Chapitre 1

Initiation

1.1 Les espaces de Hilbert

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 1. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une Forme Hermitienne

1. $\forall y \in E : \varphi(\cdot, y) : E \to \mathbb{R}$ est linéaire
2. $\forall (x, y) \in E \times E : \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$

Définition 2. Un Produit Scalaire est une forme hermitienne `définie positive` : $\forall e \in E \ \varphi(x, x) \geq 0$; $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0_E$. Notation :

$$\varphi(x, y) := (x|y)$$

Définition 3. Le couple $(E, (\cdot|\cdot))$ s'appelle un Espace Préhilbertien.

Définition 4. On définit la Norme sur E : $\forall x \in E \ \|x\|_E = (x|x)^{\frac{1}{2}}$.

Remarque. En particulier on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\forall (x, y) \in E^2 \ |(x|y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Donc inégalité triangulaire. Ainsi c'est vraiment une norme.

Définition 5. $x, y \in E$ sont dits ORTHOGONAUX si $(x|y) = 0$. Nous dénotons cela comme $x \perp y$.

Définition 6. $(E, \|\cdot\|)$ est dit COMPLET si toutes les suites de Cauchy de E convergent dans E.

Définition 7. UNE ESPACE DE HILBERT est un espace préhilbertien complet pour la distance $\|\cdot - \cdot\| = (\cdot - \cdot | \cdot - \cdot)^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 1. $l^2(\mathbb{N}) = \{n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) \in \mathbb{C}$ t.q. $\sum_{n\geq 0} |f(n)|^2 < \infty\}$

$l^2(\mathbb{N})$ est $\mathbb{C}$ espace. $\forall f, g \in l^2(\mathbb{N})$:

$$(f|g)_{l^2(\mathbb{N})} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{n\geq 0} f(n)\overline{g(n)}.$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $l^2(\mathbb{N})$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > p \geq N : \quad ||f_n - f_p||_{l^2(\mathbb{N})} < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Question. $\exists f \in l^2(\mathbb{N})$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$?

(**??**) $\iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ t.q.\ \forall n > p \geq N\ ||f_n - f_p||^2 = \sum\limits_{j\geq 0} |f_n(j) - f_p(j)|^2 \leq \varepsilon^2$

$\implies \quad |f_n(j) - f_p(j)| \leq \varepsilon\ \forall j \in \mathbb{N}$.

$\implies \forall j \in \mathbb{N}\ (f_n(j))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ qui est complet, donc $\exists f(j) \in \mathbb{C}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(j) - f(j)| = 0$.

Il faut montrer que f est la limite dans $l^2(\mathbb{N})$ de la suite f_n.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ t.q. $\forall n > p \geq N \sum\limits_{j\geq 0} |f_n(j) - f_p(j)|^2 \leq \varepsilon^2$

$\implies \forall J \in \mathbb{N}\ \underbrace{\sum_{j=0}^{J} |f_n(j) - f_p(j)|^2}_{\text{somme partielle}} \leq \varepsilon^2$, par passage à la limite sur p : $\sum_{j=0}^{J} |f_n(j) - f(j)|^2 \leq \varepsilon^2$

Conclusion : $\forall\varepsilon > 0\ \exists N$ telle que $\forall n \geq N\ ||f_n - f|| < \varepsilon \implies \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

Mais $f \stackrel{?}{\in} l^2(\mathbb{N})$.

Vérifions que $f \in l^2(\mathbb{N})$:

$(\sum_{j\geq 0} |f(j)|^2)^{1/2} = (\sum_{j\geq 0} |f_n(j) - f(j) + f(j)|^2)^{\frac{1}{2}} = ||\underbrace{f - f_n}_{\in l^2(\mathbb{N})} + \underbrace{f_n}_{\in l^2(\mathbb{N})}|| \leq ||f - f_n|| + ||f_n|| < +\infty$.

Théorème 1 (Projection orthogonale)**.** *Soit H un espace de Hilbert et C une partie* `convexe fermée` *et* `non vide` *de H. Alors $\forall x \in H\ \exists! y_0 \in C$ t.q.*

1. $\mathrm{dist}(x, C) := \inf\{d(x, y), y \in C\} = \inf\{||x - y||_H, y \in C\} = ||x - y_0||_H$
2. $\forall y \in C\ \ \mathrm{Re}(x - y_0|y - y_0) \leq 0$

y_0 est la projection orthogonale de x sur C.

?? Projection orthogonale

Remarque.

(i) C est convexe si $\forall x, y \in C \; [x,y] = \{tx + (1-t)y, t \in [0,1]\} \in C$

(ii) $H = \mathbb{R}^2 : \; [x,y] \in C$

(iii) si $x_0 \in C$ dans le cas $y_0 = x_0$ et $\mathrm{dist}(x_0, C) = 0 = ||x_0 - x_0||_H$

Démonstration. Notons par $d = d(x, C) > 0 \; (x \in H \diagdown C)$. Soit $y, z \in C$ on pose $b = x - \frac{1}{2}(y+z), \; c = \frac{1}{2}(y-z) : \; ||b|| = ||x - \frac{1}{2}\underbrace{(y+z)}_{\in C}|| \geq d$.

On a aussi $b-c = x-y$ et $b+c = x-z \implies ||x-y||^2 + ||x-z||^2 = ||b-c||^2 + ||b+c||^2 = (b-c|b-c) + (b+c|b+c) = ||b||^2 + ||c||^2 - (b|c) - (c|b) + ||b||^2 + ||c||^2 + (b|c) + (c|b)$.

$||x-y||^2 + ||x-z||^2 = 2(||b||^2 + ||c||^2) \geq 2d^2 + 2\frac{1}{4}||y-z||^2 \implies ||y-z||^2 \leq 2(||x-y||^2 - d^2) + 2(||x-z||^2 - d^2)$. Pour $n \in N$ $C_n = \{y \in C | ||x-y||^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\}$ est fermée dans H (boule fermée).

Puisque C est fermé, $C_n = \{y \in H | ||x-y||^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\} \cap C$ est fermé dans C.

De plus : $\delta(n) := \sup\{||y-z||, (y,z) \in C_n \times C_n\} \leq \sup\{[2(||x-y||^2 - d^2) + 2(||x-z||^2 - d^2)]^{\frac{1}{2}}, y, z \in C_n \implies \delta(n) \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

H est complet et $C \subset H_x$ c est fermé. C est un espace métrique complet. Il satisfait le critère de Cantor : $\bigcap\limits_n C_n = \{y_0\}$.

$y_0 \in \cup_n C_n \; d^2 \leq ||x - y_0||^2 \leq d^2 + \frac{1}{n} \; \forall n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\implies ||x - y_0|| = d^2$.

Montrons ii) : $\forall t \in [0,1], \; \forall \in H \; \phi(t) = ||\underbrace{y_0 + t(y-y_0)}_{\in C} - x||^2 = ||y_0 - x||^2 + 2t\,\mathrm{Re}(y_0 - x|y-y_0) + t^2||y-y_0||^2$. $\phi(0) = d^2 \leq \phi(t) \; \forall t \in (0,1] \implies \phi'(0) \geq 0$. $\phi'(t) = 2\,\mathrm{Re}(y_0 - x|y-y_0) + 2t||y-y_0||^2$. $\phi'(0) \leq 0 \implies 2\,\mathrm{Re}(y_0 - x|y-y_0) \leq 0 \implies (i)$.

□

Théorème 2 (corollaire)**.** *Soit F un sous-espace* `fermé` *de H alors : $H = F \oplus F^\perp$.*

Démonstration.

F est convexe puisque $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \; \forall x, y \in F \; \alpha x + \beta y \in F \implies$ cela est vrai si $\alpha = t, \; \beta = 1-t, \; t \in [0,1]$.

On peut ceci appliquer le théorème ?? Projection orthogonale :

On a toujours $F + F^\perp \subset H$ et $F + F^\perp = F \oplus F^\perp$ car si $x \in F \cap F^\perp \implies (x|x) = 0 = ||x||^2 \implies x = 0_H$

Soit $x \in H$, et $y_0 \in F$ sa projection orthogonale : $\forall d \in \mathbb{C}, y \in F, y_0 + dy \in F$ et donc $\mathrm{Re}(x - y_0|y_0 + dy - y_0) \leq 0 \implies \mathrm{Re}(x - y_0|dy) \leq 0$

$d = (x - y_0|y) \implies (x - y_0) \; ...$

Conclusion $\mathrm{Re}(x - y_0|dy)$... donc $H = F \oplus F^\perp$. □

Définition 8. Dans ces conditions, l'application $P : x \in H \implies x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$

$$x \overset{P}{\mapsto} x_1 \in F$$

est le Projecteur Orthogonal sur F.

Exemple 2. Montrer que P est linéaire continue et satisfait $P^2 = P$.

> **Définition 9.** Une partie A de H est dite TOTALE si le plus petit sous espace fermé contenant A et H.
>
> H est SÉPARABLE si H admet une famille totale dénombrable.

Exemple 3. $H = l^2(\mathbb{N}) : \mathcal{F} = \{e_0, e_1, ...\}$ avec $e_j(i) = \delta_{ij} \to (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...0)$. $\mathcal{F}$ est totale. Elle est dénombrable, $l^2(\mathbb{N})$ est séparable.

Théorème 3. *Soit H un espace de Hilbert et $A \subset H$:*

1. $\overline{\text{vect}(A)} = (A^\perp)^\perp$
2. *A est un sous-espace alors $(A^\perp)^\perp = \bar{A}$*
3. *A est totale $\iff$ $A^\perp = \{0_H\}$*

1.2 Séries dans un espace vectoriel normé

Soit $(E, ||\cdot||_E)$ un `espace vectoriel normé` (e.v.n).

> **Définition 1.** On appelle SÉRIE de terme général $u_n \in E$ la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de E t.q.
>
> $$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$
>
> La série est CONVERGENTE dans $(E, ||\cdot||_E)$ si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans E : S—c'est la somme de la série.

> **Définition 2.** Une série $\sum u_n$ est dite ABSOLUMENT CONVERGENTE (AC) si la série $\sum ||u_n||_E$ est convergente dans $\mathbb{R}^+$.

Théorème 1. *Si E est* `complet` *(espace de Banach/Hilbert), alors toute série AC est convergente et*

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||.$$

Démonstration. $J_n = \sum_{n=0}^{N} ||u_n||$ et convergente $\iff$ $(J_n)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\forall\varepsilon > 0\ \exists K\ t.q.\ \forall N > P \geq K\ |J_n - J_p| \leq \varepsilon \implies \sum_{j=p+1}^{N} ||u_j|| \leq \varepsilon$.

Mais $||S_n - S_p|| = ||\sum_{j=p+1}^{N} u_j|| \leq \sum_{j=p+1}^{N} ||u_j||$ inégalité triangulaire.

$\implies N > P \geq K : ||S_N - S_P|| \leq \varepsilon \iff (S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E et donc convergente.

D'autre part $||S_n|| = ||\sum_{j=0}^{n} u_j|| \leq \sum_{j=0}^{n} ||u_j|| \leq \sum_{j=0}^{\infty} ||u_j|| \implies \left\|\sum_{j=0}^{\infty} u_j\right\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} ||u_j||$. $\square$

Définition 3. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$ de H est dite ORTHOGONAL si

$$(x_i|x_j) = 0 \ \forall i \neq j.$$

Théorème 2. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite orthogonale dans un espace de Hilbert H. Alors la série $\sum x_n$ est convergente $\iff \sum_{n\geq 0} ||x_n||_H^2$ est convergente et*

$$\left\| \sum_{n\geq 0} x_n \right\|_H^2 = \sum_{n\geq 0} ||x_n||_H^2.$$

Démonstration. $\forall \ l > p$ on a $|| \sum_{n=l}^p ||^2 = (\sum_{n=l}^p x_n | \sum_{n=l}^p x_n) = \sum_{n,n'=l}^p (x_n|x_n') = \sum_{n=l}^p ||x_n||^2$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\iff$ $(||x_n||^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Couchy dans $\mathbb{R}$.

D'autre part $S_N = \sum_{n\geq 0}^N x_n \implies ||S_N||^2 = \sum_{n\geq 0}^N ||x_n||^2$. Alors $S = \lim_N S_N = \sum x_n$ $||S||^2 = ||\lim_N S_N||^2 = \lim ||S_N||^2$ par continuité de la $|| \cdot ||$ et donc $||S||^2 = \lim_N \sum_{n\geq 0}^N ||x_n||^2 = \sum_{n\geq 0} ||x_n||^2$ □

1.3 Bases Hilbertiennes

Définition 1. On appelle BASE HILBERTIENNE, une suite de vecteur $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

1. $\forall n, m : (x_n|x_m) = \delta_{nm}$,
2. $\mathrm{vect}\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\} = H \iff \mathrm{vect}\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}}{}^{\perp} = \{0_H\} \iff (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale.

Théorème 1 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit (x_n) une suite* `orthonormale` *($\forall n, m (x_n|x_m) = \delta_{nm}$) dans H. Alors $\forall x \in H \sum_{n\geq 0} |(x|x_n)|^2$ est convergente et $\sum_{n\geq 0} |(x|x_n)|^2 \leq ||x||^2$.*

Exemple 4. $H = l^2(\mathbb{N})$. Considérons $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $(e_n|e_m) = \sum_{k\geq 0} e_n(k)\overline{e_m(k)} = \sum_{k\geq 0} \delta_{nk}\delta_{mk} = \delta_{nm}$. En fait on montre que $\sum_{n\geq 0} |(e_n|x)|^2 = ||x||^2$; c'est une base Hilbertienne.

