos con restricciones, considérese la serie del Producto Interno Bruto ($PIB$) real de México, a precios de 1993, que registra el Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI) de manera trimestral. Otros ejemplos, también correspondientes a la economía mexicana, aparecen en Gómez (1987) y Guerrero (1989). Asimismo, Alvarez, Delrieu y Jareño (1997) aplicaron la metodología al Indice de Precios al Consumidor de España, para evaluar la política económica.

### 3.1 Un Modelo para Representar el Comportamiento del PIB

Un modelo ARIMA con efectos de intervención, apropiado para representar a la serie trimestral $\{\log(PIB_t)\}$ durante los $N = 55$ datos del periodo que cubre desde el primer trimestre de 1987 hasta el tercer trimestre del año 2000, es

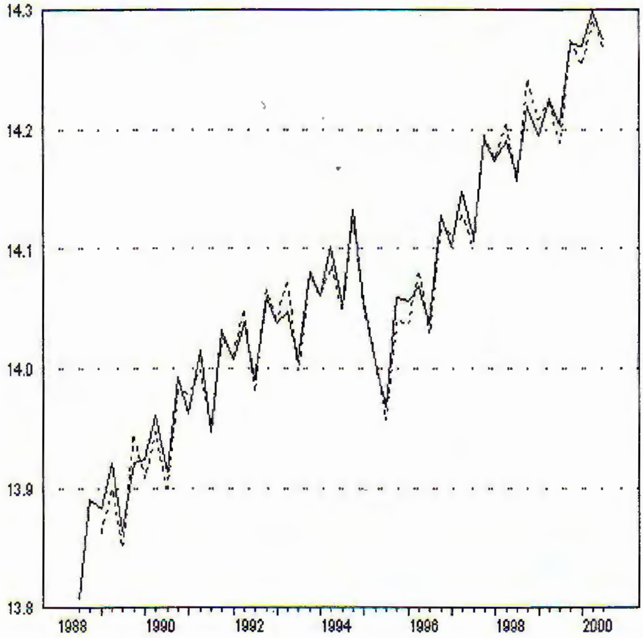
$$\log\,(\widehat{PIB_t}) = \left[\frac{\underset{(0.0124)}{-0.0589}B - \underset{(0.0123)}{0.0782}B^2}{\nabla}\right] P_{I,t} + \hat{N}_t \tag{3.1}$$

con

$$(1-0.2733B)\nabla\nabla_4\hat{N}_t = (1-0.6146B^4)a_t, \hat{\sigma}_a = 0.0137 \text{ y } \mathrm{Q}'(22) = 24.59. \tag{3.2}$$

Los valores en paréntesis muestran errores estándar y la intervención se refiere al denominado "error de diciembre de 1994", de tal manera que la función de pulso $P_{I,t}$ toma el valor 1 en $t$ = último trimestre de 1994 y es 0 en cualquier otro caso. En la Figura 1 se aprecia el ajuste logrado.

Figura 1. Logaritmo del $PIB$ Real de México (Observado en línea continua y estimado en línea punteada)



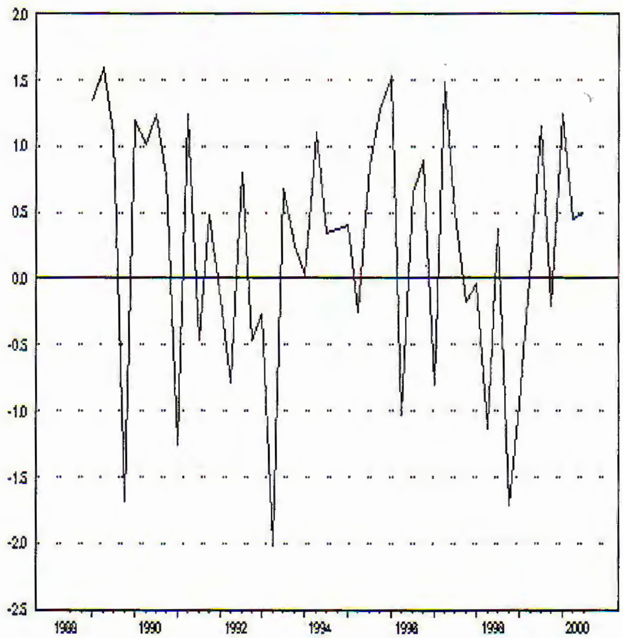

Dado que el modelo de análisis de intervención está apoyado en una estructura estocástica ARIMA, donde la función de intervención juega el papel de la constante 0 del modelo (1.1), la obtención de pronósticos restringidos se realiza con la técnica sin modificación alguna. Además, el uso del logaritmo de la variable $PIB$ obedece a motivos de estabilización de la varianza y a facilidad de interpretación de los resultados, en términos de crecimientos relativos.

De hecho, si se considera la variable $X_t$ = Tasa de crecimiento trimestral del $PIB$, ésta cumple aproximadamente con la igualdad $X_t = \nabla \log\ (PIB_t)$ de tal manera que el modelo (3.1) indica que la intervención afectó a $X_t$ con caídas de aproximadamente 5.89% y 7.82% en los trimestres primero y segundo de 1995.

Respecto al modelo (3.2) para la parte estocástica, cabe destacar que satisfizo los criterios de validación (véase Guerrero, 1991a). En particular, el estadístico $Q'$ de Ljung y Box, al compararse con la distribución Ji-cuadrada con 22 de grados de libertad, brindó respaldo empírico al modelo, en lo que toca al supuesto de ruido blanco de los errores.

