

Chapitre 1

GENERALITES

1.1 Définitions de base

1.1.1 Groupe et Sous-Groupe

Soit G un ensemble non vide ($G \neq \emptyset$).

Définition 1. Un ensemble G avec une loi de composition interne est un GROUPE si :

- 1. La loi est associative : $\forall a, b, c \in G : a(bc) = (ab)c$
- 2. Il existe un élément neutre : $\exists e \in G : \forall g \in G : ge = eg = g$
- 3. Tout éléments admet un *symétrique* : $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G : g^{-1}g = gg^{-1} = e$

Si commutative – **abélien**. Groupes : $(R, +)$, (S_n, \circ) , etc. Le symétrique de x est appelé l'inverse de x .

Soit H un sous-ensemble de G .

Définition 2. H est un SOUS-GROUPE de G si :

- 1. $H \neq \emptyset$
- 2. $\forall x, y \in H : xy^{-1} \in H$

On notera $H < G$.

Si $x \in G$, alors le sous-groupe **engendré** par x est le plus petit sous-groupe de G contenant x . Notée $\langle x \rangle$. Si G est *fini* (\Leftrightarrow cardinal G est fini $\Leftrightarrow \#G < \infty$). Sont **ordre** de G est tout montant éléments. L'ordre d'un groupe G se note $\text{ord}(G)$, $|G|$ ou $\#G$.

Si $x \in G$, l'ordre de x est G plus petit entier $n \geq 1$ que $x^n = e$. On le note $\text{ord}(x)$.
Ordre x est $\text{ord}(x) \stackrel{\text{def}}{=} |\langle x \rangle|$

Exercice 1. S_3 .

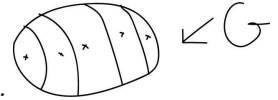
1.1.2 La classe d'équivalence

Définition 3. Soit G un groupe et H – un sous-groupe de G . On définit sur G la RELATION D'ÉQUIVALENCE dite à gauche modulo H . Pour $x, y \in G$:

$$x \equiv_g y \pmod{H} \text{ ssi } x^{-1}y \in H$$

Si $x \in G$ la classe d'équivalence de x pour cette relation dite CLASSE À GAUCHE MODULO H est :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \{y \in G \mid y \equiv_g x \pmod{H}\} = \{y \in G \mid y^{-1}x \in H\} = \{xh \mid \exists h \in H\} \\ &= xH \end{aligned}$$



Remarque. Les class d'équivalence constituée une partition de G .
L'ensemble les classes d'équivalence est appelé ENSEMBLE QUOTIENT, et est noté :

$$\left(\frac{G}{H}\right)_g$$

On définit une autre relation d'équivalence sur G , dite à droite modulo H le pour $x, y \in G$, $x \equiv_d y$ ssi $xy^{-1} \in H$. Pour $x \in G$ la classe de x pour cette relation est : $Hx = \{hx, h \in H\}$ – appelé classe à droite de x modulo H .

Si G est un groupe fini et si H est sous-groupe de G alors l'application pour $x \in G$ fixé $f_x : \begin{array}{ccc} H & \rightarrow & xH \\ h & \mapsto & xh \end{array}$ est une bijection.

On en déduit que toutes les classes à gauches xH ont même cardinal, à pouvoir $|H|$ (Le même pour le classe à droite).

Comme G est la réunion disjointe des xH , pour x décrivant un système de représentants des classes, on en déduit :

Théorème 1. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G . Alors : $|H|$ divise $|G|$.
Et on a : $\# \left(\frac{G}{H}\right) = \frac{|G|}{|H|}$.

L'entier $[G : H] = \# \left(\frac{G}{H}\right)$ s'appelé l'indice de H dans G . En particulier, l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe.

Application canonique :

$$\begin{aligned} \pi : G &\xrightarrow{\text{surjection}} \frac{|G|}{|H|_g} \text{ – est surjet} \\ x &\mapsto \underbrace{xH}_{\bar{x}} \end{aligned}$$

$xH, yH \in \left(\frac{G}{H}\right)_g$. Alors

$$\begin{aligned} xH \cdot yH &= (xy)H \\ \pi(xy) &= \pi(x)\pi(y) \\ \bar{x}\bar{y} &= \overline{xy}. \end{aligned}$$

On souhaite même l'ensemble quotient de la structure de groupe qui fasse de la surjection canonique π un morphisme de groupe.

1.1.3 Normal dans G

Définition 4. Un sous groupe $H < G$ de G est dit DISTINGUÉ dans G ou NORMAL dans G , s'il est stable pour conjugaison :

- i.e. $\forall x \in G, \forall h \in H : xhx^{-1} \in H$
- i.e. $xHx^{-1} \subset H$
- i.e. $\forall x \in G, xH = Hx$

On note alors : $H \triangleleft G$.

Remarque.

- Si G est un groupe abélien alors tout sous-groupe H est distingué dans G .
- Si $H \triangleleft G$, on n'd pas nécessairement : $xh = hx \ \forall x \in G, \forall h \in H$.
- Si $[G : H] = 2$ alors $H \triangleleft G$.

Rappel. Un morphisme de groupes ou homomorphisme de groupes est une application entre deux groupes qui respecte la structure de groupe.

Plus précisément, c'est un morphisme de magmas d'un groupe (G, \cdot) dans un groupe $(G', *)$, c'est-à-dire une application $f : G \rightarrow G'$ telle que

$$\forall x, y \in G \quad f(x \cdot y) = f(x) * f(y).$$

- Exercice 2.**
1. $\langle \sigma_1 \rangle = \{e, \sigma_1, \sigma_2\}$ — sous-groupe engendrée pour σ_1 dans \mathfrak{S}_3 . $[G : H] = 2 \Rightarrow \langle x \rangle \triangleleft \mathfrak{S}_3$.
 2. $\langle \tau_1 \rangle = \{e, \tau_1\} \not\triangleleft \mathfrak{S}_3$. Car $\langle \tau_1 \rangle$ n'est pas stable par conjugaison. En effet : l'élément $\tau_2 \tau_1 \tau_2^{-1} = \tau_2 \tau_1 \tau_2 = (12) = \tau_3 \notin H$.
 3. Le noyau du morphisme de groupe $f : G \rightarrow G'$ est l'ensemble $\ker f := \{x \in G | f(x) = e'\}$, où e' est l'élément neutre de G' . C'est un sous-groupe distingué de G .

Définition 5. Un groupe est dit SIMPLE s'il n'admet pas de sous-groupes distingués autre que lui-même et $\{e\}$.

Exercice 3. Soit G un groupe d'ordre premier p . Alors G est un groupe simple. En effet, si H est un sous-groupe H alors, par le Théorème de Lagrange son ordre divise p , donc vaut 1 ou p puisque p est première. Donc $H = \{e\}$ ou $H = G$. De plus, si $x \in G \setminus \{e\}$ alors, pour le Th. de Lagrange son ordre divise p , donc vaut 1 ou p puisque p est première donc vaut p puisque $x \neq e$. Donc $\langle x \rangle = G$. Donc G est cyclique (i.e engendre par un élément et fini). Donc G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Considérons le groupe abélien $(\mathbb{Z}, +)$. Si l'on note $n\mathbb{Z} = \{nk, k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des multiples de n dans \mathbb{Z} (pour $n \geq 0$) alors : $(n\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de \mathbb{Z} .

En effet :

* $n\mathbb{Z} = \emptyset$ car $0 = n \cdot 0 \in \mathbb{Z}$.

* soient $a, b \in n\mathbb{Z}$ qui $a - b \in n\mathbb{Z}$.

Réciproquement, tout sous-groupe de \mathbb{Z} est de la forme $n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \geq 0$.

$n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe distingué de \mathbb{Z} (car \mathbb{Z} est abélien). On considère l'anneau quotient : $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$.

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$$

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$$

$$\bar{x}\bar{y} = \overline{xy}$$

1.2 Groupes abéliens finis

Théorème 2 (de Kronecker, ou Théorème de classification des Groupes Abéliens de type fini). *Tout groupe abélien de type fini G s'écrit de sous la forme :*

$$G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^s,$$

avec $d_1|d_2|\dots|d_r$ ($d_r \geq 2$) et $s > 0$. Ces de sont appelé les facteurs invariantes de G .

Remarque. d_r = « *exponent* de G » = « *ppcm des ordres des éléments de G* ».

Exercice 4.

1. Montrer qu'un groupe, dont tous les éléments non neutres sont d'ordre 2, est abélien.

Solution $(ab)(ab) = 2 \Rightarrow a(abab)b = aeb = ab, a^2bab^2 = ebae = ba$

2. Déterminer à isomorphisme près tous les groupe.

Solution

- Si G est d'ordre 1, alors G est réduit à $\{e\}$ où e est l'éléments neutre du G .
- Si $|G| = 2$ alors, puisque 2 est premier, G est cyclique et donc : $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ i.e. $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ (abélien)
- Si $|G| = 3$ alors la même, $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- Si $|G| = 4$, si G admet élément d'ordre 4 alors G est cyclique et donc $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, abélien. Sinon, d'appelés le Théorème de Lagrange tous les éléments, non neutres de G sont d'ordre 2. s'appelle exercice précédent on en déduit que G est abélien. D'après le Th. de Classification des groupes abéliens finis, G est, soit isomorphe à $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: impossible car G n'admet pas d'élément d'ordre 4. Soit isomorphe à : $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il est isomorphe au groupe de Klein. Il y a donc deux groupes s'ordre 4 à isomorphe près : $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (et ils sont tous les deux abélien).
- Si $|G| = 5$ puisque 5 est premier, G est cyclique et donc $G \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ — il est abélien.

1.3 Groupes agissant sur un ensemble

Soient G est un groupe et X un ensemble.

Définition 6. On dit un groupe G agit sur un ensemble X , si :

1. $\forall x \in X \ e \cdot x = x$
2. $\forall x \in X, \forall g \in G \ g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$

On peut aussi voir une action de G sur X comme un morphisme de G dans le groupe S_X des permutations de X :

$$\begin{aligned}\pi : G &\rightarrow S_X \\ g &\mapsto \left(\begin{array}{l} \pi_g : X \rightarrow X \\ x \mapsto \pi_g(x) = g \cdot x \end{array} \right)\end{aligned}$$

Définition 7. Si un groupe G agit sur un ensemble X , la relation sur X : $x, y \in X, x \sim y$ ssi $\exists g \in G, y = g \cdot x$ est une relation d'équivalence. La classe de x par cette relation s'appelle ORBITE de x , notée $\text{orb}(x)$ ou $G \cdot x$: $\text{orb}(x) = \{y \in X, y \sim x\} = \{g \cdot x, g \in G\}$ l'ensemble des orbites constituée une partition de X .

On dit que l'action est *Transitive* en que G agit transitivement s'il n'y a qu'une seule orbite, i.e. $\forall x, y \in X, \exists g \in G, y = g \cdot x$.

Le *Noyau* de l'action est le noyau du morphisme

$$\begin{aligned}\pi : G &\rightarrow \mathfrak{S}_X \\ G &\mapsto \pi_G \\ \text{i.e l'ensemble :}\end{aligned}$$

$$\ker \pi \{g \in G | \pi(g) = e_{\mathfrak{S}_X}\} = \{g \in G | \pi_g = id_x\} = \{g \in G | \forall x \in X, \pi_g(x) = x\} = \{g \in G | \forall x \in X, g \cdot x = x\}$$

On dit que l'action est *FIDÈLE* si son noyau est réduit à $\{e\}$ i.e. le morphisme π associé est injectif.

Exemple 1.3.1.

