Chapitre 1

Initiation

1.1 Les espaces de Hilbert

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 1. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une FORME HERMITIENNE

1. $\forall y \in E : \varphi(\cdot, y) : E \to \mathbb{R}$ est linéaire
2. $\forall (x, y) \in E \times E : \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$

Définition 2. Un PRODUIT SCALAIRE est une forme hermitienne `définie positive` : $\forall e \in E\ \varphi(x, x) \geq 0$; $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0_E$. Notation :

$$\varphi(x, y) := (x|y)$$

Définition 3. Le couple $(E, (\cdot|\cdot))$ s'appelle un ESPACE PRÉHILBERTIEN.

Définition 4. On définit la NORME sur E : $\forall x \in E\ \|x\|_E = (x|x)^{\frac{1}{2}}$.

Remarque. En particulier on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\forall (x, y) \in E^2\ |(x|y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Donc inégalité triangulaire. Ainsi c'est vraiment une norme.

Définition 5. $x, y \in E$ sont dits ORTHOGONAUX si $(x|y) = 0$. Nous dénotons cela comme $x \perp y$.

Définition 6. $(E, \|\cdot\|)$ est dit COMPLET si toutes les suites de Cauchy de E convergent dans E.

Définition 7. UNE ESPACE DE HILBERT est un espace préhilbertien complet pour la distance $\|\cdot - \cdot\| = (\cdot - \cdot | \cdot - \cdot)^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 1. $l^2(\mathbb{N}) = \{n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \sum_{n\geq 0} |f(n)|^2 < \infty\}$

$l^2(\mathbb{N})$ est $\mathbb{C}$ espace. $\forall f, g \in l^2(\mathbb{N})$:

$$(f|g)_{l^2(\mathbb{N})} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\geq 0} f(n)\overline{g(n)}.$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $l^2(\mathbb{N})$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > p \geq N : \quad ||f_n - f_p||_{l^2(\mathbb{N})} < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Question. $\exists f \in l^2(\mathbb{N})$ telle que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$?

$(*) \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; t.q. \; \forall n > p \geq N \; ||f_n - f_p||^2 = \sum_{j\geq 0} |f_n(j) - f_p(j)|^2 \leq \varepsilon^2$

$\implies \quad |f_n(j) - f_p(j)| \leq \varepsilon \; \forall j \in \mathbb{N}.$

$\implies \; \forall j \in \mathbb{N} \; (f_n(j))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ qui est complet, donc $\exists f(j) \in \mathbb{C}$ telle que $\lim_{n\to\infty} |f_n(j) - f(j)| = 0$.

Il faut montrer que f est la limite dans $l^2(\mathbb{N})$ de la suite f_n.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$ t.q. $\forall n > p \geq N \sum_{j\geq 0} |f_n(j) - f_p(j)|^2 \leq \varepsilon^2$

$\implies \forall J \in \mathbb{N} \underbrace{\sum_{j=0}^{J} |f_n(j) - f_p(j)|^2}_{\text{somme partielle}} \leq \varepsilon^2$, par passage à la limite sur p : $\sum_{j=0}^{J} |f_n(j) - f(j)|^2 \leq \varepsilon^2$

Conclusion : $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$ telle que $\forall n \geq N \; ||f_n - f|| < \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} f_n = f$.

Mais $f \overset{?}{\in} l^2(\mathbb{N})$.

Vérifions que $f \in l^2(\mathbb{N})$:

$(\sum_{j\geq 0} |f(j)|^2)^{1/2} = (\sum_{j\geq 0} |f_n(j) - f(j) + f(j)|^2)^{\frac{1}{2}} = ||\underbrace{f - f_n}_{\in l^2(\mathbb{N})} + \underbrace{f_n}_{\in l^2(\mathbb{N})}|| \leq ||f - f_n|| + ||f_n|| < +\infty.$

Théorème 1 (Projection orthogonale)**.** *Soit H un espace de Hilbert et C une partie* `convexe fermée` *et* `non vide` *de H. Alors $\forall x \in H \; \exists! y_0 \in C$ t.q.*

1. $\operatorname{dist}(x, C) := \inf\{d(x, y), y \in C\} = \inf\{||x - y||_H, y \in C\} = ||x - y_0||_H$
2. $\forall y \in C \;\; \operatorname{Re}(x - y_0 | y - y_0) \leq 0$

y_0 est la projection orthogonale de x sur C.

1 Projection orthogonale

Remarque.

(i) C est convexe si $\forall x, y \in C\ [x,y] = \{tx + (1-t)y, t \in [0,1]\} \in C$

(ii) $H = \mathbb{R}^2 :\ [x,y] \in C$

(iii) si $x_0 \in C$ dans le cas $y_0 = x_0$ et $\text{dist}(x_0, C) = 0 = ||x_0 - x_0||_H$

Démonstration. Notons par $d = d(x,C) > 0$ $(x \in H \diagdown C)$. Soit $y, z \in C$ on pose $b = x - \frac{1}{2}(y+z),\ c = \frac{1}{2}(y-z) :\ ||b|| = ||x - \frac{1}{2}\underbrace{(y+z)}_{\in C}|| \geq d$.

On a aussi $b - c = x - y$ et $b + c = x - z \implies ||x-y||^2 + ||x-z||^2 = ||b-c||^2 + ||b+c||^2 = (b-c|b-c) + (b+c|b+c) = ||b||^2 + ||c||^2 - (b|c) - (c|b) + ||b||^2 + ||c||^2 + (b|c) + (c|b)$.

$||x-y||^2 + ||x-z||^2 = 2(||b||^2 + ||c||^2) \geq 2d^2 + 2\frac{1}{4}||y-z||^2 \implies ||y-z||^2 \leq 2(||x-y||^2 - d^2) + 2(||x-z||^2 - d^2)$. Pour $n \in N$ $C_n = \{y \in C | ||x-y||^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\}$ est fermée dans H (boule fermée).

Puisque C est fermé, $C_n = \{y \in H | ||x-y||^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\} \cap C$ est fermé dans C.

De plus : $\delta(n) := \sup\{||y-z||, (y,z) \in C_n \times C_n\} \leq \sup\{[2(||x-y||^2 - d^2) + 2(||x-z||^2 - d^2)]^{\frac{1}{2}}, y, z \in C_n \implies \delta(n) \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

H est complet et $C \subset H_x$ c est fermé. C est un espace métrique complet. Il satisfait le critère de Cantor : $\bigcap_n C_n = \{y_0\}$.

$y_0 \in \cup_n C_n$ $d^2 \leq ||x - y_0||^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\implies ||x - y_0|| = d^2$.

Montrons ii) : $\forall t \in [0,1],\ \forall \in H$ $\phi(t) = ||\underbrace{y_0 + t(y - y_0)}_{\in C} - x||^2 = ||y_0 - x||^2 + 2t\,\mathrm{Re}(y_0 - x|y - y_0) + t^2||y - y_0||^2$. $\phi(0) = d^2 \leq \phi(t)$ $\forall t \in (0,1] \implies \phi'(0) \geq 0$. $\phi'(t) = 2\,\mathrm{Re}(y_0 - x|y - y_0) + 2t||y - y_0||^2$. $\phi'(0) \leq 0 \implies 2\,\mathrm{Re}(y_0 - x|y - y_0) \leq 0 \implies (i)$.

□

Théorème 2 (corollaire)**.** *Soit F un sous-espace* `fermé` *de H alors : $H = F \oplus F^\perp$.*

Démonstration.

F est convexe puisque $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $\forall x, y \in F$ $\alpha x + \beta y \in F \implies$ cela est vrai si $\alpha = t,\ \beta = 1 - t,\ t \in [0,1]$.

On peut ceci appliquer le théorème 1 Projection orthogonale :

On a toujours $F + F^\perp \subset H$ et $F + F^\perp = F \oplus F^\perp$ car si $x \in F \cap F^\perp \implies (x|x) = 0 = ||x||^2 \implies x = 0_H$

Soit $x \in H$, et $y_0 \in F$ sa projection orthogonale : $\forall d \in \mathbb{C}, y \in F, y_0 + dy \in F$ et donc $\mathrm{Re}(x - y_0|y_0 + dy - y_0) \leq 0 \implies \mathrm{Re}(x - y_0|dy) \leq 0$

$d = (x - y_0|y) \implies (x - y_0)$ ...

Conclusion $\mathrm{Re}(x - y_0|dy)$... donc $H = F \oplus F^\perp$. □

Définition 8. Dans ces conditions, l'application $P : x \in H \implies x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$

$$x \overset{P}{\mapsto} x_1 \in F$$

est le Projecteur Orthogonal sur F.

Exemple 2. Montrer que P est linéaire continue et satisfait $P^2 = P$.

Définition 9. Une partie A de H est dite TOTALE si le plus petit sous espace fermé contenant A et H.

H est SÉPARABLE si H admet une famille totale dénombrable.

Exemple 3. $H = l^2(\mathbb{N}) : \mathcal{F} = \{e_0, e_1, ...\}$ avec $e_j(i) = \delta_{ij} \to (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...0)$. $\mathcal{F}$ est totale. Elle est dénombrable, $l^2(\mathbb{N})$ est séparable.

Théorème 3. *Soit H un espace de Hilbert et $A \subset H$:*

1. $\overline{\text{vect}(A)} = (A^\perp)^\perp$
2. *A est un sous-espace alors $(A^\perp)^\perp = \bar{A}$*
3. *A est totale $\iff$ $A^\perp = \{0_H\}$*

1.2 Séries dans un espace vectoriel normé

Soit $(E, ||\cdot||_E)$ un `espace vectoriel normé` (e.v.n).

Définition 1. On appelle SÉRIE de terme général $u_n \in E$ la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de E t.q.

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

La série est CONVERGENTE dans $(E, ||\cdot||_E)$ si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans E : S—c'est la somme de la série.

Définition 2. Une série $\sum u_n$ est dite ABSOLUMENT CONVERGENTE (AC) si la série $\sum ||u_n||_E$ est convergente dans $\mathbb{R}^+$.

Théorème 1. *Si E est* `complet` *(espace de Banach/Hilbert), alors toute série AC est convergente et*

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||.$$

Démonstration. $J_n = \sum_{n=0}^{N} ||u_n||$ et convergente $\iff$ $(J_n)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\forall\varepsilon > 0\ \exists K\ t.q.\ \forall N > P \geq K\ |J_n - J_p| \leq \varepsilon \implies \sum_{j=p+1}^{N} ||u_j|| \leq \varepsilon.$

Mais $||S_n - S_p|| = ||\sum_{j=p+1}^{N} u_j|| \leq \sum_{j=p+1}^{N} ||u_j||$ inégalité triangulaire.

$\implies N > P \geq K : ||S_N - S_P|| \leq \varepsilon \iff (S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E et donc convergente.

D'autre part $||S_n|| = ||\sum_{j=0}^{n} u_j|| \leq \sum_{j=0}^{n} ||u_j|| \leq \sum_{j=0}^{\infty} ||u_j|| \implies \left\|\sum_{j=0}^{\infty} u_j\right\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} ||u_j||$. □

Définition 3. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$ de H est dite ORTHOGONAL si

$$(x_i|x_j) = 0 \;\forall i \neq j.$$

Théorème 2. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite orthogonale dans un espace de Hilbert H. Alors la série $\sum x_n$ est convergente $\iff \sum_{n\geq 0} ||x_n||_H^2$ est convergente et*

$$\left\| \sum_{n\geq 0} x_n \right\|_H^2 = \sum_{n\geq 0} ||x_n||_H^2.$$

Démonstration. $\forall\ l > p$ on a $||\sum_{n=l}^{p}||^2 = (\sum_{n=l}^{p} x_n|\sum_{n=l}^{p} x_n) = \sum_{n,n'=l}^{p}(x_n|x_n') = \sum_{n=l}^{p} ||x_n||^2$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\iff$ $(||x_n||^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Couchy dans $\mathbb{R}$.