La Figura 2 muestra el comportamiento gráfico de los residuos correspondientes. En esta gráfica se puede apreciar que los residuos tienen variabilidad aproximadamente constante y que no hay patrones atípicos u observaciones extremas.

Figura 2. Residuos estandarizados del logaritmo del $PIB$ real de México




### 3.2 Análisis con Datos hasta del Tercer Trimestre de 2000

Para la aplicación de pronósticos restringidos se consideró la meta de 4.5% para el crecimiento anual ($\Delta\%$) del $PIB$ en el año 2001, que fue la cifra propuesta por el gobierno en diciembre del año 2000, al asumir su cargo el Presidente Fox. El interés del análisis radica en obtener una trayectoria trimestral para el crecimiento del $PIB$, que sea consistente con esa cifra anual y con la historia. Los valores desconocidos que se deseaba pronosticar son los de los trimestres posteriores a $N$, el tercero del año 2000, con un horizonte máximo de pronóstico de $H = 9$ trimestres (lo cual incluye al año 2002 completo). La información adicional especifica una sola restricción ($m = 1$) de forma que la relación que existe entre el dato conocido y los valores futuros del $PIB$ es

$$1.045 = PIB_{N+5}/PIB_{N+1}, \tag{3.3}$$

donde $N + 5$ corresponde al cuarto trimestre del año 2001 y $N + 1$ al cuarto trimestre del 2000. Nótese que esta expresión no corresponde a una combinación lineal del vector de valores futuros de la serie $\{PIB_t\}$. Sin embargo, dicha relación puede reescribirse como

$$\log(1.045) = \log(PIB_{N+5}) - \log(PIB_{N+1}) \tag{3.4}$$

de tal forma que se obtiene una combinación lineal del tipo (1.5), del vector de valores futuros de la variable transformada, o sea, si $\mathbf{Z}_F = (\log(PIB_{N+1}), \ldots, \log(PIB_{N+9}))'$, entonces, se tiene que $\mathbf{Y} = C\mathbf{Z}_F$, con $\mathbf{Y} = \log(1.045)$ y $C = (-1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$. A partir de los parámetros estimados del modelo (3.2) se obtuvieron las ponderaciones del Cuadro 1.

Con los valores del Cuadro 1 se construyó la matriz $\hat{\Psi}$ y se realizó la verificación de compatibilidad, lo que dio por resultado el estadístico $K_{calc} = 0.40$, cuyo nivel de significación fue 0.53. En consecuencia, la restricción para el crecimiento del $PIB$ en el 2001 resultó compatible con el registro histórico de la serie (con datos hasta el tercer trimestre de 2000). En el Cuadro 2 se muestran los pronósticos de $\{\log(PIB_t)\}$ tanto irrestrictos como restringidos, junto con su error estándar correspondiente. Adicionalmente, se presentan los pronósticos de la serie obtenidos como simple retransformación de los anteriores, es decir, si se escribe $\hat{Z}_N(h) = \log(\widehat{PIB}_N)(h)$, entonces

$$\widehat{PIB}_N(h) = \exp\left[\hat{Z}_N(h)\right] \quad \text{para} \quad h = 1, \ldots, H. \tag{3.5}$$

Los resultados mostrados en el Cuadro 2 permiten apreciar que el crecimiento de los pronósticos irrestrictos en el año 2001 es de 6.0%, mientras que el de los restringidos es 4.5%, que es el valor impuesto por la restricción, la cual se satisface exactamente. Conviene observar también el comportamiento de los errores estándar para los dos tipos de pronósticos que se calcularon para $\{\log(PIB_t)\}$. En lo que toca a los irrestrictos, el error estándar crece conforme el horizonte de pronóstico se aleja, lo que era de esperar de acuerdo con la teoría estadística (véase Guerrero, 1991a, Cap. 6). En cambio, los errores estándar de los pronósticos restringidos tienden a disminuir hacia el cuarto trimestre de 2001, debido al tipo de restricción que se consideró. Por otro lado, los errores estándar son más pequeños para los pronósticos restringidos que para los irrestrictos, como ya se sabía que debía ocurrir por lo indicado después de la relación (1.10). La conclusión de este ejercicio es que, con datos que cubrían hasta el tercer trimestre del año 2000, la meta del 4.5% era razonablemente válida y la trayectoria trimestral esperable para el $PIB$ debía ser semejante a la que se muestra en la columna de pronósticos restringidos del Cuadro 2. En las dos últimas columnas de este cuadro se hace uso de la abreviatura Mp para denotar Millones de pesos, a precios de 1993.

Por otro lado, conviene apreciar que los resultados anteriores permiten construir también intervalos de predicción para el $PIB$. Para esto se construye primero un intervalo de predicción para la variable $\log(\widehat{PIB}_{N+h})$ con $h = 1, \ldots, H$, según se indica en la expresión (1.12), donde los valores de $\log(\widehat{PIB}_N)(h)$ y err.est.$(h)$ provienen del Cuadro 2.