1. Le groupe des rotation de \mathbb{R}^3 de centre l'origine agit sur \mathbb{R}^3 . $G \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $(r, x) \mapsto r \cdot x = r(x)$. Les orbites sont les sphères centrées en l'origine. L'action n'est donc pas transitive. Regarde rotation qui fixe tout le monde. Évidemment l'action est fidèle. Rotation fixant tout point de \mathbb{R}^3 est l'identité.
2. Si X est un ensemble, le groupe \mathfrak{S}_X agit sur X par permutation : $\mathfrak{S}_X \times X \rightarrow X, (\sigma, x) \mapsto \sigma \cdot x = \sigma(x)$. L'action est évidemment transitive. σ est dans le noyau du morphisme associé à cette action ssi : $\forall x \in X, \sigma(x) = x$: donc $\sigma = id_x$ et donc l'action est fidèle.
3. Tout groupe G agit sur lui-même par multiplication à gauche se que $G \times G \rightarrow G; (g, x) \mapsto g \cdot x = gx$ (loi de composition dans G). Soient $x, y \in G$; on a $y = gx$, avec $g = yx^{-1}$. L'action est donc transitive. Soit g dans le noyau de l'action ou a alors :

$$\forall x \in G, gx = x; \text{ d'où } g = e$$

Donc l'action est fidèle.

4. Tout groupe G agit sur lui-meme par conjugaison :

$$G \times G \mapsto G; (g, x) \mapsto g \cdot x = gxg^{-1}$$

En effet : (i) Si $x \in G$; on a : $e \cdot x = exe^{-1} = x$.

(ii) soient $g, g' \in G$ et $x \in G$ ou a :

$$\begin{aligned} g \cdot (g' \cdot x) &= g \cdot (g' x g'^{-1}) = g(g' x g'^{-1})g^{-1} = (gg')x(g'^{-1}g^{-1}) \\ &= (gg')x(gg')^{-1} = (gg') \cdot x \end{aligned}$$

Utilise $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

— $\text{orb}(e) = \{geg^{-1}, g \in G\} = \{e\}$ Donc l'action n'est pas transitive si $G \neq \{e\}$

— Si $x \in G$ alors $\text{orb}(x) = \{gxg^{-1}, g \in G\}$ donc de conjugation de x .

— Le noyau de l'action est :

$$\{g \in G | \forall x \in X, gxg^{-1} = x\} = \{g \in G | \forall x \in X, gx = xg\}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \text{"centre de } G \text{"} \stackrel{\text{def}}{=} Z(G)$$

est réduit à $\{e\}$.

Définition 8. Si un groupe G agit sur un ensemble X et si $x \in X$, on définit le stabilisateur (ou groupe s'isotropie) de X pour cette action par : $\text{stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$. (noté aussi G_x)

Proposition 1. C'est un sous groupe de G .

Proposition 2. Pour X l'application $G \rightarrow X, g \mapsto g \cdot x$ définit une bijection de l'ensemble $X/\text{stab } x$ des classe à gauche monade $\text{stab}(x)$ sont l'orbite de x .

Aussi, le cardinal de l'orbite $\text{orb}(x)$ est égal a l'indice de $\text{stab}(x)$ dans G .

$$\# \text{orb}(x) = [G : \text{stab}(x)]$$

Théorème 3. Formule des classe Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X . Alors :

1. $\#X = \sum_x [G : \text{stab}(x)]$ où x est une orbite représentative

2. Le nombre n d'orbites est donné par la formule (théorème de Burnside) :

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \#X_g$$

$$\text{où } X_g = \{x \in X | g \cdot x = x\}.$$

Remarque. $|G| = n, d|n : \exists H < G \text{ t.q. } |H| = d ?$ Cyclique, oui $\exists!$

$$n = \prod_n p_i^{\alpha_i}, p_i - \text{premiere}$$

1.4 Les Théorèmes de Sylow

Soit G un groupe fini et point p un nombre premier tel que p^r divise l'ordre de G mais p^{r+1} ne le divise pas (avec $r \geq 1$). Alors tout sous-groupe de G s'appelle un p -sous-groupe de Sylow ou p -Sylow de G .

Par exemple, G est un groupe d'ordre de $n = 2^3 \times 3^5 \times 5^2 \times 7$ alors une 3-Sylow de G est un Sylow de G d'ordre : $2^3 = 8$.

Théorème 4 (1^{er} théorème de Sylow). Soit G une groupe d'ordre $p^\alpha q$ avec p premier et $(p, q) = 1$ (et $\alpha \geq 1$)

Pour tout entier β tel que : $1 \leq \beta \leq \alpha$, il existe un sous-groupe de G d'ordre p^β . En particulier, il existe un p -Sylow de G .

De plus, le nombre n_p de p -Sylow de vérifie : $n_p \equiv 1 \pmod p$ et $n_p | q$.

Définition 9. Si H est un sous-groupe d'un groupe G , les conjugués dans G sont les gHg^{-1} , pour $g \in G$ ($\{ghg^{-1}, h \in H\}$).

En particulier H est distingué dans G ssi il est égal à tous des conjugués.

Théorème 5 (2^{ème} Théorème de Sylow). Soit G une groupe fini. Le conjugué d'un p -Sylow de G est encore un p -Sylow de G .

Réciproquement, tous les p -Sylow de G sont conjugués dans G .

En fin, tout p -sous-groupe de G (i.e d'ordre une puissance de p) est contenu dans un p -Sylow.

Exercice 5. 1. Soit G un groupe d'ordre 13. Est-il nécessairement abélien ? combien admet-il d'élément d'ordre 13 ? Puisque 13 est premier, G est niasse cyclique, donc isomorphe à $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +)$, donc il est abélien. Il admet $\varphi(13) = 12$ éléments d'ordre 13.

De plus, le nombre n_p de p -Sylow de G vérifie :

$$n_5 \equiv 1 \pmod 5$$

$$n_5 | 3$$

$\Rightarrow n_5 = 1$. Tous les sous-groupe d'un groupe abeille sont distende.

Mais un groupe d'ordre 13 n'admet que deux sons-groupe (th de Lagrange) lui-meme et $\{e\}$. Donc G est simple.

2. Montre qu'un groupe d'ordre 15 n'est pas simple. 5|15 donc existe sylow sous-groupe.

Soit G un groupe d'ordre $15 = 3 \times 5$. G admet un 5-Sylow H . De plus le nombre n_5 de 5-Sylow de G vérifie : $n_5 \equiv 1 \pmod 5$ et $n_5 | 3$ donc $n_5 = 1$.

Les conjugales de H sont encore des 5-Sylow. Or, il n'y a s'un seul 5-Sylow dans G .

Conclusion : G n'est pas simple.

1.5 Les Groupes symétrique

On note \mathfrak{S}_n les groupes des permutations sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Remarque. Deux permutations à s'appontes disjoint commutent. Exemple : $\tau = (1, 2) \in \mathfrak{S}_9$ et $\sigma = (345) \in \mathfrak{S}_9$. Le support de τ est $\{1, 2\}$.

$$\tau\sigma = \sigma\tau$$

Théorème 6. *Tout permutation s'écrit comme produit de cycles à supports disjoint - une telle décomposition est unique à l'ordre p..*

Exemple : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 9 & 1 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_9$ $\sigma = (136)(24)(598)$

Par exemple : $\text{ord}(\sigma) = \text{ppcm}(\text{ord}(136), \text{ord}(24), \text{ord}(598)) = \text{ppcm}(3, 2, 3) = 6$

Autrement dit, on a : $\sigma^6 = id$ et 6 est la plus petite puissance non nulle vérifiant cela.

Calcul pratique du conjugué d'une permutation σ dans \mathfrak{S}_n . Si $\tau \in \mathfrak{S}_n$, $\tau\sigma\tau^{-1}$ est un conjugué de σ .

Où décompose σ en produit de cycles : $\sigma = c_1 c_2 \dots c_l$, c_i cycles. D'où : $\tau\sigma\tau^{-1} = \tau(c_1 \dots c_r)\tau^{-1} = (\tau c_1 \tau^{-1})(\tau c_2 \tau^{-1}) \dots (\tau c_r \tau^{-1})$

Où, on a : $\tau(i_1 \dots i_m)\tau^{-1} = (\tau(i_1) \dots \tau(i_m))$ un conjugué du m-cycle (i_1, i_2, \dots, i_m)

On effectue, l'image par la permutation de gauche et la permutation de droite de tout de $\tau(i_j)$, pour $j \in \{1, \dots, i_n\}$ et des autres entiers- coïncide.

On a $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $g(\tau(i_j)) = \tau(i_{j+1})$ et $f(\tau(i_j)) = (\tau(i_1 \dots i_m))(i_j) = \tau(i_{j+1})$ et $\forall x \in \{1, \dots, n\}$

$\{\tau(i_j), j \in \{1, \dots, n\}\}$, on a :

$$g(x) = x = f(x)$$

Donc $f = g$.

Exemple : Soient $\sigma = (1528) \in \mathfrak{S}_9$, et soit $\tau = (127)$. $\tau\sigma\tau^{-1} = ? = (\tau(1)\tau(5)\tau(2)\tau(8)) = (2578)$

Proposition 3. *On appelle type d'une permutation $\sigma = c_1 \dots c_r$. Ca suite (l_1, \dots, l_r) des longueurs des cycles c_i ordonnés en ordre croissant $(l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_r)$. Deux permutations sont conjuguées dans \mathfrak{S}_n ssi elle ont même type.*

Par exemple : les permutations

$$G_1 = (28)(35)(196)$$

et

$$G_2 = (14)(79)(263)$$

Sont conjuguées dans \mathfrak{S}_9 car elles ont tous deux de type $(2, 2, 3)$

La proposition précédente montre que le groupe \mathfrak{S}_n est engendré par les cycles. On a également :

Théorème 7.

1. \mathfrak{S}_n est engendré par les transpositions (2-cycles)
2. \mathfrak{S}_n est engendré par les transpositions de la forme (ii)
3. \mathfrak{S}_n est engendré par les transpositions (dits alimentaires) de la forme $(i \ i + 1)$
4. \mathfrak{S}_n est engendré par les deux permutations (12) et $(12 \dots n)$

Démonstration. exercice

□

Proposition : la signature $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$ est un morphisme de groupes. En particulier deux permutations conjuguées ont même signature. Transposition est impaire, i.e. de signature égale à -1 . Ainsi ε est un morphisme surjectif (de que $n \geq 2$), et une permutation est paire (i.e. de signature 1) ssi elle est produit d'un nombre pair de transpositions.

Une cycle de longueur paire est une permutation impaire et impaire paire.

Le noyau \mathfrak{A}_n du morphisme signature $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$ est un sous-groupe distingué d'indice 2 ($n \geq 2$) de \mathfrak{S}_n , appelé le n -ième groupe alterné = c'est donc l'ensemble des permutations paires de \mathfrak{S}_n .

Proposition 4. *Si $n \geq 3$, le groupe alterné \mathfrak{A}_n est engendré par les 3-cycles.*

Démonstration. Hint $(1b)(1a)=(1ab)$ □

Théorème 8 (Galois). \mathfrak{A}_n est un groupe simple ssi $n \neq 4$.

Chapitre 2

Représentations linéaires des groupes finis

Théorie introduite par Frobenius à la fin du XIX siècle.

2.1 Premières définitions, représentations isomorphes et représentation irréductibles)

Définition 10. Une REPRÉSENTATION LINÉAIRE d'une groupe G est la donnée d'un \mathbb{C} -espace vectoriel V muni d'une action (à gauche) de G agissant de manière linéaire

$$\begin{aligned} G \times V &\rightarrow V \\ (g, v) &\mapsto g \cdot v, \end{aligned}$$

telle que :

1. $\forall x \in V, e \cdot x = x$ où x est l'élément neutre de G
2. $\forall g, g' \in G, \forall x \in V : g \cdot (g' \cdot x) = (gg^{-1}) \cdot x$
3. $\forall g \in G, \forall x, x' \in V, \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{C} : g \cdot (\lambda x + \lambda' x') = \lambda g \cdot x + \lambda' g \cdot x'$

Définition 11. Une REPRÉSENTATION LINÉAIRE d'un groupe G est donc le donnée d'un \mathbb{C} -espace vectoriel V et d'un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \rho : G &\rightarrow GL(V) \\ g &\mapsto \rho(g) = \rho_g : V \rightarrow V. \end{aligned}$$

où $GL(V)$ est le groupe des automorphismes du \mathbb{C} -espace vectoriel V .

On a donc : $\forall g, g' \in G, \rho_{gg'} = \rho_g \circ \rho_{g'}$. Et aussi : $\rho_e = id_V$ et $\rho_{g^{-1}} =$

$$(\rho_g)^{-1} \forall g \in G$$

Ces deux définitions sont bien équivalents.

