Chapitre 1

Initiation

1.1 Definitions

Exemple 1. $l^2(\mathbb{N}) = \{n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) \in \mathbb{C}$ t.q. $\sum_{n\geq 0} |f(n)|^2 < \infty\}$
$l^2(\mathbb{N})$ est $\mathbb{C}$ espace. $\forall f, g \in l^2(\mathbb{N})$:

$$(f|g)_{l^2(\mathbb{N})} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{n\geq 0} f(n)\overline{g(n)}.$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $l^2(\mathbb{N})$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > p \geq N : \quad ||f_n - f_p||_{l^2(\mathbb{N})} < \varepsilon. \qquad (*)$$

Question. $\exists f \in l^2(\mathbb{N})$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$?
$(*) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ t.q.\ \forall n > p \geq N\ ||f_n - f_p||^2 = \sum\limits_{j\geq 0} |f_n(j) - f_p(j)|^2 \leq \varepsilon^2$
$\Rightarrow \quad |f_n(j) - f_p(j)| \leq \varepsilon\ \forall j \in \mathbb{N}.$
$\Rightarrow \forall j \in \mathbb{N}\ (f_n(j))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ qui est complet, donc $\exists f(j) \in \mathbb{C}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(j) - f(j)| = 0.$
Il faut montrer que f est la limite dans $l^2(\mathbb{N})$ de la suite f_n.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ t.q. $\forall n > p \geq N \sum\limits_{j\geq 0} |f_n(j) - f_p(j)|^2 \leq \varepsilon^2$
$\Rightarrow \forall J \in \mathbb{N}\ \underbrace{\sum_{j=0}^{J} |f_n(j) - f_p(j)|^2}_{\text{somme partielle}} \leq \varepsilon^2$, par passage à la limite sur p : $\sum_{j=0}^{J} |f_n(j) - f(j)|^2 \leq \varepsilon^2$

Conclusion : $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ telle que $\forall n \geq N\ ||f_n - f|| < \varepsilon \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f.$

Mais $f \overset{?}{\in} l^2(\mathbb{N})$.
Vérifions que $f \in l^2(\mathbb{N})$:
$(\sum_{j\geq 0} |f(j)|^2)^{1/2} = (\sum_{j\geq 0} |f_n(j) - f(j) + f(j)|^2)^{\frac{1}{2}} = ||\underbrace{f - f_n}_{\in l2n} + \underbrace{f_n}_{\in l2n}|| \leq ||f - f_n|| + ||f_n|| < +\infty.$

Theorem 1 (Projection orthogonale). *Soit H un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée et non vide de H. Alors $\forall x \in H\ \exists! y_0 \in C$ t.q.*

1. $\operatorname{dist}(x, C) := \inf\{d(x,y), y \in C\} = \inf\{||x-y||_H, y \in C\} = ||x - y_0||_H$
2. $\forall y \in C\ \operatorname{Re}(x - y_0 | y - y_0) \leq 0$ *!?*

y_0 est la projection orthogonale de x sur C.

Remarque.

1. *C est convexe si $\forall x, y \in C\ [x,y] = \{tx + (1-t)y, t \in [0,1]\} \in C$*
2. *$H = \mathbb{R}^2 :\ [x,y] \in C$*
3. *si $x_0 \in C$ dans le cas $y_0 = x_0$ et $\operatorname{dist}(x_0, C) = 0 = ||x_0 - x_0||_H$*

Démonstration. Notons par $d = d(x,C) > 0\ (x \in H \diagdown C)$. Soit $y, z \in C$ on pose $b = x - \frac{1}{2}(y+z),\ c = \frac{1}{2}(y-z) :\ ||b|| = ||x - \frac{1}{2}\underbrace{(y+z)}_{\in C}|| \geq d$. On a aussi $b - c = x - y$ et $b + c = x - z \Rightarrow ||x-y||^2 + ||x-z||^2 = ||b-c||^2 + ||b+c||^2 = (b-c|b-c) + (b+c|b+c) = ||b||^2 + ||c||^2 - (b|c) - (c|b) + ||b||^2 + ||c||^2 + (b|c) + (c|b)$.