Cuadro 1. Ponderaciones de promedios móviles puros del modelo para $\{\log(PIB_t)\}$

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{\Psi}_i$ | 0.7267 | 0.8014 | 0.7810 | 1.1720 | 1.0651 | 1.0943 | 1.0864 | 1.4739 |

Cuadro 2. Pronósticos de $\{\log(PIB_t)\}$ y de $PIB_t$ a partir del tercer trimestre de 2000.
(Restricción de que el crecimiento anual del PIB durante 2001 sea de 4.5%)

| Pronósticos de $\{PIB_t\}$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Trim. | Irrestrictos | Error estánd. | Restringidos | Error estánd. | Irrestrictos (Mp) | Restringidos (Mp) |
| 2000:4 | 14.3443 | 0.0137 | 14.3434 | 0.0137 | 1699894.5 | 1695378.7 |
| 2001:1 | 14.3322 | 0.0170 | 14.3275 | 0.0153 | 1676431.3 | 1668557.2 |
| 2001:2 | 14.3597 | 0.0202 | 14.3519 | 0.0160 | 1723266.9 | 1709825.9 |
| 2001:3 | 14.3325 | 0.0229 | 14.3217 | 0.0154 | 1676897.9 | 1658961.7 |
| 2001:4 | 14.4029 | 0.0280 | 14.3874 | 0.0137 | 1799338.0 | 1771670.7 |
| $\Delta\%$ | | | | | 6.0% | 4.5% |
| 2002:1 | 14.3905 | 0.0316 | 14.3747 | 0.0195 | 1777119.0 | 1749323.9 |
| 2002:2 | 14.4181 | 0.0350 | 14.4008 | 0.0219 | 1826913.7 | 1795587.5 |
| 2002:3 | 14.3908 | 0.0380 | 14.3725 | 0.0247 | 1777717.0 | 1745423.5 |
| 2002:4 | 14.4613 | 0.0431 | 14.4409 | 0.0287 | 1907529.8 | 1868973.7 |
| $\Delta\%$ | | | | | 6.0% | 5.5% |

Posteriormente, se aplica la exponenciación a cada uno de los extremos de dicho intervalo, y de esta forma se obtiene un intervalo de predicción para la variable $PIB_{N+h}$.

Así, un intervalo de predicción del 95% de probabilidad, con base en el pronóstico irrestricto del primer trimestre de 2001, resulta ser (1651918.7, 1743058.7). De igual manera, se obtiene el intervalo de predicción (1650432.6, 1741490.7), que también es del 95% de probabilidad, pero está basado ahora en el pronóstico restringido.

### 3.3 Inclusión del Dato para el Cuarto Trimestre de 2000

Una vez que el dato correspondiente al cuarto trimestre de 2000 (1657487.0 Mp) estuvo disponible, se observó que dicho valor pertenecía a los intervalos de 95% de probabilidad obtenidos con ambos tipos de pronóstico. No había pues evidencia para pensar en algún cambio que hubiera podido ocurrir en el sistema económico dentro del cual se genera el $PIB$ de México.

Por tal motivo, se volvió a estimar el modelo (3.1)-(3.2) con todos los datos, que incluyeron hasta el cuarto trimestre del 2000, dando como resultado

$$\log(PIB_t) = \left\{\frac{-0.0591B - 0.0780B^2}{\nabla}\right\} P_{I,t} + \hat{N}_t \tag{3.6}$$

con

$$(1 - 0.2948B)\nabla\nabla_4\hat{N}_t = (1 - 0.5875B^4)a_t, \hat{\sigma}_a = 0.0140 \text{ y } Q'(22) = 18.95, \tag{3.7}$$

cuya interpretación es prácticamente idéntica a la anterior. Desde luego, con los nuevos valores de los parámetros se recalcularon las ponderaciones de promedios móviles puros.

Nuevamente, se utilizó la técnica de pronósticos restringidos, imponiendo la misma restricción de crecimiento anual del $PIB$ que se impuso previamente, o sea, del 4.5% anual. Los trimestres que ahora se deseaba pronosticar son los posteriores al cuarto del año 2000, con un horizonte máximo de pronóstico de $H = 8$ trimestres.

De nuevo, la información adicional especifica una sola restricción ($m = 1$) de forma que la relación que existe entre el dato conocido y los valores futuros del $PIB$ es

$$1.045 = PIB_{N+4}/PIB_N, \tag{3.8}$$

donde $N+4$ corresponde al cuarto trimestre del año 2001 y $N$ al cuarto trimestre del año 2000, o sea $PIB_N = 1657487.0$, que ya era conocido. La respectiva combinación lineal del vector de valores futuros,

$$\mathbf{Z}_F = (\log(PIB_{N+1}), \ldots, \log(PIB_{N+8}))'$$

es

$$\log(1.045) + \log(1657487.0) = \log(PIB_{N+4}), \tag{3.9}$$

de tal forma que ahora se tiene $\mathbf{Y} = C\mathbf{Z}_F$, con $\mathbf{Y} = \log(1.045) + \log(1657487.0)$ y $C = (0,0,0,1,0,0,0,0)$. El valor que se obtuvo de $K_{calc} = 0.22$, brinda un nivel de significación de 0.64, lo cual indica compatibilidad de la restricción con los datos históricos.

Asimismo, el Cuadro 3 muestra los pronósticos que se obtuvieron. En el caso irrestricto, se aprecia un crecimiento anual pronosticado para el 2001 de 5.6%, aunque su intervalo de predicción del 90% de probabilidad (especificado mediante sus límites inferior y superior) va de 1.7 a 9.7 por ciento. En el caso restringido se observa que el crecimiento esperado es de 4.5%, sin variabilidad alguna, ya que la restricción se supuso cierta.

Así pues, con datos que incluían hasta el último trimestre del año 2000, era todavía razonable pensar que la meta del 4.5% se podría alcanzar en el año 2001. Los pronósticos obtenidos, tanto irrestrictos como restringidos (junto con sus intervalos de predicción del 90% de probabilidad) se muestran en la Figura 3.

Nótese como la trayectoria de los pronósticos irrestrictos queda prácticamente cubierta por los intervalos de probabilidad de los pronósticos restringidos, lo cual permite corroborar la compatibilidad de las restricciones con el registro histórico de la serie.

