Chapitre 1

Initiation

1.1 Les espaces de Hilbert

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 1. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Une application $\varphi : E \times E -> \mathbb{R}$ est une Forme Hermitienne

1. $\forall y \in E$: $\varphi(\cdot, y) : E -> \mathbb{R}$ est linéaire
2. $\forall (x, y) \in E \times E$: $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$

Définition 2. Un Produit Scalaire est une forme hermitienne `définie positive` : $\forall e \in E\ \varphi(x, x) \geq 0$; $\varphi(x, x) = 0 <=> x = 0_E$. Notation :

$$\varphi(x, y) := (x|y)$$

Définition 3. Le couple $(E, (\cdot|\cdot))$ s'appelle un Espace Préhilbertien.

Définition 4. On définit la Norme sur E : $\forall x \in E\ \|x\|_E = (x|x)^{\frac{1}{2}}$.

Remarque. *En particulier on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz :*

$$\forall (x, y) \in E^2\ |(x|y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Donc inégalité triangulaire. Ainsi c'est vraiment une norme.

Définition 5. $x, y \in E$ sont dits ORTHOGONAUX si $(x|y) = 0$. Nous dénotons cela comme $x \perp y$.

Définition 6. $(E, \|\cdot\|)$ est dit COMPLET si toutes les suites de Cauchy de E convergent dans E.

Définition 7. Une Espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la distance $\|\cdot - \cdot\| = (\cdot - \cdot| \cdot - \cdot)^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 1. $l^2(\mathbb{N}) = \{n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \sum_{n\geq 0} |f(n)|^2 < \infty\}$
$l^2(\mathbb{N})$ est $\mathbb{C}$ espace. $\forall f, g \in l^2(\mathbb{N})$:

$$(f|g)_{l^2(\mathbb{N})} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{n\geq 0} f(n)\overline{g(n)}.$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $l^2(\mathbb{N})$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > p \geq N : \quad ||f_n - f_p||_{l^2(\mathbb{N})} < \varepsilon. \qquad (*)$$

Question. $\exists f \in l^2(\mathbb{N})$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$?
$(\,\textbf{??})\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; t.q. \; \forall n > p \geq N \; ||f_n - f_p||^2 = \sum\limits_{j\geq 0} |f_n(j) - f_p(j)|^2 \leq \varepsilon^2$
$\Rightarrow \quad |f_n(j) - f_p(j)| \leq \varepsilon \; \forall j \in \mathbb{N}.$
$\Rightarrow \forall j \in \mathbb{N} \; (f_n(j))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ qui est complet, donc $\exists f(j) \in \mathbb{C}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(j) - f(j)| = 0.$

Il faut montrer que f est la limite dans $l^2(\mathbb{N})$ de la suite f_n.
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$ t.q. $\forall n > p \geq N \sum\limits_{j\geq 0} |f_n(j) - f_p(j)|^2 \leq \varepsilon^2$

$\Rightarrow \forall J \in \mathbb{N} \underbrace{\sum_{j=0}^{J} |f_n(j) - f_p(j)|^2}_{\text{somme partielle}} \leq \varepsilon^2$, par passage à la limite sur p : $\sum_{j=0}^{J} |f_n(j) - f(j)|^2 \leq \varepsilon^2$

Conclusion : $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$ telle que $\forall n \geq N \; ||f_n - f|| < \varepsilon \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f.$

Mais $f \stackrel{?}{\in} l^2(\mathbb{N})$.
Vérifions que $f \in l^2(\mathbb{N})$:
$(\sum_{j\geq 0} |f(j)|^2)^{1/2} = (\sum_{j\geq 0} |f_n(j) - f(j) + f(j)|^2)^{\frac{1}{2}} = ||\underbrace{f - f_n}_{\in l^2(\mathbb{N})} + \underbrace{f_n}_{\in l^2(\mathbb{N})}|| \leq ||f - f_n|| + ||f_n|| < +\infty.$

Théorème 1 (Projection orthogonale)**.** *Soit H un espace de Hilbert et C une partie* `convexe fermée` *et* `non vide` *de H. Alors $\forall x \in H \; \exists! y_0 \in C$ t.q.*

1. $\mathrm{dist}(x, C) := \inf\{d(x,y), y \in C\} = \inf\{||x-y||_H, y \in C\} = ||x-y_0||_H$
2. $\forall y \in C \;\; \mathrm{Re}(x-y_0|y-y_0) \leq 0$ *... !? why in the world would scalar product have values other than real*

y_0 est la projection orthogonale de x sur C.

Remarque.

