

Chapitre 1

Initiation

1.1 Les espaces de Hilbert

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 1. Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel. Une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ est une FORME HERMITIENNE

1. $\forall y \in E : \varphi(\cdot, y) : E \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire
2. $\forall (x, y) \in E \times E : \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$

Définition 2. Un PRODUIT SCALAIRE est une forme hermitienne définie positive : $\forall e \in E \varphi(x, x) \geq 0 ; \varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$. Notation :

$$\varphi(x, y) := (x|y)$$

Définition 3. Le couple $(E, (\cdot|\cdot))$ s'appelle un ESPACE PRÉHILBERTIEN.

Définition 4. On définit la NORME sur $E : \forall x \in E \|x\|_E = (x|x)^{\frac{1}{2}}$.

Remarque. En particulier on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Donc inégalité triangulaire. Ainsi c'est vraiment une norme.

Définition 5. $x, y \in E$ sont dits ORTHOGONAUX si $(x|y) = 0$. Nous dénotons cela comme $x \perp y$.

Définition 6. $(E, \|\cdot\|)$ est dit COMPLET si toutes les suites de Cauchy de E convergent dans E .

Définition 7. UNE ESPACE DE HILBERT est un espace préhilbertien complet pour la distance $\|\cdot - \cdot\| = (\cdot - \cdot | \cdot - \cdot)^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 1. $l^2(\mathbb{N}) = \{n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \sum_{n \geq 0} |f(n)|^2 < \infty\}$
 $l^2(\mathbb{N})$ est \mathbb{C} espace. $\forall f, g \in l^2(\mathbb{N})$:

$$(f|g)_{l^2(\mathbb{N})} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 0} f(n) \overline{g(n)}.$$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $l^2(\mathbb{N})$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > p \geq N : \|f_n - f_p\|_{l^2(\mathbb{N})} < \varepsilon. \quad (*)$$

Question. $\exists f \in l^2(\mathbb{N})$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$?

$$(\text{??}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ t.q. } \forall n > p \geq N \|f_n - f_p\|^2 = \sum_{j \geq 0} |f_n(j) - f_p(j)|^2 \leq \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow |f_n(j) - f_p(j)| \leq \varepsilon \forall j \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow \forall j \in \mathbb{N} (f_n(j))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{C} qui est complet, donc $\exists f(j) \in \mathbb{C}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(j) - f(j)| = 0$.

Il faut montrer que f est la limite dans $l^2(\mathbb{N})$ de la suite f_n .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ t.q. } \forall n > p \geq N \sum_{j \geq 0} |f_n(j) - f_p(j)|^2 \leq \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \forall J \in \mathbb{N} \underbrace{\sum_{j=0}^J |f_n(j) - f_p(j)|^2}_{\text{somme partielle}} \leq \varepsilon^2, \text{ par passage à la limite sur } p : \sum_{j=0}^J |f_n(j) - f(j)|^2 \leq \varepsilon^2$$

ε^2

Conclusion : $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ telle que $\forall n \geq N \|f_n - f\| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$.

Mais $f \stackrel{?}{\in} l^2(\mathbb{N})$.

Vérifions que $f \in l^2(\mathbb{N})$:

$$(\sum_{j \geq 0} |f(j)|^2)^{1/2} = (\sum_{j \geq 0} |f_n(j) - f(j) + f(j)|^2)^{\frac{1}{2}} = \|\underbrace{f - f_n}_{\in l^2(\mathbb{N})} + \underbrace{f_n}_{\in l^2(\mathbb{N})}\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n\|$$

$$\|f_n\| < +\infty.$$

Théorème 1 (Projection orthogonale). Soit H un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée et non vide de H . Alors $\forall x \in H \exists ! y_0 \in C$ t.q.

1. $\text{dist}(x, C) := \inf\{d(x, y), y \in C\} = \inf\{\|x - y\|_H, y \in C\} = \|x - y_0\|_H$
2. $\forall y \in C \text{ Re}(x - y_0|y - y_0) \leq 0 \dots !? \text{ why in the world would scalar product have values other than real}$

y_0 est la projection orthogonale de x sur C .

Remarque.

1. C est convexe si $\forall x, y \in C \ [x, y] = \{tx + (1 - t)y, t \in [0, 1]\} \in C$
2. $H = \mathbb{R}^2 : [x, y] \in C$
3. si $x_0 \in C$ dans le cas $y_0 = x_0$ et $\text{dist}(x_0, C) = 0 = \|x_0 - x_0\|_H$

Démonstration. Notons par $d = d(x, C) > 0$ ($x \in H \setminus C$). Soit $y, z \in C$ on pose $b = x - \frac{1}{2}(y + z)$, $c = \frac{1}{2}(y - z) : \|b\| = \|x - \underbrace{\frac{1}{2}(y + z)}_{\in C}\| \geq d$. On a aussi $b - c = x - y$ et

$$b + c = x - z \Rightarrow \|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 = \|b - c\|^2 + \|b + c\|^2 = (b - c|b - c) + (b + c|b + c) = \|b\|^2 + \|c\|^2 - (b|c) - (c|b) + \|b\|^2 + \|c\|^2 + (b|c) + (c|b).$$

$$\|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 = 2(\|b\|^2 + \|c\|^2) \geq 2d^2 + 2\frac{1}{4}\|y - z\|^2 \Rightarrow \|y - z\|^2 \leq 2(\|x - y\|^2 - d^2) + 2(\|x - z\|^2 - d^2). \text{ Pour } n \in \mathbb{N} \ C_n = \{y \in C | \|x - y\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\} \text{ est fermée dans } H \text{ (boule fermée).}$$

Puisque C est fermé, $C_n = \{y \in H | \|x - y\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\} \cap C$ est fermé dans C . De plus : $\delta(n) := \sup\{\|y - z\|, (y, z) \in C_n \times C_n\} \leq * \sup\{[2(\|x - y\|^2 - d^2) + 2(\|x - z\|^2 - d^2)]^{\frac{1}{2}}, y, z \in C_n \Rightarrow \delta(n) \leq \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$

H est complet et $C \subset H_x$ c est fermé. C est un espace métrique complet. Il satisfait le critère de Cantor : $\bigcap_n C_n = \{y_0\}$.