Démonstration. Soit $x \in H$ on pose $y_i = (x|e_i)e_i$ et $Y_N = \sum_1^N y_i$, $Z_N = X - Y_N$. Alors : $(Z_N|y_i) = (X - Y_N|y_i) = (X|y_i) - (Y_N|y_i)$. $(x|y) = (x|(x|e_i)e_i) = \overline{(x|e_i)}(x|e_i) = |(x|e_j)|^2$. $(Y_N|y_i) = \sum_{j=1}^N (y_j|y_i)$ mais $y_j \perp y_i \implies (Y_N|y_i) = ||y_i||^2$ si $N \geq i$. (autrement =0)

Dans ces conditions puisque $||y_i||^2 = |(x|e_i)|^2$. Alors $(Z_n|y_i) = 0 \implies (Z_N|Y_N) = 0$ cas $Y_n = \sum_{i=0}^N y_i \implies ||x||^2 = ||Z_n||^2 + ||Z_N||^2$ $(x = Zn + YnetZ_n \perp Y_n) \implies ||y_n||^2 = \sum ||y_n||^2 \leq ||x||^2$

La suite $\sum^N ||y_n||^2$ est positive, majorée donc convergente et par passage à la limite : $\sum_{n\geq 0} ||y_n||^2 = \sum |(x|e_n)|^2 \leq ||x||^2$. QED □

Théorème 2 (Egalité de Parseval)**.** *Soit (e_n) une* `base Hilbertienne` *de H alors*

1. *La série $\sum_{n\geq 0} |(x|e_n)|^2$ est convergente et $||x||^2 = \sum_{n\geq 0} |(x|e_n)|^2$,*
2. *La série $\sum_{n\geq 0} (x|e_i)e_i$ est convergente dans H et $\sum_{i\geq 0} (x|e_i)e_i = x$.*

Démonstration. En utilisant le théorème précédent alors $\sum|(x|e_i)|^2$ est convergent. On utilise l'identité de la médiane : $\sum(x|e_i)e_i$ est convergente dans H ($||(x|e_i)e_i||^2 = |(x|e_i)|^2$). On pose $y = \sum_{i\geq 0}(x|e_i)e_i$ alors $||y||^2 = \sum_{i\geq 0}|(x|e_i)|^2)$ mais $(y|e_j) = (\sum(x|ei)ei|e_j) = \sum(x|e_i)(e_i|e_j) = \overline{(}x|e_j)$

Conclusion $\forall j \in \mathbb{N}$: $(x|e_j) = (y|e_j) \iff (x - y|e_j) = 0 \implies x - y \in \text{vect}((e_n)_{n\in\mathbb{N}})^{\perp}$ $\implies x - y = 0_H \iff x = y = \sum(x|e_i)e_i||x||^2 = \sum_{i\geq 0}|(x|e_i)|^2$ □

Remarque. Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale telle que $\forall x \in H\ x = \sum_{i\geq 0}(x|e_i)e_i$: $x = \lim_N \sum_{i\geq 0}^{N} a_i e_i$ où $a_i = (x|e_i) \in \mathbb{C} \implies x \in \text{vect}\{(e_n)_n \in \mathbb{N}\}; a_i = (x|e_i) \implies \text{vect}\{(e_n)_n \in \overline{\mathbb{N}}\} = H$. $(e_n)_n \in \mathbb{N}$ est une base Hilbertienne.

ii) $(e_n)_n \in \mathbb{N}$ est base Hilbertienne de $H \iff \forall x \in H :\ \sum(x|e_i)e_i = x$
$\sum(x|e_i)e_i = x \iff \sum|(x|e_i)|^2 = ||x||^2$

i) (e_n) est une base Hilbertienne de $H \iff \sum|(x|e_i)|^2 = ||x||^2 \forall x \in H$

Exemple (de la `base Hilbertienne`) : $H = l^2(\mathbb{N})$. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $e_n(k) = \delta_{nk}$.
$u \in H \iff \sum_{n\geq 0}|u(n)|^2 = ||u||^2$ mais $u(n) = (u|e_n) = \sum u(k)e_n(k) \iff \sum_n \geq 0|(u|e_n)|^2 = ||u||^2$, $\implies$ c'est une base Hilbertienne. !?

1.4 Dual d'un espace de Hilbert

On rappelle que si S est un e.v.n. une FORME LINÉAIRE sur X est une application linéaire de X dans $\mathbb{C}$. Soit $l : X \to \mathbb{C} :\ \forall d \in \mathbb{C}\, \forall x, y \in X\ l(x + dy) = l(x) + dl(y)$. L'ensemble des formes linéaires de X est un espace vectoriel—X^*. On considère X' dual topologique : c'est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur X—$\{l : (X, ||\cdot||_X) \to (\mathbb{C}, |\cdot|)\}$.

Exercice 1. l est continue $\iff$

$$\exists C > 0\ x\ \forall x \in X |l(x)| \leq C||x|| \qquad (*)$$

On définit pour $l \in X'$ $||l|| = \inf\{C > 0 \text{ t.q. } (\textbf{??}) \text{ est satisfait}\} = \sup\{|l(x)| \mid ||x|| = 1\}$. $(X', ||\cdot||)$ est un espace de Banach (un e.v.n. `complet`).

Théorème 1 (Théorème de représentation de Riez)**.** *Soit H un espace de Hilbert, H' son dual topologique. On définit $I : H \to H$ par $\forall x \in H\ I(x) = (\cdot|x)$. Alors I est un isomorphisme isométrique de $H \to H'$.*

Remarque. $H = \mathbb{C}^n$, est une forme linéaire sur $\mathbb{C}^n$. $l(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ a_i \in \mathbb{C}$ $|l(x)| = |\sum_{i=1}^{n} a_i x_i| \leq \sup\{a_i|\} \cdot ||x||_{\mathbb{R}^n}$. Ici $X^* = X'$!?

$$l(x) = (a_1, a_2, \dots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\bar{a}|x)$$

$\forall x \in \mathbb{C}^n\ \forall l \in X'\ \exists a \in \mathbb{C} :\ l(x) = (x|\bar{a})$.

Généralisation à la dimension quelconque c'est le théorème de Riez : $\forall l \in H'\ \exists a \in H\ \forall x \in H :\ l(x) = (x|a)|$

Démonstration. Soit $l \in H'$ $l \neq 0'_h \iff \ker l \neq H$ puisque $\exists x \in X$ t.q. $l(x) \neq 0_H$. On sait que $\ker l$ est ferme, sait $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\ker l$ convergente dans H : $x_n \to x \in H$.

Mais : $l(x_n) \to l(x)$ et $l(x_n) = 0\ \forall n \implies l(x) = 0\ \forall x \in \ker I$. Alors $H = \ker l \oplus (\ker l)^\perp$

Puisque $\ker l \neq H \implies (\ker l)^\perp \neq 0_H$. Soit $x \in \ker\ l^\perp$, $||x|| = 1)$ $x \neq 0_H$ ...!? Je ne comprends pas

$\forall y \in H$ soit $z = -l(x)y_l)y)x \in H$ et $l(lx) = -l(x_l(y) + l(y)l(x) = 0$ $x \in \ker I \implies (x|z) = 0$

$\implies$)x|-l(x)y+l(y)x) $\implies l(x) \implies l(x)(y|x) = l(y)(X|X) \implies \forall y \in H$ $l(y) = (y|\overline{l(x)}X)|)|))$

$\forall l \in H' \exists a \in H$ t.q. $\forall x \in H l(x) = (x|a)|$ I est surjective. Montrons que I est injective. Soit $x \in H$ t.q. $I(x) = O'_H \iff \forall y \in H I(x)(y) = (y|x) = 0 \implies x \perp H \implies X = 0_H$ $\ker I = \{O_h\}$ I est injective donc bijection.

Enfin : $||I(x)|| = \sup\{|(y|x)|, ||y|| = 1\} - ||x||$ isométrie)|

Parce que $|(y|x)| \leq ||y||\ ||x|| = ||x||$ $y = \frac{x}{||x||}$ $||y|| = 1$ $|(y|x)| = ||x||$ □

Remarque. Si l est anti-linéaire : $\forall d \in \mathbb{C}$ $\forall x, y \in H$ $l(x + dy) = l(x) + \bar{d}l(y)$ et $\exists u$ t.q. $\forall x \in H :\ l(x) = (u|x)$

1.5 Convergence faible dans les espaces de Hilbert

1.5.1 Définition et premières propriétés

Définition 1. Soit H un espace de Hilbert. Une suit$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H est dit CONVERGE FAIBLEMENT VERS $x \in H$ si $\forall y \in H$ $(x_n|y) \to (x|y)$. On notera $x_n \rightharpoonup x$, x est dite limite faible de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 5. $H = l^2(\mathbb{N})$, $x_n \in l^2(\mathbb{N}^*)$ t.q. $x_n(j) = \delta_{nj}$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} n \in \mathbb{N}$ est une base hilbertienne de H. On regarde la convergence faible.

Soit $y \in l^2(\mathbb{N}^*)$ on doit calculer $\lim_{n\to+\infty}(x_n|y)$, $(x_n|y) = \sum_j x_n(j)\overline{y(j)} = \overline{y(n)}$. $|(x_n|y)| \leq |y(n)|$ on sait $\sum_j |y(j)|^2 < +\infty \implies |y(j)| \to 0$ qd $j \to +\infty$ et donc $|(x_n|y)| = |y(n)| \to 0$ qd $n \to +\infty$. On ercit $0 = (0_H|y)$.

Alors $\lim_n(x_n|y) = (0_H|y)$. 0_H est une `limite faible` de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (On montrera la limite faible est unique).

$\|x_n\|^2 = \sum_j |x_n(j)|^2 = 1 \implies x_n \not\to 0$ puisque $\lim_n \|x_n - 0_H\| = \lim_n \|x_n\| = 1 \not\to 0$. Ainsi 0_H n'est pas `limite` de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 1. *La limite faible, si elle existe elle est unique.*

Démonstration. Supposons que $\forall y \in H(x_n|y) \to (x|y)$ et $(x_n|y) \to (x'|y)$, $x, x' \in H$. Supposons $x \neq x' \iff x - x' \neq 0_H \implies \exists y \in H$ t.q. $(x|y) \neq (x'|y)$ (*)

Remarque. On suppose (*) faux : $\forall y \in H(x|y) = (x'|y) \iff (x - x'|y) = 0 \implies x - x' \perp H \implies x - x' = 0_H$ c'est Absurde.

On pose $u_n = (x_n|y)$, $u = (x|y)$ et $u' = (x'|y)$

$u_n \to u :\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N$ t.q. $\forall n \geq N |u_n - u| \leq \varepsilon$. On choisit $\varepsilon < |u - u'|$ alors on a toujours si $n \geq N$ $|u_n - u'| = |u_n - u + u - u'| = ||u - u'| - |u_n - u|| \geq |u - u'| - \varepsilon \geq \frac{|u-u'|}{2}$ $\implies \forall n \geq N |u_n - u'| \geq \frac{|u-u'|}{2} \implies |u_n - u'| \not\to 0 \iff u_n \not\to u'$ QED. □

Dans l'exemple précédent 0_H est la limite faible unique de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exemple 6. $H = L^2(\mathbb{R})$. Soit $H_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(x) = \varphi_0(x-n)$ $x \in \mathbb{R}$.

Rappel. $C_c^\infty(\mathbb{R})$ ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$:

1. support f est compact (borne et ferme)
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ $f \in C^n_(\mathbb{R}) \iff f \in C_X^\infty(\mathbb{R})$

où support $f = \overline{\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}}$; $L^2(\mathbb{R}) = \overline{C_X^\infty(\mathbb{R})}|_{\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}}$.

…!? Je ne comprends pas $\varphi_0 \in C_C^\infty(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi_n(x) = \varphi_0(x-n)$. $\forall \psi \in L^2(\mathbb{R})$:

$$(\varphi_n|\psi) \to 0 = (0_H|\psi)$$

$(\varphi_n|\psi) = \int_\mathbb{R} \mathrm{d}x\, \varphi_n(x)\overline{\psi(x)} = \int_{n-1}^{n+1} \mathrm{d}x\, \varphi_0(x-n)\bar{\psi}(x)$. $|(\cdot|\cdot)|_{L^2((n-1,n+1))} \leq \|\cdot\|\|\cdot\| \implies \int_{n-1}^{n+1} |\varphi_0(x-n)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{+1} |\varphi_0(t)|^2\,\mathrm{d}t = 1 \implies |(\varphi_n|\psi)| \leq (\int_{n-1}^{n+1} |\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$

$\psi \in L^2(\mathbb{R}) \implies \int_{n-1}^{n+1} |\psi(t)|^2\,\mathrm{d}t \to 0$ quand $n \to +\infty$. $\|\psi\| = \sum_n \int_{n-1}^{n+1} |\psi|^2\,\mathrm{d}t < \infty$.

Proposition 2.

1. *soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $x_n \rightharpoonup x \in H$, alors $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Converge faiblement et $x_{k(n)} \rightharpoonup x$*
2. *si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sait deux suites t.q. $x_n \rightharpoonup x$ et $y_n \rightharpoonup y$ alors $x_n + y_n \rightharpoonup x + y$*
3. *si $x_n \rightharpoonup x$ et soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des $\mathbb{C}$ t.q. $d_n \to d \in \mathbb{C} \implies d_n x_n \rightharpoonup dx$.*

Démonstration.