$||x-y||^2 + ||x-z||^2 = 2(||b||^2 + ||c||^2) \geq 2d^2 + 2\frac{1}{4}||y-z||^2 \Rightarrow ||y-z||^2 \leq 2(||x-y||^2 - d^2) + 2(||x-z||^2 - d^2)$. Pour $n \in N\ C_n = \{y \in C | ||x-y||^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\}$ est fermée dans H (boule fermée).

Puisque C est fermé, $C_n = \{y \in H | ||x-y||^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\} \cap C$ est fermé dans C. De plus : $\delta(n) := sup\{||y-z||, (y,z) \in C_n \times C_n\} \leq *sup\{[2(||x-y||^2 - d^2) + 2(||x-z||^2 - d^2)]^{\frac{1}{2}}, y, z \in C_n \Rightarrow \delta(n) \leq \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

H est complet et $C \subset H_x$ c est fermé. C est un espace métrique complet. Il satisfait le critère de Cantor : $\bigcap\limits_n C_n = \{y_0\}$.

$y_0 \in \cup_n C_n\ d^2 \leq ||x - y_0||^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}* = \mathbb{N}$
$\{0\} \Rightarrow ||x - y_0|| = d^2$.

Aadff ii) : $\forall t \in [0,1],\ \forall \in H\ \phi(t) = ||\underbrace{y_0 + t(y - y_0)}_{\in C} - x||^2 = ||y_0 - x||^2 + 2tRe(y_0 - x|y - y_0) + t^2||y - y_0||^2$. $\phi(0) = d^2 \leq \phi(t)\ \forall t \in (0,1] \Rightarrow \phi'(0) \geq 0$. $\phi'(t) = 2Re(y_0 - x|y - y_0) + 2t||y - y_0||^2$. $\phi'(0) \leq 0 \Rightarrow 2Re(y_0 - x|y - y_0) \leq 0 \Rightarrow (i)$.

□

Theorem 2 (corollaire). *Soit F un sous-espace* FERMÉ *de H alors : $H = F \bigoplus F^\perp$.*

Démonstration. — F est convexe puisque $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \forall x, y \in F\ \alpha x + \beta y \in F \Rightarrow$ Celaeitvnai.. $\alpha = t,\ \beta = 1 - t\ t \in [0,1]$.
On peut lu applieuer le Thm 1 :
— On a tanga.. $F + F^\perp \subset H$ et $F + F^\perp = F \bigoplus F^\perp$ onu si $x \in F \cap F^\perp \Rightarrow (x|x) = 0 = ||x||^2 \Rightarrow x = 0_H$
Soit $x \in H$, et $y_0 \in F$ sa projectien an Thegerale : $\forall d \in \mathbb{C}, y \in F, y_0 + dy \in F$ et donc $Re(x - y_0 | y_0 + dy - y_0) \leq 0 \Rightarrow Re(x - y_0 | dy) \leq 0$
$d = (x - y_0 | y) \Rightarrow (x - y_0)$ ...
Conclusion $Re(x - y_0 | dy)$.. donc $H = F \bigoplus F^\perp$.

□

Définition 1. Dans ces condition, l'application $P : x \in H, x = x_1 + x_2, x_1 \in F, x_2 \in F^\perp \overset{P}{\mapsto} x_1 \in F$. est le PROJECTION ORTHOGONAL sur F.

Exemple 1.1.1. Montrer que P est linéaire continue et satisfait $P^2 = P$.

Définition 2. Une partie A de H est dite TOTALE si le plus petit sous espace fermé contenant A et H.

H est SÉPARABLE si H admet une famille totale dénombrable.

Exemple 2. $H = l^2(\mathbb{N}) : \mathcal{F} = \{e_0, e_1, ...\}$ avec $e_j(i) = \delta_{ij} \to (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...0)$. $\mathcal{F}$ est totale. Elle est dénombrable, $l2n$ est séparable.