$$y_0 \in \bigcup_n C_n \ d^2 \leq \|x - y_0\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} \Rightarrow \|x - y_0\| = d^2.$$

$$\text{Montrons ii) : } \forall t \in [0, 1], \forall \in H \ \phi(t) = \|\underbrace{y_0 + t(y - y_0)}_{\in C} - x\|^2 = \|y_0 - x\|^2 + 2t \text{Re}(y_0 - x|y - y_0) + t^2\|y - y_0\|^2. \ \phi(0) = d^2 \leq \phi(t) \ \forall t \in (0, 1] \Rightarrow \phi'(0) \geq 0. \ \phi'(t) = 2 \text{Re}(y_0 - x|y - y_0) + 2t\|y - y_0\|^2. \ \phi'(0) \leq 0 \Rightarrow 2 \text{Re}(y_0 - x|y - y_0) \leq 0 \Rightarrow (i).$$

□

Théorème 2 (corollaire). Soit F un sous-espace *fermé* de H alors : $H = F \oplus F^\perp$.

Démonstration. — F est convexe puisque $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \forall x, y \in F \ \alpha x + \beta y \in F \Rightarrow$ Cela est vrai si $\alpha = t, \beta = 1 - t \ t \in [0, 1]$.

On peut ceci appliquer le Thm 1 :

— On a toujours $F + F^\perp \subset H$ et $F + F^\perp = F \oplus F^\perp$ car si $x \in F \cap F^\perp \Rightarrow (x|x) = 0 = \|x\|^2 \Rightarrow x = 0_H$

Soit $x \in H$, et $y_0 \in F$ sa projection orthogonale : $\forall d \in \mathbb{C}, y \in F, y_0 + dy \in F$ et donc $\text{Re}(x - y_0|y_0 + dy - y_0) \leq 0 \Rightarrow \text{Re}(x - y_0|dy) \leq 0$

$$d = (x - y_0|y) \Rightarrow (x - y_0) \dots$$

Conclusion $\text{Re}(x - y_0|dy) \dots$ donc $H = F \oplus F^\perp$.

□

Définition 8. Dans ces conditions, l'application $P : x \in H, x = x_1 + x_2, x_1 \in$

$$F, x_2 \in F^\perp$$

$$F$$

Exemple 1.1.1. Montrer que P est linéaire continue et satisfait $P^2 = P$.

Définition 9. Une partie A de H est dite TOTALE si le plus petit sous espace fermé contenant A est H .

H est SÉPARABLE si H admet une famille totale dénombrable.

Exemple 1.1.2. $H = l^2(\mathbb{N}) : \mathcal{F} = \{e_0, e_1, \dots\}$ avec $e_j(i) = \delta_{ij} \rightarrow (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. \mathcal{F} est totale. Elle est dénombrable, $l^2(\mathbb{N})$ est séparable.

Théorème 3. Soit H un espace de Hilbert et $A \subset H$:

1. $\overline{\text{vect}(A)} = (A^\perp)^\perp$
2. A est un sous-espace alors $(A^\perp)^\perp = \bar{A}$
3. A est totale $\Leftrightarrow A^\perp = \{0_H\}$

1.2 Séries dans un espace vectoriel normé

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé (e.v.n).

Définition 10. On appelle SÉRIE de terme général $u_n \in E$ la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ de E t.q. $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$. La série est CONVERGENTE dans $(E, \|\cdot\|_E)$ si la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ admet une limite dans $E : S$ — c'est la somme de la série.

Définition 11. Une série $\sum u_n$ est dite ABSOLUMENT CONVERGENTE (AC) si la série $\sum \|u_n\|_E$ est convergente dans \mathbb{R}^+ .

Théorème 4. Si E est complet (espace de Banach/Hilbert) Alors toute série AC est convergente et $\|\sum_{n=0}^\infty u_n\| \leq \sum_{n=0}^\infty \|u_n\|$.

Démonstration. $J_n = \sum_{n=0}^N \|u_n\|$ et convergente $\Leftrightarrow (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy $\forall \varepsilon > 0 \exists K$ t.q. $\forall N >$

$P \geq K \Rightarrow |J_n - J_p| \leq \varepsilon$. $\sum_{j=p+1}^N \|u_j\| \leq \varepsilon$. meus $\|S_n - S_p\| = \|\sum_{j=p+1}^N u_j\| \leq \sum_{j=p+1}^N \|u_j\|$ inégalité triangulaire.

$\Rightarrow N > p \leq K \Rightarrow \|S_N - S_P\| \leq \varepsilon \Leftrightarrow (S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E et donc convergente.

D'autre part $\|S_n\| = \|\sum_{j=0}^n u_j\| \leq \sum_{j=0}^n \|u_j\| \Rightarrow \|\sum_{j=0}^n u_j\| \leq \sum_{j=0}^n \|u_j\|$.
Cfd. \square

Définition 12. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H est dite ORTHOGONAL si $(x_i | x_j) = 0 \forall i \neq j$.

Théorème 5. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite orthogonale dans un espace de Hilbert H . Alors la série $\sum x_n$ est convergente $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \|x_n\|_H^2$ est convergente et

$$\|\sum_{n \geq 0} x_n\|_H^2 = \sum_{n \geq 0} \|x_n\|_H^2.$$

Démonstration. $\forall l > p$ on a $\|\sum_{n=l}^p x_n\|^2 = (\sum_n = e^p x_n | \sum_n = e^p x_n) = \sum_n, n' = l(x_n | x_{n'}) = \sum_n = l^p \|x_n\|^2$ Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy $\Leftrightarrow (\|x_n\|^2)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{R} .

D'autre part $S_N = \sum_{n \geq 0}^N x_n \Rightarrow \|S_N\|^2 = \sum_{n \geq 0}^N \|x_n\|^2$. Alors $S = \lim S_N = \sum x_n$
 $\|S\|^2 = \|\lim S_N\|^2 = \lim \|S_N\|^2$ par continuité de la $\|\cdot\|$ et donc $\|S\|^2 = \lim_N \sum_n \geq 0^N \|x_n\|^2 = \sum_{n \geq 0} \|x_n\|^2$ \square

1.3 Bases Hilbertiennes

Définition 13. On appelle BASE HILBERTIENNE, une suite de vecteur $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H telle que

1. $\forall n, m (x_n | x_m) = \delta_{nm}$,
2. $\text{vect}\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\} = H \Leftrightarrow \text{vect}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^\perp = \{0_H\} \Leftrightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ est totale.