D'autre part $S_N = \sum_{n\geq 0}^{N} x_n \implies ||S_N||^2 = \sum_{n\geq 0}^{N} ||x_n||^2$. Alors $S = \lim_N S_N = \sum x_n$ $||S||^2 = ||\lim_N S_N||^2 = \lim ||S_N||^2$ par continuité de la $||\cdot||$ et donc $||S||^2 = \lim_N \sum_{n\geq 0}^{N} ||x_n||^2 = \sum_{n\geq 0} ||x_n||^2$ □

1.3 Bases Hilbertiennes

Définition 1. On appelle BASE HILBERTIENNE, une suite de vecteur $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

1. $\forall n, m : (x_n|x_m) = \delta_{nm}$,
2. $\mathrm{vect}\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\} = H \iff \mathrm{vect}\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}^{\perp} = \{0_H\} \iff (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale.

Théorème 1 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit (x_n) une suite* `orthonormale` *($\forall n, m (x_n|x_m) = \delta_{nm}$) dans H. Alors $\forall x \in H \sum_{n\geq 0} |(x|x_n)|^2$ est convergente et $\sum_{n\geq 0} |(x|x_n)|^2 \leq ||x||^2$.*

Exemple 4. $H = l^2(\mathbb{N})$. Considérons $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $(e_n|e_m) = \sum_{k\geq 0} e_n(k)\overline{e_m(k)} = \sum_{k\geq 0} \delta_{nk}\delta_{mk} = \delta_{nm}$. En fait on montre que $\sum_{n\geq 0} |(e_n|x)|^2 = ||x||^2$; c'est une base Hilbertienne.

Démonstration. Soit $x \in H$ on pose $y_i = (x|e_i)e_i$ et $Y_N = \sum_1^N y_i$, $\underline{Z_N = X - Y_N}$. Alors : $(Z_N|y_i) = (X - Y_N|y_i) = (X|y_i) - (Y_N|y_i)$. $(x|y) = (x|(x|e_i)e_i) = \overline{(x|e_i)}(x|e_i) = |(x|e_j)|^2$. $(Y_N|y_i) = \sum_{j=1}^{N}(y_j|y_i)$ mais $y_j \perp y_i \implies (Y_N|y_i) = ||y_i||^2$ si $N \geq i$. (autrement =0)

Dans ces conditions puisque $||y_i||^2 = |(x|e_i)|^2$. Alors $(Z_n|y_i) = 0 \implies (Z_N|Y_N) = 0$ cas $Y_n = \sum_{i=0}^{N} y_i \implies ||x||^2 = ||Z_n||^2 + ||Z_N||^2$ $(x = Zn + YnetZ_n \perp Y_n) \implies ||y_n||^2 = \sum ||y_n||^2 \leq ||x||^2$

La suite $\sum^N ||y_n||^2$ est positive, majorée donc convergente et par passage à la limite : $\sum_{n\geq 0} ||y_n||^2 = \sum |(x|e_n)|^2 \leq ||x||^2$. QED □

Théorème 2 (Egalité de Parseval)**.** *Soit (e_n) une* `base Hilbertienne` *de H alors*

1. *La série $\sum_{n\geq 0} |(x|e_n)|^2$ est convergente et $||x||^2 = \sum_{n\geq 0} |(x|e_n)|^2$,*
2. *La série $\sum_{n\geq 0}(x|e_i)e_i$ est convergente dans H et $\sum_{i\geq 0}(x|e_i)e_i = x$.*

Démonstration. En utilisant le théorème précédent alors $\sum |(x|e_i)|^2$ est convergent. On utilise l'identité de la médiane : $\sum(x|e_i)e_i$ est convergente dans H $(||(x|e_i)e_i||^2 = |(x|e_i)|^2)$. On pose $y = \sum_{i\geq 0}(x|e_i)e_i$ alors $||y||^2 = \sum_{i\geq 0}|(x|e_i)|^2)$ mais $(y|e_j) = (\sum(x|ei)ei|e_j) = \sum(x|e_i)(e_i|e_j) = \overline{(}x|e_j)$

Conclusion $\forall j \in \mathbb{N}$: $(x|e_j) = (y|e_j) \iff (x-y|e_j) = 0 \implies x - y \in \text{vect}((e_n)_{n\in\mathbb{N}})^{\perp}$ $\implies x - y = 0_H \iff x = y = \sum(x|e_i)e_i||x||^2 = \sum_{i\geq 0}|(x|e_i)|^2$ □

Remarque. Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale telle que $\forall x \in H$ $x = \sum_{i\geq 0}(x|e_i)e_i$: $x = \lim_N \sum_{i\geq 0}^{N} a_i e_i$ où $a_i = (x|e_i) \in \mathbb{C} \implies x \in \text{vect}\{(e_n)_n \in \mathbb{N}\}; a_i = (x|e_i) \implies \text{vect}\{(e_n)_n \in \bar{\mathbb{N}}\} = H$. $(e_n)_n \in \mathbb{N}$ est une base Hilbertienne.

ii) $(e_n)_n \in \mathbb{N}$ est base Hilbertienne de $H \iff \forall x \in H :\ \sum(x|e_i)e_i = x$
$\sum(x|e_i)e_i = x \iff \sum|(x|e_i)|^2 = ||x||^2$
i) (e_n) est une base Hilbertienne de $H \iff \sum|(x|e_i)|^2 = ||x||^2 \forall x \in H$

Exemple (de la `base Hilbertienne`) : $H = l^2(\mathbb{N})$. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $e_n(k) = \delta_{nk}$.
$u \in H \iff \sum_{n\geq 0}|u(n)|^2 = ||u||^2$ mais $u(n) = (u|e_n) = \sum u(k)e_n(k) \iff \sum_n \geq 0|(u|e_n)|^2 = ||u||^2$, $\implies$ c'est une base Hilbertienne. !?

1.4 Dual d'un espace de Hilbert

On rappelle que si S est un e.v.n. une FORME LINÉAIRE sur X est une application linéaire de X dans $\mathbb{C}$. Soit $l : X \to \mathbb{C}$: $\forall d \in \mathbb{C} \forall x, y \in X$ $l(x + dy) = l(x) + dl(y)$. L'ensemble des formes linéaires de X est un espace vectoriel—X^*. On considère X' dual topologique : c'est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur X—$\{l : (X, ||\cdot||_X) \to (\mathbb{C}, |\cdot|)\}$.

Exercice 1. l est continue $\iff$

$$\exists C > 0\ x\ \forall x \in X|l(x)| \leq C||x|| \qquad (*)$$

On définit pour $l \in X'$ $||l|| = \inf\{C > 0 \text{ t.q. } (*) \text{ est satisfait}\} = \sup\{|l(x)| \mid ||x|| = 1\}$. $(X', ||\cdot||)$ est un espace de Banach (un e.v.n. `complet`).

Théorème 1 (Théorème de représentation de Riez)**.** *Soit H un espace de Hilbert, H' son dual topologique. On définit $I : H \to H$ par $\forall x \in H$ $I(x) = (\cdot|x)$. Alors I est un isomorphisme isométrique de $H \to H'$.*

Remarque. $H = \mathbb{C}^n$, est une forme linéaire sur $\mathbb{C}^n$. $l(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ a_i \in \mathbb{C}$ $|l(x)| = |\sum_{i=1}^{n} a_i x_i| \leq \sup\{a_i|\} \cdot ||x||_{\mathbb{R}^n}$. Ici $X^* = X'$!?

$$l(x) = (a_1, a_2, \dots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\bar{a}|x)$$

$\forall x \in \mathbb{C}^n\ \forall l \in X'\ \exists a \in \mathbb{C} :\ l(x) = (x|\bar{a})$.

Généralisation à la dimension quelconque c'est le théorème de Riez : $\forall l \in H'\ \exists a \in H\ \forall x \in H :\ l(x) = (x|a)|$

Démonstration. Soit $l \in H'$ $l \neq 0'_h \iff \ker l \neq H$ puisque $\exists x \in X$ t.q. $l(x) \neq 0_H$. On sait que $\ker l$ est ferme, sait $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\ker l$ convergente dans H : $x_n \to x \in H$.

Mais : $l(x_n) \to l(x)$ et $l(x_n) = 0\ \forall n \implies l(x) = 0\ \forall x \in \ker I$. Alors $H = \ker l \oplus (\ker l)^\perp$

Puisque $\ker l \neq H \implies (\ker l)^\perp \neq 0_H$. Soit $x \in \ker\ l^\perp$, $||x|| = 1)$ $x \neq 0_H$ …!? Je ne comprends pas

$\forall y \in H$ soit $z = -l(x)y_l)y)x \in H$ et $l(lx) = -l(x_l(y) + l(y)l(x) = 0$ $x \in \ker I \implies (x|z) = 0$

$\implies$)x|-l(x)y+l(y)x) $\implies l(x) \implies l(x)(y|x) = l(y)(X|X) \implies \forall y \in H$ $l(y) = (y|\overline{l(x)}X)|)|))$

$\forall l \in H' \exists a \in H$ t.q. $\forall x \in H l(x) = (x|a)|$ I est surjective. Montrons que I est injective. Soit $x \in H$ t.q. $I(x) = O'_H \iff \forall y \in H I(x)(y) = (y|x) = 0 \implies x \perp H \implies X = 0_H$ $\ker I = \{O_h\}$ I est injective donc bijection.

Enfin : $||I(x)|| = \sup\{|(y|x)|, ||y|| = 1\} - ||x||$ isométrie$)|$

Parce que $|(y|x)| \leq ||y||\ ||x|| = ||x||$ $y = \frac{x}{||x||}$ $||y|| = 1$ $|(y|x)| = ||x||$ □

Remarque. Si l est anti-linéaire : $\forall d \in \mathbb{C}$ $\forall x, y \in H$ $l(x + dy) = l(x) + \bar{d}l(y)$ et $\exists u$ t.q. $\forall x \in H: \ l(x) = (u|x)$

1.5 Convergence faible dans les espaces de Hilbert

1.5.1 Définition et premières propriétés

> **Définition 1.** Soit H un espace de Hilbert. Une suit$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H est dit CONVERGE FAIBLEMENT VERS $x \in H$ si $\forall y \in H$ $(x_n|y) \to (x|y)$. On notera $x_n \rightharpoonup x$, x est dite limite faible de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 5. $H = l^2(\mathbb{N})$, $x_n \in l^2(\mathbb{N}^*)$ t.q. $x_n(j) = \delta_{nj}$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$ est une base hilbertienne de H. On regarde la convergence faible.

Soit $y \in l^2(\mathbb{N}^*)$ on doit calculer $\lim_{n\to+\infty}(x_n|y)$, $(x_n|y) = \sum_j x_n(j)\overline{y(j)} = \overline{y(n)}$. $|(x_n|y)| \leq |y(n)|$ on sait $\sum_j |y(j)|^2 < +\infty \implies |y(j)| \to 0$ qd $j \to +\infty$ et donc $|(x_n|y)| = |y(n)| \to 0$ qd $n \to +\infty$. On ercit $0 = (0_H|y)$.

Alors $\lim_n(x_n|y) = (0_H|y)$. 0_H est une `limite faible` de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (On montrera la limite faible est unique).

$\|x_n\|^2 = \sum_j |x_n(j)|^2 = 1 \implies x_n \not\to 0$ puisque $\lim_n \|x_n - 0_H\| = \lim_n \|x_n\| = 1 \not\to 0$. Ainsi 0_H n'est pas `limite` de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 1. *La limite faible, si elle existe elle est unique.*

Démonstration. Supposons que $\forall y \in H(x_n|y) \to (x|y)$ et $(x_n|y) \to (x'|y)$, $x, x' \in H$. Supposons $x \neq x' \iff x - x' \neq 0_H \implies \exists y \in H$ t.q. $(x|y) \neq (x'|y)$ (*)

Remarque. On suppose (*) faux : $\forall y \in H(x|y) = (x'|y) \iff (x - x'|y) = 0 \implies x - x' \perp H \implies x - x' = 0_H$ c'est Absurde.

On pose $u_n = (x_n|y)$, $u = (x|y)$ et $u' = (x'|y)$

$u_n \to u: \ \forall \varepsilon > 0\ \exists N$ t.q. $\forall n \geq N |u_n - u| \leq \varepsilon$. On choisit $\varepsilon < |u - u'|$ alors on a toujours si $n \geq N$ $|u_n - u'| = |u_n - u + u - u'| = ||u - u'| - |u_n - u|| \geq |u - u'| - \varepsilon \geq \frac{|u-u'|}{2}$ $\implies \forall n \geq N |u_n - u'| \geq \frac{|u-u'|}{2} \implies |u_n - u'| \not\to 0 \iff u_n \not\to u'$ QED. □

Dans l'exemple précédent 0_H est la limite faible unique de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exemple 6. $H = L^2(\mathbb{R})$. Soit $H_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(x) = \varphi_0(x-n)$ $x \in \mathbb{R}$.