1. *C est convexe si $\forall x, y \in C \; [x,y] = \{tx + (1-t)y, t \in [0,1]\} \in C$*
2. *$H = \mathbb{R}^2 : \;\; [x,y] \in C$*
3. *si $x_0 \in C$ dans le cas $y_0 = x_0$ et $\mathrm{dist}(x_0, C) = 0 = ||x_0 - x_0||_H$*

Démonstration. Notons par $d = d(x,C) > 0$ $(x \in H \diagdown C)$. Soit $y, z \in C$ on pose $b = x - \frac{1}{2}(y+z)$, $c = \frac{1}{2}(y-z)$: $||b|| = ||x - \frac{1}{2}\underbrace{(y+z)}_{\in C}|| \geq d$. On a aussi $b - c = x - y$ et $b + c = x - z \Rightarrow ||x-y||^2 + ||x-z||^2 = ||b-c||^2 + ||b+c||^2 = (b-c|b-c) + (b+c|b+c) = ||b||^2 + ||c||^2 - (b|c) - (c|b) + ||b||^2 + ||c||^2 + (b|c) + (c|b)$.

$||x-y||^2 + ||x-z||^2 = 2(||b||^2 + ||c||^2) \geq 2d^2 + 2\frac{1}{4}||y-z||^2 \Rightarrow ||y-z||^2 \leq 2(||x-y||^2 - d^2) + 2(||x-z||^2 - d^2)$. Pour $n \in N$ $C_n = \{y \in C | ||x-y||^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\}$ est fermée dans H (boule fermée).

Puisque C est fermé, $C_n = \{y \in H | ||x-y||^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\} \cap C$ est fermé dans C. De plus : $\delta(n) := sup\{||y-z||, (y,z) \in C_n \times C_n\} \leq *sup\{[2(||x-y||^2 - d^2) + 2(||x-z||^2 - d^2)]^{\frac{1}{2}}, y, z \in C_n \Rightarrow \delta(n) \leq \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

H est complet et $C \subset H_x$ c est fermé. C est un espace métrique complet. Il satisfait le critère de Cantor : $\bigcap_n C_n = \{y_0\}$.

$y_0 \in \cup_n C_n \;\; d^2 \leq ||x-y_0||^2 \leq d^2 + \frac{1}{n} \; \forall n \in \mathbb{N}* = \mathbb{N}$
$\{0\} \Rightarrow ||x - y_0|| = d^2$.

Montrons ii) : $\forall t \in [0,1]$, $\forall \in H$ $\phi(t) = ||\underbrace{y_0 + t(y-y_0)}_{\in C} - x||^2 = ||y_0 - x||^2 + 2tRe(y_0 - x|y-y_0) + t^2||y-y_0||^2$. $\phi(0) = d^2 \leq \phi(t)$ $\forall t \in (0,1] \Rightarrow \phi'(0) \geq 0$. $\phi'(t) = 2Re(y_0 - x|y - y_0) + 2t||y-y_0||^2$. $\phi'(0) \leq 0 \Rightarrow 2Re(y_0 - x|y-y_0) \leq 0 \Rightarrow (i)$.

□

Théorème 2 (corollaire)**.** *Soit F un sous-espace* FERMÉ *de H alors : $H = F \oplus F^\perp$.*

Démonstration.

— F est convexe puisque $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \forall x, y \in F \;\; \alpha x + \beta y \in F \Rightarrow$ Cela est vrai si $\alpha = t$, $\beta = 1 - t$ $t \in [0,1]$.
On peut ceci appliquer le Thm 1 :

— On a toujours $F + F^\perp \subset H$ et $F + F^\perp = F \bigoplus F^\perp$ car si $x \in F \cap F^\perp \Rightarrow (x|x) = 0 = ||x||^2 \Rightarrow x = 0_H$
Soit $x \in H$, et $y_0 \in F$ sa projection orthogonale : $\forall d \in \mathbb{C}, y \in F, y_0 + dy \in F$ et donc $Re(x - y_0|y_0 + dy - y_0) \leq 0 \Rightarrow Re(x - y_0|dy) \leq 0$
$d = (x - y_0|y) \Rightarrow (x - y_0)$ ...
Conclusion $Re(x - y_0|dy)$.. donc $H = F \bigoplus F^\perp$.

□

Définition 8. Dans ces conditions, l'application $P : x \in H, x = x_1 + x_2, x_1 \in$

$F, x_2 \in F^{\perp}$

F

Exemple 1.1.1. Montrer que P est linéaire continue et satisfait $P^2 = P$.

Définition 9. Une partie A de H est dite TOTALE si le plus petit sous espace fermé contenant A et H.

H est SÉPARABLE si H admet une famille totale dénombrable.

Exemple 2. $H = l^2(\mathbb{N}) : \mathcal{F} = \{e_0, e_1, ...\}$ avec $e_j(i) = \delta_{ij} \to (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...0)$. $\mathcal{F}$ est totale. Elle est dénombrable, $l^2(\mathbb{N})$ est séparable.