Théorème 6 (Inégalité de Bessel). Soit (x_n) une suite *orthonormale* $(\forall n, m (x_n | x_m) = \delta_{nm})$ dans H . Alors $\forall x \in H \sum_{n \geq 0} |(x | x_n)|^2$ est convergente et $\sum_{n \geq 0} |(x | x_n)|^2 \leq \|x\|^2$.

Exemple : $H = l^2(\mathbb{N})$. $(e_n | e_m) = \sum_{k \geq 0} e_n(k) \overline{e_m(k)} = \sum_{k \geq 0} \delta_{nk} \delta_{mk} = \delta_{nm}$. En fait on montre que $\sum_{n \geq 0} |(e_n | x)|^2 = \|x\|^2$ c'est une base Hilbertienne.

Démonstration. Soit $x \in H$ on pose $y_i = (x | e_i) e_i$ et $Y_N = \sum_{i=1}^N y_i$, $Z_N = X - Y_N$. Alors :
 $(Z_N | y_i) = (X - Y_N | y_i) = (X | y_i) - (Y_N | y_i)$. $(x | y) = (x | (x | e_i) e_i) = \overline{(x | e_i)} (x | e_i) = |(x | e_j)|^2$.
 $(Y_N | y_i) = \sum_{j=1}^N (y_j | y_i)$ mais $y_j \perp y_i \Rightarrow (Y_N | y_i) = \|y_i\|^2$ si $N \geq i$. (autrement =0)

Dans ces conditions puisque $\|y_i\|^2 = |(x | e_i)|^2$. Alors $(Z_N | y_i) = 0 \Rightarrow (Z_N | Y_N) = 0$
cas $Y_n = \sum_{i=0}^N y_i \Rightarrow \|x\|^2 = \|Z_n\|^2 + \|Y_n\|^2$ ($x = Z_n + Y_n$ et $Z_n \perp Y_n$) $\Rightarrow \|y_n\|^2 = \sum \|y_n\|^2 \leq \|x\|^2$

La suite $\sum \|y_n\|^2$ est positive, majorée donc convergente et par passage à la limite :
 $\sum_{n \geq 0} \|y_n\|^2 = \sum |(x | e_n)|^2 \leq \|x\|^2$. QED \square

Théorème 7 (Egalité de Parseval). Soit (e_n) une base Hilbertienne de H alors

1. La série $\sum_{n \geq 0} |(x|e_n)|^2$ est convergente et $\|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} |(x|e_n)|^2$,
2. La série $\sum_{n \geq 0} (x|e_n)e_n$ est convergente dans H et $\sum_{n \geq 0} (x|e_n)e_n = x$.

Démonstration. En utilisant le théorème précédent alors $\sum |(x|e_i)|^2$ est convergent. On utilise l'identité de la médiane : $\sum (x|e_i)e_i$ est convergente dans H ($\| \sum (x|e_i)e_i \|^2 = \sum |(x|e_i)|^2$). On pose $y = \sum_{i \geq 0} (x|e_i)e_i$ alors $\|y\|^2 = \sum_{i \geq 0} |(x|e_i)|^2$ mais $(y|e_j) = (\sum (x|e_i)e_i | e_j) = \sum (x|e_i)(e_i | e_j) = (x|e_j) \dots$ Conclusion $\forall j \in \mathbb{N} (x|e_j) = (y|e_j) \Leftrightarrow (x - y|e_j) = 0 \Rightarrow x - y \in \text{vect}((e_n)_{n \in \mathbb{N}})^\perp \Rightarrow x - y = 0_H \Leftrightarrow x = y = \sum (x|e_i)e_i \|x\|^2 = \sum_{i \geq 0} |(x|e_i)|^2 \quad \square$

Remarque. Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormale telle que $\forall x \in H x = \sum_{i \geq 0} (x|e_i)e_i : x = \lim_N \sum_{i \geq 0}^N a_i e_i$ où $a_i = (x|e_i) \in \mathbb{C}$

$\in \text{vect}\{(e_n)_n \in \mathbb{N}\}; a_i = (x|e_i) \Rightarrow \text{vect}\{(e_n)_n \in \mathbb{N}\} = H$. $(e_n)_n \in \mathbb{N}$ est une base Hilbertienne. ii) $\gg (e_n)_n \in \mathbb{N}$ est base Hilbertienne de $H \Leftrightarrow \forall x \in H : \sum (x|e_i)e_i = x$
 $\sum (x|e_i)e_i = x \Leftrightarrow \sum |(x|e_i)|^2 = \|x\|^2 \gg (e_n)$ est une base Hilbertienne de $H \Leftrightarrow \sum |(x|e_i)|^2 = \|x\|^2 \forall x \in H$

Exemple (suite) : $H = l^2(\mathbb{N})$. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}. q.e_n(k) = \delta_{nk}$.

$u \in H \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} |u(n)|^2 = \|u\|^2$ mais $u(n) = (u|e_n) = \sum u(k)e_n(k) \Leftrightarrow \sum_n \geq 0 |u|e_n|^2 = \|u\|^2, \Rightarrow$ c'est une base Hilbertienne. !?

1.4 Dual d'un espace de Hilbert

On rappelle que si S est un e.v.n. une FORME LINÉAIRE sur X est une application linéaire de X dans \mathbb{C} . Soit $l : X \rightarrow \mathbb{C} : \forall d \in \mathbb{C} \forall x, y \in X l(x + dy) = l(x) + dl(y)$. L'ensemble des formes linéaires de X : est un espace vectoriel X^* . On considère X' dual topologique : c'est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $X : \{l : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)\}$.

Exercice 1. l est continue \Leftrightarrow

$$\exists C > 0 \ x \forall x \in X, |l(x)| \leq C \|x\| \quad (*)$$

On définit $l \in X', \|l\| = \inf\{C > 0 \text{ t.q. } (??) \text{ est satisfait}\} = \sup\{|l(x)| \mid \|x\| = 1\}$. $(X', \|\cdot\|)$ est un espace de Banach (un e.v.n. complet)

Théorème 8 (Théorème de représentation de Riez). . Soit H un espace de Hilbert H' son dual topologique. On définit $I : H \rightarrow H'$ par $\forall x \in H I(x) = (\cdot|x)$. Alors I est un isomorphisme isométrique de $H \rightarrow H'$.