### 3.4 Análisis con Datos que Incluyen el Primer Trimestre de 2001

El siguiente ejercicio consistió en hacer uso del dato del primer trimestre de 2001 (1604825.4 Mp), el cual estuvo fuera del intervalo de predicción del 90% que se muestra en el Cuadro 3.

Este hecho conduce a la posibilidad de que se hubiera presentado algún tipo de rompimiento estructural en la dinámica del sistema económico, lo cual afectó en particular al $PIB$. Por esta razón, no era aceptable volver a estimar el modelo con la misma estructura, pero tampoco se podía construir un nuevo modelo, pues no había datos suficientes.

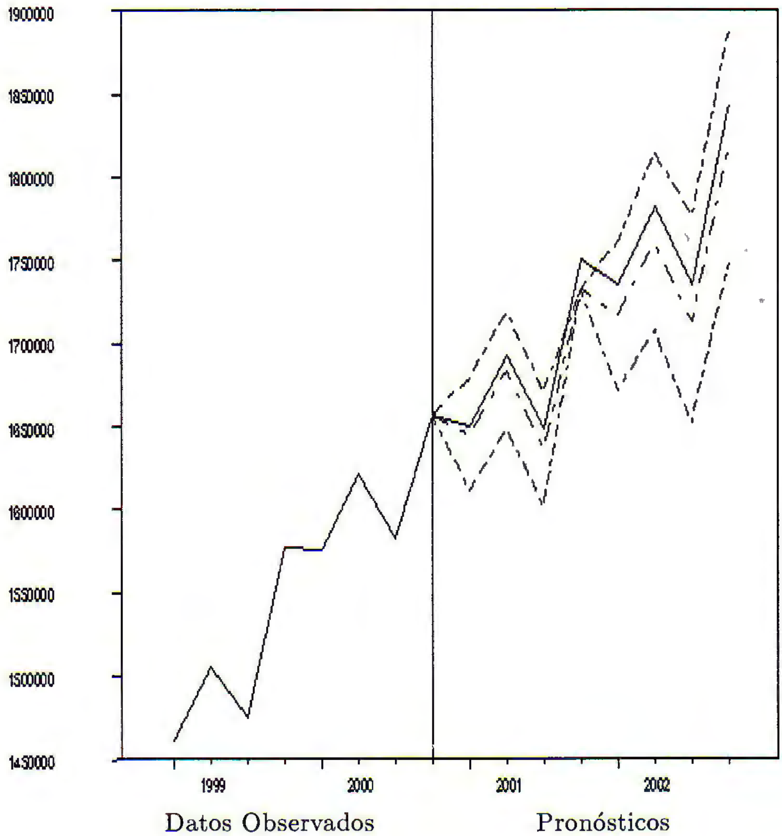
Cuadro 3. Pronósticos de la serie $\{PIB_t\}$, a partir del cuarto trimestre de 2000
(Restricción de que el crecimiento del PIB durante 2001 sea de 4.5%)

| Trim. | Irrestrictos (Mp) | Límite inf. 90% | Límite sup. 90% | Restringidos (Mp) | Límite inf. 90% | Límite sup. 90% |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2001:1 | 1649368.3 | 1611740.8 | 1687874.2 | 1644365.0 | 1611118.2 | 1678297.9 |
| 2001:2 | 1692016.0 | 1644904.7 | 1740476.7 | 1683102.4 | 1647825.0 | 1719135.0 |
| 2001:3 | 1648437.6 | 1593909.0 | 1704831.6 | 1636258.8 | 1602131.7 | 1671112.8 |
| 2001:4 | 1750794.5 | 1685503.3 | 1818614.8 | 1732073.9 | 1732073.9 | 1732073.9 |
| Δ% | 5.6% | 1.7% | 9.7% | 4.5% | 4.5% | 4.5% |
| 2002:1 | 1734869.8 | 1655478.6 | 1818068.3 | 1715856.1 | 1671809.0 | 1761063.6 |
| 2002:2 | 1781947.8 | 1690177.2 | 1878701.1 | 1760277.1 | 1707562.5 | 1814619.2 |
| 2002:3 | 1735415.3 | 1636570.6 | 1840229.9 | 1712948.9 | 1651900.5 | 1776253.4 |
| 2002:4 | 1843372.7 | 1729444.3 | 1964806.1 | 1816961.7 | 1748683.0 | 1887906.3 |
| Δ% | 5.3% | −1.2% | 12.2% | 4.9% | −4.1% | 9.0% |

Cuadro 4. Pronósticos de la serie $\{PIB_t\}$, a partir del cuarto trimestre de 2000
(Restricción de que el valor del PIB en el primer trimestre de 2001 sea 1604825.4)

| Trimestre | Restringidos (Mp). | Límite inf. 90% | Límite sup. 90% |
|---|---|---|---|
| 2001:1 | 1604825.4 | 1604825.4 | 1604825.4 |
| 2001:2 | 1659663.8 | 1621801.4 | 1698410.1 |
| 2001:3 | 1613075.2 | 1568161.9 | 1659274.9 |
| 2001:4 | 1714438.9 | 1657727.0 | 1773090.9 |
| Δ% | 3.4% | 0.0 | 7.0% |

Figura 3. Pronósticos del $PIB$ real trimestral de México.
(Irrestrictos en línea continua y restringidos,
con límites de 90%, en línea punteada)