Theorem 3. *Soit H un espace de Hilbert et $A \subset H$:*

1. $\overline{vect(A)} = (A^\perp)^\perp$
2. *A est on sous-espace alors $(A^\perp)^\perp = \bar{A}$*
3. *A est totale $\Leftrightarrow$ $A^\perp = \{0_H\}$*

1.2 Séries dans un espace vectoriel normé

Soit $(E, ||\cdot||_E)$ un `espace vectoriel normé` (e.v.n).

Définition 3. On appelle SÉRIE de terme général $u_n \in E$ la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de E t.q. $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n$. La série est CONVERGENTE dans $(E, ||\cdot||_E)$ si le suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans E : S — toute la somme de la somme la série.

Définition 4. Une série $\sum u_n$ est dite ABSOLUMENT CONVERGENTE (AC) si la série $\sum ||u_n||_E$ est convergente dans $\mathbb{R}^+$.

Theorem 4. *Si E est* `complet` *(espace de Banach/Hilbert) Alors toute série AC est convergente et $|| \sum\limits_{n=0}^{\infty} || \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} ||u_n||$. !?*

Démonstration. $J_n = \sum\limits_{n=0}^{N} ||u_n||$ et convergente $\Leftrightarrow$ $(J_n)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\forall \varepsilon > 0\, \exists K\, t.q.\, \forall N > P \geq K \Rightarrow |J_n - J_p| \leq \varepsilon$. $\sum_{j=p+1}^{N} ||u_j|| \leq \varepsilon$. meus $||S_n - S_p|| = ||\sum_{j=p+1}^{N} u_j|| \leq \sum_{j=p+1}^{N} ||u_j||$ Tnegalite trianguler.

$\Rightarrow N > p \leq K \Rightarrow ||S_N - S_P|| \leq \varepsilon \Leftrightarrow (S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E et donc convergente.

D'au the peut $||S_n|| = ||\sum_{j=0}^{n} u_j|| \leq \sum_{j=0}^{n} \leq \sum_{j=0} ||u_j|| \Rightarrow ||\sum_{j=0} u_j|| \leq \sum_{j=0} ||u_j||$. Cqfd. □

> **Définition 5.** Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$ de H est dite ORTHOGONAL si $(x_i|x_j) = 0 \ \forall i \neq j$.

Theorem 5. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite orthogonal dans un espace de Hilbert H. Alors le série $\sum x_n$ est convergente $\Longleftrightarrow \sum_{n\geq 0} ||x_n||_H^2$ est convergente et*

$$||\sum_{n\geq 0} x_n||_H^2 = \sum_{n\geq 0} ||x_n||_H^2.$$

Démonstration. $\forall\ l > p$ on a $||\sum_{n=l}^{p}||^2 = (\sum_n = e^p x_n | \sum_n = e^p x_n) = \sum_n, n' = l(x_n|x'_n) = \sum_n = l^p ||x_n||^2$ Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$ est de Cauchy $\Leftrightarrow (||x_n||^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Couchy dans $\mathbb{R}$.

D'aute peut $S_N = \sum_{n\geq 0}^{N} x_n \Rightarrow ||S_N||^2 = \sum_{n\geq 0}^{N} ||x_n||^2$. Alors $S = lim S_N = \sum x_n$ $||S||^2 = ||limNS_N||^2 = lim||S_N||^2$ par continite de la $||\cdot||$ et donc $||S||^2 = lim_N \sum_n \geq 0^N ||x_n||^2 = \sum_{n\geq 0} ||x_n||^2$ □

1.3 Bases Hilbertiennes

> **Définition 6.** On appelle BASE HILBERTIENNE, une suite de vecteur $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$ telle que
>
> 1. $\forall n, m (x_n|x_m) = \delta_{nm}$,
> 2. $\text{vect}\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}\} = H \Leftrightarrow \text{vect}\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}^{\perp} = \{0_H\} \Leftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$ est totale.