1. est évident $\forall y \in H$ si $u_n = (y|x_n) \to u = (y|x) \implies u_{k(n)} \to u \implies 1)$.
2. $\forall y \in H (y|x_n + z_n) = (y|x_n) + (y|x_n) \to (y|x) + (y|z) = (y|x+z)$.
3. On suppose $\forall y \in H$ $(x_n|y) \to (x|y)$ et $d_n \to d$. $(d_n x_n - dx|y) = (d_n x_n - dx_n + dx_n - dx|y) = (d_n - d)(x_n|y) + d(x_n - x|y) \implies |(d_n x_n - dx|y)| \leq |d_n - d||(x_n|y)| + |d||(x_n - x|y)|$
   $(x_n|y) \to (x|y) \implies \exists M$ t.q. $|(x_n|y)| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N} \implies |d_n - d||(x_n|x)| \leq |d_n - d|M \to 0$ qd $n \to +\infty$.
   $|(x_n - x|y)| \to 0$ qd $n \to +\infty$ par (*) la proposition est démontrer.

□

Remarque. On a toujours que $|(x_n - x|y)| \leq \|x_n - x\|_H \|y\|_H$. Si $\lim_n \|x_n - x\| = 0 \iff \lim_n x_n = x \implies x_n \rightharpoonup x$ mais l'inverse est faux en général.

Proposition 3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ dans H alors $\lim_{n\to+\infty} \inf \|x_n\| \geq \|x\|$.*

Remarque. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\exists x \in H$ et $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$ alors par $|\|x\| - \|x_n\|| \leq \|x - x_n\| \implies \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Mais si on a que $x_n \rightharpoonup x$ on ne sait pas que la suite $\|x_n\|$ converge, c.a.d. que la limite existe par contre $\lim_n \inf \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \inf\{\|x_k\|, k \geq n\}$ et $\lim_n \sup \|x_n\| = \lim_{n\to+\infty} \sup\{\|x_k\|, k \geq n\}$ existe toujours.

Démonstration. Puisque $x_n \rightharpoonup x$, alors $(x_n|x) \to (x|x) = \|x\|^2$ en utilisant Cauchy Schwartz $|(x_n|x)| \leq \|x_n\|\|x\| \implies \|x\|^2 \leq \|x_n\|\|x\| \iff \|x\| \leq \|x_n\| \implies \|x\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n\|$. □

Proposition 4. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans H. Alors $x_n \to x \iff x_n \rightharpoonup x$ et $\lim_n \sup \|x_n\| \leq \|x\|$*

Démonstration. ($\Rightarrow$) $x_n \to x \implies x_n \rightharpoonup x_n$ et $\|x_n\| \to \|x\|$

($\Leftarrow$)

$$\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\operatorname{Re}(x|x_n)$$
$$\limsup_n \|x - x_n\|^2 \leq \|x\|^2 + \limsup_n \|x_n\|^2 - 2\|x\|^2$$
$$\limsup_n \|x - x_n\|^2 \leq \limsup_n \|x_n\|^2 - \|x\|^2 \leq 0$$
$$\implies \limsup_n \|x - x_n\|^2 = 0 \geq \liminf_n \|x - x_n\|^2 \geq 0$$
$$\implies \limsup_n \|x - x_n\|^2 = \liminf_n \|x - x_n\|^2 = \lim_n \|x\|$$

□

Exemple 7. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H. Soit $D \subset H$ dense ($\bar{D} = H$). Alors $x_n \rightharpoonup x$ sur $H \iff (x_n|y) \to (x|y)\ \forall y \in D$.

Exercice 2. On considère $H = L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$, soit $\varphi \in H \iff \int_{\mathbb{R}} |\varphi|^2 \,\mathrm{d}x = \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$, $H = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R})}$.

Soit $\varphi_0 \in C_C^\infty(\mathbb{R})$ t.q. $\|\varphi_0\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ (sinon on pose $\varphi = \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|}, \|\varphi\| = 1$).

On pose $\varphi_n(x) = \varphi_0(x - n)$, on veut montrer que $\varphi_n \rightharpoonup \varphi \in L^2(\mathbb{R})$

On remarque que : $\|\varphi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\varphi_0(x - n)|^2 \,\mathrm{d}x$. On pose $u = x - n$: $\|\varphi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}u\, |\varphi_0(u)|^2 = 1$, $\varphi_n \not\to 0$, $\|f_n - 0\| = 1$.

Est ce que la suite converge faiblement ? C-à-d $\exists \varphi \in H, (\varphi_n|\psi) \implies (\varphi|\psi)\ \forall \psi \in H$? ...!? Je ne comprends pas Soit ψ : $\psi(x) = 1$ ssi $x \in [-1, 1]$ $\psi(x) = 0$ sinon. $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 1 \,\mathrm{d}x = 2$ On choisit $n \geq N$ avec N t.q. $a + N \geq \implies \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \psi \,\mathrm{d}x = 0$ On a montré $(f_c|\psi) \implies 0 = (0|\psi)$. Question $\varphi_n \rightharpoonup 0_{L^2(\mathbb{R})}$?

Proposition 5. *Soit H un espace de Hilbert $D \subset H$ dense dans H : $\bar{D} = H$. Alors soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite borné dans H, $x_n \rightharpoonup x \in H \iff (x_n|y) \to (x|y)\ \forall y \in D$.*

Exercice 3. On doit monter que $\forall \psi \in C^2(\mathbb{R}) : (\varphi_n|\psi) \to 0$. On remarque que $\|\varphi_n\| = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$ donc elle est bornée. (Suite bornée : $\exists C > 0$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}\ \|x_n\| \leq C$)

Il suffit de montrer $(\varphi_n|\varphi) \to 0\ \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Montrons a dernier point : $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\varphi_n(x) \,\mathrm{d}x$; $\exists a, b \in \mathbb{R}$, support $\psi \subset [a, b]$. On choisit N t.q. support $\varphi_N = [a + n, b + n]$, $a + n > b \implies \int_{\mathbb{R}} \psi\varphi_n = 0 \implies \lim_n (\psi|\varphi_n) = 0 = (\psi|0)$.

Démonstration. Si $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ dans $H \implies \varphi_n \rightharpoonup \varphi$ dans D.

Supposons que $(\varphi_n|\psi) \to (\varphi|\psi)\ \forall \psi \in D$.

Soit $\eta \in H$, $\exists (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suite de D t.q. $\lim_n \|\eta_k - \eta\| = 0$. On calcul $(\varphi_n|\eta) = (\varphi_n|\eta_k) + (\varphi_n|\eta - \eta_k)$. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists K$ t.q. si $k > K$ on a $\|\eta - \eta_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ alors $|(\varphi_n|\eta - \eta_k)| \leq \|\varphi_\nu\|\|\eta - \eta_k\| \leq C\varepsilon$. On fixe un tel k.

On conclut que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ t.q. si $n \geq N$; $|(\varphi_n|\eta)| \leq (C + 1)\varepsilon \implies (\varphi_n|\eta) \to 0$. □

Théorème 1. *Toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert est* `bornée`.

Théorème 2 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *Une espace de Hilbert vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass faible. De toute suite bornée de H, on peut extraire une sous suite.*

Remarque. Dans $\mathbb{R}^p$, de toute suite borné on peut extraire une sous-suite c.v. (B.W.) c'est vrai si $p < +\infty$. Mais c'est faux en dimension quelconque. Le Théorème 2 $\implies$ c'est vrai au sens faible.

Démonstration. Soit $(x_n)n \in N$ une suite borné dans H : $\exists L > 0$ t.q. $\forall n \in \|x_n\| \leq L$. Soit $M = \overline{\text{vect}(x_n)}$. Si M est de dimension fini, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_f(0_M, L) \subset M$. qui est compact $\iff$ elle satisfait la propriété de B.W. $\exists (X_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sous suite et $x \in B_f(0, L)$ t.q. $\lim_n \left\|x_{k(n)} - x\right\| \to 0 \implies x_{k(n)} \rightharpoonup x$ dans H. Alors le Théorème 2 est démontré. Supposons que M n'est pas de dimension finie. M est un espace Hilbert (sous espace ferme de H) Soit $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base hilbertiere de M. La suite $((x_n|e-1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornee car $|(x_n|e_1)| \leq \|x_n\|\|e_1\| \leq L \cdot 1 = L$ On appleque la proprieté de B.W. dans $\mathbb{C}$: $\exists (a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $c_1 \in \mathbb{C}$ t.q. $a_{k(n)} \to c_1$ qd $n \to +\infty$ on réécrit : $a_{k(n)}$ on pose $x_{k(n)} = x'_n$. $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $(x^1_n|e_1) \to c_1$ qd $n \to +\infty$. 2 la suite $(x'_n|e_2)$ est borné, $\exists$ une sous suite $(x^2_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $c_2 \in \mathbb{C}$ t.q. $(x^2_n|e_2) \to c_2$ qd $n \to +\infty$ etc...

Canclusion : On a construit des sous suité $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (x^1_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset ...(x^k_n)_{n\in\mathbb{N}}...$ et des complexes C_k, $k = 1, 2, 3...$ t.q. $(x^k_n|e_k) \to c_k$ qd $n \to +\infty$. (présidé deogonal de Cantor) : on pose $z_n = x^n_n$. Montrer que $z_n \rightharpoonup \sum_k c_k e_k$ si $\sum_k c_k e_k$ est conv dans H. Le thm 2 est démontré. Montrons que $\sum_k c_k e_k = z \in M$ i.e (*). Puisque M est complet alors il faut montrer $S_n = \sum_{k=1}^n c_k e_k$ est de Cauchy : $\|s_n - s_m\|^2 = \left\|\sum_{k=n+1}^m c_k e_k\right\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |c_k|^2$ (Parseval). S_n est de Cauchy $\iff$ $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n |c_k|^2$ est de Cauchy $\iff$ $\tilde{S}_n$ est convergent dans $\mathbb{C}$. Montrons ce dernier point. On utilise l'inégalité de Bessel. $\sum_{k=1}^N |(x_n|e_k)|^2 \leq \|z_n\|^2 \leq L^2$ mais : $(z_n|e_k) + (x^n_n|e_k) \to c_k$ qd $n \to +\infty$. puisque $(x^n_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de $(x^k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $n \geq k$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (x^2_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset ...(x^k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (x^{k+1}_n)_{n\in\mathbb{N}}...$ x^1_1 x^2_2 ... x^k_k alors $\lim_{n\to+\infty}(x^n_n|e_k) = c_k$. Alors $\sum_{k=1}^N |c_k|^2 = \sum_{k=1}^N \lim_n |(x^n_n|e_k)|^2 = \lim_n \sum_{k=1}^N |(x^n_n|e_k)|^2 = \lim_n \sum_{k=1}^N |(z_n|e_k)|^2$ on utilisant (*) alors $\sum_{k=1}^N |c_k|^2 \leq L^2$ (par passage à la limite) Par conséquent $\sum |c_k|^2$ est convergente donc $\sum_{k\geq1} c_k\varphi_k$ est convergente dans M. Soit $z = \sum_{k=1} c_k\varphi_k$ alors $\underline{(z|e_c) = c_e}$. Alors on a montre que $\forall C \in \mathbb{N}^*$ $(z_n|e_c) \to c_e = (z|e_c)$ En utilisant que $\overline{vect(e_k, k \in \mathbb{N}^*} = M$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors cela entraine la convergence faible sur M. $\forall y \in M$: $(x^n_n|y) \to (z|y)$ On a couverture une sous suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui conv faiblement sur M vers $z \in H$. On étend la propriété sur H : M est un sous espace fermé on lui applique le théorème des ces projection. $\forall \eta \in HM\exists! y_0 \in M$ projection de y sur M.

Alors $y = y_0 + (y - y_0)$ et $(x^n|y) = (x_n|y) = (x_n|y_0) + (z_n|y - y_0)$ mais $(z_n|y - y_0) = 0$. $z_n \in M$ et $y - y_0 \in \prod^\perp \implies limit_n(z_n|y) = (z|y_0)$ (ce que l'on a démontré précédent) mais $z \in M$, donc $(z|y - y_0) = 0$: $\lim_n(x_n|y) = (z|y_0) + (z|y - y_0) = (z|y)$ ce qui montre la conv faible sur H. $\square$

Théorème 3 (Completion). *Si $(\mathcal{V}, (\cdot|\cdot)_\mathcal{V})$ est un espace préhilbertien, alors, il existe un espace de Hilbert $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot)_\mathcal{H})$ et une application $U : \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ que :*

1. *U est bijective*
2. *U est linéaire*
3. *$(Ux|Uy)_H = (x|y)_\mathcal{V}$ $\forall x \in \mathcal{V}$, $\forall y \in \mathcal{V}$*
4. *$U(\mathcal{V}) = \{Ux \mid x \in \mathcal{V}\}$ est dense dans $\mathcal{H}$.*

Théorème 4. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ une espace préhilbertien. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre de E. Alors il existe une famille orthonormale de E, telle que :*

— $\text{vect}((e_n)) = \text{vect}((v_n))$
— $(e_n|v_n) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Procédé de Gram-Schmidt Soit $u_1 = v_1$, et $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$; $u_2 = v_2 - \frac{(v_2|u_1)}{\|u_1\|^2}u_1$, et $e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$; $u_3 = v_3 - \frac{(v_3|u_1)}{\|u_1\|^2}u_1 - \frac{(u_3|u_2)}{\|u_2\|^2}u_2$ et $e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$ etc...