Remarque. $H = \mathbb{C}^n$, une forme linéaire sur $\mathbb{C}^n : l. l(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, a_i \in \mathbb{C}$
 $|l(x)| = |\sum_{i=1}^n a_i x_i| \leq \sup\{a_i\} \cdot \|x\|_{\mathbb{R}^n}$. Ici $X^* = X' !?$

$$l(x) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$= (\bar{a}|x) \forall x \in \mathbb{C}^n \forall l \in X', \exists a \in \mathbb{C} : l(x) = (x|\bar{a})$ Généralisation à la dimension quelconque c'est le théorème de Riez : $\forall l \in H' \exists a \in H \forall x \in H : l(x) = (x|a)$

Démonstration. Soit $l \in H' \quad l \neq 0'_h \Leftrightarrow$

□

Remarque. Si l est anti-linéaire : $\forall d \in \mathbb{C} \quad \forall x, y \in H \quad l(x + dy) = l(x) + \bar{d}l(y)$ et $\exists u \text{ t.q. } \forall x \in H : l(x) = (u|x)$

1.5 Convergence faible dans les espaces de Hilbert

1.5.1 Définition et premières propriétés

Définition 14. Soit H un espace de Hilbert. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H est dit CONVERGE FAIBLEMENT VERS $x \in H$ si $\forall y \in H (x_n|y) \rightarrow (x|y)$. On notera $x_n \rightharpoonup x$, x est dite limite faible de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exp. $H = l^2(\mathbb{N})$, $x_n \in l^2(\mathbb{N}^*)$ t.q. $x_n(j) = \delta_{nj}$.

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ est une base hilbertienne de H . On regarde la convergence faible. Soit $y \in l^2(\mathbb{N}^*)$ on doit calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n|y)$, $(x_n|y) = \sum_j x_n(j)y(j) = y(n)$. $|(x_n|y)| \leq |y(n)|$ on sait $\sum_j |y(j)|^2 < +\infty \Rightarrow |y(j)| \rightarrow 0$ qd $j \rightarrow +\infty$ et donc $|(x_n|y)| = |y(n)| \rightarrow 0$ qd $n \rightarrow +\infty$. On écrit $0 = (0_H|y)$ alors $\lim_n (x_n|y) = (0_H|y)$. 0_H est une limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ (On montrera la limite faible est unique). $\|x_n\|^2 = \sum_j |x_n(j)|^2 = 1 \Rightarrow x_n \not\rightharpoonup 0$ puisque $\lim_n \|x_n - 0_H\| = \lim_n \|x_n\| = 1 \not\rightarrow 0$. 0_H n'est pas limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 1. La limite faible, si elle existe elle est unique.

Démonstration. Supposons que $\forall y \in H (x_n|y) \rightarrow (x|y)$ et $(x_n|y) \rightarrow (x'|y)$, $x, x' \in H$. Supposons $x \neq x' \Leftrightarrow x - x' \neq 0_H \Rightarrow \exists y \in H$ t.q. $(x|y) \neq (x'|y)$ (*)

Remarque. On suppose (*) faux : $\forall y \in H (x|y) = (x'|y) \Leftrightarrow (x - x'|y) = 0 \Rightarrow x - x' \perp H \Rightarrow x - x' = 0_H$ c'est Absurde.

On pose $u_n = (x_n|y)$ $u = (x|y)$ $u' = (x'|y)$ $u_n \rightarrow u : \forall \varepsilon > 0 \exists N$ t.q. $\forall n \geq N |u_n - u| \leq \varepsilon$. On choisit $\varepsilon < |u - u'|$ alors on a toujours si $n \geq N$ $|u_n - u'| = |u_n - u + u - u'| = ||u - u'| - |u_n - u|| \geq |u - u'| - \varepsilon \geq \frac{|u - u'|}{2} \Rightarrow \forall n \geq N |u_n - u'| \geq \frac{|u - u'|}{2} \Rightarrow |u_n - u'| \not\rightarrow 0 \Rightarrow u_n \not\rightarrow u'$ QED. □

Dans l'exemple précédent 0_H est la limite unique de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exemple. $H = L^2(\mathbb{R})$. Soit $H_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(x) = \varphi_0(x - n)$ $x \in \mathbb{R}$.

Rappel. $C_c^\infty(\mathbb{R})$ ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$.

* support f compact : borne et ferme.

* $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f \in C_X^\infty(\mathbb{R})$ support $f = \overline{\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}}$

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R})} || \cdot ||_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\varphi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N} \varphi_n(x) = \varphi_0(x - n).$$

$$\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}) : (\varphi_n|\psi) \rightarrow 0 = (0_H|\psi) \quad (\varphi_n|\psi) = \int_{\mathbb{R}} dx \varphi_n(x) \overline{\psi(x)} = \int_{n-1}^{n+1} dx \varphi_0(x - n) \overline{\psi(x)}. \quad |(\cdot)|_{L^2((n-1, n+1))} \leq || \cdot || \Rightarrow \int_{n-1}^{n+1} |\varphi_0(x - n)|^2 dx = \int_{-1}^{+1} |\varphi_0(t)|^2 dt = 1 \Rightarrow |(\varphi_n|\psi)| \leq (\int_{n-1}^{n+1} |\psi(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$\psi \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{n-1}^{n+1} |\psi(t)|^2 dt \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad \|\psi\| = \sum_n \int_{n-1}^{n+1} |\psi|^2 dt < \infty.$$

Proposition 2. 1. soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $x_n \rightarrow x \in H$ alors $(x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ Converge faiblement et $x_{k(n)} \rightarrow x$

2. si $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit deux suites t.q. $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$ alors $x_n + y_n \rightarrow x + y$

3. si $x_n \rightarrow x$ et soit $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des \mathbb{C} t.q. $d_n \rightarrow d \in \mathbb{C} \Rightarrow d_n x_n \rightarrow dx$.

Démonstration.

1. i est évident $\forall y \in H$ si $u_n = (y|x_n) \Rightarrow u = (y|x) \Rightarrow u_{k(n)} \rightarrow u \Rightarrow$
i)

2. $\forall y \in H (y|x_n + z_n) = (y|x_n) + (y|z_n) \rightarrow (y|x) + (y|z) = (y|x + z)$.