Theorem 6 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit (x_n) une suite* `orthonormale` *$(\forall n, m (x_n|x_m) = \delta_{nm})$ dans H. Alors $\forall x \in H \sum_{n\geq 0} |(x|x_n)|^2$ est convergente et $\sum_{n\geq 0} |(x|x_n)|^2 \leq ||x||^2$.*

Exemple : $H = l^2(\mathbb{N})$. $(e_n|e_m) = \sum_{k\geq 0} e_n(k)\overline{e_m(k)} = \sum_{k\geq 0} \delta_{nk}\delta_{mk} = \delta_{nm}$. En fait on montre que $\sum_{n\geq 0} |(e_n|x)|^2 = ||x||^2$ c'est une base Hilbertienne.

Démonstration. Sait $x \in H$ on pose $y_i = (x|e_i)e_i$ et $Y_N = \sum_1^N y_i$, $Z_N = X - Y_N$. Alors : $(Z_N|y_i) = (X - Y_N|y_i) = (X|y_i) - (Y_N|y_i)$. $(x|y) = (x|(x|e_i)e_i) = \overline{(x|e_i)}(x|e_i) = |(x|e_j)|^2$. $(Y_N|y_i) = \sum_{j=1}^{N} (y_j|y_i)$ mais $y_j \perp y_i \Rightarrow (Y_N|y_i) = ||y_i||^2$ si $N \geq i$. (autrement =0)

Dans ces conditions puisque $||y_i||^2 = |(x|e_i)|^2$. Alors $(Z_n|y_i) = 0 \Rightarrow (Z_N|Y_N) = 0$ cas $Y_n = \sum_{i=0}^{N} y_i \Rightarrow ||x||^2 = ||Z_n||^2 + ||Z_N||^2$ $(x = Zn + YnetZ_n \perp Y_n) \Rightarrow ||y_n||^2 = \sum ||y_n||^2 \leq ||x||^2$

La seuie $\sum^N ||y_n||^2$ est positive, majorée donc convergente et par passage à la limite : $\sum_{n\geq 0} ||y_n||^2 = \sum |(x|e_n)|^2 \leq ||x||^2$. QED

□

Theorem 7 (Egalité de Parseval)**.** *Soit (e_n) une base Hilbertienne de H alors*

1. *La série $\sum_{n\geq 0} |(x|e_n)|^2$ est convergente et $||X||^2 = \sum_{n\geq 0} |(x|e_n)|^2$,*
2. *Ls série $\sum_{n\geq 0}(x|e_i)e_i$ est convergente dans H et $\sum_{i\geq 0}(x|e_i)e_i = x$.*

Démonstration. En utilisant le théorème précédent alors $\sum |(x|e_i)|^2$ est convergent on utilise l'identité de la médiane : $\sum(x|e_i)e_i$ et convergente dans H $(||(x|e_i)e_i||^2 = |(x|e_i)|^2)$. On pose $y = \sum_{i\geq 0}(x|e_i)e_i$ alors $||y||^2 = \sum_{i\geq 0} |(x|e_i)|^2)$ mais $(y|e_j) = (\sum(x|ei)ei|e_j) = \sum(x|e_i)(e_i|e_j) = (x|e_j)$ ... Conclusion $\forall j \in \mathbb{N}(x|e_j) = (y|e_j) \Leftrightarrow (x-y|e_j) = 0 \Rightarrow x - y \in \mathrm{vect}((e_n)_{n\in\mathbb{N}})^{\perp} \Rightarrow x - y = 0_H \Leftrightarrow x = y = \sum(x|e_i)e_i ||x||^2 = \sum_{i\geq 0} |(x|e_i)|^2$ □

Remarque. *Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormal telle que $\forall x \in H x = \sum_{i\geq 0}(x|e_i)e_i$: $x = \lim_N \sum_{i\geq 0}^N a_i e_i$ où $a_i = (x|e_i) \in \mathbb{C}$*
$\in \mathrm{vect}\{(e_n)_n \in \mathbb{N}\}; a_i = (x|e_i) \Rightarrow \mathrm{vect}\{(e_n)_n \in \mathbb{N}\} = H$. $(e_n)_n \in \mathbb{N}$ est une base Hilbertienne. ii)» $(e_n)_n \in \mathbb{N}$ est base Hilbertienne de $H \Leftrightarrow \forall x \in H$: $\sum(x|e_i)e_i = x$ $\sum(x|e_i)e_i = x \Leftrightarrow \sum |(x|e_i)|^2 = ||x||^2 i >> (e_n)$ est une base Hilbertienne de $H \Leftrightarrow$ $\sum |(x|e_i)|^2 = ||x||^2 \forall x \in H$