Théorème 3. *Soit H un espace de Hilbert et $A \subset H$:*

1. $\overline{\text{vect}(A)} = (A^{\perp})^{\perp}$
2. *A est un sous-espace alors $(A^{\perp})^{\perp} = \bar{A}$*
3. *A est totale $\Leftrightarrow$ $A^{\perp} = \{0_H\}$*

1.2 Séries dans un espace vectoriel normé

Soit $(E, ||\cdot||_E)$ un `espace vectoriel normé` (e.v.n).

Définition 10. On appelle SÉRIE de terme général $u_n \in E$ la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de E t.q. $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n$. La série est CONVERGENTE dans $(E, ||\cdot||_E)$ si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans E : S — c'est la somme de la série.

Définition 11. Une série $\sum u_n$ est dite ABSOLUMENT CONVERGENTE (AC) si la série $\sum ||u_n||_E$ est convergente dans $\mathbb{R}^+$.

Théorème 4. *Si E est `complet` (espace de Banach/Hilbert) Alors toute série AC est convergente et $|| \sum\limits_{n=0}^{\infty} || \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} ||u_n||$.*

Démonstration. $J_n = \sum\limits_{n=0}^{N} ||u_n||$ et convergente $\Leftrightarrow$ $(J_n)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\forall \varepsilon > 0 \, \exists K \, t.q. \, \forall N > P \geq K \Rightarrow |J_n - J_p| \leq \varepsilon$. $\sum_{j=p+1}^{N} ||u_j|| \leq \varepsilon$. meus $||S_n - S_p|| = ||\sum_{j=p+1}^{N} u_j|| \leq \sum_{j=p+1}^{N} ||u_j||$ inégalité triangulaire.

$\Rightarrow N > p \leq K \Rightarrow ||S_N - S_P|| \leq \varepsilon \Leftrightarrow (S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E et donc convergente.

D'autre part $||S_n|| = ||\sum_{j=0}^{n} u_j|| \leq \sum_{j=0}^{n} \leq \sum_{j=0} ||u_j|| \Rightarrow ||\sum_{j=0} u_j|| \leq \sum_{j=0} ||u_j||$. Cfd. □

Définition 12. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$ de H est dite ORTHOGONAL si $(x_i|x_j) = 0 \; \forall i \neq j$.

Théorème 5. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite orthogonale dans un espace de Hilbert H. Alors la série $\sum x_n$ est convergente $\Longleftrightarrow \sum_{n\geq 0} ||x_n||_H^2$ est convergente et*

$$||\sum_{n\geq 0} x_n||_H^2 = \sum_{n\geq 0} ||x_n||_H^2.$$

Démonstration. $\forall\ l > p$ on a $||\sum_{n=l}^{p}||^2 = (\sum_n = e^p x_n | \sum_n = e^p x_n) = \sum_n, n' = l(x_n|x'_n) = \sum_n = l^p ||x_n||^2$ Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$ est de Cauchy $\Leftrightarrow (||x_n||^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Couchy dans $\mathbb{R}$.

D'autre part $S_N = \sum_{n\geq 0}^{N} x_n \Rightarrow ||S_N||^2 = \sum_{n\geq 0}^{N} ||x_n||^2$. Alors $S = lim S_N = \sum x_n$ $||S||^2 = ||lim N S_N||^2 = lim ||S_N||^2$ par continuité de la $||\cdot||$ et donc $||S||^2 = lim_N \sum_n \geq 0^N ||x_n||^2 = \sum_{n\geq 0} ||x_n||^2$ □

1.3 Bases Hilbertiennes

Définition 13. On appelle BASE HILBERTIENNE, une suite de vecteur $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$ telle que

1. $\forall n, m (x_n|x_m) = \delta_{nm}$,
2. $\text{vect}\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}\} = H \Leftrightarrow \text{vect}\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}^{\perp} = \{0_H\} \Leftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$ est totale.

Théorème 6 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit (x_n) une suite* `orthonormale` *$(\forall n, m (x_n|x_m) = \delta_{nm})$ dans H. Alors $\forall x \in H \sum_{n\geq 0} |(x|x_n)|^2$ est convergente et $\sum_{n\geq 0} |(x|x_n)|^2 \leq ||x||^2$.*

Exemple : $H = l^2(\mathbb{N})$. $(e_n|e_m) = \sum_{k\geq 0} e_n(k)\overline{e_m(k)} = \sum_{k\geq 0} \delta_{nk}\delta_{mk} = \delta_{nm}$. En fait on montre que $\sum_{n\geq 0} |(e_n|x)|^2 = ||x||^2$ c'est une base Hilbertienne.