Rappel. $C_c^\infty(\mathbb{R})$ ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$:

1. support f est compact (borne et ferme)
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ $f \in C^n_(\mathbb{R}) \iff f \in C_X^\infty(\mathbb{R})$

où support $f = \overline{\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}}$; $L^2(\mathbb{R}) = \overline{C_X^\infty(\mathbb{R})}|_{\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}}$.

...!? Je ne comprends pas $\varphi_0 \in C_C^\infty(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi_n(x) = \varphi_0(x-n)$. $\forall \psi \in L^2(\mathbb{R})$:

$$(\varphi_n|\psi) \to 0 = (0_H|\psi)$$

$(\varphi_n|\psi) = \int_\mathbb{R} \mathrm{d}x\, \varphi_n(x)\overline{\psi(x)} = \int_{n-1}^{n+1} \mathrm{d}x\, \varphi_0(x-n)\bar{\psi}(x)$. $|(\cdot|\cdot)|_{L^2((n-1,n+1))} \leq \|\cdot\|\|\cdot\| \implies \int_{n-1}^{n+1} |\varphi_0(x-n)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{+1} |\varphi_0(t)|^2\,\mathrm{d}t = 1 \implies |(\varphi_n|\psi)| \leq (\int_{n-1}^{n+1} |\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$

$\psi \in L^2(\mathbb{R}) \implies \int_{n-1}^{n+1} |\psi(t)|^2\,\mathrm{d}t \to 0$ quand $n \to +\infty$. $\|\psi\| = \sum_n \int_{n-1}^{n+1} |\psi|^2\,\mathrm{d}t < \infty$.

Proposition 2.

1. *soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *t.q.* $x_n \rightharpoonup x \in H$*, alors* $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *Converge faiblement et* $x_{k(n)} \rightharpoonup x$
2. *si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sait deux suites t.q.* $x_n \rightharpoonup x$ *et* $y_n \rightharpoonup y$ *alors* $x_n + y_n \rightharpoonup x + y$
3. *si* $x_n \rightharpoonup x$ *et soit* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite des* $\mathbb{C}$ *t.q.* $d_n \to d \in \mathbb{C} \implies d_n x_n \rightharpoonup dx$.

Démonstration.

1. est évident $\forall y \in H$ si $u_n = (y|x_n) \to u = (y|x) \implies u_{k(n)} \to u \implies$ 1).
2. $\forall y \in H (y|x_n + z_n) = (y|x_n) + (y|x_n) \to (y|x) + (y|z) = (y|x+z)$.
3. On suppose $\forall y \in H$ $(x_n|y) \to (x|y)$ et $d_n \to d$. $(d_n x_n - dx|y) = (d_n x_n - dx_n + dx_n - dx|y) = (d_n - d)(x_n|y) + d(x_n - x|y) \implies |(d_n x_n - dx|y)| \leq |d_n - d||(x_n|y)| + |d||(x_n - x|y)|$
   $(x_n|y) \to (x|y) \implies \exists M$ t.q. $|(x_n|y)| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N} \implies |d_n - d||(x_n|x)| \leq |d_n - d|M \to 0$ qd $n \to +\infty$.
   $|(x_n - x|y)| \to 0$ qd $n \to +\infty$ par (*) la proposition est démontrer.

□

Remarque. On a toujours que $|(x_n - x|y)| \leq \|x_n - x\|_H \|y\|_H$. Si $\lim_n \|x_n - x\| = 0 \iff \lim_n x_n = x \implies x_n \rightharpoonup x$ mais l'inverse est faux en général.

Proposition 3. *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *dans* H *alors* $\lim_{n\to+\infty} \inf \|x_n\| \geq \|x\|$.

Remarque. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\exists x \in H$ et $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$ alors par $|\|x\| - \|x_n\|| \leq \|x - x_n\| \implies \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Mais si on a que $x_n \rightharpoonup x$ on ne sait pas que la suite $\|x_n\|$ converge, c.a.d. que la limite existe par contre $\lim_n \inf \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \inf\{\|x_k\|, k \geq n\}$ et $\lim_n \sup \|x_n\| = \lim_{n\to+\infty} \sup\{\|x_k\|, k \geq n\}$ existe toujours.

Démonstration. Puisque $x_n \rightharpoonup x$, alors $(x_n|x) \to (x|x) = \|x\|^2$ en utilisant Cauchy Schwartz $|(x_n|x)| \leq \|x_n\|\|x\| \implies \|x\|^2 \leq \|x_n\|\|x\| \iff \|x\| \leq \|x_n\| \implies \|x\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n\|$. □

Proposition 4. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* H*. Alors* $x_n \to x \iff x_n \rightharpoonup x$ *et* $\lim_n \sup \|x_n\| \leq \|x\|$

Démonstration. ($\Rightarrow$) $x_n \to x \implies x_n \rightharpoonup x_n$ et $\|x_n\| \to \|x\|$

($\Leftarrow$)

$$\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\operatorname{Re}(x|x_n)$$

$$\limsup_n \|x - x_n\|^2 \leq \|x\|^2 + \limsup_n \|x_n\|^2 - 2\|x\|^2$$

$$\limsup_n \|x - x_n\|^2 \leq \limsup_n \|x_n\|^2 - \|x\|^2 \leq 0$$

$$\implies \limsup_n \|x - x_n\|^2 = 0 \geq \liminf_n \|x - x_n\|^2 \geq 0$$

$$\implies \limsup_n \|x - x_n\|^2 = \liminf_n \|x - x_n\|^2 = \lim_n \|x\|$$

□

Exemple 7. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H. Soit $D \subset H$ dense ($\bar{D} = H$). Alors $x_n \rightharpoonup x$ sur $H \iff (x_n|y) \to (x|y)\ \forall y \in D$.

Exercice 2. On considère $H = L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$, soit $\varphi \in H \iff \int_{\mathbb{R}} |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x = \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$, $H = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R})}$.

Soit $\varphi_0 \in C_C^\infty(\mathbb{R})$ t.q. $\|\varphi_0\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ (sinon on pose $\varphi = \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|}, \|\varphi\| = 1$).

On pose $\varphi_n(x) = \varphi_0(x - n)$, on veut montrer que $\varphi_n \rightharpoonup \varphi \in L^2(\mathbb{R})$

On remarque que : $\|\varphi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\varphi_0(x - n)|^2 \,\mathrm{d}x$. On pose $u = x - n$: $\|\varphi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}u\, |\varphi_0(u)|^2 = 1$, $\varphi_n \not\to 0$, $\|f_n - 0\| = 1$.

Est ce que la suite converge faiblement ? C-à-d $\exists \varphi \in H, (\varphi_n|\psi) \implies (\varphi|\psi)\ \forall \psi \in H$? …!? Je ne comprends pas Soit ψ : $\psi(x) = 1$ ssi $x \in [-1, 1]$ $\psi(x) = 0$ sinon. $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 1 \,\mathrm{d}x = 2$ On choisit $n \geq N$ avec N t.q. $a + N \geq \implies \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \psi \,\mathrm{d}x = 0$ On a montré $(f_c|\psi) \implies 0 = (0|\psi)$. Question $\varphi_n \rightharpoonup 0_{L^2(\mathbb{R})}$?

Proposition 5. *Soit H un espace de Hilbert $D \subset H$ dense dans H : $\bar{D} = H$. Alors soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite borné dans H, $x_n \rightharpoonup x \in H \iff (x_n|y) \to (x|y)\ \forall y \in D$.*

Exercice 3. On doit monter que $\forall \psi \in C^2(\mathbb{R})$: $(\varphi_n|\psi) \to 0$. On remarque que $\|\varphi_n\| = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ donc elle est bornée. (Suite bornée : $\exists C > 0$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}\ \|x_n\| \leq C$)

Il suffit de montrer $(\varphi_n|\varphi) \to 0\ \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Montrons a dernier point : $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\varphi_n(x) \,\mathrm{d}x$; $\exists a, b \in \mathbb{R}$, support $\psi \subset [a, b]$. On choisit N t.q. support $\varphi_N = [a + n, b + n]$, $a + n > b \implies \int_{\mathbb{R}} \psi\varphi_n = 0 \implies \lim_n(\psi|\varphi_n) = 0 = (\psi|0)$.

Démonstration. Si $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ dans $H \implies \varphi_n \rightharpoonup \varphi$ dans D.

Supposons que $(\varphi_n|\psi) \to (\varphi|\psi)\ \forall \psi \in D$.

Soit $\eta \in H$, $\exists (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suite de D t.q. $\lim_n \|\eta_k - \eta\| = 0$. On calcul $(\varphi_n|\eta) = (\varphi_n|\eta_k) + (\varphi_n|\eta - \eta_k)$. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists K$ t.q. si $k > K$ on a $\|\eta - \eta_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ alors $|(\varphi_n|\eta - \eta_k)| \leq \|\varphi_\nu\|\|\eta - \eta_k\| \leq C\varepsilon$. On fixe un tel k.

On conclut que $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ t.q. si $n \geq N$; $|(\varphi_n|\eta)| \leq (C + 1)\varepsilon \implies (\varphi_n|\eta) \to 0$. □

Théorème 1. *Toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert est* `bornée`.

Théorème 2 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *Une espace de Hilbert vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass faible. De toute suite bornée de H, on peut extraire une sous suite.*

Remarque. Dans $\mathbb{R}^p$, de toute suite borné on peut extraire une sous-suite c.v. (B.W.) c'est vrai si $p < +\infty$. Mais c'est faux en dimension quelconque. Le Théorème 2 $\implies$ c'est vrai au sens faible.

Démonstration. Soit $(x_n)n \in N$ une suite borné dans H : $\exists L > 0$ t.q. $\forall n \in \|x_n\| \leq L$. Soit $M = \overline{\text{vect}(x_n)}$. Si M est de dimension fini, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_f(0_M, L) \subset M$. qui est compact $\iff$ elle satisfait la propriété de B.W. $\exists (X_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sous suite et $x \in B_f(0, L)$ t.q. $\lim_n \left\|x_{k(n)} - x\right\| \to 0 \implies x_{k(n)} \rightharpoonup x$ dans H. Alors le Théorème 2 est démontré. Supposons que M n'est pas de dimension finie. M est un espace Hilbert (sous espace ferme de H) Soit $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base hilbertiere de M. La suite $((x_n|e-1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornee car $|(x_n|e_1)| \leq \|x_n\|\|e_1\| \leq L \cdot 1 = L$ On appleque la proprieté de B.W. dans $\mathbb{C}$: $\exists (a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $c_1 \in \mathbb{C}$ t.q. $a_{k(n)} \to c_1$ qd $n \to +\infty$ on réécrit : $a_{k(n)}$ on pose $x_{k(n)} = x'_n$. $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $(x_n^1|e_1) \to c_1$ qd $n \to +\infty$. 2 la suite $(x'_n|e_2)$ est borné, $\exists$ une sous suite $(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $c_2 \in \mathbb{C}$ t.q. $(x_n^2|e_2) \to c_2$ qd $n \to +\infty$ etc...