3. On suppose $\forall y \in H (x_n|y) \rightarrow (x|y)$ et $d_n \rightarrow d$. $(d_n x_n - dx|y) = (d_n x_n - dx_n + dx_n - dx|y) = (d_n - d)(x_n|y) + d(x_n - x|y) \Rightarrow |(d_n x_n - dx|y)| \leq |d_n - d|(x_n|y)| + |d|(x_n - x|y)|$

(a) $(x_n|y) \rightarrow (x|y) \Rightarrow \exists M$ t.q. $|(x_n|y)| \leq M \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |d_n - d|(x_n|x)| \leq |d_n - d|M \rightarrow 0$ qd $n \rightarrow +\infty$. $|(x_n - x|y)| \rightarrow 0$ qd $n \rightarrow +\infty$ par (*) la proposition est démontrer.

□

Remarque. On a toujours que $|(x_n - x|y)| \leq \|x_n - x\|_H \|y\|_H$. Si $\lim_n \|x_n - x\| = 0 \Leftrightarrow \lim_n x_n = x \Rightarrow x_n \rightarrow x$! l'inverse est faux en général.

Proposition 3. Si $x_n \rightarrow x$ dans H alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \|x_n\| \geq \|x\|$.

Remarque. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\exists x \in H$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0$ alors par $\|x\| - \|x_n\| \leq \|x - x_n\| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$. Mais si on a que $x_n \rightarrow x$ on ne sait pas que la suite $\|x_n\|$ converge, c.a.d. que la limite existe par contre $\lim_n \inf \|x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{\|x_k\|, k \geq n\}$ et $\lim_n \sup \|x_n\| - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \{\|x_k\|, k \geq n\}$ existe toujours.

Démonstration. Puisque $x_n \rightarrow x$, alors $(x_n|x) \rightarrow (x|x) = \|x\|^2$ en utilisant Cauchy Schwartz $|(x_n|x)| \leq \|x_n\| \|x\| \Rightarrow \|x\|^2 \leq \|x_n\| \|x\| \Leftrightarrow \|x\| \leq \|x_n\| \Rightarrow \|x\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|x_n\|$.
□

Proposition 4. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans H . Alors $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n \rightharpoonup x$ et $\lim_n \sup \|x_n\| \leq \|x\|$

Démonstration. $(\Rightarrow) x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n \rightarrow x_n$ et $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ ($\Leftrightarrow \|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2 \operatorname{Re}(x|x_n)$ $\lim_n \sup \|x - x_n\|^2 \leq \|x\|^2 + \lim_n \sup \|x_n\|^2 - 2\|x\|^2$. $\lim_n \sup \|x - x_n\|^2 \leq \lim_n \sup \|x_n\|^2 - \|x\|^2 \leq 0 \Rightarrow \lim_n \sup \|x - x_n\|^2 = 0 \geq \lim_n \inf \|x - x_n\|^2 \geq 0 \Rightarrow \lim_n \sup \|x - x_n\|^2 = \lim_n \inf \|x - x_n\|^2 = \lim_n \|x\|^2$)
□

Exemple 1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de H . Soit $D \subset H$ dense ($\bar{D} = H$). Alors $x_n \rightarrow x$ sur $H \Leftrightarrow (x_n|y) \rightarrow (x|y) \forall y \in D$.

Exercice 2. On considère $H = L^2(\mathbb{R}, dx)$, soit $\varphi \in H \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |\varphi|^2 dx = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$. $H = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R})}$

Soit $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tq $\|\varphi_0\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ (sinon on pose $\varphi = \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|}$, $\|\varphi\| = 1$) On pose $\varphi_n(x) = \varphi_0(x - n)$, on veut montrer que $\varphi_n \rightharpoonup \varphi \in L^2(\mathbb{R})$ On remarque que : $\|\varphi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\varphi_0(x - n)|^2 dx$ On pose $u = x - n$: $\|\varphi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} du |\varphi_0(u)|^2 = 1$ $\varphi_n \not\rightarrow 0$ $\|f_n - 0\| = 1$.

Est ce que la suite conv faiblement ? $\exists \varphi \in H, (\varphi_n|\psi) \rightarrow (\varphi|\psi) \forall \psi \in H$.

Soit $\psi : \psi(x) = 1$ ssi $x \in [-1, 1]$ $\psi(x) = 0$ sinon. $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 1 dx = 2$ On choisit $n \geq N$ avec N tq $a + N \geq \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \psi dx = 0$ On a montré $(f_c|\psi) \rightarrow 0 = (0|\psi)$.

Question $\varphi_n \rightharpoonup 0_{L^2(\mathbb{R})}$?

Proposition 5. Soit H un espace de Hilbert $D \subset H$ dense dans $H : \bar{D} = H$. Alors soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans H , $x_n \rightharpoonup x \in H \Leftrightarrow (x_n|y) \rightarrow (x|y) \forall y \in D$.

Exercice(suite) On doit montrer que $\forall \psi \in C^2(\mathbb{R}) : (\varphi_n|\psi) \rightarrow 0$. On remarque que $\|\varphi_n\| = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ donc elle est bornée. (Suite bornée : $\exists \prod tq \forall n \|\varphi_n\| \leq \prod$) Il suffit de montrer $(\varphi_n|\varphi) \rightarrow 0 \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrons a dernier point : $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) \varphi_n(x) dx ; \exists a, b \in \mathbb{R}, \text{supp} \psi \subset [A, B]$. On ch isit tq $\text{supp } \varphi_n = [a + N, b + N], a + > \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \psi \varphi_n = 0 \Rightarrow \lim_n (\psi|\varphi_n) = 0 = (\psi|0)$

Démonstration. Si $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ dans $H \Rightarrow \varphi_n \rightharpoonup \varphi$ dans D . Supposons que $(\varphi_n|\psi) \rightarrow (\varphi|\psi) \forall \psi \in D$. Soit $\eta \in H \exists (\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite de D tq $\lim_n \|\eta_k - \eta\| = 0$. On calcul $(\varphi_n|\eta) = (\varphi_n|\eta_k) + (\varphi_n|\eta - \eta_k)$. Soit $\varepsilon > 0, \exists K$ tq si $k > K \|\eta - \eta_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ alors $|(\varphi_n|\eta - \eta_k)| \leq \|\varphi_n\| \|\eta - \eta_k\| \leq \prod \varepsilon$. On fixe un tel k . On conclut que $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tq si $n \geq N ; |(\varphi_n|\eta)| \leq (\prod + 1)\varepsilon \Rightarrow (\varphi_n|\eta) \rightarrow 0$. \square

Théorème 9 (1). Toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert est bornée.