Debido a lo anterior, se optó por seguir utilizando el modelo (3.6)-(3.7), sin incluir el nuevo dato en la estimación, pero sí en la información adicional disponible. Es decir, había una restricción adicional a tener en cuenta, esto es, que el pronóstico del primer trimestre de 2001 tomara el valor observado del $PIB$. Por lo tanto, las $m = 2$ restricciones a considerar sobre el vector de valores futuros $\mathbf{Z}_F = (\log(PIB_{N+1}), \ldots, \log(PIB_{N+8}))'$, fueron $\log(1.045) + \log(1657487.0) = \log(PIB_{N+4})$ y $\log(1604825.4) = \log(PIB_{N+1})$, de tal manera que la relación $\mathbf{Y} = C\mathbf{Z}_F$ se cumple con

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \log(1.045) + \log(1657487.0) \\ \log(1604825.4) \end{pmatrix}$$

y

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

En esta situación se obtuvo el valor $K_{calc} = 4.06$ que, comparado con la distribución Ji-cuadrada con 2 grados de libertad, proporciona un nivel de significación de 0.14. La compatibilidad de las restricciones con los datos históricos ya no es tan clara como antes, lo cual hizo pensar en la posibilidad de asignarle incertidumbre a la restricción del crecimiento. Para esto se requiere primero imponer solamente la restricción de que el $PIB$ del primer trimestre tomara el valor observado. En estas condiciones se obtuvieron los pronósticos que se muestran en el Cuadro 4.

En los resultados del Cuadro 4 se observa que el crecimiento esperado en estas condiciones sería de 3.4%. Por lo tanto, para ser congruentes con lo que se hizo desde el principio de estos ejercicios, la meta debería ser una fracción de este valor (en el ejercicio de la Sección 3.2, se vio que el pronóstico sin restricción de crecimiento era de 6.0%, mientras que se propuso como meta el 4.5%, o sea, $\frac{3}{4}$ partes del pronóstico irrestricto). Así pues, la meta de crecimiento anual del $PIB$ debería ser entonces de $\frac{3}{4}$ (3.4%) = 2.6%, pero ahora con incertidumbre. Esta incertidumbre se mide a través de la varianza de la restricción, según se aprecia en la expresión (2.1). El valor de la varianza surgió al suponer que la restricción debería comportarse como una variable con distribución $\mathcal{N}(0.026, U_1)$, donde $U_1$ es tal que se cumple la relación probabilística $\Pr\{Y_1 < 0.045\} = 0.95$, es decir, se supuso que con probabilidad de 95%, el crecimiento anual del $PIB$ sería menor que 4.5%. En estas circunstancias, y por propiedades de la distribución Normal, se debe cumplir la igualdad $0.045 = 0.026 + 1.645\sqrt{U_1}$, de donde se obtiene el valor $U_1 = 0.00014$. Esta varianza fue introducida para calcular los pronósticos con restricciones sujetas a incertidumbre, donde el vector de valores futuros seguía siendo $\mathbf{Z}_F = (\log(PIB_{N+1}), \ldots, \log(PIB_{N+8}))'$. Las dos restricciones a considerar fueron: $\log(1.026) + \log(1657487.0) = \log(PIB_{N+4})$ y $\log(1604825.4) = \log(PIB_{N+1})$, de tal manera que ahora se tiene:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log(1.026) + \log(1657487.0) \\ \log(1604825.4) \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & U_{12} \\ U_{12} & U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00014 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

y

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con la especificación (3.11) se obtuvieron los pronósticos etiquetados como Restringidos "AU", que se muestran en el Cuadro 5. Mientras los que dicen Restringidos "A" tienen en cuenta las dos restricciones como ciertas, de tal manera que la matriz $U$ es igual a la matriz 0. Los pronósticos irrestrictos no se incluyen aquí, pues son idénticos a los del Cuadro 3 si no se incluye la restricción sobre el primer trimestre del año 2001, y son iguales a los del Cuadro 4 si dicho valor sí se impone como restricción.

Cuadro 5. Pronósticos de la serie $\{PIB_t\}$, a partir del cuarto trimestre de 2000
(Restricciones para 2001: Crecimiento de 2.6% y primer trimestre igual a 1604825.4)

| Trim. | Restringido "A" (Mp) | Límite inf. 90% | Límite sup. 90% | Restringido "AU" (Mp). | Límite inf. 90% | Límite sup. 90% |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2001:1 | 1604825.4 | 1604825.4 | 1604825.4 | 1604825.4 | 1604825.4 | 1604825.4 |
| 2001:2 | 1654349.4 | 1622608.5 | 1686711.2 | 1655680.8 | 1622303.1 | 1689745.1 |
| 2001:3 | 1604842.3 | 1573178.9 | 1637143.1 | 1606903.4 | 1571458.6 | 1643147.6 |
| 2001:4 | 1699752.9 | 1699752.9 | 1699752.9 | 1703424.7 | 1674967.5 | 1732365.3 |
| $\Delta$% | 2.6% | 2.6% | 2.6% | 2.8% | 1.1% | 4.5% |
| 2002:1 | 1666745.9 | 1627523.5 | 1706913.6 | 1669915.8 | 1623715.6 | 1717430.5 |
| 2002:2 | 1714998.8 | 1664318.3 | 1767222.6 | 1718961.4 | 1659851.0 | 1780176.9 |
| 2002:3 | 1667380.9 | 1608394.3 | 1728530.8 | 1671526.3 | 1604534.3 | 1741315.2 |
| 2002:4 | 1769035.6 | 1702611.5 | 1838051.2 | 1774085.2 | 1697257.9 | 1854390.2 |
| $\Delta$% | 4.1% | 0.2% | 8.1% | 5.9% | 1.3% | 10.7% |