Canclusion : On a construit des sous suité $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n^1)_{n\in\mathbb{N}} \subset ...(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}...$ et des complexes C_k, $k = 1, 2, 3...$ t.q. $(x_n^k|e_k) \to c_k$ qd $n \to +\infty$. (présidé deogonal de Cantor) : on pose $z_n = x_n^n$. Montrer que $z_n \rightharpoonup \sum_k c_k e_k$ si $\sum_k c_k e_k$ est conv dans H. Le thm 2 est démontré. Montrons que $\sum_k c_k e_k = z \in M$ i.e (*). Puisque M est complet alors il faut montrer $S_n = \sum_{k=1}^n c_k e_k$ est de Cauchy : $\|s_n - s_m\|^2 = \left\|\sum_{k=n+1}^m c_k e_k\right\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |c_k|^2$ (Parseval). S_n est de Cauchy $\iff$ $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n |c_k|^2$ est de Cauchy $\iff$ $\tilde{S}_n$ est convergent dans $\mathbb{C}$. Montrons ce dernier point. On utilise l'inégalité de Bessel. $\sum_{k=1}^N |(x_n|e_k)|^2 \leq \|z_n\|^2 \leq L^2$ mais : $(z_n|e_k) + (x_n^n|e_k) \to c_k$ qd $n \to +\infty$. puisque $(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $n \geq k$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \subset ...(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n^{k+1})_{n\in\mathbb{N}}...$ x_1^1 x_2^2 ... x_k^k alors $\lim_{n\to+\infty}(x_n^n|e_k) = c_k$. Alors $\sum_{k=1}^N |c_k|^2 = \sum_{k=1}^N \lim_n |(x_n^n|e_k)|^2 = \lim_n \sum_{k=1}^N |(x_n^n|e_k)|^2 = \lim_n \sum_{k=1}^N |(z_n|e_k)|^2$ on utilisant (*) alors $\sum_{k=1}^N |c_k|^2 \leq L^2$ (par passage à la limite) Par conséquent $\sum |c_k|^2$ est convergente donc $\sum_{k\geq 1} c_k\varphi_k$ est convergente dans M. Soit $z = \sum_{k=1} c_k\varphi_k$ alors $\underline{(z|e_c) = c_e}$. Alors on a montre que $\forall C \in \mathbb{N}^*$ $(z_n|e_c) \to c_e = (z|e_c)$ En utilisant que $\overline{vect(e_k, k \in \mathbb{N}^*} = M$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors cela entraine la convergence faible sur M. $\forall y \in M$: $(x_n^n|y) \to (z|y)$ On a couverture une sous suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui conv faiblement sur M vers $z \in H$. On étend la propriété sur H : M est un sous espace fermé on lui applique le théorème des ces projection. $\forall \eta \in HM \exists! y_0 \in M$ projection de y sur M.

Alors $y = y_0 + (y - y_0)$ et $(x^n|y) = (x_n|y) = (x_n|y_0) + (z_n|y - y_0)$ mais $(z_n|y - y_0) = 0$. $z_n \in M$ et $y - y_0 \in \prod^\perp \implies limit_n(z_n|y) = (z|y_0)$ (ce que l'on a démontré précédent) mais $z \in M$, donc $(z|y - y_0) = 0$: $\lim_n(x_n|y) = (z|y_0) + (z|y - y_0) = (z|y)$ ce qui montre la conv faible sur H. □

Théorème 3 (Completion). *Si $(\mathcal{V}, (\cdot|\cdot)_\mathcal{V})$ est un espace préhilbertien, alors, il existe un espace de Hilbert $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot)_\mathcal{H})$ et une application $U : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ que :*

1. *U est bijective*
2. *U est linéaire*
3. *$(Ux|Uy)_H = (x|y)_\mathcal{V}$ $\forall x \in \mathcal{V}$, $\forall y \in \mathcal{V}$*
4. *$U(\mathcal{V}) = \{Ux \mid x \in \mathcal{V}\}$ est dense dans $\mathcal{H}$.*

Théorème 4. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ une espace préhilbertien. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre de E. Alors il existe une famille orthonormale de E, telle que :*

— $\text{vect}((e_n)) = \text{vect}((v_n))$
— $(e_n|v_n) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Procédé de Gram-Schmidt Soit $u_1 = v_1$, et $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$; $u_2 = v_2 - \frac{(v_2|u_1)}{\|u_1\|^2}u_1$, et $e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$; $u_3 = v_3 - \frac{(v_3|u_1)}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{(u_3|u_2)}{\|u_2\|^2}u_2$ et $e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$ etc...

Chapitre 2

Opérateurs sur un espace de Hilbert

2.1 Généralités

Soit X, Y deux espaces de Banach, on note par $L(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires de $X \to Y$, si $X = Y$ on note par $L(X)$. Dans le cas d'espace de Hilbert l'ensemble des applications linéaires $L(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ respectivement $L(\mathcal{H})$ si $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$.

$T \in L(X, Y)$ nous notons :
$N(T) = \{x \in X, Tx = 0_y\}$—noll of T.
$R(T) = \{y \in Y, \exists x \in X \ Tx = y\}$—range of T.
$G(T) = \{(x, Tx) \ x \in X\}$—graphe de T.

Proposition 1. *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ $(Y, \|\cdot\|_y)$ deux espaces du Banach soit $f \in L(X, Y)$, alors les assertions suivantes ont équivalentes.*

(i) f est continue sur X

(ii) f est continue en un point $x_0 \in X$

(iii) $\exists C > 0$ t.q. $\forall x \in X$ on a $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$.

Démonstration. ($\implies$) i) $\implies$ ii), montrons iii) $\implies$ i) on a $\forall x, y \in X$ $\|f(x) - f(y)\|_Y = \|f(x-y)\|_Y \leq C\|x-y\|_X \implies f$ est Lipschitz sur X donc continue.

Montrons ii) $\implies$ iii) On choisit $x_0 = 0_X$ alors f est continue en 0_X. $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta = \eta(\varepsilon)$ t.q. $\forall x \in X$ et $\|x\|_X \leq \eta \implies \|f(x) - f(0)\|_Y = \|f(x)\|_Y \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon = 1$, soit $\eta = \eta(1)$, $\forall x \in X$ on pose $\tilde{x} = \frac{\eta}{2}\frac{1}{\|x\|_X}x$. On a $\|\tilde{x}\| = \frac{\eta}{2}\frac{1}{\|x\|_X}\|x\|_X = \frac{\eta}{2} \leq \eta \implies \|f(\tilde{x})\| \leq 1$.

Mais $f(\tilde{x}) = f(\eta\frac{x}{\|x\|}) = \eta\frac{1}{\|x\|}f(x)$ et $\frac{\eta}{2\|x\|_V}\|f(x)\|_Y \leq 1 \implies \|f(x)\|_Y \leq \frac{2}{\eta}\|x\|_X$ QED.

□

Remarque. iii) $\exists C > 0$ t.q. $\forall x \in X : \|f(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \iff \left\|f(\frac{x}{\|x\|_X})\right\| \leq C$ si $\|x\|_X \neq 0$ $(x \neq 0_X)$. $\|f(x)\|_Y \leq C$; $f(B_f(0_X, 1)) \subset B_f(0_Y, C)$.
• Un opérateur de $X \to Y$ est une application linéaire de $X \to Y$.
• Une application linéaire $X \to Y$ continue est un opérateur borné de $X \to Y$.
• On notera par $\mathcal{B}(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs bornés de $X \to Y$.

Exemple 1. $\mathcal{H} = \mathcal{H}' = l^2(\mathbb{Z})$ on considère l'application $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$. $\forall u \in \mathcal{H}$ $(Tu)(n) = u(n-1)$ shift a droite.

T est linéaire : $T(\lambda u+\mu v)(n) = (\lambda u+\mu v)(n-1) = \lambda u(n-1)+\mu v(n-1) = \lambda Tu(n)+\mu Tv(n)$.

T est borné (donc continue) : $\forall u \in \mathcal{H}$ $\|Tu\|_{\mathcal{H}}^2 = (Tu|Tu)_{\mathcal{H}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Tu(n)\overline{Tu(n)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n-1)\overline{u(n-1)} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} u(e)\overline{u(e)} = \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \implies \|Tu\|_{\mathcal{H}} = \|u\|_{\mathcal{H}}$ T est une isométrie.

$B(X,Y)$ est un espace normé, muni de la norme naturelle.

$T \in B(X,Y)$ $\|T\| = \inf\{C > 0$ t.q. l'inégalité suivant est satisfait, $\|Tx\| \leq C\|X\|_X \forall x \in X\} \implies \|T\| \geq 0$ (*).

Exercice 1. Montrer que (*) définie une norme sur $B(X,Y)$.

Proposition 2. *Propriété Soit $T \in B(X,Y)$ alors*

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\|_Y, \|x\|_X = 1\}\\ &= \sup\{\|Tx\|_Y, \|x\|_X \leq 1\}\\ &= \sup\{\|Tx\|_Y, \|x\|_X < 1\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|T\| &= \inf\{C > 0 \ t.q.\ \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X\}\\ &= \inf\{C > 0 \ t.q.\ \left\|T\frac{x}{\|x\|_X}\right\|_Y \leq C \forall x \in X\}\\ &= \inf\{C > 0 \ t.q.\ \|Tx\|_Y \leq C \ \forall x :\ \|x\| = 1\}\\ &= \sup\{\|Tx\|_Y \mid \forall \in X :\ \|x\| = 1\}\end{aligned}$$

Soit X un espace de Banach.

Proposition 3. *Si Y est un espace de Banach, alors $(B(X,Y), \|\cdot\|)$ est lui même un espace de Banach.*

Application X' le dual topologique de X : $\varphi \in X'$ si $\varphi \in L(X,\mathbb{C})$ qui satisfait $\exists C > 0$ $\forall x \in X$: $|\varphi(x)| \leq C\|x\|_X$. $\mathbb{C}$ est complet alors par la Proposition 3 X' est complet.

Exercice 2. Montrer la proposition 3. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite du Cauchy des $B(X,Y)$ il faut montrer $\exists T \in B(X,Y)$ t.q. $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$.

2.2 Adjoint d'un opérateur

Soit $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ deux espaces de Hilbert (séparables).

Proposition 1. *Soit $T \in B(\mathcal{H},\mathcal{H}')$, li existe $T^* \in B(\mathcal{H}',\mathcal{H})$ dit opérateur adjoint qui satisfait : $\forall x \in \mathcal{H}, \forall y \in \mathcal{H}'$*

$$(Tx|y) = (x|T^*y)$$

Exemple 2. $\mathcal{H} = \mathcal{H}' = l^2(\mathbb{Z})$ T shift adjointe, calculons T^*.$\forall u,v \in \mathcal{H}$, $(Tu|v) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Tu(n)\cdot\overline{v(n)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n-1)\overline{v(n)} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} u(l)\overline{v(l+1)} = (u|w)$ avec $w(l) = v(l+1)$. On pose $T^*v = w$.

Démonstration. Dans ces conditions $x \in \mathcal{H} \mapsto (Tx|y)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{H}$ comme la composition de T et $(\cdot|y)$. De plus on a que $|(Tx|y)| \leq \|Tx\|_{\mathcal{H}'}\|y\|_{\mathcal{H}} \leq \|T\|\|x\|_{\mathcal{H}}\|y\|_{\mathcal{H}'}$ $|\varphi(x)| \leq \text{const}\|x\|_{\mathcal{H}'}, \text{const} = \|T\|\|y\|_{\mathcal{H}'}$ alors φ est continue (bornée).

D'après le Théorème de Riez $\exists! z \in \mathcal{H}$ t.q. $\varphi(x) = (x|z)$ $\forall x \in \mathcal{H}$. On pose $z = T^*y$, montrons que $T^* \in L(\mathcal{H}',\mathcal{H})$.

Soit $y_1, y_2 \in \mathcal{H} d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ on calcule $T^*(d_1y_1 + d_2y_2)$: $\forall x \in \mathcal{H}(x|T^*(d_1y_1 + d_2y_2)) = (Tx|d_1y_1 + d_2y_2)$ (def)

$\bar{d}_1(Tx|y_1) + \bar{d}_2(Tx|y_2) = \bar{d}_1(x|T^*y_1) + \bar{d}_2(x|T^*y_2) = (x|d_1T^*y_1 + d_2T^*y_2) \implies \forall x \in \mathcal{H}(x|T^*(d_1y_1+d_2y_2)-d_1T^*y_1-d_2T^*y_2) = 0 \implies T^*(d_1y_1+d_2y_2)-d_1T^*y_1-d_2T^*y_2 = 0_{\mathcal{H}}$.