Démonstration. En effet, si G opère sur V de la manière linéaire a lois considérons l'application :

$$\rho : G \rightarrow ?$$

$$g \mapsto \left(\begin{array}{ccc} \rho_g : & V & \rightarrow V \\ & x & \mapsto \rho(x) = g \cdot x \end{array} \right)$$

ρ_g est un endomorphisme du \mathbb{C} -espace vectoriel V , car si $x, x' \in V$ et si $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$ on a : $\rho_g(\lambda x + \lambda' x') = g(\lambda x + \lambda' x') = \lambda g \cdot x + \lambda' g \cdot x' = \lambda \rho_g(x) + \lambda' \rho_g(x')$

De plus, ρ_g est bijectif car $\ker \rho_g = \{0\}$; en effect soit $x \in V$ on a : $\rho_g(x) = 0 \Rightarrow g \cdot x = 0$ d'où $g^{-1}g \cdot x = \rho^{-1}0 = \rho_{g^{-1}}(0) = 0$, d'où $(g^{-1}g) \cdot x = 0$ d'où $e \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$

Si l'on suppose V de dimension fini alors ρ_g est bijectif et ρ est à valeurs dans $GL(V)$.

De plus, l'application ρ est un morphisme de groupes. En effet, si $g, g' \in G$ et si $x \in V$, on a : $f_{gg'} = (gg') \cdot x = g \cdot (g' \cdot x) = \rho_g(\rho_{g'}(x))$.

Réciproquement (\Rightarrow). i $\rho : G \rightarrow GL(V)$,
 $g \mapsto \rho_g$ est un morphisme de groupes, alors considérons :

$$G \times V \rightarrow V$$

$$(g, x) \mapsto g \cdot x := \rho_g(x)$$

Cela definit bien un action linear de G sur V car :

1. Si $x \in V$, $e \cdot x = \rho_e(x) \stackrel{*}{=} id_V(x) = x$ (* car l'image de l'élément neutre par morphisme de groupes est l'élément neutre)
2. Si $g, g' \in G$, $x \in V$: $g \cdot (g' \cdot x) = \rho_g(\rho_{g'}(x)) = (\rho_g \rho_{g'})(x) \stackrel{\rho - \text{morphisme}}{=} \rho_{gg'}(x) = (gg') \cdot x$
3. $g \cdot (\lambda x + \lambda' x') = \rho_g(\lambda x + \lambda' x') = \lambda \rho_g(x) + \lambda' \rho_g(x') = \lambda g \cdot x + \lambda' g \cdot x'$

□

Définition 12 (Vocabulaire).

- L'espace vectoriel V est l'espace de la représentation.
- La dimension de V est le degré (ou la dimension) de la représentation.
- Lorsque ρ est injectif, la représentation est dite fidèle. Le groupe G se représente alors de manière concrète comme un sous-groupe de $GL(V)$.
 $G \simeq \text{Im}(\rho) < GL(V) (= C^n, \rho : G \rightarrow C^*, g \mapsto \rho_g. \text{Conclusion } GL(V) \simeq GL_n(\mathbb{C}))$
- Lorsque V est dimension fini (ce qui cela toujours le cas par la suite). Le choix d'une base fournit alors une représentation encore plus concrète comme groupe de matrices (ou si $\dim_{\mathbb{C}} V = n$ alors $GL(V) \simeq GL_n(\mathbb{C})$).

Remarque. Soient G un groupe fini et $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation (linéaire) de G . Si $g \in G$ est d'ordre n alors, on a :

$$(\rho_g)^n = \rho_{g^n} = \rho_e = id_v = "1"$$

Donc l'endomorphisme ρ_g est racine du polynôme $x^n - 1$, que n'a que des racines simples (à savoir les racines nème de l'unité dans \mathbb{C} , que sont : $e^{\frac{2h\pi}{n}}$, $h \in \{0, \dots, n\}$).

Rappel. $f \in \text{End}(V)$, $I_f = \{P(x) \in \mathbb{C}[x] \mid P(f) = 0\}$ idéal de l'anneau principal $\mathbb{C}[x]$. (car \mathbb{C} est un corps) L'unique polynôme unitaire que engendre I_f est appelé la polynôme minimal de f .

La polynôme minimal de ρ_g est donc un divisor de $x^n - 1$ et n'a donc lui aussi que de racines simples. Ce la pon que l'endomorphisme ρ_g est diagonalisable (car tous ses valeurs propre sont donc simples).

Exercice 6.

1. La représentation **triviale** (on représentation unité).

$$\begin{aligned} \rho : G &\rightarrow GL(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^* \\ g &\mapsto (\rho_g : id : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \ x \mapsto x) \end{aligned}$$

2. Les représentation de degré 1 : ce sont les **homomorphisms** $\rho : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ puisque si $\dim V = 1$ alors $GL(V) \simeq \mathbb{C}^*$. En effet les endomorphismes de V sont les **homothéties** : $f_\lambda : V \rightarrow V \ x \mapsto \lambda x (\lambda \in \mathbb{C}^*)$. Et $GL(V) \rightarrow G^*$ est un isomorphisme $f_\lambda \mapsto \lambda$.

Si G est fini, tout éléments du G est d'ordre fini (par le th. de Lagrange) donc, pour tout $g \in G$, ρ_g est un racine de l'unité dans \mathbb{C} . (Car si $g^n = e$ alors $\rho_{g^n} = (\rho_g)^n$). En particulier, ce sont des numbers complexes de module 1. $|\rho_g| = 1$.

3. Soient \mathfrak{S}_n considéré le groupe symétrique et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{C}^n . On définit une représentation de degré n de \mathfrak{S}_n en posant :

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{S}_n &\rightarrow GL(\mathbb{C}^n) \\ \sigma &\mapsto \left(\begin{array}{ccc} \rho_\sigma : \mathbb{C}^n & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ e_i & \mapsto & \rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \end{array} \right) \end{aligned}$$

4. La **représentation de permutation** c'est un généralisation l'exemple précédent. Soit $G \times X \rightarrow X$ une action $(g, x) \mapsto g \cdot x$ d'un groupe G sur un ensemble fini x . Soit V un \mathbb{C} espace vectoriel de dimension égale au cardinal de X , dune base indexée par les elements de $X : \{\varepsilon_x, x \in X\}$. On a donc : $V = \bigoplus_{x \in X} \langle \varepsilon_x \rangle = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C}_{\varepsilon_x}$. On définit une représentation linéaire

$$\begin{aligned} \rho : G &\rightarrow GL(V) \\ g &\mapsto \left(\begin{array}{ccc} \rho_g : V & \rightarrow & V \\ \varepsilon_x & \mapsto & \rho_g(\varepsilon_x) = \varepsilon_{g \cdot x} \end{array} \right) \end{aligned}$$

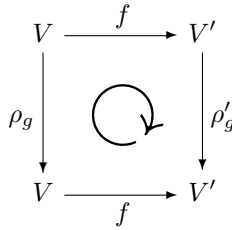
C'est la représentation de permutation associé à l'action de G sur X .

Remarque. On peut voir V comme l'espace vectoriel complexe des fonctions d'finies sur X et à valeurs dans \mathbb{C} , le fonction ε_x étant l'indicatrice de $x \in X : \varepsilon_x(y) = 1 \text{ si } x = y$ 0 sinon, $y \in X$

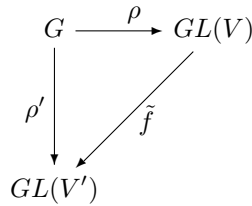
5. La représentation Régulière. C'est l'exemple precedent avec $X = G$ agissant sur lui-même translation à gauche :

$$\begin{aligned} \rho : G &\rightarrow GL(V) \\ g &\mapsto \left(\begin{array}{ccc} \rho_g : V & \rightarrow & V \\ \varepsilon_x & \mapsto & \varepsilon_{g \cdot x} \end{array} \right) . \end{aligned}$$

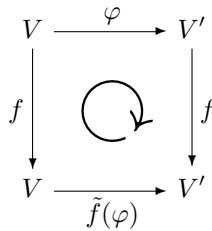
Définition 13. Deux représentation linier $\rho \rightarrow GL(V)$ et $\rho' : G \rightarrow GL(V')$ d'un groupe G . Sont dites ISOMORPHES ou ÉQUIVALENTS s'il existe un isomorphisme d'espace vectoriels $f : V \xrightarrow{\sim} V'$ tel que l'on ont : $\forall g \in G, \rho'_g \circ f = f \circ \rho_g$.



On peut exprimer cette condition par la commutativité diagramme :



où $\tilde{f} : GL(V) \rightarrow GL(V)$ designe l'isomorphisme suivant defini par : $\tilde{f}(\varphi) = f \circ \varphi \circ f^{-1}, \forall \varphi \in GL(V)$



En termes de matrices, cela signifie que les matrices associés à la premier represantion sont semblables à leurs homologués dans la seconde, via la même matrice de passage :

$$\forall g \in G, \text{Mat}(\rho'_g) = \text{Mat}(f) \times \text{Mat}(\rho_g) \times \text{Mat}(f)^{-1}$$

(A, B Semblables si $\exists P : B = PAP^{-1}$).

Si $\rho : G \rightarrow GL(V)$ est une représentation d'un groupe G . Si W est un sous-espace vectoriel de V STABLE par les différents automorphismes ρ_g pour $g \in G$ i.e $\rho_g(W) \subset W$ (i.e $\forall g \in G, \forall w \in W, \rho_g(w) \in W$)

Alors on peut considérer la sous-représentation :

$$\begin{array}{ccc}
 \rho|_x : G & \rightarrow & GL(W) \\
 g & \mapsto & \rho_g|_W
 \end{array}$$

Remarque. $\forall w \in W, \rho_g|_W(w) = \rho_g(w) \stackrel{?}{\in} W$

Cela produit à le notion de représentation irréductible :

Définition 14. Une représentation $\rho : G \rightarrow GL(V)$ est dite **IRRÉDUCTIBLE** si les seules sous-espaces *stables* de V sont $\{0\}$ et V .

Ainsi les reparamétrisation de *degré 1* constituent des représentations irréductibles particuliers.

2.2 Théorème de Maschke

Définition 15. On définit le **SOMME DIRECTE** de représentation de groupe fini G . Soient $\rho : g \rightarrow GL(V)$ et $\rho' : G \rightarrow GL(V')$ deux représentations de G . On définit la somme directe $\rho \oplus \rho'$ comme étant : La représentation d'espace vectoriel $V \oplus V'$ défini par :

$$\begin{aligned} \rho \oplus \rho' : G &\rightarrow GL(V \oplus V') \\ g &\mapsto (\rho \oplus \rho')_g \end{aligned}$$

definit par $\forall v \in V, \forall v' \in V' : (\rho \oplus \rho')_g(v + v') = \rho_g(v) + \rho'_g(v')$.

Théorème 9 (Théorème de Maschke). *Toute représentation linéaire complexe de degré fini d'un groupe fini est somme directe de représentation irréductibles.*

Lemme 1. *Tout sous-espace stable d'une représentation linéaire complexe de degré fini d'un groupe fini admet un sous-espace **Supplémentaire Stable**.*

Preuve du Lemme. Il existe un produit scalaire hermitien sur l'espace de la représentation stable sous l'action du groupe. En effet, si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne un produit scalaire quelconque sur V , le produit scalaire suivant est stable par ρ : Pour $x, y \in V$:

$$\langle x, y \rangle_\rho = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho_g(x), \rho_g(y) \rangle$$

En effet, si $h \in G$, on a ;

$$\langle \rho_h(x), \rho_h(y) \rangle_\rho = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho_g(\rho_h(x)), \rho_g(\rho_h(y)) \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho_{gh}(x), \rho_{gh}(y) \rangle = \langle x, y \rangle_\rho$$

car $g \mapsto gh$ est une bijection de G sur lui-même. Si W est un sous-espace vectoriel de V stable sous l'action de G alors le supplémentaire orthogonal de W est lui aussi stable sous l'action puisque :

$$x \text{ orthogonal à } W \iff \rho_g(x) \text{ orthogonal à } \rho_g(W) = W$$

□

Démonstration du Théorème. On fait une récurrence sur la dimension de l'espace vectoriel de la représentation.