Démonstration. Soit $x \in H$ on pose $y_i = (x|e_i)e_i$ et $Y_N = \sum_1^N y_i$, $Z_N = X - Y_N$. Alors : $(Z_N|y_i) = (X - Y_N|y_i) = (X|y_i) - (Y_N|y_i)$. $(x|y) = (x|(x|e_i)e_i) = \overline{(x|e_i)}(x|e_i) = |(x|e_j)|^2$. $(Y_N|y_i) = \sum_{j=1}^{N} (y_j|y_i)$ mais $y_j \perp y_i \Rightarrow (Y_N|y_i) = ||y_i||^2$ si $N \geq i$. (autrement =0)

Dans ces conditions puisque $||y_i||^2 = |(x|e_i)|^2$. Alors $(Z_n|y_i) = 0 \Rightarrow (Z_N|Y_N) = 0$ cas $Y_n = \sum_{i=0}^{N} y_i \Rightarrow ||x||^2 = ||Z_n||^2 + ||Z_N||^2$ $(x = Zn + YnetZ_n \perp Y_n) \Rightarrow ||y_n||^2 = \sum ||y_n||^2 \leq ||x||^2$

La seuie $\sum^N ||y_n||^2$ est positive, majorée donc convergente et par passage à la limite : $\sum_{n\geq 0} ||y_n||^2 = \sum |(x|e_n)|^2 \leq ||x||^2$. QED

□

Théorème 7 (Egalité de Parseval). *Soit (e_n) une base Hilbertienne de H alors*

1. *La série $\sum_{n\geq 0}|(x|e_n)|^2$ est convergente et $||X||^2 = \sum_{n\geq 0}|(x|e_n)|^2$,*
2. *La série $\sum_{n\geq 0}(x|e_i)e_i$ est convergente dans H et $\sum_{i\geq 0}(x|e_i)e_i = x$.*

Démonstration. En utilisant le théorème précédent alors $\sum|(x|e_i)|^2$ est convergent. On utilise l'identité de la médiane : $\sum(x|e_i)e_i$ est convergente dans H $(||(x|e_i)e_i||^2 = |(x|e_i)|^2)$. On pose $y = \sum_{i\geq 0}(x|e_i)e_i$ alors $||y||^2 = \sum_{i\geq 0}|(x|e_i)|^2)$ mais $(y|e_j) = (\sum(x|ei)ei|e_j) = \sum(x|e_i)(e_i|e_j) = (x|e_j)$ ... Conclusion $\forall j \in \mathbb{N}(x|e_j) = (y|e_j) \Leftrightarrow (x - y|e_j) = 0 \Rightarrow x - y \in \mathrm{vect}((e_n)_{n\in\mathbb{N}})^{\perp} \Rightarrow x - y = 0_H \Leftrightarrow x = y = \sum(x|e_i)e_i||x||^2 = \sum_{i\geq 0}|(x|e_i)|^2$ □

Remarque. *Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale telle que $\forall x \in Hx = \sum_{i\geq 0}(x|e_i)e_i$: $x = \lim_N \sum_{i\geq 0}^{N} a_i e_i$ où $a_i = (x|e_i) \in \mathbb{C}$*

$\in \mathrm{vect}\{(e_n)_n \in \mathbb{N}\}; a_i = (x|e_i) \Rightarrow \mathrm{vect}\{(e_n)_n \in \mathbb{N}\} = H$. $(e_n)_n \in \mathbb{N}$ est une base Hilbertienne. ii)» $(e_n)_n \in \mathbb{N}$ est base Hilbertienne de $H \Leftrightarrow \forall x \in H :\ \sum(x|e_i)e_i = x$ $\sum(x|e_i)e_i = x \Leftrightarrow \sum|(x|e_i)|^2 = ||x||^2 i >> (e_n)$ est une base Hilbertienne de $H \Leftrightarrow$ $\sum|(x|e_i)|^2 = ||x||^2 \forall x \in H$

Exemple (suite) : $H = l^2(\mathbb{N})$. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} t.q. e_n(k) = \delta_{nk}$.

$u \in H \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0}|u(n)|^2 = ||u||^2$ mais $u(n) = (u|e_n) = \sum u(k)e_n(k) \Leftrightarrow \sum_n \geq 0|(u|e_n)|^2 = ||u||^2, \Rightarrow$ c'est une base Hilbertienne. !?

1.4 Dual d'un espace de Hilbert

On rappelle que si S est un e.v.n. une Forme Linéaire sur X est une application linéaire de X dans $\mathbb{C}$. Soit $l : X \to \mathbb{C} :\ \forall d \in \mathbb{C}\ \forall x, y \in X l(x + dy) = l(x) + dl(y)$. L'ensemble des formes linéaires de X : est un espace vectoriel X^*. On considère X' dual topologique : c'est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur X : $\{l : (X, ||\cdot||_X) \to (\mathbb{C}, |\cdot|)\}$.