Montrons que $T^* \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ $\forall y \in \mathcal{H}'$. $\|T^*y\|^2_{\mathcal{H}} = (T^*y|T^*y)_{\mathcal{H}} = (T(T^*y)|y)_{\mathcal{H}'} \implies \|T^*y\|^2_{\mathcal{H}} \leq \|T(T^*y)\|_{\mathcal{H}'}\|y\|_{\mathcal{H}'} \leq \|T\|\|T^*y\|_{\mathcal{H}}\|y\|_{\mathcal{H}} \implies \|T^*y\|_{\mathcal{H}} \leq \|T\|\|y\|_{\mathcal{H}'}\forall y \in \mathcal{H}'$ t.q. $T^*y \neq 0_{\mathcal{H}}$. Si $y \in N(T^*)$ on a que $0 \leq \|T\|\|y\|_{\mathcal{H}'}$ donc $T^* \in B(\mathcal{H}', \mathcal{H})$, $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Unicité. $\exists S \in B(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ t.q. $\forall (x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}'$ $(Tx|y) = (x|Sy) = (x|T^*y) \implies \forall x \in \mathcal{H}$ $(x|Sy - T^*y) = 0 \implies Sy = T^*y$. □

Exemple 3. $\mathcal{H} = \mathcal{H}' = L^2(\mathbb{R})$. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. On définit l'action de T sur $C_0^\infty(\mathbb{R}) \ni \varphi : T\varphi(x) = f(x)\varphi(x)$ $f \cdot \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \mapsto C_0^\infty(\mathbb{R})$. T est `linéaire` $\implies$ $f\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ aussi $T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est `continue`.

$\|T\varphi\|^2 = (T\varphi|\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)\varphi(x)\bar{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x \leq \|f\|^2_\infty \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x \implies \|T\varphi\|^2 \leq \|f\|^2_\infty\|\varphi\|^2$. T est continue sur $C_0^\infty(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$.

T est uniformément continue car $\|T\varphi - T\psi\| = \|T(\varphi - \psi)\| \leq \|f\|\|\varphi - \psi\|$. $\|f\|_\infty$ Lipstitz.

On utilise que toute applications T uniformément continue sur D et $\bar{D} = \mathcal{H}$, admet un prolongement par continuité sur $\mathcal{H}$ défini comme :

$\forall \varphi \in \mathcal{H}$, $\exists (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Suite de D et $\lim_n \varphi_n = \varphi$.

On pose $T\varphi = \lim_n T\varphi_n$.

T est borne et $\|T\| \leq \|f\|_\infty$. $\|T_\varphi\| = \lim_n \lim_n T\varphi_n T\varphi_n$ mais $\|T\varphi_n\| \leq \|f\|_\infty\|\varphi_n\|$. $\|Tf\| \leq \|f\|_\infty\|\varphi\|$.

Calculons. T^*

$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$ $(T\varphi|\psi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\bar{\psi}(x)\,\mathrm{d}x = \int \varphi(x)\overline{f(x)\psi(x)}\,\mathrm{d}x = (\varphi|T\psi) \implies T^* = T$.

Remarque. Dans le preuve de la proposition 1 On peut inverser la rôle de T et T^*, alors on montre aussi que $\|T^*\| \geq \|T\|$ alors $\|T^*\| = \|T\|$ (ex)

> **Définition 1.** Un opérateur $T \in B(\mathcal{H})$ est dit auto adjoint si $T = T^*$. $T \in B(\mathcal{H})$ est dit unitaire si $T \circ T^* = T^* \circ T = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$.

Remarque. Si $T = T^*$ $\forall x \in \mathcal{H}(Tx|x) = (x|Tx) \implies (Tx|x) = \overline{(Tx|x)} \implies (Tx|x) \in \mathbb{R}$.

> **Définition 2.** $T = T^*$ est positif si $\forall x \in \mathcal{H}(Tx|x) \geq 0$ $T = T^*$ est définit positif si $\forall x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0_X(Tx|x) > 0$. T est défini positif si T est positif et $(Tx|x) = 0 \iff x = 0_X$.

Exemple 4. $H = l^2(\mathbb{Z})$ $\varphi \in H$ $(T_+\rho)(n) = \varphi(n-1)$, $(T^*\rho)(n) = \varphi(n+1) := (T_-\varphi)(n)$. On considère : $S = T_+ + T_-$. $\forall \varphi \in H$: $(S\varphi)(n) = \varphi(n-1) + \varphi(n+1)$. Calculons : $S^* = (T_+ + T_-)^*$:

1. Si $A, B \in B(H)$ alors $(\mu A + \lambda B)^* = \bar{\mu}A^* + \bar{\lambda}B^*$, $\forall \mu, \lambda \in \mathbb{C}$. $\forall u, v \in H$ $((\lambda A + \mu B)u|v) = \lambda(Au|v) + \mu\ (u|v) = \lambda(u|A^*v) + \mu(u|B^*v) = (u|\bar{\lambda}A^*v) + (u|\bar{\mu}B^*v) = (u|\bar{\mu}\lambda A^* + \bar{\mu}B^*|v)$ par unicité de l'adjoint on en déduit le résultat.
   $(\mu A + \lambda B)^* = \bar{\mu}A^* + \bar{\lambda}B^*$
   Dans notre cas : $S^* = T_+^* + T_-^* = T_- + T_+ = S$
   donc S est auto-adjoint.

Remarque. $T_- = T_+^* \implies T_-^* = T_+$ et $T_-^* = T_+^{**} \implies T_+ = T_+^{**}$

C'est vrai en général : $A^{**} = A\ \forall(\cdot, v) \in H \times H$, $(A^*u, v) = (u, A^{**}v) = (u, Av)$. $\Longrightarrow$ $A^{**} = A$

Proposition 2. *Soit H, H' 2 espaces se Hilbert. $T \in B(H, H')$ alors :*

1. $N(T) = R(T^*)^{\perp}$
2. $\overline{R(T)} = N(T^*)$

Démonstration. • $u \in N(T) \iff Tu = 0_{H'} \iff \forall v \in H'\ (Tu|v) = 0 \iff (u|T^*v) = 0$ $\iff u \in R(T^*)^{\perp}$ • $R(T)$ n'est pas nécessairement fermé, mais $N(T^*)$ est fermé puisque le noyau d'un opérateur borné est toujours fermé alors l'égalité doit s'écrire avec $\overline{R(T)}$ $\Longrightarrow$ a finir en exercice. □

Proposition 3. *Dons le même conditions que la proposition 2, si $T \in B(H)$ est inversible : T^{-1} existe et $T^{-1} \in B(H)$ on a : $(T^*)^{-1}$ existe et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Démonstration. Soit $A, B \in B(H)$; $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*\ \forall \varphi \in H\ (A \cdot B)\varphi = A(B\varphi)$.

Si T est inversible $\Longrightarrow$ $\mathbb{1}_H T^{-1}T = TT^{-1}$. $\mathbb{1}_H^* = \mathbb{1}_H$ donc $(T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^* = \mathbb{1}_H^* = \mathbb{1}_H$ Idem pour l'autre sens. □

Proposition 4. *Soit $T \in B(H)$, T autre adjoint : $T = T^*$ alors $\|T\| = \sup\{|(Tu|u)| : u \in H,\ \|u\| = 1\}$*

Remarque. $\sup\{|(Tu|u)|, u \in H, \|u\| = 1\} = \sup\{\|Tu\|, u \in H, \|u\| = 1\}$

Démonstration. Soit $\gamma = \sup\{|(Tu|u)| :\ u \in H,\ \|u\| = 1\}$ alors on a $\forall u \in H$, $\|u\| = 1$ $|(Tu|u)| \le \|T\| \implies \gamma \le \|T\|$

l'autre sens : On utilise que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u, v, w \in H$ $(T(v \pm \lambda w)|v \pm \lambda w) = (Tv|v) \pm 2\lambda \operatorname{Re}(Tv|w) + \lambda^2 \|w\|^2$.

$$|(T(v \pm \lambda w)|v \pm \lambda w)| = \underbrace{|(\frac{T(v \pm \lambda w)}{|\|v \pm \lambda w\||^2} | \frac{v \pm \lambda w)}{|\|v \pm \lambda w\||^2}}_{\gamma} |\|v \pm \lambda w\||^2$$

On calcule

$(T(v + \lambda w)|v + \lambda w) - ((v - \lambda w)|(v - \lambda w)) = 4\lambda \operatorname{Re}(Tv|u)$

$\Longrightarrow$ $4|d| \cdot |\operatorname{Re}(Tv|u)| \le |(T(v + \lambda w)|w + \lambda w)| + |(Tw - \lambda w|v - \lambda w)| \le \varphi(\|w + \lambda w\|^2 + \|v - \lambda w\|^2)(c.f.*) \le 2\gamma(\|v\|^2 + \lambda^2\|w\|^2)$

$\Longrightarrow$ $2\gamma\lambda^2\|w\|^2 - 4|\lambda| \cdot |\operatorname{Re}(Tv|w)| + 2\gamma\|v\|^2 \ge 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R} \implies \Delta = 12(|\operatorname{Re}(Tv|w)|^2 - \gamma^2\|v\|^2\|w\|^2) \le 0$

Supposons la dernière inégalité fausse : P a deux racines λ_1, λ_2 t.q. $\lambda_1 + \lambda_2 = 4\frac{|\operatorname{Re}(Tu|v)|}{2\gamma\|w\|^2} \ge 0$ et donc une des deux racines est positive : alors $P(d) = 2\gamma\lambda^2\|w\|^2 - 4\lambda|\operatorname{Re}(Tv|w)| + 2\gamma\|w\|^2$ doit changer de signe pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ce qui est absurde, $\Longrightarrow$ (**).

et donc $|\operatorname{Re}(Tv|w)|^2 \le \gamma^2\|v\|^2\|w\|^2$. on choisit $w = Tv$: $\|Tv\|^2 \le \gamma^2\|v\|^2 \implies \|T\| \le \gamma$. □

Exemple 5. Soit $f \in C^{)}(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$. Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ et l'opérateur défini sur H par : $\forall \varphi \in H$: $(T\varphi)(x) = f(x)\varphi(x)$

(on définit T sur $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ et on étend)

On peut montrer que $\|T\| = \|f\|_{\infty}$

On sait que : $\|T\varphi\|^2 = \int |f(x)|^2\ |\varphi(x)|^2\, dx \le \|f\|_{\infty}^2 \|\varphi\|^2 \implies \|T\| \le \|f\|_{\infty}$

Exemple 6. En utilisant une suite bien choisie dans H, montrer que $\|T\| = \|f\|_{\infty}$, ici $\exists x_0$ t.q. $|f(x_0)| = \|f\|_{\infty}$. On peut choisir.

Proposition 5. *Soit H, H' deux espaces de Hilbert et $T \in L(H, H')$. Alors les 4 assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* H*, t.q.* $u_n \to u \in H \implies Tu_n \to Tu$ *dans* H' *(*$T \in B(H, H')$*)*

(ii) $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* H*, t.q.* $u_n \rightharpoonup u \in H \implies Tu_n \rightharpoonup Tu$ *dans* H'

(iii) $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* H*, t.q.* $u_n \to u \in H \implies Tu_n \rightharpoonup Tu$ *dans* H'

Démonstration. i) $\implies$ ii) si i) est vérifié, $T \in B(H, H')$ et donc $T^* \in B(H', H)$ t.q. $\forall u \in H$, $v \in H'$ $(Tu|v)_H = (u|T^*v)_H$

soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans H $u_n \rightharpoonup \in H$alors par (*) $\forall v \in H'$: $(Tu_n - Tu|v) = (T(u_n - u)|v) = (u_n - u|T^*v) \to 0$ qd $n \to_\infty$ puisque $u_n \rightharpoonup u \implies Tu_n \rightharpoonup Tu$. ii) $\implies$ iii) Supposons ii). Alors soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Ht.q. $u_n \to u \in H \implies u_n \rightharpoonup u \implies Tu_n \rightharpoonup Tu$.

Montrons en fin que iii) $\implies$ i). On suppose iii) et i) faux. $\forall C > 0,\ \exists u \in H$ t.q. $\|Tu\| > C\|u\|$, on peut construire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de H t.q. $\forall n \|Tu_n\| > n^2\|u_n\| \iff \left\|T\frac{u_n}{n\|u_n\|}\right\| > n$.