Si $\dim V = 1$ ou si V est irréductible : Ok.

Si $\dim V \geq 2$ et V est non irréductible alors V possède de un sous-représentation W . Distincte de $\{0\}$ et V .

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien sur V invariant sous l'action de G , le supplémentaire orthogonal W^\perp de W est lui aussi stable sous l'action de G .

On a lors : $V = W \oplus W^\perp$ et W et W^\perp sont de dimensions $< \dim V$. L'hypothèse de récurrence permet de les décomposer comme des sommes directes de représentation irréductibles, ce que prouve qu'on peut en faire autant de V . \square

2.3 Caractère d'une représentation

Définition 16. On appelle CARACTÈRE DE LA REPRÉSENTATION $\rho : g \mapsto GL(V)$ l'application :

$$\begin{aligned} \chi_\rho : G &\rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \chi_\rho(g) = \text{Tr}(\rho_g) \end{aligned}$$

où $\text{Tr}(\rho_g)$ — désigne la **trace** de l'endomorphisme ρ_g .

Proposition 5. Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation d'un groupe fini G de caractère χ_ρ :

1. $\chi_\rho(e) = \dim V = \ll \text{degré de } \rho \gg =: \ll \text{degré de } \chi_\rho \gg$
2. $\forall g \in G, \chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ — conjugué complexe
3. $\forall g, h \in G, \chi_\rho(ghg^{-1}) = \chi_\rho(h)$ i.e χ_ρ est ue fonction **centrale** sur G
4. $\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$ si $\rho' : g \mapsto GL(V')$ représentation
5. Si ρ et ρ' sont équivalents alors $\chi_\rho = \chi'_{\rho'}$

Démonstration.

$$1. \chi_\rho(e) = \text{Tr}(\rho_e) = \text{Tr}(\text{Id}_V) = \dim V$$

2. Si G est fini et si $g \in G$, les *valeurs propres* de l'endomorphisme ρ_g sont des racines de l'unité. En particulier, elles sont de module 1 et donc $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$ si λ est un valeur pros de ρ_g .

Remarquons que les valeurs props de l'endomorphisme $\rho_{g^{-1}} = \rho_g^{-1}$ sont les inverses de celles de ρ_g (en effet si $f(x) = \lambda x$ — endomorphisme alors $x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\lambda x) = \lambda f^{-1}(x)$ donc $f^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x$).

Puisque la trace d'endomorphisme diagonalisable est égale à la somme des valeurs propres comptés avec multiplicités, on en déduit que :

$$\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}, \forall g \in G.$$

3. Si $g, h \in G$, on a : $\chi_\rho(ghg^{-1}) = \text{Tr}(\rho_{ghg^{-1}}) = \text{Tr}(\rho_g \circ \rho_h \circ \rho_g^{-1}) = \text{Tr}(\rho_h) \stackrel{\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)}{=} \chi_\rho(h)$. χ_ρ prend la même valeur sur tous les éléments d'une classe de conjugaison.

4. Si (e_1, \dots, e_n) est une base de V et (e'_1, \dots, e'_m) est une base de V' alors :

$$(e_1, 0), (e_2, 0), \dots, (e_n, 0), (0, e'_1), (0, e'_2), \dots, (0, e'_m)$$

est une base de $V \oplus V'$ et la matrice de $(\rho \oplus \rho')_g$ est $\begin{pmatrix} \text{Mat}(\rho_g) & 0 \\ 0 & \text{Mat}(\rho'_g) \end{pmatrix}$ dont la trace est la somme des traces de $\text{Mat}(\rho_g)$ et $\text{Mat}(\rho'_g)$

5. Invariance de la trace par changement de base.

□

Exercice 7. Exemples de calculs de caractères :

1. Si G est un groupe opérant sur un ensemble fini X , considérons la représentation de permutations ρ associée :

$$\begin{aligned} \rho : G &\rightarrow GL(V) \\ g &\mapsto \begin{pmatrix} \rho_g : V \rightarrow V \\ e_x \mapsto e_{g \cdot x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $V = \bigoplus_{x \in X} \langle e_x \rangle$.

On a : $\begin{aligned} \chi_\rho : G &\rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \text{Tr}(\rho_g) \end{aligned}$

Dans la base $(e_x)_{x \in X}$ de V , pour $g \in G$ fixe, la matrice du ρ_g est une matrice de permutation i.e. a exactement un 1 par ligne et par colonne et tous les autres coefficients sont nuls.

De plus, si $\text{Mat}_{(e_x)}(\rho_g) = (a_{ij})$ alors le terme diagonal : $a_{xx} = 1 \Leftrightarrow g \cdot x = x \Leftrightarrow x$ est un point fixe de g , sinon $a_{xx} = 0$.

On en déduit que : $\chi_\rho(g) = \text{Tr}(\rho_g) = \#\{x \in X \mid g \cdot x = x\}$

2. Caractère de la représentation régulière. Cas particulier de la rep de permutation avec G fini, $X = G$, l'action étant la multiplication : $g \cdot x = gx$ si $g, x \in G$. On a alors :
$$\chi_\rho(g) = \text{Tr}(\rho_g) = \#\{x \in G \mid gx = x\} = \begin{cases} |G| & \text{si } g = e, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Définition 17. Nous qualifierons d'IRRÉDUCTIBLE tout caractère d'une représentation irréductible.

Le **tableau des caractères** (irréductible) d'un groupe fini G est un tableau à c lignes et c colonnes, où c est le nombre de classes de conjugaison de G , dont les entrées sont les valeurs de caractères irréductibles sur les classes de conjugaison de G . (nous venons qu'il y a autant de classes d'isomorphisme de caractère irréductible, que de classes de conjugaison.)

2.4 Orthogonalité des caractères.

Soit G un groupe fini. On considère le \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathcal{F}(G)$ des fonctions complexes définies sur G ($f : G \mapsto \mathbb{C}$) que l'on munit de la structure hermitienne donnée par le produit scalaire. Pour $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(G)$:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \psi(g).$$

On a : $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}(G) = |G|$. En effet, si $f \in \mathcal{F}(G)$ alors $f = \sum_{g \in G} \lambda \text{Ind}_g$ où $\begin{matrix} \text{Ind}_g : G & \mapsto & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & x = g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{matrix}$ (avec $\lambda = f(g) \Rightarrow f = \sum_{g \in G} f(g) \text{Ind}_g$) donc $(\text{Ind}_g)_{g \in G}$ base de $\mathcal{F}(G)$.

Proposition 6. *Les caractères irréductibles d'un groupe G forment un système orthonormal de fonctions de l'espace vectoriel hermitien $\mathcal{F}(G)$. I.e. si χ et χ' sont les caractères représentations de G alors $\langle \chi, \chi' \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi = \chi' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.*

Démonstration. Soient $\rho : G \mapsto GL(V)$ et $\rho' : G \mapsto GL(V')$ deux représentation irréductible de G et soient : $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ et $\chi' : G \rightarrow \mathbb{C}$ leurs caractères associés; et soit $\text{Mat}(\rho_g) = (a_{ij}(g))_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq d}}$ et $\text{Mat}(\rho'_g) = (a'_{ij}(g))_{\substack{1 \leq i' \leq d' \\ 1 \leq j' \leq d'}}$ (où $d = \deg(\rho) = \dim V$ et $d' = \deg(\rho') = \dim V'$).

On a :

$$\chi(g) = \text{Tr}(\rho_g) = \sum_{i=1}^d a_{ii}(g)$$

et

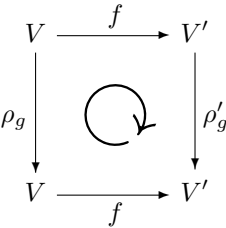
$$\chi'(g) = \text{Tr}(\rho'_g) = \sum_{i=1}^{d'} a'_{ii}(g).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \langle \chi, \chi' \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \chi'(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j} \overline{a_{ii}(g)} a'_{jj}(g) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \text{ et } \rho' \text{ sont non-isomorphes} \\ 1 & \text{si } \rho \simeq \rho' \text{ (d'où : } \chi = \chi') \end{cases} \end{aligned}$$

par le lemme de Schur (traduit en relations algébriques) □

Lemme 2 (Lemme de Schur). *Soient $\rho : G \mapsto GL(V)$ et $\rho' : G \mapsto GL(V')$ deux représentations linéaire irréductibles d'un groupe fini G et $f : V \rightarrow V'$ un morphisme compatible avec les deux représentations (i.e. $\forall g \in G, f \circ \rho_g = \rho'_g \circ f$).*



Si les deux représentations ne sont pas isomorphes alors $f = 0$. Sinon f est un isomorphisme et (en identifiant V et V') on a : $f = \lambda \text{Id}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (i.e. f est une homothétie).

Remarque. *Cas particuliers des caractères (irréductible) de représentations (irréductibles) de degré 1 d'un groupe G :*

$$\begin{aligned} \rho : G &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ g &\mapsto \rho_g \end{aligned}$$

le caractère χ associé à cette représentation ρ est

$$\begin{aligned}\chi : G &\rightarrow \mathbb{C} \\ g &\mapsto \chi(g) = \text{Tr}(\rho_g) = \rho_g.\end{aligned}$$

Donc $\chi = \rho$; χ est appelé un caractère *linéaire*.

Exercice 8. On note \hat{G} l'ensemble des caractères linéaires de G : $\hat{G} = \{\text{morphisms } \chi : G \mapsto \mathbb{C}^*\}$...!?!? where do those "caracteurs" come from? Don't we have to define a representation before getting to "caractères". On définit le produit $\chi\chi'$ de deux caractères linéaires de G par : $\forall g \in G : (\chi\chi')(g) = \chi(g)\chi'(g)$.

1. Montrer que \hat{G} , muni ce produit, est un groupe abélien.
2. On rappelle que le caractère trivial est défini par :

$$\begin{aligned}\chi_0 : G &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ g &\mapsto 1.\end{aligned}$$

Montrer que, si G est fini, et si $\chi \in \hat{G}$ alors : $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi = \chi_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3. En déduire les relations d'orthogonalité des caractères linéaires. Si $\chi, \chi' \in \hat{G}$ alors :

$$\langle \chi, \chi' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \chi'(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi = \chi' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

!?

2.5 Théorème de Frobenius

Soit G un groupe. On note $\mathcal{F}(G)$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des fonctions de G dans \mathbb{C} et $\mathcal{F}_C(G)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(G)$ constitue des fonctions centrales sur G (i.e. constants sur les classes du conjugaison).

Une élément de $\mathcal{F}_C(S)$ est donc une fonction $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant : $\forall g, h \in G f(ghg^{-1}) = f(g)$.

Remarque. On a que les caractères X_ρ des représentations ρ du G sont des fonctions centrales sur G .

On rappelle qu'un caractère irréductible de G est le caractère d'une représentation irréductible.

Théorème 10 (Frobenius). Les caractères irréductibles d'un groupe G forment une base orthonormée de l'espace $\mathcal{F}_C(G)$ des fonctions centrales sur G .

Croquis de la preuve. On a un que les caractères irréductibles forment un système libre de fonctions de $\mathcal{F}_C(G)$. Notons F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(G)$ engendré par les caractères irréductibles de G . L'idée de la preuve est de vérifier que l'orthogonal F^\perp de F dans $\mathcal{F}_C(G)$ est réduit à $\{0\}$, en utilisant le lemme de Schur. \square

Corollaire 1. Le nombre de (classes d'isomorphisme de) représentations irréductibles de G est égal au nombre de classe de conjugaison de G .

Démonstration. D'après le théorème de Frobenius, le nombre de représentations irréductibles de G est égal à la dimension de l'espace $\mathcal{F}_C(G)$ des fonctions centrales sur G . Or, une fonction est centrale ssi elle est constante sur chaque classe de conjugaison ; une fonction centrale $\Phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ peut donc s'écrire de manière unique sous la forme $\Phi : \sum_{C \in \text{Conj}(G)} \lambda_C \mathbb{1}_C$, où $\text{Conj}(G) = \ll \text{classe de conjugaison de } G \gg$ et $\mathbb{1}_C$ est la fonction indicatrice de C . $\lambda_C \in \mathbb{C}$ (on a : $\lambda_C = \Phi(g)$ où g est n'importe quel élément de C).