Exercice 1. l est continue $\Leftrightarrow$

$$\exists C > 0\ x \forall x \in X, |l(x)| \leq C||x|| \tag{$*$}$$

On définit $l \in X'$, $||l|| = \inf\{C > 0 \text{ t.q. } (\textbf{??}) \text{ est satisfait}\} = \sup\{|l(x)| \mid ||x|| = 1\}$. $(X', ||\cdot||)$ est un espace de Banach (un e.v.n. `complet`)

Théorème 8 (Théorème de représentation de Riez). *. Soit H un espace de Hilbert H' son dual topologique. On définit $I : H \to H$ par $\forall x \in HI(x) = (\cdot|x)$. Alors I est un isomorphisme isométrique de $H \to H'$.*

Remarque. *$H = \mathbb{C}^n$, une forme linéaire sur $\mathbb{C}^n$: l. $l(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ a_i \in \mathbb{C}$ $|l(x)| = |\sum_{i=1}^{n} a_i x_i| \leq sup\{a_i|\} \cdot ||x||_{\mathbb{R}^n}$. Ici $X^* = X'$!?*

$$l(x) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$= (\bar{a}|x)\forall x \in \mathbb{C}^n\ \forall l \in X',\ \exists a \in \mathbb{C} :\quad l(x) = (x|\bar{a})$ Généralisation à la dimension quelconque c'est le théorème de Riez : $\forall l \in H'\ \exists a \in H\ \forall x \in H :\ l(x) = (x|a)|$

Démonstration. Soit $l \in H'$ $l \neq 0'_h \Leftrightarrow$

□

Remarque. *Si l est anti-linéaire :* $\forall d \in \mathbb{C}$ $\forall x, y \in H$ $l(x+dy) = l(x) + \bar{d}l(y)$ *et* $\exists u$ *t.q.* $\forall x \in H :$ $l(x) = (u|x)$

1.5 Convergence faible dans les espaces de Hilbert

1.5.1 Définition et premières propriétés

> **Définition 14.** Soit H un espace de Hilbert. Une suit$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$ de H est dit CONVERGE FAIBLEMENT VERS $X \in H$ si $\forall y \in H (x_n|y) \to (x|y)$. On notera $x_n \rightharpoonup x$, x est dite limite faible de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$.

Exp. $H = l^2(\mathbb{N})$, $x_n \in l^2(\mathbb{N}^*)$ t.q. $x_n(j) = \delta_{nj}$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$ est une base hilbertienne de H. On regarde la convergence faible. Soit $y \in l^2(\mathbb{N}^*)$ on doit calculer $\lim_{n\to+\infty}(x_n|y)$, $(x_n|y) = \sum_j x_n(j)\overline{y(j)} = \overline{y(n)}$. $|(x_n|y)| \leq |y(n)|$ on sait $\sum_j |y(j)|^2 < +\infty \Rightarrow |y(j)| \to 0$ qd $j \to +\infty$ et donc $|(x_n|y)| = |y(n)| \to 0$ qd $n \to +\infty$. On ercit $0 = (0_H|y)$ alors $\lim_n (x_n|y) = (0_H|y)$. 0_H est une limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$ (On montrera la limite faible est unique). $\|x_n\|^2 = \sum_j |x_n(j)|^2 = 1$ $\Rightarrow x_n \not\to 0$ puisque $\lim_n \|x_n - 0_H\| = \lim_n \|x_n\| = 1 \not\to 0$. 0_H n'est pas limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 1. *La limite faible, si elle existe elle est unique.*

Démonstration. Supposons que $\forall y \in H (x_n|y) \to (x|y)$ et $(x_n|y) \to (x'|y)$, $x, x' \in H$. Supposons $x \neq x' \Leftrightarrow x - x' \neq 0_H \Rightarrow \exists y \in H$ t.q. $(x|y) \neq (x'|y)$ (*)

Remarque. *On suppose (*) faux :* $\forall y \in H (x|y) = (x'|y) \Leftrightarrow (x - x'|y) = 0 \Rightarrow x - x' \perp H$ $\Rightarrow x - x' = 0_H$ *c'est Absurde.*

On pose $u_n = (x_n|y)$ $u = (x|y)$ $u' = (x'|y)$ $u_n \to u :$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ t.q. $\forall n \geq N |u_n - u| \leq \varepsilon$. On choisit $\varepsilon < |u - u'|$ alors on a toujours si $n \geq N$ $|u_n - u'| = |u_n - u + u - u'| = ||u - u'| - |u_n - u|| \geq |u - u'| - \varepsilon \geq \frac{|u-u'|}{2} \Rightarrow \forall n \geq N |u_n - u'| \geq \frac{|u-u'|}{2} \Rightarrow |u_n - u'| \not\to 0$ $\Leftrightarrow u_n \not\to u'$ QED. □

Dans l'exemple précédent 0_H est la limite unique de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
Exemple. $H = L^2(\mathbb{R})$. Soit $H_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(x) = \varphi_0(x - n)$ $x \in \mathbb{R}$.