Chapitre 2

Opérateurs sur un espace de Hilbert

2.1 Généralités

Soit X, Y deux espaces de Banach, on note par $L(X,Y)$ l'ensemble des applications linéaires de $X \to Y$, si $X = Y$ on note par $L(X)$. Dans le cas d'espace de Hilbert l'ensemble des applications linéaires $L(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ respectivement $L(\mathcal{H})$ si $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$.

$T \in L(X,Y)$ nous notons :
$N(T) = \{x \in X, Tx = 0_y\}$—noll of T.
$R(T) = \{y \in Y, \exists x \in X \ Tx = y\}$—range of T.
$G(T) = \{(x, Tx) \ x \in X\}$—graphe de T.

Proposition 1. *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ $(Y, \|\cdot\|_y)$ deux espaces du Banach soit $f \in L(X,Y)$, alors les assertions suivantes ont équivalentes.*

(i) f est continue sur X

(ii) f est continue en un point $x_0 \in X$

(iii) $\exists C > 0$ t.q. $\forall x \in X$ on a $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$.

Démonstration. ($\implies$) i) $\implies$ ii), montrons iii) $\implies$ i) on a $\forall x, y \in X$ $\|f(x) - f(y)\|_Y = \|f(x-y)\|_Y \leq C\|x-y\|_X \implies f$ est Lipschitz sur X donc continue.

Montrons ii) $\implies$ iii) On choisit $x_0 = 0_X$ alors f est continue en 0_X. $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta = \eta(\varepsilon)$ t.q. $\forall x \in X$ et $\|x\|_X \leq \eta \implies \|f(x) - f(0)\|_Y = \|f(x)\|_Y \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon = 1$, soit $\eta = \eta(1)$, $\forall x \in X$ on pose $\tilde{x} = \frac{\eta}{2}\frac{1}{\|x\|_X}x$. On a $\|\tilde{x}\| = \frac{\eta}{2}\frac{1}{\|x\|_X}\|x\|_X = \frac{\eta}{2} \leq \eta \implies \|f(\tilde{x})\| \leq 1$.

Mais $f(\tilde{x}) = f(\eta\frac{x}{\|x\|}) = \eta\frac{1}{\|x\|}f(x)$ et $\frac{\eta}{2\|x\|_V}\|f(x)\|_Y \leq 1 \implies \|f(x)\|_Y \leq \frac{2}{\eta}\|x\|_X$ QED.

□

Remarque. iii) $\exists C > 0$ t.q. $\forall x \in X : \|f(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \iff \left\|f(\frac{x}{\|x\|_X})\right\| \leq C$ si $\|x\|_X \neq 0$ $(x \neq 0_X)$. $\|f(x)\|_Y \leq C$; $f(B_f(0_X, 1)) \subset B_f(0_Y, C)$.

- Un opérateur de $X \to Y$ est une application linéaire de $X \to Y$.
- Une application linéaire $X \to Y$ continue est un opérateur borné de $X \to Y$.
- On notera par $\mathcal{B}(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs bornés de $X \to Y$.

Exemple 1. $\mathcal{H} = \mathcal{H}' = l^2(\mathbb{Z})$ on considère l'application $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$. $\forall u \in \mathcal{H}$ $(Tu)(n) = u(n-1)$ shift a droite.

T est linéaire : $T(\lambda u+\mu v)(n) = (\lambda u+\mu v)(n-1) = \lambda u(n-1)+\mu v(n-1) = \lambda Tu(n)+\mu Tv(n)$.

T est borné (donc continue) : $\forall u \in \mathcal{H}$ $\|Tu\|^2_{\mathcal{H}} = (Tu|Tu)_{\mathcal{H}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Tu(n)\overline{Tu(n)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n-1)\overline{u(n-1)} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} u(e)\overline{u(e)} = \|u\|^2_{\mathcal{H}} \implies \|Tu\|_{\mathcal{H}} = \|u\|_{\mathcal{H}}$ T est une isométrie.

$B(X,Y)$ est un espace normé, muni de la norme naturelle.

$T \in B(X,Y)$ $\|T\| = \inf\{C > 0$ t.q. l'inégalité suivant est satisfait, $\|Tx\| \leq C\|X\|_X \forall x \in X\} \implies \|T\| \geq 0$ (*).

Exercice 1. Montrer que (*) définie une norme sur $B(X,Y)$.

Proposition 2. *Propriété Soit $T \in B(X,Y)$ alors*

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\|_Y, \|x\|_X = 1\}\\ &= \sup\{\|Tx\|_Y, \|x\|_X \leq 1\}\\ &= \sup\{\|Tx\|_Y, \|x\|_X < 1\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|T\| &= \inf\{C > 0 \ t.q.\ \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X\}\\ &= \inf\{C > 0 \ t.q.\ \left\|T\frac{x}{\|x\|_X}\right\|_Y \leq C \forall x \in X\}\\ &= \inf\{C > 0 \ t.q.\ \|Tx\|_Y \leq C \ \forall x :\ \|x\| = 1\}\\ &= \sup\{\|Tx\|_Y \mid \forall \in X :\ \|x\| = 1\}\end{aligned}$$

Soit X un espace de Banach.

Proposition 3. *Si Y est un espace de Banach, alors $(B(X,Y), \|\cdot\|)$ est lui même un espace de Banach.*

Application X' le dual topologique de X : $\varphi \in X'$ si $\varphi \in L(X,\mathbb{C})$ qui satisfait $\exists C > 0$ $\forall x \in X$: $|\varphi(x)| \leq C\|x\|_X$. $\mathbb{C}$ est complet alors par la Proposition 3 X' est complet.

Exercice 2. Montrer la proposition 3. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite du Cauchy des $B(X,Y)$ il faut montrer $\exists T \in B(X,Y)$ t.q. $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$.

2.2 Adjoint d'un opérateur

Soit $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ deux espaces de Hilbert (séparables).

Proposition 1. *Soit $T \in B(\mathcal{H},\mathcal{H}')$, li existe $T^* \in B(\mathcal{H}',\mathcal{H})$ dit opérateur adjoint qui satisfait : $\forall x \in \mathcal{H}, \forall y \in \mathcal{H}'$*

$$(Tx|y) = (x|T^*y)$$

Exemple 2. $\mathcal{H} = \mathcal{H}' = l^2(\mathbb{Z})$ T shift adjointe, calculons T^*.$\forall u,v \in \mathcal{H}$, $(Tu|v) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Tu(n)\cdot\overline{v(n)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n-1)\overline{v(n)} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} u(l)\overline{v(l+1)} = (u|w)$ avec $w(l) = v(l+1)$. On pose $T^*v = w$.

Démonstration. Dans ces conditions $x \in \mathcal{H} \mapsto (Tx|y)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{H}$ comme la composition de T et $(\cdot|y)$. De plus on a que $|(Tx|y)| \leq \|Tx\|_{\mathcal{H}'}\|y\|_{\mathcal{H}} \leq \|T\|\|x\|_{\mathcal{H}}\|y\|_{\mathcal{H}'}$ $|\varphi(x)| \leq \text{const}\|x\|_{\mathcal{H}'}, \text{const} = \|T\|\|y\|_{\mathcal{H}'}$ alors φ est continue (bornée).

D'après le Théorème de Riez $\exists! z \in \mathcal{H}$ t.q. $\varphi(x) = (x|z)$ $\forall x \in \mathcal{H}$. On pose $z = T^*y$, montrons que $T^* \in L(\mathcal{H}',\mathcal{H})$.

Soit $y_1, y_2 \in \mathcal{H} d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ on calcule $T^*(d_1y_1 + d_2y_2)$: $\forall x \in \mathcal{H}(x|T^*(d_1y_1 + d_2y_2)) = (Tx|d_1y_1 + d_2y_2)$ (def)

$\bar{d}_1(Tx|y_1) + \bar{d}_2(Tx|y_2) = \bar{d}_1(x|T^*y_1) + \bar{d}_2(x|T^*y_2) = (x|d_1T^*y_1 + d_2T^*y_2) \implies \forall x \in \mathcal{H}(x|T^*(d_1y_1+d_2y_2) - d_1T^*y_1 - d_2T^*y_2) = 0 \implies T^*(d_1y_1+d_2y_2) - d_1T^*y_1 - d_2T^*y_2 = 0_{\mathcal{H}}$.

Montrons que $T^* \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ $\forall y \in \mathcal{H}'$. $\|T^*y\|^2_{\mathcal{H}} = (T^*y|T^*y)_{\mathcal{H}} = (T(T^*y)|y)_{\mathcal{H}'} \implies \|T^*y\|^2_{\mathcal{H}} \leq \|T(T^*y)\|_{\mathcal{H}'}\|y\|_{\mathcal{H}'} \leq \|T\|\|T^*y\|_{\mathcal{H}}\|y\|_{\mathcal{H}} \implies \|T^*y\|_{\mathcal{H}} \leq \|T\|\|y\|_{\mathcal{H}'} \forall y \in \mathcal{H}'$ t.q. $T^*y \neq 0_{\mathcal{H}}$. Si $y \in N(T^*)$ on a que $0 \leq \|T\|\|y\|_{\mathcal{H}'}$ donc $T^* \in B(\mathcal{H}', \mathcal{H})$, $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Unicité. $\exists S \in B(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ t.q. $\forall (x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}'$ $(Tx|y) = (x|Sy) = (x|T^*y) \implies \forall x \in \mathcal{H}$ $(x|Sy - T^*y) = 0 \implies Sy = T^*y$. □

Exemple 3. $\mathcal{H} = \mathcal{H}' = L^2(\mathbb{R})$. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. On définit l'action de T sur $C_0^\infty(\mathbb{R}) \ni \varphi : T\varphi(x) = f(x)\varphi(x)$ $f \cdot \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \mapsto C_0^\infty(\mathbb{R})$. T est `linéaire` $\implies$ $f\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ aussi $T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est `continue`.

$\|T\varphi\|^2 = (T\varphi|\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)\varphi(x)\bar{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)|\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x \leq \|f\|^2_\infty \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x \implies \|T\varphi\|^2 \leq \|f\|^2_\infty\|\varphi\|^2$. T est continue sur $C_0^\infty(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$.

T est uniformément continue car $\|T\varphi - T\psi\| = \|T(\varphi - \psi)\| \leq \|f\|\|\varphi - \psi\|$. $\|f\|_\infty$ Lipstitz.

On utilise que toute applications T uniformément continue sur D et $\bar{D} = \mathcal{H}$, admet un prolongement par continuité sur $\mathcal{H}$ défini comme :

$\forall \varphi \in \mathcal{H}$, $\exists (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Suite de D et $\lim_n \varphi_n = \varphi$.

On pose $T\varphi = \lim_n T\varphi_n$.

T est borne et $\|T\| \leq \|f\|_\infty$. $\|T_\varphi\| = \lim_n \lim_n T\varphi_n T\varphi_n$ mais $\|T\varphi_n\| \leq \|f\|_\infty\|\varphi_n\|$. $\|Tf\| \leq \|f\|_\infty\|\varphi\|$.

Calculons. T^*

$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$ $(T\varphi|\psi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\bar{\psi}(x)\,\mathrm{d}x = \int \varphi(x)\overline{f(x)\psi(x)}\,\mathrm{d}x = (\varphi|T\psi) \implies T^* = T$.

Remarque. Dans le preuve de la proposition 1 On peut inverser la rôle de T et T^*, alors on montre aussi que $\|T^*\| \geq \|T\|$ alors $\|T^*\| = \|T\|$ (ex)

> **Définition 1.** Un opérateur $T \in B(\mathcal{H})$ est dit auto adjoint si $T = T^*$. $T \in B(\mathcal{H})$ est dit unitaire si $T \circ T^* = T^* \circ T = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$.

Remarque. Si $T = T^*$ $\forall x \in \mathcal{H}(Tx|x) = (x|Tx) \implies (Tx|x) = \overline{(Tx|x)} \implies (Tx|x) \in \mathbb{R}$.

> **Définition 2.** $T = T^*$ est positif si $\forall x \in \mathcal{H}(Tx|x) \geq 0$ $T = T^*$ est définit positif si $\forall x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0_X(Tx|x) > 0$. T est défini positif si T est positif et $(Tx|x) = 0 \iff x = 0_X$.

Exemple 4. $H = l^2(\mathbb{Z})$ $\varphi \in H$ $(T_+\rho)(n) = \varphi(n-1)$, $(T^*\rho)(n) = \varphi(n+1) := (T_-\varphi)(n)$. On considère : $S = T_+ + T_-$. $\forall \varphi \in H$: $(S\varphi)(n) = \varphi(n-1) + \varphi(n+1)$. Calculons : $S^* = (T_+ + T_-)^*$:

1. Si $A, B \in B(H)$ alors $(\mu A + \lambda B)^* = \bar{\mu}A^* + \bar{\lambda}B^*$, $\forall \mu, \lambda \in \mathbb{C}$. $\forall u, v \in H$ $((\lambda A + \mu B)u|v) = \lambda(Au|v) + \mu\ (u|v) = \lambda(u|A^*v) + \mu(u|B^*v) = (u|\bar{\lambda}A^*v) + (u|\bar{\mu}B^*v) = (u|\bar{\mu}\lambda A^* + \bar{\mu}B^*|v)$ par unicité de l'adjoint on en déduit le résultat.
   $(\mu A + \lambda B)^* = \bar{\mu}A^* + \bar{\lambda}B^*$
   Dans notre cas : $S^* = T_+^* + T_-^* = T_- + T_+ = S$
   donc S est auto-adjoint.