Les $\mathbb{1}_C$, pour $C \in \text{Conj}(G)$ forment donc une base de $\mathcal{F}_C(G)$, qui de ce fait est de dimension égal $\# \text{Conj}(G)$. \square

Corollaire 2 (Décomposition canonique d'une représentation). Si $\rho : G \rightarrow GL(V)$ est une représentation linéaire de G et si $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ est une décomposition de V en somme directe de représentation irréductible $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k : G \rightarrow GL(W_1 \oplus \dots \oplus W_k)$ et si $W \in \text{Irr}(G) := \{C \mid \text{class d'isomorphismes de représentation irréductible de } G\}$ alors le nombre m_W de W_i qui sont isomorphes à W est égal à $\langle \chi_W, \chi_V \rangle$, particulier, il ne dépend pas de la décomposition et :

$$V \simeq \oplus_{W \in \text{Irr}(G)} \langle \chi_W, \chi_V \rangle W.$$

i.e. $V \simeq \oplus_{W \in \text{Irr}(G)} m_W W$ avec $m_W = \langle \chi_W, \chi_V \rangle$ où χ_W : caractère associe à W , χ_V : caractère associe à V .

Démonstration. On a : $\chi_V = \chi_{W_1} \oplus \dots \oplus \chi_{W_k}$ et donc : $\langle \chi_W, \chi_V \rangle = \langle \chi_W, \chi_{W_1} \rangle + \dots + \langle \chi_W, \chi_{W_k} \rangle$ Or $\langle \chi_W, \chi_{W_i} \rangle = 1$ si $W_i \simeq W$; 0 sinon. Donc $m_W = \langle \chi_W, \chi_V \rangle$. \square

Corollaire 3. Deux représentations d'un même groupe fini sont isomorphes ssi elles ont même caractère.

Démonstration. D'après le corollaire 2 si $\rho : G \rightarrow GL(V)$ et $\rho' : G \rightarrow GL(V')$ sont deux représentations de G ayant même caractère χ alors : V et V' peut tous les deux isomorphes à $\oplus_{W \in \text{Irr}(G)} \langle \chi_W, \chi \rangle W$. Réciproquement, si ρ et ρ' sont isomorphes on a déjà vu que $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$. \square

Corollaire 4 (Critère d'irréductibilité). Une représentation $\rho : G \rightarrow GL(V)$ de G est irréductible ssi $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.

Démonstration. Si $V \simeq \oplus_{W \in \text{Irr}(G)} m_W W$ alors

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \left\langle \sum_{W \in \text{Irr}(G)} m_W \chi_W, \sum_{W \in \text{Irr}(G)} m_W \chi_W \right\rangle = \sum_{W \in \text{Irr}(G)} m_W^2$$

. comme les $m_W \in \mathbb{N}$, on en déduit : $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$ ssi tous les m_W sont égaux à 0 sauf un qui est égal à 1 ; ssi $V \simeq W$; ssi $V \in \text{Irr}(G)$ i.e. V irréductible. \square

Corollaire 5 (Formule de Burnside). G est un groupe fini. On a

$$\sum_{W \in \text{Irr}(G)} (\dim W)^2 = |G|$$

Démonstration. Considérons la représentation régulière de G :

$$\begin{aligned} \rho : G &\rightarrow GL(V) \\ g &\mapsto \begin{pmatrix} \rho_g : V &\rightarrow V \\ \varepsilon_x &\mapsto \varepsilon_{g \cdot x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\dim V = |G|, V = \bigoplus_{x \in G} \mathbb{C}_{\varepsilon_x}$$

Si W est une représentation irréductible de G alors W apparaît dans la représentation régulière avec la multiplicité $\dim W$.

En effet, le caractère χ de la représentation régulière est donné par : $\chi(e) = |G|$ et $\chi(g) = 0$ si $g \neq e$ (car $\chi(g) = \text{Tr}(\rho_g) = \#\{x \in G \mid gx = x\}$). Or, la multiplicité de W dans V est, d'après le corollaire 2, égale à : $\langle \chi_W, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_W(g)} \chi(g) = \bar{\chi}_W(e) = \dim W$. On en déduit que : $\chi = \sum_{W \in \text{Irr}(G)} (\dim W) \chi_W$

En appliquant cette identité à $g = e$, on trouve : $|G| = \chi(e) = \sum_{W \in \text{Irr}(G)} (\dim W) \chi_W(e) = \sum_{W \in \text{Irr}(G)} (\dim W)^2$ \square

2.6 Le cas des groupes abéliens

Théorème 11. Si G est abélien, toutes les représentations irréductibles de G sont de dimension 1. Autrement dit, l'ensemble $\text{Irr}(G)$ des classes d'isomorphismes de représentation irréductible de G coïncide avec l'ensemble \hat{G} des caractères linéaires de G .

Démonstration. Si G est abélien, les classes de conjugaison de G sont toutes réduites à un élément ($h \in G, g \in G, ghg^{-1} = hgg^{-1} = h \text{Conj}(h) = \{h\}$) et donc $\#\text{Conj}(G) = |G|$. Puisque $\#\text{Irr}(G) = \#\text{Conj}(G)$ d'après le corollaire 1, puisque $\sum_{W \in \text{Irr}(G)} (\dim W)^2 = |G|$, d'après le corollaire 5 et comme $\dim W \geq 1 \forall W \in \text{Irr}(G)$, on en déduit que : $\forall W \in \text{Irr}(G)$ on a $\dim W = 1$. \square

Remarque. Si $\rho : G \rightarrow GL(V)$ est une représentation de G de $\dim V = 1$ i.e. $V \simeq \mathbb{C}$, d'où : $GL(V) \simeq \mathbb{C}^*$. D'où $\rho : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ morphisme. C'est donc un caractère linéaire de G . Et le caractère χ associé coïncide avec ρ .

Corollaire 6. Si G est abélien, toute fonction de G dans \mathbb{C} est combinaison linéaire de caractères linéaires.

Démonstration. D'après le Théorème Frobenius, toute fonction centrale (et donc toute fonction puisque G est abélien) est combinaison linéaire de caractères irréductibles. \square

Exercice 9. Déterminer les représentations et les caractères irréductibles du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \geq 1$.

Solution 1. n classes de conjugaison. Le groupe additif étant abélien et d'ordre n , il admet n classes de conjugaison (toutes réduites à un élément) et donc admet n (classes d'isomorphismes de) représentations irréductibles, et toutes de dimension 1.

$$\text{car } \sum_{W \in \text{Irr}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} (\dim W)^2 = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n$$

correspondant donc caractère linéaire de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ i.e. aux morphismes de groupe $\chi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$

Or, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe cyclique, engendré par $\bar{1}$ (où $\bar{a} = a + n\mathbb{Z}$). Donc : les morphismes $\chi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^*$ sont entièrement déterminés par l'image $\chi(\bar{1})$. (En effet : $\chi(\bar{a}) = \chi(\bar{1} + \dots + \bar{1}) = \chi(\bar{1})^a$.)

$$\text{De plus : } \chi(\bar{1})^n = \chi(\bar{1} + \dots + \bar{1}) = \chi(\bar{n}) = \chi(\bar{0}) = 1.$$

Donc $\chi(\bar{1})$ est une racine n -ème de l'unité dans \mathbb{C} . Or l'ensemble $\mu_n(\mathbb{C})$ des racines n -ème de l'unité dans \mathbb{C} est $\mu_n(\mathbb{C}) = \{e^{\frac{2\pi i k}{n}}, k = 0, 1, 2, \dots\}$

$$\text{Si } \chi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^* \text{ est un caractère linéaire, il existe } k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ t.q. } \chi(\bar{1}) = e^{\frac{2\pi i k}{n}}.$$

On trouve donc n caractères linéaires (ou représentations irréductibles) de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, à savoir :

$$\chi_0, \dots, \chi_{n-1} \text{ définis par : } \begin{array}{ccc} \chi_k : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{C}^* \\ \bar{a} & \mapsto & \chi_k(\bar{a}) \end{array}$$

Exemple 1. $n = 2$ $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ toute des caractères du $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? Le groupe $G/2G$ admet 2 caractères linéaires :

$$\begin{aligned} \chi_0 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\rightarrow C^* \\ \bar{0} &\mapsto 1 \\ \bar{1} &\mapsto 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_1 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\rightarrow C^* \\ \bar{0} &\mapsto 1 \\ \bar{1} &\mapsto -1 \end{aligned}$$

$$\chi_1(\bar{a}) = e^{\frac{2i\pi a}{2}}$$

| | χ_0 | χ_1 |
|--------------------------|----------|----------|
| $\text{Conj}(0) = \{0\}$ | 1 | 1 |
| $\text{Conj}(1) = \{1\}$ | 1 | -1 |

Toute les caractères de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Exemple 2. $n = 3$ Exemple : le groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ admet 3 caractères linéaires (au représentation irréductible) :

$$\begin{aligned} \chi_0 : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{C}^* & \chi_1 : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{C}^* & \chi_2 : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ a &\mapsto 1 & a &\mapsto e^{\frac{2i\pi r}{3}} & a &\mapsto e^{\frac{4i\pi r}{3}} \end{aligned}$$

| | χ_0 | χ_1 | χ_2 |
|------------------|----------|----------|----------|
| $\text{Conj}(0)$ | 1 | 1 | 1 |
| $\text{Conj}(1)$ | 1 | j | j^2 |
| $\text{Conj}(2)$ | 1 | j^2 | j |

2.7 Nombre de représentations irréductibles de dimension 1

Théorème 12. Si G est un groupe fini. Le nombre de ses représentations irréductibles de $\text{dim } 1$ est égal à $[G : D(G)]$ où $D(g)$ est le sous-groupe dérivé de G .

Rappel. $D(G) = \langle xyx^{-1}y^{-1}, x, y \in G \rangle$, $D(G) \triangleleft G$, $D(G) = \{e\} \Leftrightarrow G$ abélien

Lemme 3. $H \triangleleft G$ et G/H est abélien $\Leftrightarrow H \supset D(G)$. (i.e. $G/D(G)$ est le plus grand quotient abélien de G)

Démonstration. exercice □

Rappel (Factorisation). Soit $f : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de groupe et soit $H \triangleleft G_1$. Mais : f se factorise par G_1/H (i.e. $G_1 \xrightarrow{f} G_2 \exists \check{f} : G_1/H \rightarrow G_2$ tel que $f = \check{f} \circ \pi$) ssi $H \subset \ker f$.

Démonstration du Théorème. Soit ρ une représentation irréductible de $\dim 1$ de G et soit χ le caractère (linéaire) de degré 1 associé : $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ morphisme de groupes. Si $g \in G$ et si $|G| = n$ alors $g^n = e$ par le Th. de Lagrange. D'où : $\underbrace{\chi(g^n)}_{\chi(e)} = \chi(g)^n = 1$.

Donc $\chi(G) \subseteq \mu_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^*$. Or, le groupe (multiplicatif) \mathbb{C}^* est abélien ; donc : $\chi(G)$ est abélien.

Or d'après le 1er Th. d'isomorphisme :

$$G/\ker \chi \simeq \text{Im } \chi = \chi(G)$$

Donc $G/\ker \chi$ est abélien.

On en déduit d'après le lemme : $\ker \chi \supset D(G)$.

D'après Rappel "Factorisation", le morphisme χ se factorise par $G/D(G)$: il existe un morphisme $\tilde{\chi} : G/D(G) \rightarrow \mathbb{C}^*$ tel que : $\chi = \tilde{\chi} \circ \pi$.

$$G \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^*$$

$$G \xrightarrow{\pi} G/D(G) \xrightarrow{\tilde{\chi}} \mathbb{C}^*$$

Il y a donc une bijection entre l'ensemble des représentation irréductible de $\dim 1$ de G et l'ensemble des représentation irréductible de $\dim 1$ de $G/D(G)$. Or, $G/D(G)$ est abélien, donc tous ses représentation irréductible sont de $\dim 1$ et il y en autant que son ordre, à savoir : $|G/D(G)| = [G : D(G)]$. \square

Remarque. $a, b \in G$. Si $(ab)^2 = e \Rightarrow abab = e \Rightarrow aababb = e \Rightarrow (aa)ba(bb) = aeb \Rightarrow ba = ab$

Exercice 10. 1. Déterminer de classes de conjugaison de \mathfrak{S}_3 . En déduire le nombre de classes d'isomorphisme de représentation irréductible de \mathfrak{S}_3 . On a : $\text{Conj}(e) = \{e\}$, $\text{Conj}((12)) = \{(12), (12), (23)\}$, $\text{Conj}((123)) = \{(123), (132)\}$.