Cuadro 6. Pronósticos de la serie $\{PIB_t\}$, a partir del cuarto trimestre de 2000
(Restricciones para 2001: Valores de los trimestres 1 (1604825.4) y 2 (1620922.6))

| Trimestre | Restringidos (Mp). | Límite inf. 90% | Límite sup. 90% |
|---|---|---|---|
| 2001:1 | 1604825.4 | 1604825.4 | 1604825.4 |
| 2001:2 | 1620922.6 | 1620922.6 | 1620922.6 |
| 2001:3 | 1586430.7 | 1550239.0 | 1623467.3 |
| 2001:4 | 1682661.8 | 1635810.9 | 1730854.5 |
| $\Delta$% | 1.5% | −1.3% | 4.4% |

### 3.5 Pronósticos que Incluyen el Dato del Segundo Trimestre de 2001

El último ejercicio que se realizó, tuvo en cuenta el dato correspondiente al segundo trimestre de 2001 (último dato disponible al momento de realizar este estudio). El valor observado del $PIB$ fue 1620922.6 Mp, el cual resultó fuera de los intervalos de probabilidad del Cuadro 5. Nuevamente, hubo necesidad de usar una restricción incierta para el crecimiento y se procedió de manera similar al ejercicio de la Sección 3.4. Es decir, se requería primero conocer el pronóstico que no tuviera en cuenta la restricción del crecimiento anual, sino solamente la restricción de que los dos primeros trimestres del $PIB$ tomaran sus valores observados. Así, se obtuvieron los pronósticos del Cuadro 6.

Es importante resaltar que se obtuvo el estadístico $K_{calc} = 6.64$ al imponer las dos restricciones de los valores observados y que éste alcanzó el nivel de significación de 0.04, lo cual se interpreta como incompatibilidad de las dos observaciones del año 2001, con respecto a la historia de la serie. Dicho de otra manera, algo imprevisible a partir de los datos históricos de la serie del $PIB$, originó que en los dos primeros trimestres del año 2001 se observaran valores significativamente menores que los esperados.

Por otro lado, con el crecimiento esperado que señala el Cuadro 6, se calculó la proporción $\frac{3}{4}(1.5\%) = 1.1\%$ y se procedió a especificar la varianza de esta restricción. Ya que ahora la restricción incierta debía comportarse como una $\mathcal{N}(0.011, U_1)$, con $U_1$ tal que se cumpliera la relación probabilística $\Pr\{Y_1 < 0.026\} = 0.95$. De esta forma, la igualdad por satisfacer vino a ser $0.026 = 0.011 + 1.645\sqrt{U_1}$, de donde $U_1 = 0.00008$. Ahora, se tiene una restricción más por considerar, de tal manera que las $m = 3$ restricciones a imponer sobre el vector de valores futuros $\mathbf{Z}_F = (\log(PIB_{N+1}), ..., \log(PIB_{N+8}))'$, son $\log(1.011) + \log(1657487.0) = \log(PIB_{N+4}), \log(1604825.4) = \log(PIB_{N+1})$ y $\log(1620922.6) = \log(PIB_{N+2})$. Así, se obtuvo la especificación

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log(1.011) + \log(1657487.0) \\ \log(1604825.4) \\ \log(1620922.6) \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & U_{12} & U_{13} \\ U_{12} & U_2 & U_{23} \\ U_{13} & U_{23} & U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

y

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para el caso de las restricciones ciertas, se obtuvo el valor de $K_{calc} = 6.70$ que, al compararlo con la distribución Ji-cuadrada con 3 grados de libertad, proporcionó el nivel de significación de 0.08. Esto condujo a pensar que las restricciones de crecimiento de 1.1%, y de los datos de los dos primeros trimestres, no eran ya tan discrepantes con el comportamiento de la serie histórica.

Cuadro 7. Pronósticos de la serie $\{PIB_t\}$, a partir del cuarto trimestre de 2000 (Restricciones para 2001: Crecimiento de 1.1% y los primeros dos trimestres observados)

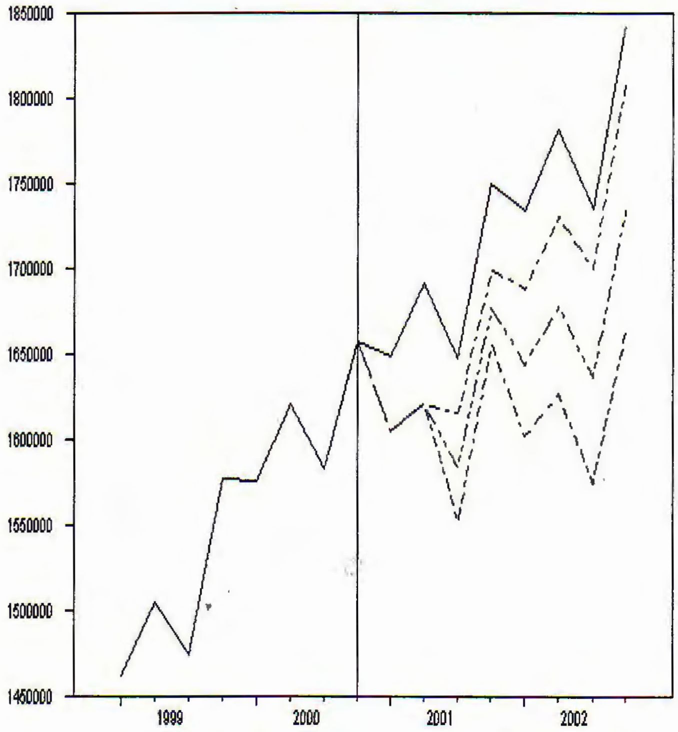
| Trim. | Restringido "A"(Mp) | Límite inf. 90% | Límite sup. 90% | Restringido "AU"(Mp). | Límite inf. 90% | Límite sup. 90% |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2001:1 | 1604825.4 | 1604825.4 | 1604825.4 | 1604825.4 | 1604825.4 | 1604825.4 |
| 2001:2 | 1620922.6 | 1620922.6 | 1620922.6 | 1620922.6 | 1620922.6 | 1620922.6 |
| 2001:3 | 1583344.7 | 1553762.7 | 1613489.8 | 1584003.1 | 1552892.5 | 1615736.9 |
| 2001:4 | 1675719.4 | 1675719.4 | 1675719.4 | 1677199.3 | 1655456.8 | 1699227.4 |
| $\Delta$% | 1.1% | 1.1% | 1.1% | 1.2% | −0.1% | 2.5% |
| 2002:1 | 1643544.5 | 1604989.5 | 1683025.7 | 1644769.5 | 1602287.0 | 1688378.5 |
| 2002:2 | 1676836.0 | 1629705.7 | 1725329.2 | 1678154.0 | 1627281.1 | 1730617.3 |
| 2002:3 | 1634973.8 | 1577513.3 | 1694527.4 | 1636520.0 | 1574855.8 | 1700598.6 |
| 2002:4 | 1734103.3 | 1669036.9 | 1801706.2 | 1736083.7 | 1665011.8 | 1810189.3 |
| $\Delta$% | 3.5% | −0.1% | 7.5% | 3.5% | −0.7% | 7.9% |