Exemple (suite) : $H = l^2(\mathbb{N})$. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} t.q. e_n(k) = \delta_{nk}$.
$u \in H \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} |u(n)|^2 = ||u||^2$ mais $u(n) = (u|e_n) = \sum u(k)e_n(k) \Leftrightarrow \sum_n \geq 0|(u|e_n)|^2 = ||u||^2, \Rightarrow$ c'est une base Hilbertienne. !?

1.4 Dual d'un espace de Hilbert

On rappelle que si S est un e.v.n. une Forme Linière sur X — une application linière de X dans $\mathbb{C}$ soit $l : X \to \mathbb{C}$: $\forall d \in \mathbb{C}\ \forall x, y \in X l(x + dy) = l(x) + dl(y)$. L'ensemble des formes linéaires de X : est un espace vectoriel X^*. On considère X' dual topologique : c'est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur X : $\{l : (X, ||\cdot||_X) \to (\mathbb{C}, |\cdot|)\}$.

Exercice 1. l est continue $\Leftrightarrow$

$$\exists C > 0\ x\forall x \in X, |l(x)| \leq C||x|| \tag{$*$}$$

On définit $l \in X'$, $||l|| = \inf\{C > 0 \text{ t.q. } (*) \text{ est satisfait}\} = \sup\{|l(x)| \mid ||x|| = 1\}$. $(X', ||\cdot||)$ est un espace de Banach (un e.v.n. `complet`)

Theorem 8 (Théorème de représentation de Riez)**.** *. Soit H est un espace de Hilbert H' son dual topologique. On définit $I : H \to H$ par $\forall x \in H I(x) = (\cdot|x)$. Alors I set un isomorphisme isométrique de $H \to H'$.*

Remarque. *$H = \mathbb{C}^n$, une forme linéaire sur $\mathbb{C}^n$: l. $l(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, $a_i \in \mathbb{C}$ $|l(x)| = |\sum_{i=1}^n a_i x_i| \leq sup\{a_i|\} \cdot ||x||_{\mathbb{R}^n}$. Ici $X^* = X'$!?*

$$l(x) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$= (\bar{a}|x) \forall x \in \mathbb{C}^n\ \forall l \in X'$, $\exists a \in \mathbb{C}$: $l(x) = (x|\bar{a})$ *Généralisation à la dimension quelconque c'est le théorème de Riez :* $\forall l \in H'\ \exists a \in H\ \forall x \in H$: $l(x) = (x|a)|$

Démonstration. Soit $l \in H'$ $l \neq 0'_h \Leftrightarrow$

$\square$

Remarque. *Si l est anti-linéaire :* $\forall d \in \mathbb{C}$ $\forall x, y \in H$ $l(x + dy) = l(x) + \bar{d}l(y)$ *et* $\exists u$ *t.q.* $\forall x \in H:$ $l(x) = (u|x)$

1.5 Convergence faible dans les espaces de Hilbert

1.5.1 Définition et premières propriétés

> **Définition 7.** Soit H un espace de Hilbert. Une suit$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$ de H est dit CONVERGE FAIBLEMENT VERS $X \in H$ si $\forall y \in H (x_n|y) -> (x|y)$. On notera $x_n \rightharpoonup x$, x est dite limite faible de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$.