Rappel : deux permutations de \mathfrak{S}_n son conjugués ssi ils ont le même type.

Le nombre de class d'isomorphismes de représentation irréductible d'un groupe fini est égal au nombre de ses classes de conjugaison, à savoir 3 par \mathfrak{S}_3 .

2. Déterminer $D(\mathfrak{S}_3)$. Et déduire le nombre de représentation irréductible de $\dim 1$ de \mathfrak{S}_3 .

On a $D(\mathfrak{S}_3) \triangleleft \mathfrak{S}_3$. D'où $D(\mathfrak{S}_3) = e$ ou \mathfrak{S}_3 ou \mathfrak{A}_3 . Si $D(\mathfrak{S}_3) = \{e\}$ alors \mathfrak{S}_3 serait abélien, ce qui n'est pas le cas ! Donc $D(\mathfrak{S}_3) \neq \{e\}$.

On a : $|\mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3| = [\mathfrak{S}_3 : \mathfrak{A}_3] = 2$ donc $\mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donc est abélien.

D'où : $D(\mathfrak{S}_3) \subset \mathfrak{A}_3$ Donc $D(\mathfrak{S}_3)eq\mathfrak{S}_3$.

Conclusion : $D(\mathfrak{S}_3) = \mathfrak{A}_3$.

Le nombre de représentation irréductible de $\dim 1$ de \mathfrak{S}_3 est égal à $[\mathfrak{S}_3 : D(\mathfrak{S}_3)] = [\mathfrak{S}_3 : \mathfrak{A}_3] = 2$.

3. Montrer que les représentation irréductible de $\dim 1$ de \mathfrak{S}_3 sont la représentation triviale ρ_0 et la signature.

Soit ρ une représentation (irréductible) de $\dim 1$ de \mathfrak{S}_3 i.e. $\rho : \mathfrak{S}_3 \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes. ρ est déterminé par sa valeurs sur les transposition puisque allers ce engendrement. Si τ est une transposition alors $\tau^2 = \tau \circ \tau = e$ d'où : $\rho(\tau)^2 = \rho(\tau^2) = \rho(e) = 1$ d'où : $\rho(\tau) \in \{1, -1\}$.

De plus si τ, τ' sont deux transpositions, elles sont conjugués dans \mathfrak{S}_3 , donc $\rho(\tau) = \rho(\tau')$ car $\rho = \chi$ est une fonction centrale (car \mathbb{C}^* est abélien) et donc $\rho(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \rho(\sigma)\rho(\tau)\rho(\sigma)^{-1} = \rho(\tau)$ deux cas peuvent se produire :

Ou bien $\rho(\tau) = 1$ pour toute transposition τ et alors $\rho : \mathfrak{S}_3 \rightarrow \mathbb{C}^*, \sigma \mapsto 1$ i.e. ρ est constant égal à 1 i.e. $\rho = \rho_0$ représentation trivial.

On bien $\rho(\tau) = -1$ pour toute transpositions τ et alors $\rho = \varepsilon$ signature : $\rho : \mathfrak{S}_3 \rightarrow \mathbb{C}^*$ nombre de transpositions de $\sigma \sigma = \tau_1 \dots \tau_l \mapsto (-1)^l$.

4. Montrer que \mathfrak{S}_3 admet une unique représentation irréductible de **dim 2** (à isomorphisme près). D'après la formule de Burnside, on a :

$$\sum_{W \in \text{Irr}(\mathfrak{S}_3)} (\dim W)^2 = |\mathfrak{S}_3| = 6 = \underbrace{(\dim \rho_0)^2}_1 + \underbrace{(\dim \varepsilon)^2}_1 + \underbrace{(\dim \rho)^2}_?$$

Il existe une unique représentation irréductible de **dim 2** de \mathfrak{S}_3

5. On rappelle que \mathfrak{S}_3 est engendré par le 3-cycle $\sigma = (123)$ et la transposition $\tau = (12)$. Soit $\rho : \mathfrak{S}_3 \rightarrow GL(V)$ une représentation irréductible de **dim ≥ 2** de \mathfrak{S}_3 et soit x un vecteur propre de ρ_σ .

(a) montrer que : $\sigma\tau = \tau\sigma^2$. Très facile. $\sigma\tau = (13) = \tau\sigma^2$

- (b) Montrer que $\rho_\sigma(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in 1, j, j^2$ et $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et que : $\rho_\sigma(\rho_\tau(x)) = \lambda^2 \rho_\tau(x)$. Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\rho_\sigma(x) = \lambda x$. On a : $\sigma^3 = e$ donc $\rho_\sigma^3 = \rho_{\sigma^3} = \rho_e = id_V$. Donc le polynôme minimal de ρ_σ est $x^3 - 1$. Le polynôme caractéristique de ρ_σ a pour ensemble de racines l'ensemble des racines de son polynôme minimal, à savoir $\{1, j, j^2\}$. De plus : $\rho_\sigma(\rho_\tau(x)) = (\rho_\sigma \circ \rho_\tau)(x) = \rho_{\sigma\tau}(x) = \rho_{\tau\sigma^2}(x) = \rho_\tau(\rho_{\sigma^2}(x)) = \rho_\tau(\rho_\sigma(\rho_\sigma(x))) = \rho_\tau(\rho_\sigma(\lambda x)) = \rho_\tau(\lambda \rho_\sigma(x)) = \rho_\tau(\lambda^2 x) = \lambda^2 \rho_\tau(x)$. Donc $\rho_\tau(x)$ est un vecteur propre de ρ_σ associé à la valeur propre λ^2 . Donc le sous-espace. Vecteur $\langle x, \rho_\tau(x) \rangle$ est stable par ρ_σ : $\forall g \in \mathfrak{S}_3, \rho_g(\langle x, \rho_\tau(x) \rangle) \subset \langle x, \rho_\tau(x) \rangle$ Or : la représentation ρ est supposée irréductible. D'où : $V = \langle x, \rho_\tau(x) \rangle$, d'où : $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$.

- (c) Montrer qu'on ne peut avoir $\lambda = 1$. En effet, sinon la droite engendrée par $x + \rho_\tau(x)$ serait invariante par la représentation ρ (car : $\rho_\sigma(x + \rho_\tau(x)) = \rho_\sigma(x) + \rho_{\sigma\tau}(x) = x + \rho_\tau(x)$ et $\rho_\tau(x + \rho_\tau(x)) = \rho_\tau(x) + x$ et $\langle \sigma, \tau \rangle = \mathfrak{S}_3$ donc $\langle x + \rho_\tau(x) \rangle$ est stable pour tous les $\rho_g, g \in \mathfrak{S}_3$ ce qui contredirait l'irréductibilité de ρ . Quitte à remplacer x par $r_t(x)$, on peut supposer que $\lambda = j$. Donc : $\rho_\sigma(x) = jx$.

- (d) Montrer que dans la base $(x, \rho_\tau(x))$, les matrices de ρ_σ et ρ_τ sont : $\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a : $\rho_\sigma(x) = jx$ et $\rho_\sigma(\rho_\tau(x)) = j^2 \rho_\tau(x)$ donc $Mat_{(x, \rho_\tau(x))}(\rho_\sigma) = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$

Et on a : $\rho_\tau(\rho_\tau(x)) = \rho_\tau^2(x) = x$ donc $Mat_{x, \rho_\tau(x)}(r_t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (e) Expliciter les caractères irréductibles de \mathfrak{S}_3 . En utilisant le caractère associé à la représentation ρ , vérifions que ρ est irréductible. Ecrire la table des caractères de \mathfrak{S}_3 .

$$\begin{array}{ccc} \chi_0 = \rho_0 : \mathfrak{S}_3 & \rightarrow & \mathbb{C}^* & \chi_\varepsilon = \rho_\varepsilon : \mathfrak{S}_3 & \rightarrow & \mathbb{C}^* & \chi : \mathfrak{S}_3 & \rightarrow & \mathbb{C}^* \\ g & \mapsto & 1 & g & \mapsto & \varepsilon(g) & g & \mapsto & \text{tr } \rho_g & e \mapsto \text{tr}(1001) = \end{array}$$

$$2 \text{ Conj } 12 \mapsto \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ Conj } 123 \mapsto \text{tr} \begin{pmatrix} j & 0 \\ j^2 & 0 \end{pmatrix} = j + j^2 = -1$$

Pour vérifier que ρ est irréductible montrons que $\langle \chi, \chi \rangle = 1$. On a :

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|\mathfrak{S}_3|} \sum_{g \in \mathfrak{S}_3} \overline{\chi(g)} \chi(g) = \frac{1}{6} (2^2 + 3 \times 0^2 + 2 \times (-1)^2) = 1$$

| | $\chi_0 = \rho_0$ | $\chi_\varepsilon = \varepsilon$ | χ |
|---------------|-------------------|----------------------------------|---------------|
| Conj e | 1 | 1 | ε |
| Conj τ | 1 | -1 | 0 |
| Conj σ | 1 | 1 | -1 |

6. On considère le groupe **diedral** D_3 , groupe des isométries du plan laissant stable le triangle équilatéral dont les sommets sont les racines cubiques de l'unité. Décrivez les éléments de D_3 . Quelle est la table des caractères de D_3 ?

D_3 est engendré par r et s avec : $r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto e^{\frac{2i\pi}{3}} z$ rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ centre en 0.
 $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ symétrie axiale d'axe la droite $z \mapsto \bar{z}$

On a : $r^3 = 1 \quad s^2 = 1 \quad srs = r^{-1}$

C'est un groupe d'ordre 6 non abélien.

Or, il n'y a que deux groupes d'ordre 6 à isomorphisme près : $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et S_3 . (exercice!)

D'où $D_3 \simeq S_3$. La table des caractères de D_3 est donc la même que celle de S_3 .

Rappel. $Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G : gh = hg\}$

Chapitre 3

Exercices

3.1 $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$

Exercice Résolu l'équation $x^2 - 1 = 0$ dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$. L'anneau $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ est-il un corps ?

Remarque. Un polynôme dans un corps K de degré n ne peut avoir plus de n racines.

Rappel :

L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est premier. On a $91 = 7 \times 13$ donc $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ n'est pas un corps.

Si A est un anneau unitaire on note A^* l'ensemble des éléments *inversibles* de A . (i.e. qui admettent un symétrique pour la multiplication). Alors (A^*, \times) est un groupe. On a :

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid (a, n) = 1\}$$

où $a \in \mathbb{Z}$ et $\bar{a} = a + n\mathbb{Z}$.

On définit la fonction indicatrice d'Euler φ pour : $\varphi(n) := |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| =$ le nombre d'entier $\leq n$ premiers avec n .

D'où $|(\mathbb{Z}/91\mathbb{Z})^*| = \varphi(91) = ?$. D'après le Théorème des restes Chinois on a :

$$\text{rcl} \mathbb{Z}/91\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \text{ car } (7, 13) = 1 \tag{3.1}$$

$$x + 91\mathbb{Z} \mapsto (x + 7\mathbb{Z}, x + 13\mathbb{Z}) \tag{3.2}$$

On en déduit un isomorphisme sur les groupes multiplicatifs : $(\mathbb{Z}/91\mathbb{Z})^* \simeq ((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*)$.

D'où : $\varphi(91) = |(\mathbb{Z}/91\mathbb{Z})^*| = |(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*| \times |(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*| = \varphi(7)\varphi(13) = 6 \times 12 = 72$

(7 est premier $\Rightarrow (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ est un corps $\Rightarrow (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{0}\}$ $\Rightarrow \varphi(7) = 6$.

p -premier $\Rightarrow \varphi(p) = p - 1$.