Théorème 10 (2, Banach-Alaoglu-Bourbaki). Une espace de Hilbert vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass faible. De toute suite bornée de H , on peut extraire une sous suite.

Remarque. Dans \mathbb{R} , de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite c.v. (B.W.) c'est vrai si $p < +\infty$. Mais c'est faux en dimension quelconque. Le Thm 2 \succ c'est vrai au sous faible.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $H : \exists L > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N} \|x_n\| \leq L$. Soit $M = \text{vect}(x_n)$. Si M est de dimension fini, alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B_f(0_M, L) \subset M$. qui est compact \Leftrightarrow elle satisfait la propriété de B.W. $\exists (X_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ sous suite et $x \in B_f(0, L)$ tq $\lim_n \|x_{k(n)} - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow x_{k(n)} \rightharpoonup x$ dans H . Alors le Theoreme 2 est démontré. Supposons que M n'est pas de dimension finie. M est un espace Hilbert (sous espace ferme de H) Soit $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de M . La suite $((x_n|e - 1))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée car $|(x_n|e_1)| \leq \|x_n\| \|e_1\| \leq L \cdot 1 = L$ On applique la propriété de B.W. dans $\mathbb{C} : \exists (a_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $c_1 \in \mathbb{C}$ tq $a_{k(n)} \rightarrow c_1$ qd $n \rightarrow +\infty$ on réécrit : $a_{k(n)}$ on pose $x_{k(n)} = x'_n$. $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $(x'_n|e_1) \rightarrow c_1$ qd $n \rightarrow +\infty$. 2 la suite $(x'_n|e_2)$ est bornée, \exists une sous suite $(x''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $c_2 \in \mathbb{C}$ tq $(x''_n|e_2) \rightarrow c_2$ qd $n \rightarrow +\infty$ etc...

Conclusion : On a construit des sous suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \dots (x''_n)_{n \in \mathbb{N}} \dots$ et des complexes $C_k, k = 1, 2, 3 \dots$ tq $(x''_n|e_k) \rightarrow c_k$ qd $n \rightarrow +\infty$. (présidé deagonal de Cantor) : on pose $z_n = x''_n$. Montrer que $z_n \rightharpoonup \sum_k c_k e_k$ si $\sum_k c_k e_k$ est conv dans H . Le thm 2 est démontré. Montrons que $\sum_k c_k e_k = z \in M$ i.e (*). Puisque M est complet alors il faut montrer $S_n = \sum_{k=1}^n c_k e_k$ est de Cauchy : $\|s_n - s_m\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^m c_k e_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |c_k|^2$ (Parseval). S_n est de Cauchy $\Leftrightarrow \tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n |c_k|^2$ est de Cauchy $\Leftrightarrow \tilde{S}_n$ est convergent dans \mathbb{C} . Montrons ce dernier point. On utilise l'inégalité de Bessel. $\sum_{k=1}^N |(x_n|e_k)|^2 \leq \|z_n\|^2 \leq L^2$ mais : $(z_n|e_k) + (x''_n|e_k) \rightarrow c_k$ qd $n \rightarrow +\infty$. puisque $(x''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous suite de $(x''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $n \geq k$.

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \dots (x''_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (x^{k+1}_n)_{n \in \mathbb{N}} \dots x_1^1 x_2^2 \dots x_k^k$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x''_n|e_k) = c_k$. Alors $\sum_{k=1}^N |c_k|^2 = \sum_{k=1}^N \lim_n |(x''_n|e_k)|^2 = \lim_n \sum_{k=1}^N |(x''_n|e_k)|^2 = \lim_n \sum_{k=1}^N |(z_n|e_k)|^2$ on utilisant (*) alors $\sum_{k=1}^N |c_k|^2 \leq L^2$ (par passage à la limite) Par conséquent $\sum |c_k|^2$ est convergente donc $\sum_{k \geq 1} c_k \varphi_k$ est convergente dans M . Soit $z = \sum_{k=1}^\infty c_k \varphi_k$ alors $(z|e_c) = c_e$. Alors on a montre que $\forall C \in \mathbb{N}^* (z_n|e_c) \rightarrow c_e = (z|e_c)$ En utilisant que

$\text{vect}(e_k, k \in \mathbb{N}^* = M$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée alors cela entraîne la convergence faible sur M . $\forall y \in M : (x_n^n|y) \rightarrow (z|y)$ On a couverture une sous suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui conv faiblement sur M vers $z \in H$. On étend la propriété sur $H : M$ est un sous espace fermé on lui applique le théorème des ces projection. $\forall \eta \in HM \exists ! y_0 \in M$ projection de y sur M .

Alors $y = y_0 + (y - y_0)$ et $(x^n|y) = (x_n|y) = (x_n|y_0) + (z_n|y - y_0)$ mais $(z_n|y - y_0) = 0$. $z_n \in M$ et $y - y_0 \in \prod^\perp \Rightarrow \lim_n (z_n|y) = (z|y_0)$ (ce que l'on a démontré précédent) mais $z \in M$, donc $(z|y - y_0) = 0 : \lim_n (x_n|y) = (z|y_0) + (z|y - y_0) = (z|y)$ ce qui montre la conv faible sur H . □

Théorème 11 (Completion). *Si $(\mathcal{V}, (\cdot|\cdot)_{\mathcal{V}})$ est un espace préhilbertien, alors, il existe un espace de Hilbert $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot)_{\mathcal{H}})$ et une application $U : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}$ que :*

1. U est bijective
2. U est linéaire
3. $(Ux|Uy)_H = (x|y)_{\mathcal{V}} \quad \forall x \in \mathcal{V}, \quad \forall y \in \mathcal{V}$
4. $U(\mathcal{V}) = \{Ux \mid x \in \mathcal{V}\}$ est dense dans \mathcal{H} .