Remarque. $T_- = T_+^* \implies T_-^* = T_+$ et $T_-^* = T_+^{**} \implies T_+ = T_+^{**}$

C'est vrai en général : $A^{**} = A$ $\forall(\cdot, v) \in H \times H$, $(A^* u, v) = (u, A^{**} v) = (u, Av)$. $\implies A^{**} = A$

Proposition 2. *Soit H, H' 2 espaces se Hilbert. $T \in B(H, H')$ alors :*

1. $N(T) = R(T^*)^{\perp}$
2. $\overline{R(T)} = N(T^*)$

Démonstration. • $u \in N(T) \iff Tu = 0_{H'} \iff \forall v \in H'\ (Tu|v) = 0 \iff (u|T^* v) = 0 \iff u \in R(T^*)^{\perp}$ • $R(T)$ n'est pas nécessairement fermé, mais $N(T^*)$ est fermé puisque le noyau d'un opérateur borné est toujours fermé alors l'égalité doit s'écrire avec $\overline{R(T)}$ $\implies$ a finir en exercice. □

Proposition 3. *Dons le même conditions que la proposition 2, si $T \in B(H)$ est inversible : T^{-1} existe et $T^{-1} \in B(H)$ on a : $(T^*)^{-1}$ existe et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Démonstration. Soit $A, B \in B(H)$; $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$ $\forall \varphi \in H$ $(A \cdot B)\varphi = A(B\varphi)$.

Si T est inversible $\implies$ $\mathbb{1}_H T^{-1} T = T T^{-1}$. $\mathbb{1}_H^* = \mathbb{1}_H$ donc $(T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^* = \mathbb{1}_H^* = \mathbb{1}_H$ Idem pour l'autre sens. □

Proposition 4. *Soit $T \in B(H)$, T autre adjoint : $T = T^*$ alors $\|T\| = \sup\{|(Tu|u)| : u \in H,\ \|u\| = 1\}$*

Remarque. $\sup\{|(Tu|u)|, u \in H, \|u\| = 1\} = \sup\{\|Tu\|, u \in H, \|u\| = 1\}$

Démonstration. Soit $\gamma = \sup\{|(Tu|u)| :\ u \in H,\ \|u\| = 1\}$ alors on a $\forall u \in H$, $\|u\| = 1$ $|(Tu|u)| \leq \|T\| \implies \gamma \leq \|T\|$

l'autre sens : On utilise que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u, v, w \in H$ $(T(v \pm \lambda w)|v \pm \lambda w) = (Tv|v) \pm 2\lambda \operatorname{Re}(Tv|w) + \lambda^2 \|w\|^2$.

$$|(T(v \pm \lambda w)|v \pm \lambda w)| = \underbrace{|(\frac{T(v \pm \lambda w)}{|\|v \pm \lambda w\||^2} | \frac{v \pm \lambda w)}{|\|v \pm \lambda w\||^2}}_{\gamma} |\|v \pm \lambda w\||^2$$

On calcule
$(T(v + \lambda w)|v + \lambda w) - ((v - \lambda w)|(v - \lambda w)) = 4\lambda \operatorname{Re}(Tv|u)$
$\implies 4|d| \cdot |\operatorname{Re}(Tv|u)| \leq |(T(v + \lambda w)|w + \lambda w)| + |(Tw - \lambda w|v - \lambda w)| \leq \varphi(\|w + \lambda w\|^2 + \|v - \lambda w\|^2)(c.f.*) \leq 2\gamma(\|v\|^2 + \lambda^2 \|w\|^2)$
$\implies 2\gamma \lambda^2 \|w\|^2 - 4|\lambda| \cdot |\operatorname{Re}(Tv|w)| + 2\gamma \|v\|^2 \geq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R} \implies \Delta = 12(|\operatorname{Re}(Tv|w)|^2 - \gamma^2 \|v\|^2 \|w\|^2) \leq 0$

Supposons la dernière inégalité fausse : P a deux racines λ_1, λ_2 t.q. $\lambda_1 + \lambda_2 = 4\frac{|\operatorname{Re}(Tu|v)|}{2\gamma \|w\|^2} \geq 0$ et donc une des deux racines est positive : alors $P(d) = 2\gamma \lambda^2 \|w\|^2 - 4\lambda |\operatorname{Re}(Tv|w)| + 2\gamma \|w\|^2$ doit changer de signe pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ce qui est absurde, $\implies$ (**).

et donc $|\operatorname{Re}(Tv|w)|^2 \leq \gamma^2 \|v\|^2 \|w\|^2$. on choisit $w = Tv$: $\|Tv\|^2 \leq \gamma^2 \|v\|^2 \implies \|T\| \leq \gamma$. □

Exemple 5. Soit $f \in C^{)}(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$. Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ et l'opérateur défini sur H par : $\forall \varphi \in H$: $(T\varphi)(x) = f(x)\varphi(x)$

(on définit T sur $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ et on étend)
On peut montrer que $\|T\| = \|f\|_{\infty}$
On sait que : $\|T\varphi\|^2 = \int |f(x)|^2\ |\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \|f\|_{\infty}^2 \|\varphi\|^2 \implies \|T\| \leq \|f\|_{\infty}$

Exemple 6. En utilisant une suite bien choisie dans H, montrer que $\|T\| = \|f\|_{\infty}$, ici $\exists x_0$ t.q. $|f(x_0)| = \|f\|_{\infty}$. On peut choisir.

Proposition 5. *Soit H, H' deux espaces de Hilbert et $T \in L(H, H')$. Alors les 4 assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* H*, t.q.* $u_n \to u \in H \implies Tu_n \to Tu$ *dans* H' *(*$T \in B(H, H')$*)*

(ii) $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* H*, t.q.* $u_n \rightharpoonup u \in H \implies Tu_n \rightharpoonup Tu$ *dans* H'

(iii) $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* H*, t.q.* $u_n \to u \in H \implies Tu_n \rightharpoonup Tu$ *dans* H'

Démonstration. i) $\implies$ ii) si i) est vérifié, $T \in B(H, H')$ et donc $T^* \in B(H', H)$ t.q. $\forall u \in H$, $v \in H'$ $(Tu|v)_H = (u|T^*v)_H$

soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans H $u_n \rightharpoonup \in H$alors par (*) $\forall v \in H'$: $(Tu_n - Tu|v) = (T(u_n - u)|v) = (u_n - u|T^*v) \to 0$ qd $n \to_\infty$ puisque $u_n \rightharpoonup u \implies Tu_n \rightharpoonup Tu$. ii) $\implies$ iii) Supposons ii). Alors soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Ht.q. $u_n \to u \in H \implies u_n \rightharpoonup u \implies Tu_n \rightharpoonup Tu$.

Montrons en fin que iii) $\implies$ i). On suppose iii) et i) faux. $\forall C > 0,\ \exists u \in H$ t.q. $\|Tu\| > C\|u\|$, on peut construire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de H t.q. $\forall n \|Tu_n\| > n^2\|u_n\| \iff \left\|T\frac{u_n}{n\|u_n\|}\right\| > n$.

Conclusion : $v_n = \frac{u_n}{n\|u_n\|}$ on a donc $\|v_n\| = \frac{1}{n} \to 0$ qd $n \to +\infty$, $\|Tv_n\| > n$ cette suite non borné $\implies Tu_n \not\rightharpoonup 0_h$ iii) es faux ce qui est absurde. ◻

Chapitre 3

Rappels sur la compacité

Soit H un espace de Hilbert, $A \subset H$ est compact si il satisfait la propriété de Belzane.-Weirstrass : De toute suite de A : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe une sous-suite $(u_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $u \in A$ t.q. $u_{k(n)} \to u$: $\lim_n \left\| u_{k(n)} - u \right\|_H = 0$.

Exemple 1. En dimension finie les sous-ensembles compact sont les sous ensembles bornés et fermés.

> **Définition 1.** $A \subset H$ est précompact si $\bar{A}$ est compact. A est compact si de toute suite de A $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe une sous-suite $(u_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $u \in H$ t.q. $u_{k(n)} \to u \in H \diagdown A$

Exemple 2. En dimension finie, les sous ensembles précompact sont les sous ensembles bornes.

Lemme 1.

1. *$A \subset H$ est précompact si $\forall \varepsilon > 0$, soit $F \subset A$ t.q. $\forall (x, y) \in F^2$, $\|x - y\| > \varepsilon \implies F$ est fini*
2. *$A \subset H$ est précompact si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ une famille finie de partie $\{E_i\}_{i\in I}$ de H, $diam(E_i) < \varepsilon$ t.q. $A \subset \cup_{i\in I} E_i$.*

Element de preuve. Supposons i) satisfaite, $\forall \varepsilon > 0$, soit $F_\varepsilon \subset A$. Satisfaisant i) alors F est finie, supposons faux. Tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F ne contient aucune sous suite convergent.

A n'est pas précompact, absurde. i) $\implies$ ii) Soit $\varepsilon > 0$ et F le sous ensemble de H t.q. $\forall (x, y) \in l$ $d(x, y) > \varepsilon$. d'après i) F est fini $F = \{x_1 x_2 ... x_N\}$ $\forall x \in H \diagdown F$ des $\exists x_i \in F$ t.q. $d(x_i, x) < \varepsilon$. (autrement $x \in F$ par hypothèse faux) $x \in B(x_i, \varepsilon) \implies A \subset \cup B(x_i, \varepsilon)$

ii) $\implies$ i) supposons ii) $A \subset \cup_{i\in I} E_i$ avec diamètre $E_i < \varepsilon$ alors si $(x, y) \in A \times A$ et $\|x - y\| > \varepsilon \implies x \in E_i$ et $y \in E_j$ avec $i \neq j \implies F = \{x_1, x_2 ... x_n\}$ avec $x_i \in E_i$. Il reste à montrer que si i) ou ii) est vérifier A est précompact. $\square$

Chapitre 4

Opérateurs compacts

Définition 1. Soit H, H' deux espaces de Hilbert et $T \in L(H, H')$. T est dit compact si l'image de la boule unité dans H : $B_f(0_H, 1)$ est précompact dans H'. $T(B_f(0_H, 1))$ est précompact dans H'.

Remarque. En particulier $T(B_f(0_H, 1))$ est borné dans H', $\exists r > 0$ t.q. $T(B_f(0_H, 1)) \subset B_f(0_{H'}, r) \iff \forall x,\ \|x\|_H \leq 1 \implies \|Tx\|_{H'} \leq r \implies \forall x \in H,\ \left\|\frac{x}{\|x\|_H}\right\| = 1 \implies \left\|T\frac{x}{\|x\|_H}\right\|_{H'} \leq r \implies \|Tx\|_{H'} \leq r\|x\|$. Alors T est borné (continu).

Exemple 1. Soit $T \in L(H, H')$ continu de rang fini : $\dim R(T) < +\infty$. $\exists C > 0$ t.q. $\forall x \in H$, $\|Tx\|_{H'} \leq C\|x\|_H \implies T(B_f(0_H, 1)) \subset B_f(0_{H'}, C)$ mais $TB_f(0_H, 1) \subset R(T)$ c'est borné dans une espace de dimension finie : c'est précompact. Soit p un projecteur sur H sur sous-espace de dimension 1. $D_n = \{\lambda u, \lambda \in \mathbb{C}\} \forall x \in H : Px = (x|u)u$. Alors $\dim \mathbb{R}(P) = 1$ de plus on a que $\|Px\| = |(x|u)|\|u\| = ((x|u)u|(x|u)u)$ alors $\|Px\| \leq \|x\|\|u\|^2$ (Cauchy-Schwartz) P est continue de rang 1. Il est compact.

Proposition 1. *Dans les mêmes conditions, T est compact si de tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H, bornée, il existe une sous-suite de $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fortement convergente dans H.*

Cette proposition découle de la définition de loi precompacité.

Proposition 2. *Dans le mêmes conditions, T est compact $\iff$ pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H t.q. $x_n \rightharpoonup x \in H$ alors $tx_n \to Tx$ dans H'.*

Remarque.

- si $x_n \to x \implies Tx_n \to Tx$, T est borné
- si $x_n \rightharpoonup x \implies Tx_n \rightharpoonup Tx$, T est borné
- si $x_n \rightharpoonup x \implies Tx_n \rightharpoonup Tx$, T est borné
- si $x_n \rightharpoonup x \implies Tx_n \to Tx$, T est compact.

Pour démontrer la proposition 2 on utilise le lemme de Cantor.

Lemme 1. *Dans u espace topologique : $x_n \to x \iff$ toute sous-suite $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ contient à son tour une sous suite convergent vers x.*

Démonstration. Exercice. ☐

Démonstration. Supposons T compact. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H t.q. $x_n \rightharpoonup x$ montrons que $Tx_n \to Tx$. Soit $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite on pose $y_n = x_{k(n)}$, $n \in \mathbb{N}$alors $y_n \rightharpoonup x$ et puisque T est borné $Ty_n \rightharpoonup Tx$. D'après la proposition 1, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors il existe une sous suite $(y_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $Ty_{k(n)} \to y$ $\acute{\breve{\in}}$. $\implies Ty_{k(n)} \rightharpoonup y$, par unicité de la limite faible alors $Tx = y$. D'après le lemme de Canter $Tx_n \to Tx$.