Exp. $H = l^2(\mathbb{N})$, $x_n \in l^2(\mathbb{N}^*)$ t.q. $x_n(j) = \delta_{nj}$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$ est une base hilbertienne de H. On regarde la convergence faible. Soit $y \in l^2(\mathbb{N}^*)$ on doit calculer $\lim_{n\to+\infty}(x_n|y)$, $(x_n|y) = \sum_j x_n(j)\overline{y(j)} = \overline{y(n)}$. $|(x_n|y)| \leq |y(n)|$ on sait $\sum_j |y(j)|^2 < +\infty => |y(j)| \to 0$ qd $j \to +\infty$ et donc $|(x_n|y)| = |y(n)| \to 0$ qd $n \to +\infty$. On ercit $0 = (0_H|y)$ alors $\lim_n (x_n|y) = (0_H|y)$. 0_H est une limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$ (On montrera la limite faible est unique). $\|x_n\|^2 = \sum_j |x_n(j)|^2 = 1$ $=> x_n \not\to 0$ puisque $\lim_n \|x_n - 0_H\| = \lim_n \|x_n\| = 1 \not\to 0$. 0_H n'est pas limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 1. *La limite faible, si elle existe elle est unique.*

Démonstration. Supposons que $\forall y \in H (x_n|y) \to (x|y)$ et $(x_n|y) \to (x'|y)$, $x, x' \in H$. Supposons $x \neq x' <=> x - x' \neq 0_H => \exists y \in H$ t.q. $(x|y) \neq (x'|y)$ (*)

Remarque. *On suppose (*) faux :* $\forall y \in H (x|y) = (x'|y) <=> (x - x'|y) = 0 => x - x' \perp H => x - x' = 0_H$ *c'est Absurde.*

On pose $u_n = (x_n|y)$ $u = (x|y)$ $u' = (x'|y)$ $u_n \to u:$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ t.q. $\forall n \geq N |u_n - u| \leq \varepsilon$. On choisit $\varepsilon < |u - u'|$ alors on a toujours si $n \geq N$ $|u_n - u'| = |u_n - u + u - u'| = ||u - u'| - |u_n - u|| \geq |u - u'| - \varepsilon \geq \frac{|u-u'|}{2} => \forall n \geq N |u_n - u'| \geq \frac{|u-u'|}{2} => |u_n - u'| \not\to 0$ $<=> u_n \not\to u'$ QED. $\square$

Dans l'exemple précédent 0_H est la limite unique de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exemple. $H = L^2(\mathbb{R})$. Soit $H_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(x) = \varphi_0(x - n)$ $x \in \mathbb{R}$.

Rappel. $C_c^\infty(\mathbb{R})$ *ensemble des fonctions* $f : \mathbb{R}| -> \mathbb{C}$.
* *support f compact : borne et ferme.*
* $f \in C^n_(\mathbb{R})$ $<=>$ $f \in C_X^\infty(\mathbb{R})$ *support* $f = \overline{\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}}$

$L^2(\mathbb{R}) = \overline{C_x^\infty(\mathbb{R})}|_{\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}}$

$\varphi_0 \in C_C^\infty(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N} \varphi_n(x) = \varphi_0(x - n)$.

$\forall \psi \in L^2(\mathbb{R})$: $(\varphi_n|\psi) \to 0 = (0_H|\psi)$ $(\varphi_n|\psi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \varphi_n(x)\overline{\psi(x)} = \int_{n-1}^{n+1} \mathrm{d}x\, \varphi_0(x - n)\bar{\psi}(x)$. $|(.|.)|_{L^2((n-1,n+1))} \leq \|\cdot\|\|\cdot\|$ -> $\int_{n-1}^{n+1} |\varphi_0(x - n)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{+1} |\varphi_0(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 1 =>$ $|(\varphi_n|\psi)| \leq (\int_{n-1}^{n+1} |\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$

$\psi \in L^2(\mathbb{R}) => \int_{n-1}^{n+1} |\psi(t)|^2 \,\mathrm{d}t \to 0$ quand $n \to +\infty$. $\|\psi\| = \sum_n \int_{n-1}^{n+1} |\psi|^2 \,\mathrm{d}t < \infty$.