On a : $x^2 - \bar{1}$ dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ où $\bar{a} = a + 91\mathbb{Z}$. On a : $x^2 - \bar{1} = \bar{0} \Leftrightarrow x^2 = \bar{1}$. $\bar{1}$ est solution évidente $-\bar{1} = \bar{90}$ est aussi solution évidente. Déterminons le nombre de solution de cette équation.

Remarque. Soit G un groupe(multiplicatif) et x un élément de G . $x^n = e \Leftrightarrow \text{ord}(x)|n$.
 $x^2 = 1$ dans $(\mathbb{Z}/91\mathbb{Z})^*$ signifie que x est d'ordre divisant 2 i.e. d'ordre 1 ou 2.

On l'élément neutre $\bar{1}$ est le seul élément d'ordre 1 dans $(\mathbb{Z}/91\mathbb{Z})^*$. On cherche donc \bar{a} présent éléments d'ordre 2 de $(\mathbb{Z}/91\mathbb{Z})^*$.

Rappel : Si $f : G \rightarrow G'$ est un isomorphisme de groupes alors : $\text{ord}(f(x)) | \text{ord}(x)$, $\forall x \in G$.

On cherche donc les éléments d'ordre 2 de $(\mathbb{Z}/91\mathbb{Z})^* \simeq (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$. Soit $(\bar{a}, \bar{b}) \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ $\text{ord}((\bar{a}, \bar{b})) = \text{ppcm}(\text{ord}(\bar{a}), \text{ord}(\bar{b}))$. (plus petit commun multiple).

$$\text{ord}(\bar{a}, \bar{b}) = 2 \Leftrightarrow \text{ppcm}(\text{ord}(\bar{a}), \text{ord}(\bar{b})) = 2$$

Par le Th. de Lagrange on a :

$$\text{ord}(\bar{a}) | (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* \text{ i.e. } \text{ord}(\bar{a}) | 6$$

$$\text{ord}(\bar{b}) | (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^* \text{ i.e. } \text{ord}(\bar{b}) | 12$$

Rappel. — Si p est premier alors $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est cyclique.

— Si p est premier impair et si $m \geq 1$ alors $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^*$ est cyclique d'ordre $\varphi(p^m) = (p-1)p^{m-1}$

— $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^*$ et $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^*$ sont cyclique et si $m \geq 3$ alors $(\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z})^* \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/2^{m-2}\mathbb{Z})^*$

Si G est un groupe cyclique d'ordre n et si d est un diviser de n alors G admet un sous-groupe d'ordre d et un seul et il est cyclique.

En particulier, de plus, les générateur du groupe (additif) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sont les \bar{a} avec $a \in \{1, \dots, n\}$ et $(a, n) = 1$. Il y en a donc : $\varphi(n)$.

En particulier, le groupe cyclique G admet $\varphi(d)$ éléments d'ordre d (d étant un diviser de l'ordre de G).

D'où $(\text{ord}(\bar{a}), \text{ord}(\bar{b})) \in \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$. Conclusion. Il y a donc **trois** éléments d'ordre 2 dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$, i.e. aussi $(\mathbb{Z}/91\mathbb{Z})^*$. L'équation $x^2 = 1$ admet donc 4 solutions dans $(\mathbb{Z}/91\mathbb{Z})^*$.

Rappel. Si G est un groupecyclique d'ordre n engendré par g alors :

$$\text{ord}(g^m) = \frac{n}{(n, m)}.$$

Remarque. $G = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ $\text{ord}(\bar{2}) = 3$, $\text{ord}(\bar{3}) = 6$ (just check). $\bar{3}$ — generateur.

$$D'o\grave{u} \langle \tilde{3} \rangle = \left(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \right)^* . \text{ ord}(\tilde{3}^m) = 2 \Leftrightarrow \frac{6}{(6,m)} = 2 \Leftrightarrow (6,m) = \frac{6}{2} = 3 \Leftrightarrow m = 3 .$$

Conclusion $\tilde{3}^3 = \tilde{6}$ est d'ordre 2 dans $\left(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \right)^*$.

Donc, les éléments d'ordre 2 de $\left(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \right)^* \times \left(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \right)^*$ sont : $(\tilde{1}, -\tilde{1}), (-\tilde{1}, \tilde{1}), (-\tilde{1}, -\tilde{1})$.
 $\left(\mathbb{Z}/91\mathbb{Z} \right) \rightarrow \left(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \right)^* \times \left(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \right)^*$

$$\begin{aligned} \overline{64} &\stackrel{?}{\mapsto} (\tilde{1}, -\tilde{1}) \\ \overline{27} &\stackrel{?}{\mapsto} (-\tilde{1}, \tilde{1}) \\ \overline{90} &\stackrel{?}{\mapsto} (-\tilde{1}, -\tilde{1}) \\ -\overline{13} &\mapsto (\tilde{1}, \tilde{0}) \text{ (!)} \\ \overline{14} &\mapsto (\tilde{0}, \tilde{1}) \text{ (!)} \end{aligned}$$

$$(\tilde{1}, -\tilde{1}) = (\tilde{1}, \tilde{0}) + (\tilde{0}, \tilde{1}) = \varphi(-\overline{13}) - \varphi(\overline{14}) = \varphi(-\overline{13} - \overline{14}) = \varphi(-\overline{27}) = \varphi(\overline{64}).$$

Déterminons une identité de Bezout entrée les entier premiers entre eux 7 et 13, au moyen de l'algorithme d'Euclide étendre :

$$\begin{aligned} 13 &= & 7 \times 1 + 6 \\ 7 &= & 6 \times 1 + 1 \\ 1 &= & 7 - 6 \times 1 = 7 - (13 - 7 \times 1) \times 1 = 13 \times (-1) + 7 \times 2 = 1 \end{aligned}$$

Savoir -13 and 14.

Remarque. On a : $\left(\mathbb{Z}/91\mathbb{Z} \right)^* \stackrel{\text{Th. de rests chinois car } (7, 13) = 1}{\simeq} \left(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \right)^* \times \left(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \right)^* \simeq \left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \right)^* \times \left(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \right)^* \text{ ot } \simeq \left(\mathbb{Z}/72\mathbb{Z} \right)^* \text{ car } (6, 12)eq1. \text{ Conclusion : le groupe } \left(\mathbb{Z}/91\mathbb{Z} \right)^* \text{ n'est pas cyclique.}$

3.2 Sylow

Exercice 11. 1. Soit G un groupe d'ordre 33.

- Détermine le nombre de 3-Sylow de G . Le groupe G peut'il être simple ?
- Déterminer le nombre de 11-Sylow de G . En déduire que G nécessairement abélien. Est-il nécessairement cyclique ?

Solution :

- D'après le 1^{er} Th. de Sylow, le nombre n_3 de 3-Sylow de G vérifie :

$$\{ \quad n_3 = 1 \quad \text{mod } 3 \quad | \quad 11 \}$$

D'où : $n_3 = 1$. G admet donc un unique 3-Sylow H . Or, d'après 2^{ème} Th de Sylow, les conjugués d'un 3-Sylow sont encore un 3-Sylow. Donc les conjugués de H sont égaux à H . Donc $H \triangleleft G$. Le groupe G admet donc un sous-groupe distingué n'est pas simple.

- De même, le nombre n_{11} de 11-Sylow de G vérifie :

$$\{ \quad n_{11} = 1 \quad \text{mod } 11 \quad | \quad 3 \}$$

D'où : $n_{11} = 1$. G admet donc un unique 11-Sylow K et, de même, il est distingué dans G . Ou a :

(a) $H < G, K < G$

(b) $H \cap K = \{e\}$ car H et K sont d'ordres premiers entre eux (si $g \in H \cap K$ alors d'après le th de Lagrange, on a :

$$\begin{cases} \text{ord}(g) \mid |H| \\ \text{ord}(g) \mid |K| \end{cases}$$

(c) $G = HK$ car $\#HK = \frac{|H| \times |K|}{|H \cap K|} = \frac{3 \times 11}{1} = 33 = |G|$.

D'où : $G \simeq H \times K$ (G est isomorphe au produit direct interne de H par K).

Or H est d'ordre 3, et 3 est premier, donc H est cyclique et donc $H \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. De même : K est d'ordre 11 et 11 est premier, donc K est cyclique et donc $K \simeq \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Donc : $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ donc G est abélien. Par le Théorème des restes Chinois puisque $(3, 11) = 1$, on a :

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/33\mathbb{Z}.$$

Donc $G \simeq \mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$. G est cyclique.

Exercice 12. On considère le groupe des inversibles $(\mathbb{Z}/33)^*$ de l'anneau $\mathbb{Z}/33$.

1. On est l'ordre de $(\mathbb{Z}/33)^*$?

2. Le groupe $(\mathbb{Z}/33)^*$ est-il cyclique ?

3. Admet-il un élément d'ordre 4 ?

1. On a : $|(\mathbb{Z}/33)^*| = \varphi(33) = \varphi(3 \times 11) = |\text{car}(3, 11)| = \varphi(3) \times \varphi(11) = 2 \times 10 = 20$, car $\varphi(p^k) = (p-1)p^{k-1}$.

Remarque. A-t-on $\overline{12} \in (\mathbb{Z}/33)^*$? (où $\bar{a} = a + 33\mathbb{Z}$). Non car $(12, 33) \neq 1$.

$$|(\mathbb{Z}/33)^*| = \text{nombre d'éléments} \leq 33 \text{ et premiers avec } 33.$$

2. D'après le Th. des Restes Chinois, puisque $(3, 11) = 1$, on a un isomorphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$$

qui induit un isomorphisme de groupes sur les groupes des inversibles :

$$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^* \simeq (\mathbb{Z}/33\mathbb{Z})^*$$

Rappel. Si p est un premier impair et si $m \geq 1$ alors :

$$(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)p^{m-1}\mathbb{Z}$$

$$(\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{m-2}\mathbb{Z}$$

Alors $(\mathbb{Z}/33\mathbb{Z})^* \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ car $(2, 10) = 2$. Donc $(\mathbb{Z}/33\mathbb{Z})^*$ n'est pas cyclique.

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. $\text{ord}((a, b)) = \text{ppcm}(\text{ord}(a), \text{ord}(b))$. O'où : $\text{ord}(a, b) = 4 \leftrightarrow \text{ppcm}(\text{ord}(a), \text{ord}(b)) = 4$, avec $\text{ord}(a) \mid 2$ et $\text{ord}(b) \mid 10$ — impossible. Donc le groupe $(\mathbb{Z}/33\mathbb{Z})^*$ n'admet pas d'élément d'ordre 4.

3.3 \mathfrak{S}_4 et \mathfrak{A}_4

$\mathfrak{A}_4 < \mathfrak{S}_4$ — permutations paires de \mathfrak{S}_4 .

On fait agir \mathfrak{S}_4 sur lui-même par conjugaison :

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_4 &\rightarrow \mathfrak{S}_4 \\ (g, h) &\mapsto g \cdot h = ghg^{-1}\end{aligned}$$

Exercice 13. 1. Montrer que cette définit bien une action. Soit $h \in \mathfrak{S}_4$. A quoi correspond l'orbite de h et le stabilisateur de h ?

$$\begin{aligned}\text{orb}(h) &= \{g \cdot h, g \in \mathfrak{S}_4\} \\ &= \{ghg^{-1}, g \in \mathfrak{S}_4\} \\ &= \text{classe de conjugaison on de } h \text{ dans } \mathfrak{S}_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{stab}(h) &= \{g \in \mathfrak{S}_4, gh = h\} \\ &= \{g \in \mathfrak{S}_4, ghg^{-1} = h\} \\ &= \{g \in \mathfrak{S}_4, gh = hg\} \\ &= \text{"centre de } h \text{"eqZ}(G).\end{aligned}$$

2. Déterminer les **classes de conjugaison** de \mathfrak{S}_4 . $x, y \in \mathfrak{S}_4$: $x \sim y$ ssi $\exists g \in \mathfrak{S}_4$ t.q. $y = g \cdot x = gxg^{-1}$.

$$\text{class}(x) = \{y \in \mathfrak{S}_4 \mid \exists g \in \mathfrak{S}_4, y = gxg^{-1}\} = \{y = gxg^{-1} \mid g \in \mathfrak{S}_4\} = \text{orb}(x)$$

Rappel. Deux éléments de \mathfrak{S}_n sont conjugués dans \mathfrak{S}_n ssi ils ont le même type.

