Naloge iz matematike

1. Dokaži, da je enačba $(P \cap X) \cup (Q \cap X^c) = \emptyset$ rešljiva natanko tedaj, ko je $Q \subseteq P^c$.

2. Pokaži:
   - $M = N \iff M + N = \emptyset$
   - $M = N = \emptyset \iff M \cup N = \emptyset$

3. Ali obstaja tak izjavni izraz A, da bosta izraza $(p \wedge A) \vee (p \Rightarrow \neg A)$ in $(P \Rightarrow A) \Rightarrow q$ enakovredna?

4. Dokaži:
   - $(A \Rightarrow B) \sim (\neg B \Rightarrow \neg A)$
   - $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$

5. Poišči preneksno obliko formule $\exists x : P(x) \wedge \forall x : Q(x) \Rightarrow \forall x : R(x)$.

6. Vektorja $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ in $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ sta pravokotna in imata dolžino 1. Določi kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

7. Določi definicijsko območje funkcije
$$f(x) = \log \frac{x^2+1}{x^2-4x+3}$$

8. Izračunaj
$$\cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} + \cos^2 \frac{8\pi}{8}$$

9. Dokaži, da za vsa naravna števila n velja
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

10. Naj bo z kompleksno število, $z \neq 1$ in $|z| = 1$. Dokaži, da je število $i\frac{z+1}{z-1}$ realno.

11. Pokaži, da je funkcija $x \mapsto \sqrt{x}$ enakomerno zvezna na $[0, \infty)$.

12. Izračunaj limito

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$$

Dani sta grupi ??. V množici ?? definiramo operacijo ?? Pokaži, da je množica ?? grupa za to operacijo.

Pokaži, da ima ?? inverzno funkcijo in izračunaj ??.

Izračunaj integral korenske funkcije ??

Krivulja je podana parametrično z enačbama ?? Izračunaj dolžino poti od točke ?? do točke, v kateri je tangenta prvič navpična.

Naj bo ?? absolutno konvergentna vrsta in ?? za ??. Dokaži, da sta vrsti ?? absolutno konvergentni.

Funkcijsko zaporedje ?? enakomerno konvergira na ?? proti funkciji ??. Naj bo ?? zvezna. Dokaži, da funkcijsko zaporedje ?? enakomerno konvergina na ?? in določi njegovo limitno funkcijo.

Izračunaj limito zaporedja ??

Izračunaj ??

Poenostavi ??

Za dani zaporedji preveri, ali sta konvergentni ??

Ugotovi, ali obstaja ?? Pomagaj si z limitama funkcije ?? v ?? in ??.

Izračunaj naslednjo determinanto ??, ki ima na neoznačenih mestih ničle. ??

Dana je funkcija ?? Določi parameter ?? tako, da bo ?? zvezna. Izračunaj parcialna odvoda ?? in ?? za ??. Izračunaj parcialna odvoda ?? in ??. Če obstaja, izračunaj limito ?? Ali je funkcija ?? diferenciabilna?

Poišči vse rešitve enačbe ??

Dokaži binomsko formulo: za vsaki realni števili ?? in ?? in za vsako naravno število ?? velja ??

Naj bo ?? Pokaži, da je ?? podgrupa v grupi ?? neničelnih kompleksnih števil za običajno množenje. Pokaži, da je ?? podgrupa v aditivni grupi ?? ravninskih vektorjev za običajno seštevanje po komponentah. Pokaži, da je preslikava ??, podana s pravilom ?? izomorfizem grup ?? in ??.

Nariši grafe funkcij: ??