Cuadro 8. Pronósticos del crecimiento del PIB real de México para 2001 y 2002

| Datos al | Sin meta de crecimiento | | Con meta cierta | | Con meta incierta | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| trimestre | 2001 | 2002 | 2001 | 2002 | 2001 | 2002 |
| 2000:3 | 6.0% | 6.0% | 4.5% | 5.5% | — | — |
| 2000:4 | 5.6% | 5.3% | 4.5% | 4.9% | — | — |
| 2001:1 | 3.4% | — | — | — | 2.8% | 5.9% |
| 2001:2 | 1.5% | — | — | — | 1.2% | 3.5% |

Adicionalmente, los resultados del Cuadro 7 refuerzan la idea de que (con datos hasta del segundo trimestre de 2001) un crecimiento cercano al 1.2% para el año 2001 es razonable, aunque pudiera llegar a registrarse una caída del 0.1% o un crecimiento de, a lo más, un 2.5%. El comportamiento que se muestra en la Figura 4 también permite confirmar la idea de que los pronósticos irrestrictos (con datos hasta el último trimestre del año 2000) difieren considerablemente de la trayectoria probabilística marcada por los pronósticos restringidos con incertidumbre. De hecho, el optimismo con el que se inició el periodo sexenal del Presidente Fox, bien podría deberse a que se preveía una trayectoria como la de los pronósticos irrestrictos.

Figura 4. Pronósticos del *PIB* real trimestral de México.
(Irrestrictos en línea continua y restringidos "AU", con límites de 90% de probabilidad, en línea punteada)




Datos Observados Pronósticos

A manera de resumen de los resultados obtenidos en los ejercicios previos, en el Cuadro 8 se muestran los distintos pronósticos que se obtuvieron, de acuerdo con la disponibilidad de las observaciones del PIB.

Es de subrayar el hecho de que las metas para el 2001 que surgieron de estos ejercicios, ya sean ciertas o inciertas, tienen apoyo empírico y se puede construir la trayectoria trimestral correspondiente para cada una de ellas, con sus correspondientes intervalos de predicción. Debido a la cercanía de estas metas con las que ha fijado el gobierno durante el año 2001 (aparecidas en periódicos y en diversos medios de comunicación), se podría pensar que estos ejercicios de pronósticos con restricciones constituyen una forma de racionalizar los anuncios gubernamentales. Por otro lado, las tasas de crecimiento para el año 2002 deben verse con mucha cautela, debido a la inestabilidad que ha mostrado el sistema económico.

## 4. Conclusiones y Recomendaciones

El área de pronósticos con restricciones se ha visto enriquecida con la aparición de otros enfoques de solución distintos del mencionado en este artículo, dentro de los cuales sobresalen el Bayesiano (véase de Alba, 1993) y el de Mínimos Cuadrados Generalizados (Alvarez, Delrieu y Jareño, 1997). Asimismo, en lo que toca a las aplicaciones, no sólo se puede dar seguimiento a metas por lograr, sino que este método permite solucionar problemas como el de combinar información histórica y preliminar (Guerrero, 1993a), el de completar series con datos faltantes (Guerrero, 1993b; Nieto y Martínez, 1996) o el de combinar información no-cuantitativa con los pronósticos ARIMA (Guerrero y Berumen, 1998). Por otro lado, la aplicación de esta técnica a otra clase de modelos de series de tiempo, distinta de los ARIMA, es una posibilidad que ya ha sido explorada por Rosas y Guerrero (1994) en lo que toca a métodos de suavizamiento exponencial y por, entre otros, Doan, Litterman y Sims (1984), Sánchez (1988), Pankratz (1989) y Ruíz (1993), al considerar series de tiempo múltiples.

Respecto a la aplicación al seguimiento de la meta de crecimiento del PIB para el año 2001, es importante resaltar el hecho de que se utilizó un modelo univariado de tipo ARIMA con intervenciones. Por ello, la explicación que se obtiene del fenómeno es pobre, ya que no se tiene en cuenta la existencia de variables que pudieran servir para explicar el por qué de la caída observada en el PIB durante los primeros trimestres del año 2001. Es de esperar que un modelo de series múltiples que tenga en cuenta, entre otras variables, al PIB de los Estados Unidos o al déficit en la balanza comercial de México, será mucho más rico en explicaciones de carácter teórico-económico que el modelo utilizado en este trabajo.