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_4 &= \{e\} \cup \{\text{type } 2 : (12), (13) \dots (34)\} \cup \{\text{type } 3 : (123), (124) \dots (243)\} \\ &\quad \cup \{\text{type } 4 : (1234), (1243) \dots (1432)\} \cup \{\text{type } 2, 2 : (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \\ \mathfrak{S}_4 &= \text{conj}(e) \cup \text{conj}((12)) \cup \text{conj}((123)) \cup \text{conj}(1234) \cup \text{conj}((12)(34))\end{aligned}$$

Remarque.

- deux éléments g et g' de \mathfrak{S}_n sont conjugués dans \mathfrak{S}_n , s'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $g' = \sigma g \sigma^{-1}$,
- deux éléments g et g' de \mathfrak{A}_n sont conjugués dans \mathfrak{A}_n , s'il existe $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ tel que $g' = \sigma g \sigma^{-1}$.

3. Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, les conjugués de σ dans \mathfrak{S}_4 forment deux classes de conjugaison dans \mathfrak{A}_4 s'il n'existe pas permutation impaire commutant avec σ

Remarque. Le groupe \mathfrak{S}_4 agit sur l'ensemble \mathfrak{S}_4 par conjugaison. Le groupe \mathfrak{A}_4 agit sur l'ensemble \mathfrak{A}_4 par conjugaison. Si σ appartient à l'ensemble \mathfrak{S}_4 , alors : $\text{stab}_{\mathfrak{S}_4}(\sigma) = \{g \in \mathfrak{S}_4 \mid g\sigma = \sigma g\}$ et $\text{Stab}_{\mathfrak{A}_4}(\sigma) = \{g \in \mathfrak{A}_4 \mid g\sigma = \sigma g\}$. S'il n'existe pas de permutation impaire commutant avec σ alors :

$$\text{stab}_{\mathfrak{S}_4}(\sigma) = \text{stab}_{\mathfrak{A}_4}(\sigma)$$

Or : $\# \text{orb}_{\mathfrak{S}_4}(\sigma) = [\mathfrak{S}_4 : \text{stab}_{\mathfrak{S}_4}(\sigma)] = [\mathfrak{S}_4 : \text{stab}_{\mathfrak{A}_4}(\sigma)] = [\mathfrak{S}_4 : \mathfrak{A}_4] \times [\mathfrak{A}_4 : \text{stab}_{\mathfrak{S}_4}(\sigma)] = 2 \cdot \# \text{orb}_{\mathfrak{A}_4}(\sigma)$. Donc les conjugués de σ dans \mathfrak{S}_4 constituent deux classes de conjugaison dans \mathfrak{A}_4 .

Exercice 14. On considère le 3-cycle $\sigma = (123) \in \mathfrak{S}_4$

1. Quel est l'ordre du stabilisateur de σ dans \mathfrak{S}_4 ?
2. En déduire qu'il n'existe pas de permutation impaire qui commute avec σ
3. En déduire les classes de conjugaison de \mathfrak{A}_4 .

Solution :

1. L'orbite de σ dans \mathfrak{S}_4 pour l'action de est précisément la classe de conjugaison de G (dans \mathfrak{S}_4) il s'agit de l'ensemble des 3-cycles de \mathfrak{S}_4 . Il y en a 8. Ou : $[\mathfrak{S}_4 : \text{stab}_{\mathfrak{S}_4}(\sigma)] = \#orb(\sigma) = 8$. D'où : $|\text{stab}_{\mathfrak{S}_4}| = \frac{|\mathfrak{S}_4|}{8} = \frac{24}{8} = 3$.
2. Il n'y a que trois permutations de \mathfrak{S}_4 qui commutent avec σ : Donc $\text{stab}_{\mathfrak{S}_4}(\sigma) = \{e, \sigma, \sigma^2\}$, $\sigma^2 = (132)$ — permutation pairs. Il n'existe donc pas de permutation impaire qui commute avec σ .
3. $\mathfrak{A}_4 = \{e\} \cup \{3\text{-cycles type}\} \cup \{(2,2)\text{-cycles type}\}$. $|\mathfrak{A}_4| = \frac{|\mathfrak{S}_4|}{2} = 12$. D'après les questions précédents la classe de conjugaison $\text{Conj}_{\mathfrak{S}_4}(\sigma)$ de σ dans \mathfrak{S}_4 , qui est égale à l'ensemble de 3-cycles de σ dans se décompose en deux classes de conjugaisons dans \mathfrak{A}_4 :
 $\text{Conj}_{\mathfrak{A}_4}((123)) = \{(123), (142), (134), (243)\}$ et
 $\text{Conj}_{\mathfrak{A}_4}((132)) = \{(132), (124), (143), (234)\}$

Remarque. Si σ est un 3-cycle (123) alors σ et σ^2 ne sont pas conjugués dans \mathfrak{A}_4 car sinon il existerait un cycle τ tel que :

$$(132) = \sigma^2 = \tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(1)\tau(2)\tau(3)) \Rightarrow \tau = (23) \text{ mais } (23) \notin \mathfrak{A}_4.$$

En revanche, les types $(2,2)$ constituent encore une classe de conjugaison dans \mathfrak{A}_4 car il existe une permutation impaire qui commute avec $(12)(34)$, à savoir (12) . Conclusion

$$\mathfrak{A}_4 = \text{Conj}_{\mathfrak{A}_4}(e) \cup \text{Conj}_{\mathfrak{A}_4}((123)) \cup \text{Conj}_{\mathfrak{A}_4}((132)) \cup \text{Conj}_{\mathfrak{A}_4}((12)(34)).$$

Remarque. Considérons l'ensemble $K = \{e, (12)(23), (13)(24), (14)(23)\}$. K est un sous-groupe de \mathfrak{A}_4 , il est stable par conjugaison, donc il est distingué dans \mathfrak{A}_4 . Donc : \mathfrak{A}_4 n'est pas simple ! $K \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (groupe de Klein).

Exercice 15. Si G est un groupe, on rappelle que le sous-groupe dérivé $D(G)$ de G engendre par les commutateurs i.e. par les éléments : $xyx^{-1}y^{-1}$ pour $x, y \in G$

1. Montrer que $D(G) \triangleleft G$.
2. Montrer que $H \triangleleft G$ et G/H est abélien, alors $H \supset D(G)$.

Solution :

1. $D(G)$ est stable par tout automorphisme (car l'image d'un commutateur par un automorphisme de G est encore un commutateur ; en effet, on a : $f(xyx^{-1}y^{-1}) = f(x)f(y)f(x)^{-1}f(y)^{-1}$) donc a fonction par tout automorphisme intérieur $f_h : G \rightarrow G$; $g \mapsto ghg^{-1}$. Donc $D(G)$ est un sous-groupe "caractéristique" de G a fortiori est un sous-groupe distingué de G .
2. Si $H \triangleleft G$ et H abélien alors point $x, y \in G$ Puisque G est abélien, on a :

$$xHyH = yHxH$$

$$\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x}$$

$$xyH = yxH$$

Donc $x^{-1}y^{-1}xy \in H$ D'où : H contient tous les commutateurs donc H contient $D(G)$

Exercice 16. $|G| = 112 = 2^7 \times 7$ On suppose G simple.

1. $\mathcal{H} = 2\text{-sylow de } G$ Par le 1er Théorème de Sylow si n est le nombre de 2-Sylow de G : $n \equiv 1 \pmod{2}$ et $n_2 | 7$ et $n_2 | 7 \Rightarrow n_2 \in \{1, 7\}$ Si $n_2 = 1$ alors on distingue dans G . Or, G est suppose simple, il n'admet donc pas de sous-groupe distingué propre. Donc $n_2 = 7$ i.e. $\#\mathcal{H} = 7$.

2. 2.1) i) Soit $H \in \mathcal{H}$, on a : $e \cdot H$ ii) Soient $g, g' \in G, h \in \mathcal{H}$; on a $g \cdot (g' \cdot H) = g \cdot (g'Hg'^{-1}) = g(g'Hg')g^{-1} = gg'Hgg'^{-1}g' = (gg')H(gg')^{-1} = (gg')H$. 2.2) D'après le 2ème Théorème de Sylow, si H et H' sont deux 2-Sylow de G , alors ils sont conjugués dans G . $\exists g \in G$ tel que $H' = gHg^{-1}$ i.e. tel que $H' = g \cdot H$; donc H et H' sont dans la même orbite. Il n'y a donc qu'une seule orbite : l'action est donc **transitive**.

2.3) Fidèle ? Considérons le morphisme π associé à cette action :

$$\begin{array}{rclcl} \pi : G & \rightarrow & \mathfrak{S}_{\mathcal{H}} & & \\ g & \mapsto & \begin{array}{l} \pi_g : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \\ H \mapsto gHg^{-1} \end{array} & & \end{array}$$

Le noyau $\ker \pi$ et tant que noyau d'un morphisme de groupe, est un sous-groupe distingué de G . Or G est suppose simple. Donc $\ker \pi = \{e\}$.

Mais $\ker \pi = G$ signifie que $\forall g \in G, \forall H \in \mathcal{H}$ on a : $gHg^{-1} = H$. Donc, tous les orbites sont réduites à un élément. Or l'action est transitive, il n'y a qu'une seule orbite. (et non pas 7). Donc $\ker \pi = \{e\}$. conclusion : $\ker \pi = e$ i.e. π est injectif i.e. l'action est fidèle.

2.4) D'après le 1ère Théorème d'isomorphisme on a : $G/\ker \pi \simeq \text{Im}(\pi)$ Mais $\ker \pi = e$ donc $G/\ker \pi \simeq G$. Donc $G \simeq \text{Im}(\pi) < \mathfrak{S}_{\mathcal{H}} \simeq \mathfrak{S}_7$. Donc G est isomorphe à un sous-groupe de \mathfrak{S}_7 .

3) $G \rightarrow (\pi)\mathfrak{S}_7 \rightarrow (\varepsilon)\{1, -1\} \xrightarrow{\varepsilon \circ \pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 3.1) Si $\varepsilon \circ \pi$ est surjective alors $\text{Im}(\varepsilon \circ \pi) = \{1, -1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ Le noyau $\ker(\varepsilon \circ \pi)$ de $\varepsilon \circ \pi$ est un sous-groupe de G et, d'après le 1er Th d'isomorphisme, on a : $G/\ker(\varepsilon \circ \pi) \simeq \text{Im}(\varepsilon \circ \pi) = \{1, -1\}$ d'où : $[G : \ker(\varepsilon \circ \pi)] = |G/\ker(\varepsilon \circ \pi)| = |\text{Im}(\varepsilon \circ \pi)| = 2$

Donc $\ker(\varepsilon \circ \pi)$ est un sous-groupe de G d'indice 2.

3.2) Puisque G est supposé simple, il ne peut admettre de sous-groupe d'indice 2 car un tel sous-groupe serait un sous-groupe distingué propre de G . Donc $\varepsilon \circ \pi$ n'est pas surjective or $\varepsilon \circ \pi(e) = 1$ donc $1 \in \text{Im}(\varepsilon \circ \pi)$. Donc : $\text{Im}(\varepsilon \circ \pi) = \{1\}$. On en déduit que $\text{Im}(\pi) \subset \mathfrak{A}_7$ (permutations paires de \mathfrak{S}_7). or : $G \simeq \text{Im}(\pi)$ car π est injectif. Donc G est isomorphe à un sous-groupe de \mathfrak{A}_7 .

3.3) Par le Théorème de Lagrange, on doit avoir que l'ordre de G doit diviser l'ordre de \mathfrak{A}_7 or : $|G| = 2^4 7$ et $|\mathfrak{A}_7| = 2^3 7 3^2 5$ et $2^4 7 \nmid 2^3 7 3^2 5$. on obtient donc une contradiction. Conclusion : G n'est pas simple.