Réciproquement : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans H. D'après B.W. faible elle contient une suite convergente faiblement $x_{k(n)} \rightharpoonup x \in H$, Test continue : $Tx_{k(n)} \to Tx$. D'après la proposition 1, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors : de toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contient une sous suite cv. □

On notera par $B_0(H, H')$; l'ensemble de opérateurs compacts de $H \to H'$ où $B_0(H)$ si $H = H'$.

Exercice 1. Montrer que $B_0(H)$ est un sous-espace vectorielle normé de $B(H')$.

Attention. Il faut montrer en particulier que si T_1, $T_2 \in B_0(H)$, $T_1 + T_2 \in B_0(H)$.

Exercice 2. Montrer que si $T_1 \in B_0(H)$, $T_2 \in B(H)$; T_1,T_2 et $T_2T_1 \in B_0(H)$.

Théorème 1. *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B_0(H, H')$ convergente dans $B(H, H')$: $\exists t \in B(H, H')$ t.q. $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$ alors $T \in B_0(H, H')$.*

Remarque. $B_0(H, H')$ est une sous espace fermé de $B(H, H')$.

$R, R^2, R^3, ..., R^n, ..., R^\infty = \{x_0, x_1, x_3, ..., x_n, ..., ...\text{—suite}\}$ $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ...} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty \iff l^2(\mathbb{N})$.

Corollaire 1. *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B(H, H')$ convergente vers T. Supposons que $\forall n,\ \dim R(T_n) < +\infty$ (opérateurs de rang fini) alors T est compact.*

Démonstration. Soit $B = B(0_H, 1)$ la boule unité dans H montrons que TB est précompact dans H'. soit $\varepsilon > 0$ et n t.q. $\|T - T_n\| < \varepsilon/2$. T_nB est précompact : $\exists\{E_i\}_{i\in I}$, I inie, diamètre $E_i = \{\sup \|x - y\|_{H'},\ x, y \in E_i\} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ t.q. $T_nB \subset \cup_{i\in I} E_i$ (il rappels).

On pose $\tilde{E}_i = \{x \in H',\ \operatorname{dist}(x, E_i) = \inf_{y\in E_i} \|x - y\|_{H'} \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$ $E_i \subset \tilde{E}_i$ et diamètre $\tilde{E}_i < \varepsilon$ diamètre $\tilde{E}_i = \sup\{\|x - y\|_{H'},\ x, y \in \tilde{E}_i\}$

$z, z' \in E_i$ $\|x - y\|_H \leq \|x - z + x - z' + z' - y\| \leq \|x - z\| + \|z - z'\| + \|z' - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors soit $y - Tx$, $x \in B$, existe $i \in I$ t.q. $T_nx \in E_i$ mais $\|T_nx - Tx\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies$ distance $(tx, E + i) < \frac{\varepsilon}{2} \implies Tx \in \tilde{E}_i \implies TB \subset \cup_{i\in I} \tilde{E}_i$ il est précompact.

□

Proposition 3. *Dans les mêmes conditions que la proposition précédente.* $T \in B_0(H, H') \iff \exists (T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des* $B(H, H')$, $\dim R(T_n) < +\infty$ *et* $T = \lim_n T_n \iff \lim_n \|T - T_n\| = 0$.

Démonstration. Le sens $\Leftarrow$ est implique par le corollaire précédent. Montrons $\implies$. On suppose T compact soit $B = B_H(0, 1)$ pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie de TB : I_ε t.q. $TB_H \subset \cup_{x_i\in I_\varepsilon} B_{H'}(x_i, \varepsilon)$ (precompacité) Soit $G = \operatorname{vect}\{x_1, x_2, ..., x_n\} = \bar{G}$. ($\dim G \leq N$). Soit P_G la projection orthogonale sur G. On pose $T_\varepsilon = P_G \circ T$, Alors $\dim \mathbb{R}(T_\varepsilon) < +\infty$, car $R(T_\varepsilon) \subset R(P_G)$.

Montrons que $\|T - T_\varepsilon\| < 2\varepsilon$. Soit $x \in B$ $\exists x_i \in I_\varepsilon$ t.q. $\|Tx - x_i\| < \varepsilon$ (2), $Tx \in TB \implies \|P_G \circ Txf - P_GX_i\| \leq \|P_G\|\|Tx - x_i\| \leq \|Tx - x_i\| < \varepsilon$.

Mais $P_Gx_i = x_i, x_i \in G \implies \|P_G \circ T - x_i\| < \varepsilon$ (2) (1) $\implies \|P_G \circ Tx - Tx\| < 2\varepsilon$: $\|T_\varepsilon x - Tx\| < 2\varepsilon \implies \|T_\varepsilon - T\| < 2\varepsilon$.

Conclurez : On choisit $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $T_\varepsilon = T_n$ et donc on a construit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $B(H, H')$ $\dim R(T_n) < +\infty$ et $\|T - T_n\| \leq \frac{2}{n} \to 0$ $n \to +\infty$. □

Exemple 2. $H = H' = l^2(\mathbb{N})$ soit $n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) = \frac{1}{n+1}$. Alors $\forall u \in H\ (Tu)(n) = \frac{1}{n+1}u(n)$ $\|Tu\|^2 = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \leq \sum_{n\geq 0}^{\infty} |u(n)|^2 = \|u\|^2$

T est donc une application linéaire bornée sur H. Montrons que T est compact ; en utilisant la critère de la proposition 4 : Soit $N \in \mathbb{N}^*$ soit l'opérateur T_N : $\begin{cases} (T_N u)(n) = (Tu)(n) & n \leq N \\ (T_N u)(n) = 0 & \textit{sinon} \end{cases}$.

Dans ces conditions $N > 0$ $T_N u \rightsquigarrow (u(0), \frac{u(1)}{2}, \frac{u(2)}{3}, ..., \frac{u(N)}{N+1}, 0, ...)$ $\sum_{i=0}^{N} \frac{u(i)}{i+1} e_i : (e_i(j) = \delta_{ij})$.

Alors $\dim R(T_N) = N+1$ de rang fini. Montrent que $\lim_n \|T_N - T\| = 0$ au quel cas T est compact.

On calcule $\|T_N - T\|$: $\forall u \in H$ $\|(T_N - T)u\|^2 = \sum_{n\geq 0}^{\infty} |((T_N - T)u)(n)|^2 = \sum_{n\geq 0}^{N} |(T_N - T)u(n)|^2 = \sum_{n\geq N+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}|u(n)|^2 \leq \frac{1}{(N+1)^2}\sum_{n\geq N+1}^{\infty} |u(n))|^2 \leq \frac{1}{(N+1)^2}\|u\|^2$. Alors $\|(T_N - T)u\| \leq \frac{1}{N+1}\|u\| \implies \|T_N - T\| \leq \frac{1}{N+1} \to 0$ qd $N \to +\infty$.

Remarque. On définit l'opérateur X_N sur H : $\begin{cases} (X_n u)(n) = u(n) \text{ si } n \leq N \\ (X_n u)(n) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$ Alors $X_N^2 = X_N$ c'est un projecteur $\dim R(X_N) = N+1$. Alors $T_N = X_N \circ T = X_N T$

Exemple 3. Les opérateurs Hilbert Schmidt. Soit H, H' deux espace se Hilbert, $T \in (H, H')$ t.q. $\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|^2 < +\infty$ au $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base helbertiene de H. On note par $B_2(H,H')$ l'ensemble des opérateurs Hilbert-Schmidt. $B_2(H,H')$ c'est un sous espace de $B(H,H')$ (ex) $\forall T \in B_2(H,H')$, on note $\|T\|_2 = (\sum_{k=1}^{+\infty} \|Te_k\|^2)^{\frac{1}{2}}$.

$\|\cdot\|_2$ est une norme (ex) : c'est la norme Hilbert-Schmidt et $(B_2(H,H'), \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach. De plus $\forall j \in \mathbb{N}$ $\|Te_j\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|^2 \implies \|Te_j\| \leq \|T\|_2$.

Plus généralement soit $u \in H$, $\|u\| = 1$, $u = \sum_{k\geq 0} \alpha_k e_k$, $1 = \|u\|^2 = \sum_{k\geq 0} |\alpha_k|^2$. $\|Tu\|^2 = (Tu|Tu) = \sum_k (Te_k|Tu) \leq \sum_k |\alpha_k| \|Te_k\| \|Tu\| \implies$
$\|Tu\| \leq \sum_k |\alpha_k| \|Te_k\| \leq |(\sum_k |\alpha_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_k \|Te_k\|2)^{\frac{1}{2}}| = 1 \cdot \|T\|_2$ en utilisant Cauchy-Schwartz.

$\|Tu\| \leq \|T\|_2 \implies \|T\| \leq \|T\|_2$.

Montrons que $B_2(H,H') \subset B_0(H,H')$. On suppose que $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \|Te_k\|^2 < +\infty \iff \lim_{N\to+\infty} \sum_{N}^{\infty} \|T$
0

$\forall \varepsilon\ \exists M t.\ \forall N \geq M\ \ \sum_{N\geq M} \|Te_k\|^2 \leq \varepsilon$.

Soit $T_M \in B(H,H')$ t.q. $(T_M u)(n) = (Tu)(n)$ si $n \leq M$, $(T_M u)(n) = 0$ sinon.

$\dim(R(T_M)) < +\infty$ (il est de rang finie) On a que $\|T - T_M\|^2 \leq \|T - T_M\|_2^2 = \sum_{k\geq M}^{+\infty} \|Te_k\|^2 \to 0 qd M \to +\infty$. L'opérateur de l'exemple 1 : $\|T\|_2^2 = \sum_{k\geq 0} \|Te_k\|^2 = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)^2} < +\infty$.

Exemple 4. $H = L^2(\mathbb{R})$ soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue t.q. $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < +\infty$, soit T l'opérateur définie par $\forall \varphi \in H$ $(T\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y \underbrace{f(x,y)}_{\text{noyau de } T} \varphi(y)$. T est compact (cas important dans l'étude des EDO).

Chapitre 5

Le Théorème de Lax Milgram

Théorème 1. *Soit H un espace de Hilbert et $T \in B(H)$. Supposons que $\exists \alpha > 0$ t.q. $\forall u \in H$ $|(Tu|u)| \geq \alpha \|u\|^2$ (T est coercif) alors T^{-1} existe, $T^{-1} \in B(H)$ et $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$.*

Exemple 1. $H = L^2(\mathbb{R})$, $f \in C^0 \cap L^\infty : f \geq C > 0$. $(T\varphi)(x) = f(x)\varphi(x) : (T\varphi|\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x)|\varphi(x)|^2 \geq C\|\varphi\|^2$
T^{-1} existe, il est borné.

Démonstration. Soit $u \in H$, on a : $\|Tu\|\|u\| \geq |(Tu|u)| \geq \alpha\|u\|^2$ et donc $\|Tu\| \geq \alpha\|u\|$ (*) T est injectif, soit $u \in N(T)$, $Tu = 0_H$, alors $0 = \|Tu\| \geq \alpha\|u\| \implies \|u\| = 0 \iff u = 0_H N(T) = \{0_H\}$. Montrons que T est surjectif : (1) $R(T)$ est fermé et (2) $R(T)^\perp = \{e_H\} \implies R(t) = H$.

Montrons 1) Soit $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergent dans H : $\exists u t.q. Tu_n \to u$, montrons que $u \in R(T)$, elle est de Caucy et par (*) $\alpha\|u_n - u_p\| \leq \|Tu_n - Tu_p\|$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de Cauchy : $\exists n \in H t.q. u_n \to u \implies Tu_n \to Tu$ Par continuité : alors $v = Tu$ et $v \in R(T)$.

Montrons 2) $R(T)^\perp = \{v \in H$ t.q. $(Tu|v) = 0 \forall u \in H\}$ En particulier $(Tv|v) = 0$ mais $0 = |(Tv|v)| \geq \alpha\|v\|^2 \implies \|v\| = 0 \iff v = 0_H : R(T)^\perp = \{0_H\}$. $\square$

Chapitre 6

Eléments spectraux

H désigné un espace de Hilbert, $T \in B(H)$.

Définition 1. 1. On appelle en ensemble résolvant de T que l'on note $\rho(T) = \{z \in \mathbb{C}, (T - z\mathbb{1}_H)^{-1} \in B(H)\}$
2. Le spectre de T, $\sigma(T) = \mathbb{C}\rho(T)$
3. $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de T si $\exists u \in H$, $u \neq 0_H$ et $Tu = \lambda u$ dans ces conditions $N(T - \lambda\mathbb{1}_H)$ est le sous espace propre associée $u \in N(T - \lambda\mathbb{1}_H)$ est le vecteur propre associée à λ.

Remarque.
- si λ est valeur propre de T : $N(T - \lambda\mathbb{1}_H) \neq \{0_H\} \iff T - \lambda\mathbb{1}_H$ est non injectif donc non inversible $\implies \lambda \in \sigma(T)$.
- le cas de la dimension finie : $\dim H = n$ alors $T \in L(H) = B(H)$ est représenté par matrice : $\mathrm{Mat}(T) \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. dans ce cas T n'a que des valeurs propres que sont solution ; de $P(\lambda) = \det(T - \lambda B_H) = 0 \iff T - \lambda\mathbb{1}_H$ est non inversible.