Théorème 12. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ une espace préhilbertien. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille libre de E . Alors il existe une famille orthonormale de E , telle que :*

- $\text{vect}((e_n)) = \text{vect}((v_n))$
- $(e_n|v_n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Procédé de Gram-Schmidt.

Soit $u_1 = v_1$, et $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$; $u_2 = v_2 - \frac{(v_2|u_1)}{\|u_1\|^2} u_1$, et $e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$; $u_3 = v_3 - \frac{(v_3|u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{(u_3|u_2)}{\|u_2\|^2} u_2$ et $e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$ etc...

Chapitre 2

Opérateurs sur un espace de Hilbert

2.1 Généralités

Soit X, Y deux espaces de Banach, on note par $L(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires de $X \rightarrow Y$, si $X = Y$ on note par $L(X)$. Dans le cas d'espace de Hilbert l'ensemble des applications linéaires $L(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ respectivement $L(\mathcal{H})$ si $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$.

$T \in L(X, Y) N(T) = \{x \in X, Tx = 0_y\}$ noll of T .

$R(T) = \{y \in Y, \exists x \in X \text{ et } Tx = y\}$ range of T .

$G(T) = \{(x, Tx) \mid x \in X\}$ graphe de T .

Proposition 6. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces du Banach soit $f \in L(X, Y)$, alors les assertions suivantes ont équivaleentes.

1. f est continue sur X
2. f est continue en un point $x_0 \in X$
3. $\exists C > 0$ t.q. $\forall x \in X$ on a $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$.

Démonstration. (\Rightarrow) i) \Rightarrow ii), montrons iii) \Rightarrow i) on a $\forall x, y \in X \quad \|f(x) - f(y)\|_Y = \|f(x - y)\|_Y \leq C\|x - y\|_X \Rightarrow f$ est Lipschitz sur X donc continue. Montrons ii) \Rightarrow iii) On choisit $x_0 = 0_X$ alors f est continue en 0_X . $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta(\varepsilon)$ t.q. $\forall x \in X$ et $\|x\|_X \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(0)\|_Y = \|f(x)\|_Y \leq \varepsilon$. Soit $\varepsilon = 1$, soit $\eta = \eta(1)$, $\forall x \in X$ on pose $\tilde{x} = \frac{\eta}{2} \frac{x}{\|x\|_X}$; On a $\|\tilde{x}\| = \frac{\eta}{2} \frac{1}{\|x\|_X} \|x\|_X = \frac{\eta}{2} \leq \eta \Rightarrow \|f(\tilde{x})\| \leq 1$. Mais $f(\tilde{x}) = f(\eta \frac{x}{\|x\|}) = \eta \frac{1}{\|x\|} f(x)$ et $\frac{\eta}{2\|x\|_Y} \|f(x)\|_Y \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\|_Y \leq \frac{2}{\eta} \|x\|_X$ QED. \square

Remarque. iii) $\exists C > 0$ tq $\forall x \in X : \|f(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \Leftrightarrow \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\| \leq C$ si $\|x\|_X \neq 0$
 $\Leftrightarrow x \neq 0_X \Leftrightarrow \forall x \in X \|x\|_X = 1 ; \|f(x)\|_Y \leq C$. $f(B_f(0_X, 1)) \subset B_f(0_Y, C)$.

* Un opérateur de $X \rightarrow Y$ et une application linéaire de $X \rightarrow Y$.

* Une application linéaire $X \rightarrow Y$ continue est un opérateur borné de $X \rightarrow Y$.

* On notera par $\mathcal{B}(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs bornés de $X \rightarrow Y$.

Exp. $\mathcal{H} = \mathcal{H}' = l^2(\mathbb{Z})$ on considère l'application $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \forall u \in \mathcal{H} (Tu)(n) = u(n-1)$ shift a droite. T est linéaire : $T(\lambda u + \mu v)(n) = (\lambda u + \mu v)(n-1) = \lambda u(n-1) + \mu v(n-1) = \lambda Tu(n) + \mu Tv(n)$ T est borné (donc continue) $\forall u \in \mathcal{H} \quad \|Tu\|_{\mathcal{H}}^2 = (Tu|Tu)_{\mathcal{H}} =$

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} Tu(n) \overline{Tu(n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(n-1) \overline{u(n-1)} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} u(e) \overline{u(e)} = \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \Rightarrow \|Tu\|_{\mathcal{H}} = \|u\|_{\mathcal{H}}$
 T est une isométrie.

$B(X, Y)$ est un espace normé, muni de la norme naturelle. $T \in B(X, Y) \quad \|T\| = \inf\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X\}$

Exercice 3. Montrer que (\cdot) définit une norme sur $B(X, Y)$.

Proposition 7. *Propriété* Soit $T \in B(X, Y)$ alors

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\|_Y, \|x\|_X = 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\|_Y, \|x\|_X \leq 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\|_Y, \|x\|_X < 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|T\| &= \inf\{C > 0 \mid \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X\} \\ &= \inf\{C > 0 \mid \left\|T \frac{x}{\|x\|_X}\right\|_Y \leq C \forall x \in X\} \\ &= \inf\{C > 0 \mid \|Tx\|_Y \leq C \forall x : \|x\|_X = 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\|_Y \mid \|x\|_X = 1\} \end{aligned}$$

Soit X un espace de Banach.

Proposition 8. Si Y est un espace de Banach, alors $(B(X, Y), \|\cdot\|)$ est lui même un espace de Banach.

Application : X' le dual topologique de X : $\varphi \in X'$ si $\varphi \in L(X, \mathbb{C})$ qui satisfait $\exists C > 0 \forall x \in X : |\varphi(x)| \leq C\|x\|_X$. \mathbb{C} est complet alors par la prop. 3 X' est complet.

Exercice 4. Montrer la proposition 3. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite du Cauchy des $B(X, Y)$ il faut montrer $\exists T \in B(X, Y)$ tq $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$.

2.2 Adjoint d'un opérateur

Soit $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ deux espaces de Hilbert (séparables).