Rappel. $C_c^\infty(\mathbb{R})$ *ensemble des fonctions* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$.
* *support* f *compact : borne et ferme.*
* $f \in C_(^n\mathbb{R}) \Leftrightarrow f \in C_X^\infty(\mathbb{R})$ *support* $f = \overline{\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}}$
$L^2(\mathbb{R}) = \overline{C_x^\infty(\mathbb{R})}|_{\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}}$

$\varphi_0 \in C_C^\infty(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N} \varphi_n(x) = \varphi_0(x - n)$.

$\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}) : (\varphi_n|\psi) \to 0 = (0_H|\psi)$ $(\varphi_n|\psi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \varphi_n(x)\overline{\psi(x)} = \int_{n-1}^{n+1} \mathrm{d}x\, \varphi_0(x - n)\bar{\psi}(x)$. $|(.|.)|_{L^2((n-1,n+1))} \leq \|\cdot\|\|\cdot\| \Rightarrow \int_{n-1}^{n+1} |\varphi_0(x - n)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{+1} |\varphi_0(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 1 \Rightarrow |(\varphi_n|\psi)| \leq (\int_{n-1}^{n+1} |\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$

$\psi \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{n-1}^{n+1} |\psi(t)|^2 \,\mathrm{d}t \to 0$ quand $n \to +\infty$. $\|\psi\| = \sum_n \int_{n-1}^{n+1} |\psi|^2 \,\mathrm{d}t < \infty$.

Proposition 2. *1. soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $x_n \rightharpoonup x \in H$ alors $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Converge faiblement et $x_{k(n)} \rightharpoonup x$*

2. si $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sait deux suites t.q. $x_n \rightharpoonup x$ et $y_n \rightharpoonup y$ alors $x_n+y_n \rightharpoonup x+y$

3. si $x_n \rightharpoonup x$ et soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des $\mathbb{C}$ t.q. $d_n \to d \in \mathbb{C} \Rightarrow d_n x_n \rightharpoonup dx$.

Démonstration. 1. i est évident $\forall y \in H$ si $u_n = (y|x_n) \Rightarrow u = (y|x) \Rightarrow u_{k(n)} \to u \Rightarrow$ i)

2. $\forall y \in H(y|x_n + z_n) = (y|x_n) + (y|x_n) \to (y|x) + (y|z) = (y|x+z)$.

3. On suppose $\forall y \in H(x_n|y) \to (x|y)$ et $d_n \to d$. $(d_n x_n - dx|y) = (d_n x_n - dx_n + dx_n - dx|y) = (d_n - d)(x_n|y) + d(x_n - x|y) \Rightarrow |(d_n x_n - dx|y)| \leq |d_n - d||(x_n|y)| + |d||(x_n - x|y)|$

   (a) $(x_n|y) \to (x|y) \Rightarrow \exists M$ t.q. $|(x_n|y)| \leq M\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |d_n - d||(x_n|x)| \leq |d_n - d|M \to 0 qdn \to +\infty$. $|(x_n - x|y)| \to 0 qdn \to +\infty$ par (*) la proposition est démontrer.

□

Remarque. *On a toujours que $|(x_n - x|y)| \leq \|x_n - x\|_H \|y\|_H$. Si $\lim_n \|x_n - x\| = 0 \Leftrightarrow \lim_n x_n = x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$! l'inverse est faux en général.*

Proposition 3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ dans H alors $\lim_{n\to+\infty} \inf \|x_n\| \geq \|x\|$.*

Remarque. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\exists x \in H$ et $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$ alors par $|\|x\| - \|x_n\|| \leq \|x - x_n\| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Mais si on a que $x_n \rightharpoonup x$ on ne sait pas que la suite $\|x_n\|$ converge, c.a.d. que la limite existe par contre $\lim_n \inf \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \inf\{\|x_k\|, k \geq n\}$ et $\lim_n \sup \|x_n\| - \lim_{n\to+\infty} \sup\{\|x_k\|, k \geq n\}$ existe toujours.*

Démonstration. Puisque $x_n \rightharpoonup x$, alors $(x_n|x) \to (x|x) = \|x\|^2$ en utilisant Cauchy Schwartz $|(x_n|x)| \leq \|x_n\|x. \Rightarrow \|x\|^2 \leq \|x_n\|\|x\| \Leftrightarrow \|x\| \leq \|x_n\| \Rightarrow \|x\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n\|$. □

Proposition 4. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans H. Alors $x_n \to x \Leftrightarrow x_n \rightharpoonup x$ et $\lim_n \sup \|x_n\| \leq \|x\|$*