Conclusion : $v_n = \frac{u_n}{n\|u_n\|}$ on a donc $\|v_n\| = \frac{1}{n} \to 0$ qd $n \to +\infty$, $\|Tv_n\| > n$ cette suite non borné $\implies Tu_n \not\rightharpoonup 0_h$ iii) es faux ce qui est absurde. $\square$

Chapitre 3

Rappels sur la compacité

Soit H un espace de Hilbert, $A \subset H$ est compact si il satisfait la propriété de Belzane.-Weirstrass : De toute suite de A : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe une sous-suite $(u_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $u \in A$ t.q. $u_{k(n)} \to u$: $\lim_n \left\|u_{k(n)} - u\right\|_H = 0$.

Exemple 1. En dimension finie les sous-ensembles compact sont les sous ensembles bornés et fermés.

> **Définition 1.** $A \subset H$ est précompact si $\bar{A}$ est compact. A est compact si de toute suite de A $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe une sous-suite $(u_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $u \in H$ t.q. $u_{k(n)} \to u \in H \diagdown A$

Exemple 2. En dimension finie, les sous ensembles précompact sont les sous ensembles bornes.

Lemme 1.

1. *$A \subset H$ est précompact si $\forall\varepsilon > 0$, soit $F \subset A$ t.q. $\forall(x,y) \in F^2$, $\|x-y\| > \varepsilon \implies F$ est fini*
2. *$A \subset H$ est précompact si $\forall\varepsilon > 0$ $\exists$ une famille finie de partie $\{E_i\}_{i\in I}$ de H, $diam(E_i) < \varepsilon$ t.q. $A \subset \cup_{i\in I} E_i$.*

Element de preuve. Supposons i) satisfaite, $\forall\varepsilon > 0$, soit $F_\varepsilon \subset A$. Satisfaisant i) alors F est finie, supposons faux. Tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F ne contient aucune sous suite convergent.

A n'est pas précompact, absurde. i) $\implies$ ii) Soit $\varepsilon > 0$ et F le sous ensemble de H t.q. $\forall(x,y) \in l$ $d(x,y) > \varepsilon$. d'après i) F est fini $F = \{x_1 x_2 ... x_N\}$ $\forall x \in H \diagdown F$ des $\exists x_i \in F$ t.q. $d(x_i, x) < \varepsilon$. (autrement $x \in F$ par hypothèse faux) $x \in B(x_i, \varepsilon) \implies A \subset \cup B(x_i, \varepsilon)$

ii) $\implies$ i) supposons ii) $A \subset \cup_{i\in I} E_i$ avec diamètre $E_i < \varepsilon$ alors si $(x,y) \in A \times A$ et $\|x-y\| > \varepsilon \implies x \in E_i$ et $y \in E_j$ avec $i \neq j \implies F = \{x_1, x_2 ... x_n\}$ avec $x_i \in E_i$. Il reste à montrer que si i) ou ii) est vérifier A est précompact. □

Chapitre 4

Opérateurs compacts

Définition 1. Soit H, H' deux espaces de Hilbert et $T \in L(H, H')$. T est dit compact si l'image de la boule unité dans H : $B_f(0_H, 1)$ est précompact dans H'. $T(B_f(0_H, 1))$ est précompact dans H'.

Remarque. En particulier $T(B_f(0_H, 1))$ est borné dans H', $\exists r > 0$ t.q. $T(B_f(0_H, 1)) \subset B_f(0_{H'}, r) \iff \forall x,\ \|x\|_H \leq 1 \implies \|Tx\|_{H'} \leq r \implies \forall x \in H,\ \left\|\frac{x}{\|x\|_H}\right\| = 1 \implies \left\|T\frac{x}{\|x\|_H}\right\|_{H'} \leq r \implies \|Tx\|_{H'} \leq r\|x\|$. Alors T est borné (continu).

Exemple 1. Soit $T \in L(H, H')$ continu de rang fini : $\dim R(T) < +\infty$. $\exists C > 0$ t.q. $\forall x \in H$, $\|Tx\|_{H'} \leq C\|x\|_H \implies T(B_f(0_H, 1)) \subset B_f(0_{H'}, C)$ mais $TB_f(0_H, 1) \subset R(T)$ c'est borné dans une espace de dimension finie : c'est précompact. Soit p un projecteur sur H sur sous-espace de dimension 1. $D_n = \{\lambda u, \lambda \in \mathbb{C}\} \forall x \in H : Px = (x|u)u$. Alors $\dim \mathbb{R}(P) = 1$ de plus on a que $\|Px\| = |(x|u)|\|u\| = ((x|u)u|(x|u)u)$ alors $\|Px\| \leq \|x\|\|u\|^2$ (Cauchy-Schwartz) P est continue de rang 1. Il est compact.

Proposition 1. *Dans les mêmes conditions, T est compact si de tout suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H, bornée, il existe une sous-suite de $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fortement convergente dans H.*

Cette proposition découle de la définition de loi precompacité.

Proposition 2. *Dans le mêmes conditions, T est compact $\iff$ pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H t.q. $x_n \rightharpoonup x \in H$ alors $tx_n \to Tx$ dans H'.*

Remarque.
- si $x_n \to x \implies Tx_n \to Tx$, T est borné
- si $x_n \rightharpoonup x \implies Tx_n \rightharpoonup Tx$, T est borné
- si $x_n \rightharpoonup x \implies Tx_n \rightharpoonup Tx$, T est borné
- si $x_n \rightharpoonup x \implies Tx_n \to Tx$, T est compact.

Pour démontrer la proposition 2 on utilise le lemme de Cantor.

Lemme 1. *Dans u espace topologique : $x_n \to x \iff$ toute sous-suite $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ contient à son tour une sous suite convergent vers x.*

Démonstration. Exercice. □

Démonstration. Supposons T compact. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H t.q. $x_n \rightharpoonup x$ montrons que $Tx_n \to Tx$. Soit $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite on pose $y_n = x_{k(n)}$, $n \in \mathbb{N}$alors $y_n \rightharpoonup x$ et puisque T est borné $Ty_n \rightharpoonup Tx$. D'après la proposition 1, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors il existe une sous suite $(y_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $Ty_{k(n)} \to y \not\in.$ $\Longrightarrow$ $Ty_{k(n)} \rightharpoonup y$, par unicité de la limite faible alors $Tx = y$. D'après le lemme de Canter $Tx_n \to Tx$.

Réciproquement : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans H. D'après B.W. faible elle contient une suite convergente faiblement $x_{k(n)} \rightharpoonup x \in H$, Test continue : $Tx_{k(n)} \to Tx$. D'après la proposition 1, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors : de toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contient une sous suite cv. □

On notera par $B_0(H, H')$; l'ensemble de opérateurs compacts de $H \Longrightarrow H'$ ($B_0(H)$ si $H = H'$).

Exercice 1. Montrer que $B_0(H)$ est un sous-espace vectorielle normé de $B(H')$.

Attention. Il faut montrer en particulier que si T_1, $T_2 \in B_0(H)$, $T_1 + T_2 \in B_0(H)$.

Exercice 2. Montrer que si $T_1 \in B(H)$, $T_2 \in B(H)$; T_1,T_2 et $T_2T_1 \in B_0(H)$.

Théorème 1. *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B_0(H, H')$ convergente dans $B(H, H')$: $\exists t \in B(H, H')$ t.q. $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$ alors $T \in B_0(H, H')$.*

Remarque. $B_0(H, H')$ est une sous espace fermé de $B(H, H')$.

Corollaire 1. *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B(H, H')$ convergente vers T. Supposons que $\forall n \ \dim R(T_n) < +\infty$. (opérateurs de rang fini) alors T est compact.*

$R, R^2, R^3, ..., R^n, ..., R^\infty = \{x_0, x_1, x_3, ..., x_n, ..., ...\text{—suite}\}$ $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ...} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty \iff l^2(\mathbb{N})$.

Corollaire 2. *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B(H, H')$ convergente vers T. Supposons que $\forall n, \ \dim R(T_n) < +\infty$ (opérateurs de rang fini) alors T est compact.*

Démonstration. Soit $B = B(0_H, 1)$ la boule unité dans H montrons que TB est précompact dans H'. soit $\varepsilon > 0$ et n t.q. $\|T - T_n\| < \varepsilon/2$. T_nB est précompact : $\exists\{E_i\}_{i\in I}$, I inie, diamètre $E_i = \{\sup \|x - y\|_{H'},\ x, y \in E_i\} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ t.q. $T_nB \subset \cup_{i\in I} E_i$ (il rappels).

On pose $\tilde{E}_i = \{x \in H',\ \text{dist}(x, E_i) = \inf_{y\in E_i} \|x - y\|_{H'} \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$ $E_i \subset \tilde{E}_i$ et diamètre $\tilde{E}_i < \varepsilon$ diamètre $\tilde{E}_i = \sup\{\|x - y\|_{H'},\ x, y \in \tilde{E}_i\}$

$z, z' \in E_i$ $\|x - y\|_H \leq \|x - z + x - z' + z' - y\| \leq \|x - z\| + \|z - z'\| + \|z' - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors soit $y - Tx$, $x \in B$, existe $i \in I$ t.q. $T_nx \in E_i$ mais $\|T_nx - Tx\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow$ distance $(tx, E + i) < \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow Tx \in \tilde{E}_i \Longrightarrow TB \subset \cup_{i\in I} \tilde{E}_i$ il est précompact.

□

Proposition 3. *Dans les mêmes conditions que la proposition précédente. $T \in B_0(H, H')$ $\iff \exists (T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des $B(H, H')$, $\dim R(T_n) < +\infty$ et $T = \lim_n Tn \iff \lim_n \|T - T_n\| = 0$.*

Démonstration. Le sens $\Leftarrow$ est implique par le corollaire précédent. Montrons $\Longrightarrow$. On suppose T compact soit $B = B_H(0, 1)$ pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie de TB : I_ε t.q. $TB_H \subset \cup_{x_i\in I_\varepsilon} B_{H'}(x_i, \varepsilon)$ (precompacité) Soit $G = \text{vect}\{x_1, x_2, ..., x_n\} = \bar{G}$. ($\dim G \leq N$). Soit P_G la projection orthogonale sur G. On pose $T_\varepsilon = P_G \circ T$, Alors $\dim \mathbb{R}(T_\varepsilon) < +\infty$, car $R(T_\varepsilon) \subset R(P_G)$.

Montrons que $\|T-T_\varepsilon\| < 2\varepsilon$. Soit $x \in B$ $\exists x_i \in I_\varepsilon$ t.q. $\|Tx - x_i\| < \varepsilon$ (2), $Tx \in TB$ $\implies \|P_G \circ Txf - P_G X_i\| \le \|P_G\| \|Tx - x_i\| \le \|Tx - x_i\| < \varepsilon$.

Mais $P_G x_i = x_i, x_i \in G \implies \|P_G \circ T - x_i\| < \varepsilon$ (2) (1) $\implies \|P_G \circ Tx - Tx\| < 2\varepsilon$: $\|T_\varepsilon x - Tx\| < 2\varepsilon \implies \|T_\varepsilon - T\| < 2\varepsilon$.

Conclurez : On choisit $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $T_\varepsilon = T_n$ et donc on a construit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $B(H,H')$ $\dim R(T_n) < +\infty$ et $\|T - T_n\| \le \frac{2}{n} \to 0$ $n \to +\infty$. □

Exemple 2. $H = H' = l^2(\mathbb{N})$ soit $n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) = \frac{1}{n+1}$. Alors $\forall u \in H$ $(Tu)(n) = \frac{1}{n+1} u(n)$ $\|Tu\|^2 = \sum_{n\ge0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2} \le \sum_{n\ge0}^\infty |u(n)|^2 = \|u\|^2$

T est donc une application linéaire bornée sur H. Montrons que T est compact ; en utilisant la critère de la proposition 4 : Soit $N \in \mathbb{N}^*$ soit l'opérateur T_N : $\begin{cases} (T_N u)(n) = (Tu)(n) & n \le N \\ (T_N u)(n) = 0 & \textit{sinon} \end{cases}$.

Dans ces conditions $N > 0$ $T_N u \rightsquigarrow (u(0), \frac{u(1)}{2}, \frac{u(2)}{3}, \dots, \frac{u(N)}{N+1}, 0, \dots)$ $\sum_{i=0}^N \frac{u(i)}{i+1} e_i : (e_i(j) = \delta_{ij})$.