Proposition 9. Soit $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, li existe $T^* \in B(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ dit opérateur adjoint qui satisfait : $\forall x \in \mathcal{H}, \forall y \in \mathcal{H}'$

$$(Tx|y) = (x|T^*y)$$

Exemple 1. $\mathcal{H} = \mathcal{H}' = l^2(\mathbb{Z})$ T shift adjointe, calculons $T^* \cdot \forall u, v \in \mathcal{H}, (Tu|v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} Tu(n) \cdot \overline{v(n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(n-1) \overline{v(n)} = \sum_{e \in \mathbb{Z}} u(e) \overline{v(e+1)} = (u|w)$ avec $w(e) = v(e+1)$. On pose $T^*v = w$.

Démonstration. Dans ces conditions $x \in \mathcal{H} \mapsto (Tx|y)$ est une forme linéaire sur \mathcal{H} comme la composition de T et $(\cdot|y)$. De plus on a que $|(Tx|y)| \leq \|Tx\|_{\mathcal{H}'} \|y\|_{\mathcal{H}} \leq \|T\| \|x\|_{\mathcal{H}} \|y\|_{\mathcal{H}'}$ $|\varphi(x)| \leq \text{const} \|x\|_{\mathcal{H}'}$, $\text{const} = \|T\| \|y\|_{\mathcal{H}'}$ alors φ est continue (bornée). D'après le Théorème de Riez $\exists ! \in \mathcal{H} \mid \varphi(x) = (x|z) \forall x \in \mathcal{H}$. On pose $z = T^*y$, montrons que $T^* \in L(\mathcal{H}', \mathcal{H})$. Soit $y_1, y_2 \in \mathcal{H}'$, $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ on calcule $T^*(d_1 y_1 + d_2 y_2)$:

* $\forall x \in \mathcal{H} (x|T^*(d_1 y_1 + d_2 y_2)) = (Tx|d_1 y_1 + d_2 y_2)$ (def)

$\bar{d}_1(Tx|y_1) + \bar{d}_2(Tx|y_2) = \bar{d}_1(x|T^*y_1) + \bar{d}_2(x|T^*y_2) = (x|d_1T^*y_1 + d_2T^*y_2) \Rightarrow \forall x \in \mathcal{H}(x|T^*(d_1y_1 + d_2y_2) - d_1T^*y_1 - d_2T^*y_2) = 0 \Rightarrow T^*(d_1y_1 + d_2y_2) - d_1T^*y_1 - d_2T^*y_2 = 0_{\mathcal{H}}.$
 Montrons que $T^* \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \forall y \in \mathcal{H}'$. $\|T^*y\|_{\mathcal{H}}^2 = (T^*y|T^*y)_{\mathcal{H}} = (T(T^*y)|y)_{\mathcal{H}'} \Rightarrow \|T^*y\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|T(T^*y)\|_{\mathcal{H}'} \|y\|_{\mathcal{H}'} \leq \|T\| \|T^*y\|_{\mathcal{H}} \|y\|_{\mathcal{H}'} \Rightarrow \|T^*y\|_{\mathcal{H}} \leq \|T\| \|y\|_{\mathcal{H}'} \forall y \in \mathcal{H}'$ tq $T^*y \neq 0_{\mathcal{H}}$. Si $y \in N(T^*)$ on a que $0 \leq \|T\| \|y\|_{\mathcal{H}'}$ donc $T^* \in B(\mathcal{H}', \mathcal{H})$, $\|T^*\| \leq \|T\|$.
Unicité. $\exists S \in B(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ tq $\forall (x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}' (Tx|y) = (x|Sy) = (x|T^*y) \Rightarrow \forall x \in \mathcal{H} (x|Sy - T^*y) = 0 \Rightarrow Sy = T^*y.$ \square

Exemple 2. $\mathcal{H} = \mathcal{H}' = L^2(\mathbb{R})$. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. On définit l'action de T sur $C_0^\infty(\mathbb{R}) \ni \varphi : T\varphi(x) = f(x)\varphi(x)$ $f \cdot \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) : T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \mapsto C_0^\infty(\mathbb{R})$. T est linéaire $\Rightarrow f\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. $T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ est continue. $\|T\varphi\|^2 = (T\varphi|\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)\varphi(x)\bar{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)|\varphi(x)|^2 dx \leq \|f\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 dx \Rightarrow \|T\varphi\|^2 \leq \|f\|_\infty^2 \|\varphi\|^2$. T est continue sur $C_0^\infty(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$. T est uniformément continue car $\|T\varphi - T\psi\| = \|T(\varphi - \psi)\| \leq \|f\| \|\varphi - \psi\|$. $\|f\|_\infty$ Lipstitz. On utilise que toute applications T uniformément continue sur D et $\bar{D} = \mathcal{H}$, admet un prolongement par continuité sur \mathcal{H} défini comme : $\forall \varphi \in \mathcal{H}, \exists (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Suite de D et $\lim_n \varphi_n = \varphi$.

On pose $T\varphi = \lim_n T\varphi_n$. T est borne et $\|T\| \leq \|f\|_\infty$. $\|T\varphi\| = \lim_n \lim_n T\varphi_n T\varphi_n$ mais $\|T\varphi_n\| \leq \|f\|_\infty \|\varphi_n\|$. $\|Tf\| \leq \|f\|_\infty \|\varphi\|$. Calculons. $T^* \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H} (T\varphi|\psi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\bar{\psi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)f(x)\bar{\psi}(x) dx = (\varphi|T\psi) \Rightarrow T^* = T$.

Remarque. Dans le preuve de la proposition III21 On peut inverser la rôle de T et T^* , alors on montre aussi que $\|T^*\| \geq \|T\|$ alors $\|T^*\| = \|T\|$ (ex)

Définition 15. Un opérateur $T \in B(\mathcal{H})$ est dit auto adjoint si $T = T^*$. $T \in B(\mathcal{H})$ est dit unitaire si $T \circ T^* = T^* \circ T = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$.

Remarque. Si $T = T^* \forall x \in \mathcal{H} (Tx|x) = (x|Tx) \Rightarrow (Tx|x) = \overline{(Tx|x)} \Rightarrow (Tx|x) \in \mathbb{R}$.

Définition 16. $T = T^*$ est positif si $\forall x \in \mathcal{H} (Tx|x) \geq 0$ $T = T^*$ est définit positif si $\forall x \in \mathcal{H}, x \neq 0_X (Tx|x) > 0$. T est défini positif si T est positif et $(Tx|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$.