Exemple 1. Soit $T \in B(H)$ $T = T^*$, soit $z \in \mathbb{C}$ $((T - z\mathbb{1}_H)u|u) = ((T - \mathrm{Re}\, z\mathbb{1}_H)u|u) - i\,\mathrm{Im}\, z\|u\|^2$. On sait que $(Tu|u) \in \mathbb{R} \implies \mathrm{Im}((T_z\mathbb{1}_H)u|u) = -\mathrm{Im}\, z\|u\|^2$ $|(T - z\mathbb{1}_H)u|u)|^2 = |(T - \mathrm{Re}\, z\mathbb{1}_H)u|u)|^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2\|u\|^4 \geq (\mathrm{Im}\, z)^2\|u\|^2$.

Conclusion $\|(T - z\mathbb{1}_H)u|u\| \geq |\mathrm{Im}\, z|\|u\|^2$ il est coersif : $(T - z\mathbb{1}_H)^{-1} \in B(H)$ d'après Lac Milgram. Si $\mathrm{Im}\, z \neq 0 \implies \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(T) \iff \sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

En particulier les valeurs propres d'un opérateur autoadjent sont réelles.

Exemple 2. Soit $T \in B_0(H)$, alors $0 \in \sigma(T)$. Supposons faux $0 \in \rho(T) \iff (T - 0\mathbb{1}_H)^{-1} = T^{-1}$ existe et $T^{-1} \in B(H)$. Alors $\mathbb{1} = TT^{-1} \in B_0(H)$. Produit d'un Borel et d'un compact $\implies \mathbb{1}_H B(0_H, 1) = B(0_H, 1)$ est précompact dans H ce qui n'est vrai que si $\dim H < +\infty$ (Théorème de Riez) dans le cas contravariant absurde.

Exemple 3. Suite : $H = l^2(\mathbb{N})$ $(Tu)(n) = \frac{1}{n+1}u(n)$, $T \in B_0(H) 0 \in \sigma(T)$. Est ce que 0 est valeur propre de T. $\exists u?$ $\|1\| = 1$: $Tu = 0$ $u \neq 0_H$.

$\forall n \in \mathbb{N} Tu(n) = \frac{1}{n+1}u(n) = 0 \implies u(n) = 0 \iff u = 0_H$.

0 n'est pas valeur propre de T.

Proposition 1. *Soit $T \in B(\mathcal{H})$, $T = T^*$ alors* *(i) les valeurs propres de T sont réelles*

(ii) $\forall z \in \mathbb{C},\ \overline{R(T - z\mathbb{1}_H)} = N(T - \bar{z}\mathbb{1}_H)^{\perp}$

(iii) les espace propres associe a de valeurs propres différentes sont orthogonaux

Démonstration. i) $\Leftarrow$ l'exemple dans la section iii 6 $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. On peut aussi précéder comme : Soit $u \neq 0_H$, $\lambda \in \mathbb{C}$ dq $Tu = \lambda u$; $\|u\|_H = 1$. On écrit que

$(Tu|u) = (\lambda u|u) = \lambda\|u\|_H^2 = \lambda\ (Tu|u) = (u|\lambda u) = \bar{\lambda}\|u\|_H^2 = \bar{\lambda}$

$\implies \lambda = \bar{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}$

ii) D'après les relations d'orthogonalité : $R(T - z\mathbb{1}_H) = N(T^* - \bar{z}\mathbb{1}_H)^{\perp} = N(T - \bar{z}\mathbb{1}_H)^{\perp}$.

iii) $\Leftarrow$ Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_p(t)$ ($\sigma_p(T)$ est l'ensemble des valeurs propres de T) $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$\exists u_i \neq 0_H$ tq $Tu_i = \lambda_i u_i$ alors

$(Tu_1|u_2) = \lambda_1(u_1|u_2)\ (u_1|Tu_2) = \lambda_2(u_1|u_2)$

$\implies (\lambda_1 - \lambda_2)(u_1|u_2) = 0$

$\implies u_1 \perp u_2$.

□

Proposition 2. *Dans les mêmes condition que dans la proposition 1* $\lambda \in \sigma(T) \iff \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suite de* H, $\|u_n\|_H = 1$ *et* $\lim_n \|(T - \lambda\mathbb{1}_H)u_n\| = 0$

Remarque. Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\exists u \in H\ \|u\|_H = 1$ et $Tu = \lambda u$. On pose $u_n = u\ \forall n$: $\|(T - \lambda\mathbb{1}_H)u_n\| = \|(T - \lambda\mathbb{1}_H)u\| = 0\ \forall n$

Démonstration. p2 $\implies$ p1 supposons p1 faux. $\lambda \in \rho(T) \iff (T - \lambda\mathbb{1}_H)^{-1} \in B(H)$ alors $1 = \|u_n\|_H = \|(T - \lambda\mathbb{1}_H)^{-1}(T - \lambda\mathbb{1}_H)u_n\| \to 0$, $n \to +\infty$.

ce que est absurde.

p1 $\implies$ p2 $\iff \not\exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans H, $\|u_n\| = 1$ tq $\|(T - \lambda\mathbb{1}_H)u_n\| \to 0 \implies \lambda \in \rho(T)$.

$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de H ; $\|u_n\| = 1 \exists (u_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sous suite et $\varepsilon > 0$.

$\|(T - \lambda\mathbb{1}_H)u_{k(n)}\| \geq \varepsilon\|u_{k(n)}\| \implies \forall u \in H,\ \|u\| = 1\ \|(T - \lambda\mathbb{1}_H)u\| \geq \varepsilon$.

On choisissant $u_n = u\ \forall n$.

On peut réécrire (*) comme $\|(T - \lambda\mathbb{1}_H)u\| \geq \varepsilon\|u\|$. (on utilise linéarité et divise par $\|u\|$)

$\implies T$ est injectif : montrons que T est surjectif.

! on ne peut appliquer directement Lax-Milgram.

$\lambda \in \mathbb{R}$ en utilisant Proposition 1 ii) $N(T - \lambda\mathbb{1}_H)^{\perp} = \overline{R(T - \lambda\mathbb{1}_H)}$

$\exists \varepsilon > 0 \forall u \in H$ mais $N(T - \lambda\mathbb{1}_H) = \{0_H\} \implies N(T - \lambda\mathbb{1}_H)^{\perp} = H = R(T - \lambda\mathbb{1}_H)$.

$A^{\perp} = \{0_H\} \iff$ A est dense $\{0_H\}^{\perp} = H$

Montrons que $R(T - \lambda\mathbb{1}_H)$ est fermée : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H tq $(T - \lambda\mathbb{1}_H)u_n \to w \in H$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy puisque $\|(T - \lambda\mathbb{1}_A)(u_n - u_p)\| \geq \varepsilon\|u_n - u_p\|$ et donc $\lim_{n,p\to\infty} \|u_n - u_p\| = 0$

$\implies \exists v \in H tq u_n \to v \implies (T - \lambda\mathbb{1}_H)u_n \to (T - \lambda\mathbb{1}_H)v = w$ par unicité de la limite.

$R(T - \lambda\mathbb{1}_H) = \overline{R(T - \lambda\mathbb{1}_H)} = H$

$(T - \lambda\mathbb{1})^{-1}$ existe montrons que c'est un opérateur borne.

On utilise que $\forall u \in H \|(T - \lambda\mathbb{1}_H)u\| \geq \varepsilon\|u\|$. On pose $u = (T - \lambda\mathbb{1}_H)^{-1}v \implies \|v\| \geq \varepsilon\|(T - \lambda\mathbb{1}_H)^{-1}v\|$

$\implies (T - \lambda\mathbb{1}_H)^{-1} \in B(H)$ et $\|(T - \lambda\mathbb{1}_H)^{-1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

et donc $\lambda \in \rho(T)$ QED. □

Remarque. Une telle suite s'appelle une suite caractéristique.

Proposition 3. *Soit* $T \in B(H)$*,* $T = T^*$ *alors soit* $\Theta = \{(Tu|u), u \in H, \|u\| = 1\}$ *l'image numérique de* T*, on pose* $M = \sup \Theta_T$*,* $m = \inf \Theta_T$ *alors*

1. $\sigma(T) \subset [m, M]$
2. $M, m \in \sigma(t)$

Démonstration. Dans ces conditions, $\forall u \in H$, $\|u\| = 1$ $|(Tu|u)| \leq \|Tu\|\|u\| \leq \|T\|\|u\|^2 = \|T\|$.

Θ_T est borné dans $\mathbb{R}$, l'$\inf$ et le $\sup$ existe.

Choisissons $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda > M$ et montrons que $\lambda \in \rho()$ (de la même mainiere on montrera que si $\lambda < m \implies \lambda \in \rho(T)$)

On a $\forall u \in H$, $\|u\| = 1$, $|((T - \lambda \mathbb{1}_H)u|u)| \geq |(Tu|u) - \lambda| \geq |M - \lambda| > 0$, $\lambda > M$

En utilisant Lax-Molgram : $\lambda \in \rho(T)$. On a prouvé i).

Montrons ii) $T - m\mathbb{1}_H \geq 0 \Leftarrow (Tu|u) \geq m\|u\|^2$ $((T - m\mathbb{1}_H)u|u) \geq 0$ alors $\varphi(u, v) = ((T - m\mathbb{1})u|v)$ est une forme sesquilineaire (hermitienne)

definie un semi-produit scalaire (semi car si $l(u, u) = (T - m\mathbb{1})u|u) = 0 \not\Longrightarrow u = 0_H$ car $u \in N(T - \lambda\mathbb{1}_H)$)

Elle satisfait $|\varphi(u, v)| \leq \|u\|_\varphi \|v\|_\varphi$ avec $\|u\|_\varphi = \varphi(u, u)^{\frac{1}{2}} = ((T - m\mathbb{1}_H)u|u)^{\frac{1}{2}}$

Puisque $m = \inf \Theta_T \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de H $\|u_n\|_H = 1$ tq $(Tu_n|u_n) \to m \iff ((T - m\mathbb{1}_H)u_n|u_n) \to 0$. Mais $\left\|(T - m\mathbb{1}_H)u_n\right\|_H^2 = ((T - m\mathbb{1}_H)u_n|(T - m\mathbb{1}_H)u_n) = \varphi(u_n, (T - m\mathbb{1}_H)u_n) \leq ((T - m\mathbb{1}_H)u_n|u_n)^{\frac{1}{2}}((T - m\mathbb{1}_H)^2 u_n|(T - m\mathbb{1}_H)u_n)^{\frac{1}{2}}$

Avec $(T - m\mathbb{1}_H)^2 u_n|(T - m\mathbb{1}_H)u_n| \leq \left\|(T - m\mathbb{1}_H)^2 u_n\right\|_H \left\|(T - m\mathbb{1}_H)u_n\right\|_H \leq \|(T - m\mathbb{1}_H)$

Conclusion : $\left\|(T - m\mathbb{1}_H)u_n\right\| \leq ((T - m\mathbb{1}_H)u_n|u_n)^{\frac{1}{2}} \left\|T - m\mathbb{1}_H\right\|^{\frac{1}{2}} \left\|(T - m\mathbb{1}_H)u_n\right\|$ ce que entraine que $\lim_n \left\|(T - m\mathbb{1}_H)u_n\right\| = 0 \implies m \in \sigma(T)$ d'après la Proposition 3. □

Exemple 4. $T = T_+ + T_- + V$ au $(V\varphi)(n) = V(n)\varphi(n)$, $l^2(\mathbb{Z})$. V est périodique. $V(n+z) = V(n)$.

Chapitre 7

Le théorème spectral de Hilbert

L'espace de Hilbert H admet toujours une base hilbertienne `denombrable`.

Théorème 1. *Soit T un opérateur compact et autoadjoint sur un espace de Hilbert H : $T \in B_0(X)$. Alors il existe une base hilbertienne de H $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite de réels $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tq $\lambda_k \to 0$ tq $k \to +\infty$ et $T_k e_k = \lambda_k e_k$ (T est diagonalisable).*

Remarque. Cas de la dimension fini. Soit E un espace euclidien, $\dim E = n < +\infty$ $T \in \Phi(E)$ une application linéaire symétrique soit B une base de E. $\mathrm{Mat}_B(T) =^t \mathrm{Mat}_B(T)$. T est diagonalisable : il existe une base de E formée de vecteur propre de T.

La correspondance : E euclidien $\iff$ H espace de Hilbert T T symétrique $\iff$ T compact autoadjoint

$$T \text{ est diagonal } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \lambda_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_k & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

En particulier : Soit p_i les projection spectraux $T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$

Exemple 1. $H = l^2(\mathbb{N})$, $(Tu)(n) = \frac{1}{n+1}u(n)$, $T \in B_0(H)$, $T = T^*$ $u = e_i$, $e_i(j) = \delta_{ij}$. $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.

$Te_i(j) = \frac{1}{n+1}e_i(j) = \frac{1}{i+1}$ on vérifie le Théorème de Hilbert avec $\lambda_k = \frac{1}{k+1}$ et e_k les vecteurs définis ci-dessus.

$\mathrm{mult}(\lambda_k) = 1 \forall k$. $\mathrm{mult}(\lambda) = \dim N(T - \lambda \mathbb{1}_H)$

Chapitre 8

examen

Comment ca faite ?

Pur les exames, la programme, unicment, espace hilbert, pas Banach. basic definitions espace de hilb, projection ,suite ort, bse, parceval, ferme, convergance faible, faiblement, operateurs ,continu, comment calcul, adjoint, spectr, essenciel est compris. Je sais, je connais, lc'est long et difficile.