Las metodologías de análisis con modelos para series múltiples se han desarrollado mucho en fechas recientes, no así la técnica de pronósticos restringidos asociada con ellos, pues haría falta considerar en tales pronósticos, por ejemplo, la estructura de cointegración y la forma de corrección de errores para los modelos. Por tales motivos, en un estudio actualmente en desarrollo por el presente autor junto con algunos colaboradores, se intenta generalizar la metodología de pronósticos restringidos a series múltiples, pero teniendo en consideración dichos aspectos. El objetivo es aplicar la técnica al seguimiento conjunto de diversas variables, entre las cuales se encuentran el PIB real de México y la inflación en los precios al consumidor.

Otro punto que debe subrayarse es que, al momento de aplicar la técnica de pronósticos restringidos, primero se debe poner en duda la viabilidad empírica de las metas por lograr y después se puede proceder a obtener los pronósticos. En el caso del $PIB$ de México se detectó un cambio estructural que hizo inviable la meta originalmente planteada. En tales circunstancias no se pudo emplear la técnica con cambio estructural en el horizonte de pronóstico, porque ello hubiera implicado credibilidad en la meta. Lo indicado hubiera sido realizar un análisis de intervención tradicional, pero esto tampoco fue posible porque no había suficientes datos posteriores al momento de la intervención, que se piensa debe haber ocurrido a fines del año 2000. Es por ello que se decidió usar pronósticos con restricciones inciertas, aunque más que pronósticos, lo que se obtiene con esta metodología son trayectorias de escenarios compatibles con la creencia de que la meta de crecimiento será el valor impuesto como restricción.

La idea del escenario es preferible a la del pronóstico en el análisis que aquí se realizó, porque con ella se hace explícita la presencia de un elemento adicional al registro histórico de la variable, es decir, se condicionan los resultados y se tiene que pensar que "si tal cosa ocurre, entonces ..." Con ello se trata de evitar la percepción errónea del pronóstico, de que se puede llegar a conocer el futuro con certeza, aun cuando los pronósticos tengan asociados sus intervalos de predicción, y se haya presentado el modelo estadístico de donde se obtuvieron los resultados, como sucedió en este trabajo.

## Bibliografía


Alvarez, L. J., J. C. Delrieu, and J. Jareño (1997), Restricted forecasts and economic target monitoring: An application to the Spanish Consumer Price Index. *Journal of Policy Modeling*, 19, pp. 333-349.

Bell, W. (1984). Signal extraction for nonstationary time series. *The Annals of Statistics*, 12, pp. 646-664.

Cholette, P. A. (1982). Prior information and ARIMA forecasting, *Journal of Forecasting* 1, pp. 375-383.

de Alba, E. (1993). Constrained forecasting in autoregressive time series models: A Bayesian analysis. *International Journal of Forecasting*, 9, pp. 95-108.

Doan, T., R. Litterman, and C. Sims (1984). Forecasting and conditional projection using realistic prior distributions. Econometric Reviews, 3, pp. 1-100.

Gómez, R. M. C. (1987). Seguimiento del Déficit Financiero del Sector Público, mediante una técnica de pronósticos condicionados: El caso de México 1977-1986. Tesis no-publicada de Licenciatura en Economía, México: ITAM.

Guerrero, V. M. (1989). Optimal conditional ARIMA forecasts. *Journal of Forecasting* 8, pp. 215-229.

Guerrero, V. M. (1990). Restricted ARIMA forecasts which account for parameter changes. *ESTADISTICA* 42, 139, pp. 17-31.

Guerrero, V. M. (1991a), Análisis estadístico de series de tiempo económicas. México: UAM-Iztapalapa.

Guerrero, V. M. (1991b), ARIMA forecasts with restrictions derived from a structural change. *International Journal of Forecasting*, 7, pp. 339-347.

Guerrero, V. M. (1993a). Combining historical and preliminary information to obtain timely time series data. *International Journal of Forecasting*, 9, pp. 477-485.

Guerrero, V. M. (1993b), Restricted forecasts of missing observations in univariate time series. *ESTADISTICA* 46, 146-147, pp. 1-23.

Guerrero, V. M., and E. Berumen (1998). Forecasting electricity consumption with extra-model information provided by consumers.*Journal of Applied Statistics*, 25, pp. 283-299.

Nieto, F. H., and J. Martínez (1996). A recursive approach for estimating missing observations in a univariate time series. *Communications in Statistics*, 25, pp. 2101-2116.

Pankratz, A. (1989). Time series forecasts and extra-model information, *Journal of Forecasting*, 8, pp. 75-83.

Pérez-Porrúa, J. M. (1984), Pronósticos ARIMA que incorporan información externa. Documento no-publicado, Dirección de Investigación Económica, Banco de México.

Rosas, A. L., and V. M. Guerrero (1994), Restricted forecasts using exponential smoothing techniques. *International Journal of Forecasting*, 10, pp. 515-527.

Ruíz, M. M. A. (1993). Pronósticos condicionales óptimos para modelos de series de tiempo múltiples. Tesis no-publicada de Licenciatura en Actuaría, México: ITAM.

Sánchez, G. O. (1988). La contribución de los pronósticos condicionales al estudio del comportamiento conjunto de cinco variables macroeconómicas. Tesis no-publicada de Licenciatura en Economía, México: ITAM.

Trabelsi, A., and S. C. Hillmer (1989). A benchmarking approach to forecasts combination. *Journal of Business and Economic Statistics*, 7, pp. 353-362 .