Démonstration. $(\Rightarrow)$ $x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x_n$ et $\|x_n\| \to \|x\|$ $(\Leftarrow)$ $\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(x|x_n)$ $\lim_n \sup \|x - x_n\|^2 \leq \|x\|^2 + \lim_n \sup \|x_n\|^2 - 2\|x\|^2$. $\lim_n \sup \|x - x_n\|^2 \leq \lim_n \sup \|x_n\|^2 - \|x\|^2 \leq 0 \Rightarrow \lim_n \sup \|x - x_n\|^2 = 0 \geq \lim_n \inf \|x - x_n\|^2 \geq 0 \Rightarrow \lim_n \sup \|x - x_n\|^2 = \lim_n \inf \|x - x_n\|^2 = \lim_n \|x\|$ □

Exemple 1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H. Soit $D \subset H$ dense ($\bar{D} = H$). Alors $x_n \rightharpoonup x$ sur $H \Leftrightarrow (x_n|y) \to (x|y)\ \forall y \in D$.

Exercice 2. On considère $H = L^2(\mathbb{R}, dx)$, soit $\varphi \in H <=> \int_{\mathbb{R}} |\varphi|^2\,\mathrm{d}x = \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$. $H = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R})}$

Soit $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tq $\|\varphi_0\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ (sinon on pose $\varphi = \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|}, \|\varphi\| = 1$) On pose $\varphi_n(x) = \varphi_0(x - n)$, on veut montrer que $\varphi_n \rightharpoonup \varphi \in L^2(\mathbb{R})$ On remarque que : $\|\varphi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\varphi_0(x-n)|^2\,\mathrm{d}x$ On pose $u = x - n$: $\|\varphi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}u\,|\varphi_0(u)|^2 = 1$ $\varphi_n \not\to 0 \|f_n - 0\| = 1$.

Est ce que la suite conv faiblement ? $\exists \varphi \in H, (\varphi_n|\psi) -> (\varphi|\psi) \forall \psi \in H$.

Soit ψ : $\psi(x) = 1$ ssi $x \in [-1, 1]$ $\psi(x) = 0$ sinon. $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 2$ On choisit $n \geq N$ avec N tq $a + N \geq =>$ $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n \psi\,\mathrm{d}x = 0$ On a montré $(f_c|\psi) -> 0 = (0|\psi)$. Question $\varphi_n \rightharpoonup 0_{L^2(\mathbb{R})}$?

Proposition 5. *Soit H un espace de Hilbert $D \subset H$ dense dans H : $\bar{D} = H$. Alors soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite borné dans H, $x_n \rightharpoonup x \in H$ <=> $(x_n|y) \to (x|y)$ $\forall y \in D$.*

Exercice(suite) On doit monter que $\forall \psi \in C^2(\mathbb{R})$: $(\varphi_n|\psi) \to 0$. On remarque que $\|\varphi_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$donc elle est bornée. (Suite bornée : $\exists \prod tq \forall n \|x_n\| \leq \prod$) Il suffit de montrer $(\varphi_n|\varphi) \to 0 \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrons a dernier point : $\int_\mathbb{R} \psi(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$; $\exists a, b \in \mathbb{R}, supp\psi \subset [A, B]$. On ch isit tq supp $\varphi_N = [a+N, b+N]$, $a+\ >$ => $\int_\mathbb{R} \psi\varphi_n = 0$ => $\lim_n(\psi|\varphi_n) = 0 = (\psi|0)$

Démonstration. Si $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ dans H => $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ dans D. Supposons que $(\varphi_n|\psi) \to (\varphi|\psi) \forall \psi \in D$. Soit $\eta \in H \exists (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suite de D tq $\lim_n \|\eta_k - \eta\| = 0$. On calcul $(\varphi_n|\eta) = (\varphi_n|\eta_k) + (\varphi_n|\eta - \eta_k)$. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists K$ tq si $k > K \|\eta - \eta_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ alors $|(\varphi_n|\eta - \eta_k)| \leq \|\varphi_\nu\|\|\eta - \eta_k\| \leq \prod \varepsilon$. On fixe un tel k. On conclut que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tq si $n \geq N$; $|(\varphi_n|\eta)| \leq (\prod + 1)\varepsilon$ => $(\varphi_n|\eta) \to 0$. □

Théorème 9 (1)**.** *Toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert est bornée.*

Théorème 10 (2, Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *Une espace de Hilbert vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass faible. De toute suite bornée de H, en peut extraire une sous suite.*

Remarque. *Dans $\mathbb{R}$, de toute suite borné on peut extraire une sous-suite c.v. (B.W.) c'est vrai si $p < +\infty$. Mais c'est faux en dimension quelconque. Le Thm 2 $\gtrsim$ c'est vrai au sous faible.*