Alors $\dim R(T_N) = N+1$ de rang fini. Montrent que $\lim_n \|T_N - T\| = 0$ au quel cas T est compact.

On calcule $\|T_N - T\|$: $\forall u \in H$ $\|(T_N - T)u\|^2 = \sum_{n\ge0}^\infty |((T_N - T)u)(n)|^2 = \sum_{n\ge0}^N |(T_N - T)u(n)|^2 = \sum_{n\ge N+1}^\infty \frac{1}{(n+1)^2} |u(n)|^2 \le \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{n \ge N+1}^\infty |u(n))|^2 \le \frac{1}{(N+1)^2} \|u\|^2$. Alors $\|(T_N - T)u\| \le \frac{1}{N+1}\|u\| \implies \|T_N - T\| \le \frac{1}{N+1} \to 0$ qd $N \to +\infty$.

Remarque. On définit l'opérateur X_N sur H : $\begin{cases} (X_n u)(n) = u(n) \text{ si } n \le N \\ (X_n u)(n) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$ Alors $X_N^2 = X_N$ c'est un projecteur $\dim R(X_N) = N+1$. Alors $T_N = X_N \circ T = X_N T$

Exemple 3. Les opérateurs Hilbert Schmidt. Soit H, H' deux espace se Hilbert, $T \in (H,H')$ t.q. $\sum_{k=1}^\infty \|Te_k\|^2 < +\infty$ au $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base helbertiene de H. On note par $B_2(H,H')$ l'ensemble des opérateurs Hilbert-Schmidt. $B_2(H,H')$ c'est un sous espace de $B(H,H')$ (ex) $\forall T \in B_2(H,H')$, on note $\|T\|_2 = (\sum_{k=1}^{+\infty} \|Te_k\|^2)^{\frac{1}{2}}$. $\|\cdot\|_2$ est une norme (ex) : c'est la norme Hilbert-Schmidt et $(B_2(H,H'), \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach. De plus $\forall j \in \mathbb{N}$ $\|Te_j\|^2 \le \sum_{k=1}^\infty \|Te_k\|^2 \implies \|Te_j\| \le \|T\|_2$. Plus généralement sot $u \in H$, $\|u\| = 1$, $u = \sum_{k\ge0} \alpha_k e_k$, $1 = \|u\|^2 = \sum_{k\ge0} |\alpha_k|^2$. $\|Tu\|^2 = (Tu|Tu) = \sum_k (Te_k|Tu) \le \sum_k |\alpha_k| \|Te_k\| \|Tu\| \implies \|Tu\| \le \sum_k |\alpha_k| \|Te_k\| \le |(\sum_k |\alpha_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_k \|Te_k\|2)^{\frac{1}{2}}| = 1 \cdot \|T\|_2$ en utilisant Cauchy-Schwartz : $\|Tu\| \le \|T\|_2 \implies \|T\| \le \|T\|_2$.

Montrons que $B_2(H,H') \subset B_0(H,H')$. On suppose que $\sum_{n\ge0}^{+\infty} \|Te_k\|^2 < +\infty \iff \lim_{N\to+\infty} \sum_N^\infty \|T$ 0

$\forall \varepsilon$ $\exists Mt.$ $\forall N \ge M$ $\sum_{N \ge M} \|Te_k\|^2 \le \varepsilon$.

Soit $T_M \in B(H,H')$ t.q. $(T_M u)(n) = (Tu)(n)$ si $n \le M$, $(T_M u)(n) = 0$ sinon.

$\dim(R(T_M)) < +\infty$ (il est de rang finie) On a que $\|T - T_M\|^2 \le \|T - T_M\|_2^2 = \sum_{k\ge M}^{+\infty} \|Te_k\|^2 \to 0 qd M \to +\infty$. L'opérateur de l'exemple 1 : $\|T\|_2^2 = \sum_{k\ge0} \|Te_k\|^2 = \sum_{k\ge0} \frac{1}{(k+1)^2} < +\infty$.

Exemple 4. $H = L^2(\mathbb{R})$ soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue t.q. $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x,y)|^2 \, dx \, dy < +\infty$, soit T l'opérateur définie par $\forall \varphi \in H$ $(T\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} dy \underbrace{f(x,y)}_{\text{noyau de } T} \varphi(y)$ T est compact. (cas important dans l'étude des EDO)

Chapitre 5

Le Théorème de Lax Milgram

Théorème 1. *Soit* H *un espace de Hilbert et* $T \in B(H)$*. Supposons que* $\exists \alpha > 0$ *t.q.* $\forall u \in H$ $|(Tu|u)| \geq \alpha \|u\|^2$ *(*T *est coercif) alors* T^{-1} *existe,* $T^{-1} \in B(H)$ *et* $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$*.*

Exemple 1. $H = L^2(\mathbb{R})$, $f \in C^0 \cap L^\infty f \geq C > 0$. $(T\varphi)(x) = f(x)\varphi(x)$: $(T\varphi|\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \, f(x)|\varphi(x)|^2 \geq C\|\varphi\|^2$
T^{-1} existe, il est borné.

Démonstration. Soit $u \in H$, on a : $\|Tu\|\|u\| \geq |(Tu|u)| \geq \alpha\|u\|^2$ et donc $\|Tu\| \geq \alpha\|u\|$ (*) T est injectif, soit $u \in N(T)$, $Tu = 0_H$, alors $0 = \|Tu\| \geq \alpha\|u\| \implies \|u\| = 0 \iff u = 0_H N(T) = \{0_H\}$. Montrons que T est surjectif : $R(T)$ est fermé et $R(T)^\perp = \{e_H\} \implies R(t) = H$.

Montrons 1) Soit $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergent dans H : $\exists u t.q. Tu_n \to u$, montrons que $u \in R(T)$, elle est de Caucy et par (*) $\alpha\|u_n - u_p\| \leq \|Tu_n - Tu_p\|$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de Cauchy : $\exists n \in H t.q. u_n \to u \implies Tu_n \to Tu$ Par continuité : alors $v = Tu$ et $v \in R(T)$.

Montrons 2) $R(T)^\perp = \{v \in H \text{ t.q. } (Tu|v) = 0 \forall u \in H\}$ En particulier $(Tv|v) = 0$ mais $0 = |(Tv|v)| \geq \alpha\|v\|^2 \implies \|v\| = 0 \iff v = 0_H : R(T)^\perp = \{0_H\}$. □

Chapitre 6

Eléments spectraux

H désigné un espace de Hilbert, $T \in B(H)$.

Définition 1.
1. On appelle en ensemble résolvant de T que l'on note $\rho(T) = \{z \in \mathbb{C}, (T - z\mathbb{1}_H)^{-1} \in B(H)\}$
2. Le spectre de T, $\sigma(T) = \complement\rho(T)$
3. $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de T si $\exists u \in H$, $u \neq 0_H$ et $Tu = \lambda u$ dans ces conditions $N(T - \lambda\mathbb{1}_H)$ est le sous espace propre associée $u \in N(T - \lambda\mathbb{1}_H)$ est le vecteur propre associée à λ.

Remarque.
- si λ est valeur propre de T : $N(T - \lambda\mathbb{1}_H) \neq \{0_H\} \iff T - \lambda\mathbb{1}_H$ est non injectif donc non inversible $\implies \lambda \in \sigma(T)$.
- le cas de la dimension finie : $\dim H = n$ alors $T \in L(H) = B(H)$ est représenté par matrice : $\operatorname{Mat}(T) \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. dans ce cas T n'a que des valeurs propres que sont solution ; de $P(\lambda) = \det(\cdot T - \lambda B_H) = 0 \iff T - \lambda\mathbb{1}_H$ est non inversible.

Exemple 1. Soit $T \in B(H)T = T^*$, soit $z \in \mathbb{C}$ $((T - z\mathbb{1}_H)u|u) = ((T - \operatorname{Re} z\mathbb{1}_H)u|u) - i\operatorname{Im} z\|u\|^2$. On sait que $(Tu|u) \in \mathbb{R} \implies \operatorname{Im}((T_z\mathbb{1}_H)u|u) = -\operatorname{Im} z\|u\|^2$ $|(T - z\mathbb{1}_H)u|u)|^2 = |(T - \operatorname{Re} z\mathbb{1}_H)u|u)|^2 + (\operatorname{Im} z)^2\|u\|^4 \geq (\operatorname{Im} z)^2\|u\|^2$.

Conclusion $\|(T - z\mathbb{1}_H)u|u\| \geq |\operatorname{Im} z|\|u\|^2$ il est coersif : $(T - z\mathbb{1}_H)^{-1} \in B(H)$ d'après Lac Milgram. Si $\operatorname{Im} z \neq 0 \implies \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(T) \iff \sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

En particulier les valeurs propres d'un opérateur autoadjent sont réelles.

Exemple 2. Soit $T \in B_0(H)$, alors $0 \in \sigma(T)$. Supposons faux $0 \in \rho(T) \iff (T - 0\mathbb{1}_H)^{-1} = T^{-1}$ existe et $T^{-1} \in B(H)$. Alors $\mathbb{1} = TT^{-1} \in B_0(H)$. Produit d'un Borel et d'un compact $\implies \mathbb{1}_H B(0_H, 1) = B(0_H, 1)$ est précompact dans H ce qui n'est vrai que si $\dim H < +\infty$ (Théorème de Riez) dans le cas contravariant absurde.

Exemple 3. Suite : $H = l^2(\mathbb{N})$ $(Tu)(n) = \frac{1}{n+1}u(n)$, $T \in B_0(H) 0 \in \sigma(T)$. Est ce que 0 est valeur propre de T. $\exists u?$ $\|1\| = 1 : Tu = 0$ $u \neq 0_H$.

$\forall n \in \mathbb{N} Tu(n) = \frac{1}{n+1}u(n) = 0 \implies u(n) = 0 \iff u = 0_H$.

0 n'est pas valeur propre de T.

Chapitre 7

La pratique

7.1 2.21

$\varphi_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2+x^2}\mathcal{H} = L^2$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\varphi_n(x)| \leq \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. C'est juste convergence *point par point.* (Pas fortement, pas faiblement)

Montrons que $\varphi_n \rightharpoonup 0$. On va montrer que pour un ensemble dense D de $L^2(\mathbb{R})$ bien choisi, on a : $\forall g \in D$ $(\varphi_n|g) \to (0|g) = 0$.

$(\varphi_n|g) = \int_{\mathbb{R}} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2+x^2} g(x)\,\mathrm{d}x$.

7.2 exercice 26

— F fermé

— $F^{\perp} \subset G := \{f \in E | f|_{[0,1]} = 0\}$

— $F^{\perp} \supset G$

2) $sig \in E$, tel que $g(0) \neq 0$, par ex. $g(x) = 1 - |x|$. Comme $f(0) = 0$ si $f \in F$ et $h(0) = 0$ si $h \in f^{\perp}$, li est ´vident que g ne peut pas s'écrire comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de $F^{\perp}$. Donc $g \notin F + F^{\perp}$, et donc $E \neq F + F^{\perp}$. Ceci bien possible, car E muni la norme L^2, n'est par un Hilbert.

Remarque. Si on remplace E par l'espace complété $L^2([-1,1])$, alors, si F un espace vectoriel fermé, alors on a : $F + F^{\perp} = L^2([-1,1])$.

7.3 Exercice 2.11

Famille maximale (espace préhilbert) Famille totale (espace hilbert) Bases Hilbertienne (espace hilbert)

Base Hilbertienne $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{e_n\}$ est une famille orthonormée $(e_i|e_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$ et $\overline{\mathrm{vect}\,\{e_n\}} = E$ (famille totale).

$L^2([-\pi,\pi]) = \overline{\{\cos(nx), \sin(nx) :\ n \in \mathbb{N}\}}$—une base.

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \cos(nx) + \mu_n \sin(nx)$

On a bien $\|u\|_{l^2} = \sum_n (\frac{1}{n})^2 \leq +\infty$.