Chapitre 9

La pratique

9.1 2.21

$\varphi_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2+x^2}\mathcal{H} = L^2$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\varphi_n(x)| \leq \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. C'est juste convergence *point par point.* (Pas fortement, pas faiblement)

Montrons que $\varphi_n \rightharpoonup 0$. On va montrer que pour un ensemble dense D de $L^2(\mathbb{R})$ bien choisi, on a : $\forall g \in D\ (\varphi_n|g) \to (0|g) = 0$.

$(\varphi_n|g) = \int_{\mathbb{R}} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2+x^2} g(x)\,\mathrm{d}x$.

9.2 exercice 26

— F fermé
— $F^\perp \subset G := \{f \in E | f|_{[0,1]} = 0\}$
— $F^\perp \supset G$

2) $sig \in E$, tel que $g(0) \neq 0$, par ex. $g(x) = 1 - |x|$. Comme $f(0) = 0$ si $f \in F$ et $h(0) = 0$ si $h \in f^\perp$, li est ´vident que g ne peut pas s'écrire comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de $F^\perp$. Donc $g \notin F + F^\perp$, et donc $E \neq F + F^\perp$. Ceci bien possible, car E muni la norme L^2, n'est par un Hilbert.

Remarque. Si on remplace E par l'espace complété $L^2([-1,1])$, alors, si F un espace vectoriel fermé, alors on a : $F + F^\perp = L^2([-1,1])$.

9.3 Exercice 2.11

Famille maximale (espace préhilbert) Famille totale (espace hilbert) Bases Hilbertienne (espace hilbert)

Base Hilbertienne $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{e_n\}$ est une famille orthonormée $(e_i|e_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$ et $\overline{\mathrm{vect}\,\{e_n\}} = E$ (famille totale).

$L^2([-\pi,\pi]) = \overline{\{\cos(nx), \sin(nx) :\ n \in \mathbb{N}\}}$—une base.

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \cos(nx) + \mu_n \sin(nx)$

On a bien $\|u\|_{l^2} = \sum_n (\frac{1}{n})^2 \leq +\infty$.

(1) soit $v \in F$, donc il existe une famille <u>finie</u>. $(\lambda_k)_{k\in J}$ $(J \subset \mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ et μ tel que $v = \mu u + \sum_{k\in J} \lambda_k e_k$. Si $\forall i \geq 2$, $(v|e_i) = 0$, alors : Soit $e_0 \in (\mathbb{N} \setminus \{0,1\}) \setminus J$. Alors $(v|e_{i_0}) = 0 \implies 0 = \mu(u|e_{i_0}) + \sum_{k\in J} \lambda_k \underbrace{(e_k|e_{i_0})}_{\delta=0,\text{ car } i_0 \notin J} = \mu\frac{1}{i_0} + 0 \implies \mu = 0$.

Soit $k_0 \in J$. $0 = (v|e_{k_0}) = \underbrace{\mu(u|e_{k_0})}_{0,\text{ car } \mu=0} + \underbrace{\sum_{k\in J} \lambda_k (e_k|e_{k_0})}_{\lambda_{k_0}}$. Donc $\forall k_0 \in J,\ \lambda_{k_0} = 0$.

Donc $v = 0$. d'où, $\{e_n\}_{n\geq 2}$ et une famille maximale (elle est bien orthonormale)

(2) $\{e_n\}_{n\geq 2}$ n'est pas totale pour F, car $u \in F$, mais, u n'est pas limite d'une suite de vecteurs combinaisons linéaire des e_n $(n \geq 2)$. En effet, si on avait $u = \sum_{n=2}^{+\infty} \lambda_n e_n = \lim_{N\to\infty}(\sum_{n=2}^{n} \lambda_n e_n)$.

Remarque. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base Hilbertienne de E Hilbert, Alors, la propriété $E = \overline{\mathrm{vect}(\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}})}$ un vecteur est dans $\mathrm{vect}(\{v_n\})$ si il est combinaison linéaire finie de vecteur de $\{v_n\}$.

$\overline{\mathrm{vect}\, v_n} = E$, signifie que, $\forall v \in E$, v est limite de vecteurs de $\mathrm{vect}(\{v_n\})$. On écrit $v = \lim_{N\to+\infty}(\sum_{j=0}^{N} \lambda_j v_j) \overset{\text{notation}}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j v_j$.

Exemple 1. de base algébrique, soit F=ensemble des polynômes F est un espace vectoriel. Base algébrique $= \{1, x, x^2, x^3, ..., x^n, ...\}$.

Si $(e_n)_{n\geq 2}$ était une base Hilbertienne de F, on aurait, $F \ni u = \sum_{j=2}^{+\infty} \lambda_j e_j = (\underbrace{0}_{\text{pas possible}}, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...), car u = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$.

On a conduit une famille maximale que n'était pas totale (possible car F n'est pas complet)

9.4 exercice 2.12

H -un espace $\dim(H) < \infty \implies \exists\{\tilde{e}_n\}_{n=0}^{N}$ base de H, $\varphi : H \implies l^2(\mathbb{N})$, $\tilde{e}_n \mapsto e_n = (0, 0, ..., 1, 0, ..) \in l^2(\mathbb{N})$

$\forall u \in H :\ \|u\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} u_i^2} = \|\varphi(u)\|$

$\dim(H) = \infty \implies \exists\{\tilde{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$ base de H $\varphi : H \implies l^2(\mathbb{N})$ $\tilde{e}_n \mapsto e_n = (0, ..., 0, 1, 0, 0, ...)$ $u \in H : \|u\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 < \infty \implies \varphi(u) \in l^2(\mathbb{N})$ d'inégalité de Parceval. $\|u\|_u = \|\varphi(u)\|_{l^2(\mathbb{N})}$.

9.5 2.16

Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale. D'après l'inégalité de Bessel, on a $\sum_{n=0}^{\infty} |(g_n|x)|^2 < +\infty \implies \lim_{n\to\infty} |(g_n|x)|^2 = 0 \implies (g_n|x) \to 0 = (0, x)$ mais $\|g_n - 0\| = \|g_n\| = 1 \not\to 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si (g_n) est orthonormale, mais n'est pas une base, alors, pour $F := \overline{\mathrm{vect}\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$, on a : F fermé dans l'Hilbert E, donc F est un Hilbert. (g_n) base de F.

On a alors, $\forall x \in E$, $(g_n|x) = (\underbrace{g_n}_{\to 0 \text{ d'après partie } 1} |P_F x) + (g_n|\underbrace{x - P_F x}_{\in F^\perp})$

9.6 2.17

$D \subset E$, $\bar{D} = E$, E Hilbert, $u \in E$ ($u \in D$ ou non). $\implies$ évident car $D \subset E \Leftarrow$ On suppose que $\forall y \in D$, $(u_n|g) \to (u|g)$ $\forall \varepsilon > 0 \exists_1 = (\varepsilon, g) : \forall n \geq N(\varepsilon, g)$ $(u_n - n|g) < \frac{\varepsilon}{2}$. $\forall f \in E$. $\bar{D} = E \implies \exists \{g_n\} \subset D,\ g_n \to f,\ n \to \infty \implies \exists N_\varepsilon = N(\varepsilon, f)$ $\forall m \geq N_\varepsilon :\ \|f - f_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$. $\forall f \in E$ $|(u_n - u|f)| = |(u_n - u|g_n)| + |(\underbrace{u_n - u}_{borne}|f - g_m)| \leq \varepsilon/2 + c\|f - g_m\| = \varepsilon$.

Remarque. 1. $|(u_n - u|f - g_m)| \overset{Cauchy-Schwartz}{\leq} \|u_n - u\|\|f - g_m\| \leq \underbrace{(\|u_n\| + \|u\|)}_{\leq C borne par th de cours} \cdot \|f -$

2. $u_n - u \rightharpoonup 0$, implique $(u_n - u)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée.

Chapitre 10

Exercices 3

Opérateurs bornés. (adjoint, inverse, spectre) Apres Opérateurs compacts.

10.1 3.1

$T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ On va montrer i) $\implies$ ii) $\implies$ iii) On suppose : $\forall x \in \mathcal{H}_1, \forall (x_n)$ suite de $\mathcal{H}_1$

$$(x_n \to x \implies Tx_n \to Tx)$$

Montrons qu'alors, ii) est vrai. D'après le cours, la propriété i) implique que l'opérateur T est `borné` : $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Ceci implique que l'adjoint T^* existe et est `borné`. Supposons $x_n \rightharpoonup x$. Alors : $\forall y \in \mathcal{H}_2$, $(Tx_n|y) - (Tx|y) = (Tx_n - tx|y) = (T(x_n - x)|y) = ((x_n - x)|T^*y)$ (par définition de l'adjudant que est bien définie sur tout $\mathcal{H}_2$ car T est borné) $((x_n - x)|T^*y) \to 0(n \to +\infty)$. Car $x_n \rightharpoonup x$. (ou encore $x_n - x \rightharpoonup 0$) Donc $Tx_n \rightharpoonup Tx$. Donc ii) est vraie.

Montrons que ii) $\implies$ iii). On suppose que $\forall x \in \mathcal{H}_1$, $\forall (x_n)$ suite de $\mathcal{H}_1$ $x_n \rightharpoonup x \implies Tx_n \rightharpoonup Tx$.

Soit (x_n) telle que $x_n \to x$. Alors $x_n \rightharpoonup x$. et d'après ii) $Tx_n \rightharpoonup Tx$.

Donc iii) est vraie Montrons que iii) $\implies$ i). On suppose que $\forall x \in \mathcal{H}_1$, $\forall (x_n)$ suite de $\mathcal{H}_1$, $(x_n \to x \implies Tx_n \rightharpoonup Tx)$

On va montrer résultat par l'absurde. Supposons iii) vraie mais i) faux. Si i) est faux, alors, l'opérateur n'est pas borné. Donc $\forall C > 0$, $\exists x \in \mathcal{H}_1$, tel que $\|Tx\|_{\mathcal{H}_2} > C\|x\|_{\mathcal{H}_1}$.

En particulier, il existe une suite (x_n) de $\mathcal{H}_1$ telle que $\|Tx_n\|_{\mathcal{H}_2} \geq n^2 \|x_n\|_{\mathcal{H}_1}$

$\implies \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|} \geq n$. Soit $\tilde{x}_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. Alors $\|\tilde{x}_n\| = \frac{1}{n} \to 0$. Donc $\tilde{x}_n \to 0$.

Mais $T\tilde{x}_n$ ne converge pas faiblement vers 0, car $\|T\tilde{x}_n\| = \left\| \frac{Tx_n}{n\|x_n\|} \right\| = \frac{\|Tx_n\|}{\|n\|x_n\|\|} > n \to +\infty$.

(Rappel : toute suite faiblement convergente est bornée)

On a donc construit une suite $(\tilde{x}_n)$ telle que $\tilde{x}_n$ converge fortement. Mais $T\tilde{x}_n$ ne converge pas faiblement. Ceci contredit iii) : Absurde. Conclusion i) est vraie.

Rappel : fortement $\implies$ faiblement, faiblement $\implies$ borné.

10.2 3.2

Définition 1. Soit $A \in B(\mathcal{H})$ (opérateur borné de $\mathcal{H}$ Hilbert, vers $\mathcal{H}$). Le rayon spectral de A est $r(A) = \sup\{\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}$

Remarque. $r(A)$ est finie, car A est supposé borné.

Théorème 1. *Si $A \in B(\mathcal{H})$, alors*

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} (\|A^n\|)^{\frac{1}{n}}.$$

Rappel. A étant une application linéaire de $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$, on note $A^n = \underbrace{A \circ A \circ ... \circ A}_{n \text{ fois}}$ Donc $A^n(x) = A(A(...(Ax)))$.

Allusion : Montre que $r(AB) \leq r(BA)$ et $r(BA) \leq r(AB)$.

10.3 3.3

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base orthonormale Hilbertienne de $\mathcal{H}$ on considère l'opérateur T sur $\mathcal{H}$, défini par : $\forall u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n$, $Tu := \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_{n+1}$. En particulier, $Te_n = e_{n+1}$. ((λ_n) suite de l^2)

Montrer que T est un opérateur borné, de norme 1 ($\|T\| = 1$).

Montrons que T est bien définie sur tout $\mathcal{H}$. Soit $y \in \mathcal{H}$, alors, $\exists(\lambda_n) \in l^2(\mathbb{N})$ tell que $y = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k$.

Alors $\|Ty\|^2 = \|\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_{k+1}\|^2 = \|\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k e_k\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty$ où $\mu_0 = 0$ et $\mu_k = \lambda_{k-1}$ si $k \geq 1$. Car $(\lambda_k) \in l^2(\mathbb{N})$. Donc $Ty \in \mathcal{H}$ (donc est bien défini).

Soit $x \in \mathcal{H}$. Alors $x = \sum \lambda_k e_k$.

$\frac{\|Tx\|}{x} = \frac{T(\sum \lambda_k e_k)}{\sum \lambda_k e_k} = \frac{\|\sum_k \lambda_k e_{k+1}\|}{\sum_k \lambda_k e_k} = \frac{\|\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k-1}\| e_k}{\|\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k\|} = \frac{(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{k-1})^2)^{\frac{1}{2}}}{(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2)^{\frac{1}{2}}} = 1$

L'opérateur T est l'opérateur de translation ver la droite..

10.4 3.4

Table des matières