Démonstration. Soit $(x_n)n \in N$ une suite borné dans H : $\exists L > 0$ tq $\forall n \in \|x_n\| \leq L$. Soit $M = \overline{\text{vect}(x_n)}$. Si M est de dimension fini, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_f(0_M, L) \subset M$. qui est compact <=> elle satisfait la propriété de B.W. $\exists (X_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sous suite et $x \in B_f(0, L)$ tq $\lim_n \|x_{k(n)} - x\| \to 0$ => $x_{k(n)} \rightharpoonup x$ dans H. Alors le Theoreme 2 est démontré. Supponons que M n'est pas de dimension finie. M est un espace Hilbert (sous espace ferme de H) Soit $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base hilbertiere de M. La suite $((x_n|e-1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornee car $|(x_n|e_1)| \leq \|x_n\|\|e_1\| \leq L \cdot 1 = L$ On appleque la proprieté de B.W. dans $\mathbb{C}$: $\exists (a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $c_1 \in \mathbb{C}$ tq $a_{k(n)} \to c_1$ qd $n \to +\infty$ on réécrit : $a_{k(n)}$ on pose $x_{k(n)} = x'_n$. $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $(x_n^1|e_1) \to c_1$ qd $n \to +\infty$. 2 la suite $(x'_n|e_2)$ est borné, $\exists$ une sous suite $(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $c_2 \in \mathbb{C}$ tq $(x_n^2|e_2) \to c_2$ qd $n \to +\infty$ etc...

Canclusion : On a construit des sous suité $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n^1)_{n\in\mathbb{N}} \subset ...(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}...$ et des complexes C_k, $k = 1, 2, 3...$ tq $(x_n^k|e_k) \to c_k$ qd $n \to +\infty$. (présidé deogonal de Cantor) : on pose $z_n = x_n^n$. Montrer que $z_n \rightharpoonup \sum_k c_k e_k$ si $\sum_k c_k e_k$ est conv dans H. Le thm 2 est démontré. Montrons que $\sum_k c_k e_k = z \in M$ i.e (*). Puisque M est complet alors il faut montrer $S_n = \sum_{k=1}^n c_k e_k$ est de Cauchy : $\|s_n - s_m\|^2 = \left\|\sum_{k=n+1}^m c_k e_k\right\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |c_k|^2$ (Parseval). S_n est de Cauchy <=> $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n |c_k|^2$ est de Cauchy <=> $\tilde{S}_n$ est convergent dans $\mathbb{C}$. Montrons ce dernier point. On utilise l'inégalité de Bessel. $\sum_{k=1}^N |(x_n|e_k)|^2 \leq \|z_n\|^2 \leq L^2$ mais : $(z_n|e_k) + (x_n^n|e_k) \to c_k$ qd $n \to +\infty$. puisque $(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $n \geq k$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \subset ...(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n^{k+1})_{n\in\mathbb{N}}...$ x_1^1 x_2^2 ... x_k^k alors $\lim_{n\to+\infty}(x_n^n|e_k) = c_k$. Alors $\sum_{k=1}^N |c_k|^2 = \sum_{k=1}^N \lim_n |(x_n^n|e_k)|^2 = \lim_n \sum_{k=1}^N |(x_n^n|e_k)|^2 = \lim_n \sum_{k=1}^N |(z_n|e_k)|^2$ on utilisant (*) alors $\sum_{k=1}^N |c_k|^2 \leq L^2$ (par passage à la limite) Par conséquent $\sum |c_k|^2$ est convergente donc $\sum_{k\geq 1} c_k \varphi_k$ est convergente dans M. Soit $z = \sum_{k=1} c_k \varphi_k$ alors $(z|e_c) = c_e$. Alors on a montre que $\forall C \in \mathbb{N}^*$ $(z_n|e_c) \to c_e = (z|e_c)$ En utilisant que

$\overline{vect(e_k, k \in \mathbb{N}^*} = M$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors cela entraine la convergence faible sur M. $\forall y \in M : (x_n^n|y) \to (z|y)$ On a couverture une sous suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui conv faiblement sur M vers $z \in H$. On étend la propriété sur H : M est un sous espace fermé on lui applique le théorème des ces projection. $\forall \eta \in HM\exists! y_0 \in M$ projection de y sur M.

Alors $y = y_0 + (y - y_0)$ et $(x^n|y) = (x_n|y) = (x_n|y_0) + (z_n|y - y_0)$ mais $(z_n|y - y_0) = 0$. $z_n \in M$ et $y - y_0 \in \prod^{\perp}$ => $limit_n(z_n|y) = (z|y_0)$ (ce que l'on a démontré précédent) mais $z \in M$, donc $(z|y - y_0) = 0$: $\lim_n(x_n|y) = (z|y_0) + (z|y - y_0) = (z|y)$ ce qui montre la conv faible sur H. □