Proposition 2. *1. soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $x_n \rightharpoonup x \in H$ alors $(x_{k(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ Converge faiblement et $x_{k(n)} \rightharpoonup x$*

2. si $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sait deux suites t.q. $x_n \rightharpoonup x$ et $y_n \rightharpoonup y$ alors $x_n+y_n \rightharpoonup x+y$

3. si $x_n \rightharpoonup x$ et soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des $\mathbb{C}$ t.q. $d_n \to d \in \mathbb{C}$ => $d_n x_n \rightharpoonup dx$.

Démonstration. 1. i est évident $\forall y \in H$ si $u_n = (y|x_n)$ => $u = (y|x)$ => $u_{k(n)} \to u$ => i)

2. $\forall y \in H (y|x_n + z_n) = (y|x_n) + (y|x_n) \to (y|x) + (y|z) = (y|x+z)$.

3. On suppose $\forall y \in H (x_n|y) \to (x|y)$ et $d_n \to d$. $(d_n x_n - dx|y) = (d_n x_n - dx_n + dx_n - dx|y) = (d_n - d)(x_n|y) + d(x_n - x|y)$ => $|(d_n x_n - dx|y)| \leq |d_n - d||(x_n|y)| + |d||(x_n - x|y)|$

   (a) $(x_n|y) \to (x|y)$ => $\exists M$ t.q. $|(x_n|y)| \leq M \; \forall n \in \mathbb{N}$ => $|d_n - d||(x_n|x)| \leq |d_n - d|M \to 0qdn \to +\infty$. $|(x_n - x|y)| \to 0qdn \to +\infty$ par (*) la proposition est démontrer.

□

Remarque. *On a toujours que $|(x_n - x|y)| \leq \|x_n - x\|_H \|y\|_H$. Si $\lim_n \|x_n - x\| = 0$ <=> $\lim_n x_n = x$ => $x_n \rightharpoonup x$! l'inverse est faux en général.*

Proposition 3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ dans H alors $\lim_{n\to+\infty} \inf \|x_n\| \geq \|x\|$.*

Remarque. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\exists x \in H$ et $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$ alors par $|\|x\| - \|x_n\|| \leq \|x - x_n\|$ => $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Mais si on a que $x_n \rightharpoonup x$ on ne sait pas que la suite $\|x_n\|$ converge, c.a.d. que la limite existe par contre $\lim_n \inf \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \inf\{\|x_k\|, k \geq n\}$ et $\lim_n \sup \|x_n\| - \lim_{n\to+\infty} \sup\{\|x_k\|, k \geq n\}$ existe toujours.*

Démonstration. Puisque $x_n \rightharpoonup x$, alors $(x_n|x) \to (x|x) = \|x\|^2$ en utilisant Cauchy Schwartz $|(x_n|x)| \leq \|x_n\|x.$ => $\|x\|^2 \leq \|x_n\|\|x\|$ <=> $\|x\| \leq \|x_n\|$ => $\|x\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n\|$. □

Proposition 4. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans H. Alors $x_n \to x$ <=> $x_n \rightharpoonup x$ et $\lim_n \sup \|x_n\| \leq \|x\|$*

Démonstration. (=>) $x_n \to x$ => $x_n \rightharpoonup x_n$ et $\|x_n\| \to \|x\|$ (<=) $\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(x|x_n)$ $\lim_n \sup \|x - x_n\|^2 \leq \|x\|^2 + \lim_n \sup \|x_n\|^2 - 2\|x\|^2$. $\lim_n \sup \|x - x_n\|^2 \leq \lim_n \sup \|x_n\|^2 - \|x\|^2 \leq 0$ => $\lim_n \sup \|x - x_n\|^2 = 0 \geq \lim_n \inf \|x - x_n\|^2 \geq 0$ => $\lim_n \sup \|x - x_n\|^2 = \lim_n \inf \|x - x_n\|^2 = \lim_n \|x\|$ □

Exemple 1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H. Soit $D \subset H$ dense $(\bar{D} = H)$. Alors $x_n \rightharpoonup x$ sur H <=> $(x_n|y) \to (x|y) \; \forall y \in D$.