(1) soit $v \in F$, donc il existe une famille finie. $(\lambda_k)_{k\in J}$ $(J \subset \mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ et μ tel que $v = \mu u + \sum_{k\in J} \lambda_k e_k$. Si $\forall i \geq 2$, $(v|e_i) = 0$, alors : Soit $e_0 \in (\mathbb{N} \setminus \{0,1\}) \setminus J$. Alors $(v|e_{i_0}) = 0 \implies 0 = \mu(u|e_{i_0}) + \sum_{k\in J} \lambda_k \underbrace{(e_k|e_{i_0})}_{\delta=0,\text{ car } i_0\notin J} = \mu\frac{1}{i_0} + 0 \implies \mu = 0$.

Soit $k_0 \in J$. $0 = (v|e_{k_0}) = \underbrace{\mu(u|e_{k_0})}_{0,\text{ car }\mu=0} + \underbrace{\sum_{k\in J} \lambda_k (e_k|e_{k_0})}_{\lambda_{k_0}}$. Donc $\forall k_0 \in J,\ \lambda_{k_0} = 0$.

Donc $v = 0$. d'où, $\{e_n\}_{n\geq 2}$ et une famille maximale (elle est bien orthonormale)

(2) $\{e_n\}_{n\geq 2}$ n'est pas totale pour F, car $u \in F$, mais, u n'est pas limite d'une suite de vecteurs combinaisons linéaire des e_n $(n \geq 2)$. En effet, si on avait $u = \sum_{n=2}^{+\infty} \lambda_n e_n = \lim_{N\to\infty}(\sum_{n=2}^{n} \lambda_n e_n)$.

Remarque. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base Hilbertienne de E Hilbert, Alors, la propriété $E = \overline{\mathrm{vect}(\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}})}$ un vecteur est dans $\mathrm{vect}(\{v_n\})$ si il est combinaison linéaire finie de vecteur de $\{v_n\}$.

$\overline{\mathrm{vect}\, v_n} = E$, signifie que, $\forall v \in E$, v est limite de vecteurs de $\mathrm{vect}(\{v_n\})$. On écrit $v = \lim_{N\to+\infty}(\sum_{j=0}^{N} \lambda_j v_j) \overset{\text{notation}}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j v_j$.

Exemple 1. de base algébrique, soit F=ensemble des polynômes F est un espace vectoriel. Base algébrique $= \{1, x, x^2, x^3, ..., x^n, ...\}$.

Si $(e_n)_{n\geq 2}$ était une base Hilbertienne de F, on aurait, $F \ni u = \sum_{j=2}^{+\infty} \lambda_j e_j = (\underbrace{0}_{\text{pas possible}}, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...), car u = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$.

On a conduit une famille maximale que n'était pas totale (possible car F n'est pas complet)

7.4 exercice 2.12

H -un espace $\dim(H) < \infty \implies \exists\{\tilde{e}_n\}_{n=0}^{N}$ base de H, $\varphi : H \implies l^2(\mathbb{N})$, $\tilde{e}_n \mapsto e_n = (0, 0, ..., 1, 0, ..) \in l^2(\mathbb{N})$

$\forall u \in H :\ \|u\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} u_i^2} = \|\varphi(u)\|$

$\dim(H) = \infty \implies \exists\{\tilde{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$ base de H $\varphi : H \implies l^2(\mathbb{N})$ $\tilde{e}_n \mapsto e_n = (0, ..., 0, 1, 0, 0, ...)$ $u \in H : \|u\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 < \infty \implies \varphi(u) \in l^2(\mathbb{N})$ d'inégalité de Parceval. $\|u\|_u = \|\varphi(u)\|_{l^2(\mathbb{N})}$.

7.5 2.16

Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale. D'après l'inégalité de Bessel, on a $\sum_{n=0}^{\infty} |(g_n|x)|^2 < +\infty \implies \lim_{n\to\infty} |(g_n|x)|^2 = 0 \implies (g_n|x) \to 0 = (0, x)$ mais $\|g_n - 0\| = \|g_n\| = 1 \not\to 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si (g_n) est orthonormale, mais n'est pas une base, alors, pour $F := \overline{\mathrm{vect}\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$, on a : F fermé dans l'Hilbert E, donc F est un Hilbert. (g_n) base de F.

On a alors, $\forall x \in E$, $(g_n|x) = (\underbrace{g_n}_{\to 0 \text{ d'après partie 1}} |P_F x) + (g_n|\underbrace{x - P_F x}_{\in F^\perp})$

7.6 2.17

$D \subset E$, $\bar{D} = E$, E Hilbert, $u \in E$ ($u \in D$ ou non). $\implies$ évident car $D \subset E \Leftarrow$ On suppose que $\forall y \in D$, $(u_n|g) \to (u|g)$ $\forall \varepsilon > 0 \exists_1 = (\varepsilon, g) : \forall n \geq N(\varepsilon, g)$ $(u_n - n|g) < \frac{\varepsilon}{2}$. $\forall f \in E$. $\bar{D} = E \implies \exists \{g_n\} \subset D,\ g_n \to f,\ n \to \infty \implies \exists N_\varepsilon = N(\varepsilon, f)$ $\forall m \geq N_\varepsilon$: $\|f - f_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$. $\forall f \in E$ $|(u_n - u|f)| = |(u_n - u|g_n)| + |(\underbrace{u_n - u}_{borne}|f - g_m)| \leq \varepsilon/2 + c\|f - g_m\| = \varepsilon$.

Remarque. 1. $|(u_n - u|f - g_m)| \overset{Cauchy-Schwartz}{\leq} \|u_n - u\|\|f - g_m\| \leq \underbrace{(\|u_n\| + \|u\|)}_{\leq C borne par th de cours} \cdot \|f -$

2. $u_n - u \rightharpoonup 0$, implique $(u_n - u)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée.

Chapitre 8

Exercices 3

Opérateurs bornés. (adjoint, inverse, spectre) Apres Opérateurs compacts.

8.1 3.1

$T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ On va montrer i) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ iii) On suppose : $\forall x \in \mathcal{H}_1, \forall (x_n)$ suite de $\mathcal{H}_1$

$$(x_n \to x \implies Tx_n \to Tx)$$

Montrons qu'alors, ii) est vrai. D'après le cours, la propriété i) implique que l'opérateur T est `borné` : $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Ceci implique que l'adjoint T^* existe et est `borné`. Supposons $x_n \rightharpoonup x$. Alors : $\forall y \in \mathcal{H}_2$, $(Tx_n|y) - (Tx|y) = (Tx_n - tx|y) = (T(x_n - x)|y) = ((x_n - x)|T^*y)$ (par définition de l'adjudant que est bien définie sur tout $\mathcal{H}_2$ car T est borné) $((x_n - x)|T^*y) \to 0 (n \to +\infty)$. Car $x_n \rightharpoonup x$. (ou encore $x_n - x \rightharpoonup 0$) Donc $Tx_n \rightharpoonup Tx$. Donc ii) est vraie.

Montrons que ii) $\Longrightarrow$ iii). On suppose que $\forall x \in \mathcal{H}_1$, $\forall (x_n)$ suite de $\mathcal{H}_1$ $x_n \rightharpoonup x \implies Tx_n \rightharpoonup Tx$.

Soit (x_n) telle que $x_n \to x$. Alors $x_n \rightharpoonup x$. et d'après ii) $Tx_n \rightharpoonup Tx$.

Donc iii) est vraie Montrons que iii) $\Longrightarrow$ i). On suppose que $\forall x \in \mathcal{H}_1$, $\forall (x_n)$ suite de $\mathcal{H}_1$, $(x_n \to x \implies Tx_n \rightharpoonup Tx)$

On va montrer résultat par l'absurde. Supposons iii) vraie mais i) faux. Si i) est faux, alors, l'opérateur n'est pas borné. Donc $\forall C > 0$, $\exists x \in \mathcal{H}_1$, tel que $\|Tx\|_{\mathcal{H}_2} > C\|x\|_{\mathcal{H}_1}$.

En particulier, il existe une suite (x_n) de $\mathcal{H}_1$ telle que $\|Tx_n\|_{\mathcal{H}_2} \geq n^2 \|x_n\|_{\mathcal{H}_1}$

$\implies \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|} \geq n$. Soit $\tilde{x}_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. Alors $\|\tilde{x}_n\| = \frac{1}{n} \to 0$. Donc $\tilde{x}_n \to 0$.

Mais $T\tilde{x}_n$ ne converge pas faiblement vers 0, car $\|T\tilde{x}_n\| = \left\| \frac{Tx_n}{n\|x_n\|} \right\| = \frac{\|Tx_n\|}{\|n\|x_n\|\|} > n \to +\infty$.

(Rappel : toute suite faiblement convergente est bornée)

On a donc construit une suite $(\tilde{x}_n)$ telle que $\tilde{x}_n$ converge fortement. Mais $T\tilde{x}_n$ ne converge pas faiblement. Ceci contredit iii) : Absurde. Conclusion i) est vraie.

Rappel : fortement $\implies$ faiblement, faiblement $\implies$ borné.

8.2 3.2

Définition 1. Soit $A \in B(\mathcal{H})$ (opérateur borné de $\mathcal{H}$ Hilbert, vers $\mathcal{H}$). Le rayon spectral de A est $r(A) = \sup\{\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}$

Remarque. $r(A)$ est finie, car A est supposé borné.

Théorème 1. *Si* $A \in B(\mathcal{H})$, *alors*

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} (\|A^n\|)^{\frac{1}{n}}.$$

Rappel. A étant une application linéaire de $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$, on note $A^n = \underbrace{A \circ A \circ ... \circ A}_{n \text{ fois}}$ Donc $A^n(x) = A(A(...(Ax)))$.

Allusion : Montre que $r(AB) \leq r(BA)$ et $r(BA) \leq r(AB)$.

8.3 3.3

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base orthonormale Hilbertienne de $\mathcal{H}$ on considère l'opérateur T sur $\mathcal{H}$, défini par : $\forall u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n$, $Tu := \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_{n+1}$. En particulier, $Te_n = e_{n+1}$. ((λ_n) suite de l^2)

Montrer que T est un opérateur borné, de norme 1 ($\|T\| = 1$).

Montrons que T est bien définie sur tout $\mathcal{H}$. Soit $y \in \mathcal{H}$, alors, $\exists(\lambda_n) \in l^2(\mathbb{N})$ tell que $y = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k$.

Alors $\|Ty\|^2 = \|\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_{k+1}\|^2 = \|\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k e_k\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty$ où $\mu_0 = 0$ et $\mu_k = \lambda_{k-1}$ si $k \geq 1$. Car $(\lambda_k) \in l^2(\mathbb{N})$. Donc $Ty \in \mathcal{H}$ (donc est bien défini).

Soit $x \in \mathcal{H}$. Alors $x = \sum \lambda_k e_k$.

$\frac{\|Tx\|}{x} = \frac{T(\sum \lambda_k e_k)}{\sum \lambda_k e_k} = \frac{\|\sum_k \lambda_k e_{k+1}\|}{\sum_k \lambda_k e_k} = \frac{\|\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k-1}\| e_k}{\|\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k\|} = \frac{(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{k-1})^2)^{\frac{1}{2}}}{(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2)^{\frac{1}{2}}} = 1$

L'opérateur T est l'opérateur de translation ver la droite..

8.4 3.4

Table des matières

1 Initiation **1**
1.1 Les espaces de Hilbert . . . 1
1.2 Séries dans un espace vectoriel normé . . . 4
1.3 Bases Hilbertiennes . . . 5
1.4 Dual d'un espace de Hilbert . . . 6
1.5 Convergence faible dans les espaces de Hilbert . . . 7
1.5.1 Définition et premières propriétés . . . 7

2 Opérateurs sur un espace de Hilbert **11**
2.1 Généralités . . . 11
2.2 Adjoint d'un opérateur . . . 12

3 rappels sur la compacité **16**

4 Opérateurs compacts **17**

5 Le Théorème de Lax Milgram **20**

6 Eléments spectraux **21**

7 La pratique **22**
7.1 2.21 . . . 22
7.2 exercice 26 . . . 22
7.3 Exercice 2.11 . . . 22
7.4 exercice 2.12 . . . 23
7.5 2.16 . . . 23
7.6 2.17 . . . 24

8 Exercices 3 **25**
8.1 3.1 . . . 25
8.2 3.2 . . . 25
8.3 3.3 . . . 26
8.4 3.4 . . . 26