

Chapitre 1

Initiation

1.1 Les espaces de Hilbert

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 1. Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel. Une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ est une FORME HERMITIENNE

- 1. $\forall y \in E : \varphi(\cdot, y) : E \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire
- 2. $\forall (x, y) \in E \times E : \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$

Définition 2. Un PRODUIT SCALAIRE est une forme hermitienne définie positive : $\forall e \in E \varphi(x, x) \geq 0 ; \varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$. Notation :

$$\varphi(x, y) := (x|y)$$

Définition 3. Le couple $(E, (\cdot|\cdot))$ s'appelle un ESPACE PRÉHILBERTIEN.

Définition 4. On définit la NORME sur $E : \forall x \in E \|x\|_E = (x|x)^{\frac{1}{2}}$.

Remarque. En particulier on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Donc inégalité triangulaire. Ainsi c'est vraiment une norme.

Définition 5. $x, y \in E$ sont dits ORTHOGONAUX si $(x|y) = 0$. Nous dénotons cela comme $x \perp y$.

Définition 6. $(E, \|\cdot\|)$ est dit COMPLET si toutes les suites de Cauchy de E convergent dans E .

Définition 7. UNE ESPACE DE HILBERT est un espace préhilbertien complet pour la distance $\|\cdot - \cdot\| = (\cdot - \cdot | \cdot - \cdot)^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 1. $l^2(\mathbb{N}) = \{n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \sum_{n \geq 0} |f(n)|^2 < \infty\}$
 $l^2(\mathbb{N})$ est \mathbb{C} espace. $\forall f, g \in l^2(\mathbb{N})$:

$$(f|g)_{l^2(\mathbb{N})} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 0} f(n) \overline{g(n)}.$$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $l^2(\mathbb{N})$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > p \geq N : \|f_n - f_p\|_{l^2(\mathbb{N})} < \varepsilon. \quad (*)$$

Question. $\exists f \in l^2(\mathbb{N})$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$?

$$(*) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ t.q. } \forall n > p \geq N \|f_n - f_p\|^2 = \sum_{j \geq 0} |f_n(j) - f_p(j)|^2 \leq \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow |f_n(j) - f_p(j)| \leq \varepsilon \forall j \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow \forall j \in \mathbb{N} (f_n(j))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{C} qui est complet, donc $\exists f(j) \in \mathbb{C}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(j) - f(j)| = 0$.

Il faut montrer que f est la limite dans $l^2(\mathbb{N})$ de la suite f_n .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ t.q. } \forall n > p \geq N \sum_{j \geq 0} |f_n(j) - f_p(j)|^2 \leq \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \forall J \in \mathbb{N} \underbrace{\sum_{j=0}^J |f_n(j) - f_p(j)|^2}_{\text{somme partielle}} \leq \varepsilon^2, \text{ par passage à la limite sur } p : \sum_{j=0}^J |f_n(j) - f(j)|^2 \leq \varepsilon^2$$

Conclusion : $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ telle que $\forall n \geq N \|f_n - f\| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$.

Mais $f \in l^2(\mathbb{N})$.

Vérifions que $f \in l^2(\mathbb{N})$:

$$(\sum_{j \geq 0} |f(j)|^2)^{1/2} = (\sum_{j \geq 0} |f_n(j) - f(j) + f(j)|^2)^{\frac{1}{2}} = \underbrace{\|f - f_n\|}_{\in l^2(\mathbb{N})} + \underbrace{\|f_n\|}_{\in l^2(\mathbb{N})} \leq \|f - f_n\| + \|f_n\| < +\infty.$$

Théorème 1 (Projection orthogonale). Soit H un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée et non vide de H . Alors $\forall x \in H \exists ! y_0 \in C$ t.q.

1. $\text{dist}(x, C) := \inf\{d(x, y), y \in C\} = \inf\{\|x - y\|_H, y \in C\} = \|x - y_0\|_H$
2. $\forall y \in C \text{ Re}(x - y_0 | y - y_0) \leq 0$... !? why in the world would scalar product have values other than real

y_0 est la projection orthogonale de x sur C .

Remarque.

1. C est convexe si $\forall x, y \in C \ [x, y] = \{tx + (1-t)y, t \in [0, 1]\} \in C$
2. $H = \mathbb{R}^2 : [x, y] \in C$
3. si $x_0 \in C$ dans le cas $y_0 = x_0$ et $\text{dist}(x_0, C) = 0 = \|x_0 - x_0\|_H$

Démonstration. Notons par $d = d(x, C) > 0$ ($x \in H \setminus C$). Soit $y, z \in C$ on pose $b = x - \frac{1}{2}(y + z)$, $c = \frac{1}{2}(y - z) : \|b\| = \|x - \underbrace{\frac{1}{2}(y + z)}_{\in C}\| \geq d$. On a aussi $b - c = x - y$ et

$$b + c = x - z \Rightarrow \|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 = \|b - c\|^2 + \|b + c\|^2 = (b - c|b - c) + (b + c|b + c) = \|b\|^2 + \|c\|^2 - (b|c) - (c|b) + \|b\|^2 + \|c\|^2 + (b|c) + (c|b).$$

$$\|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 = 2(\|b\|^2 + \|c\|^2) \geq 2d^2 + 2\frac{1}{4}\|y - z\|^2 \Rightarrow \|y - z\|^2 \leq 2(\|x - y\|^2 - d^2) + 2(\|x - z\|^2 - d^2). \text{ Pour } n \in \mathbb{N} \ C_n = \{y \in C | \|x - y\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\} \text{ est fermée dans } H \text{ (boule fermée).}$$

Puisque C est fermé, $C_n = \{y \in H | \|x - y\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\} \cap C$ est fermé dans C . De plus : $\delta(n) := \sup\{\|y - z\|, (y, z) \in C_n \times C_n\} \leq * \sup\{[2(\|x - y\|^2 - d^2) + 2(\|x - z\|^2 - d^2)]^{\frac{1}{2}}, y, z \in C_n\} \Rightarrow \delta(n) \leq \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

H est complet et $C \subset H_x$ c est fermé. C est un espace métrique complet. Il satisfait le critère de Cantor : $\bigcap_n C_n = \{y_0\}$.

$$y_0 \in \bigcup_n C_n \ d^2 \leq \|x - y_0\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} \Rightarrow \|x - y_0\| = d^2.$$

$$\text{Montrons ii) : } \forall t \in [0, 1], \forall y \in H \ \phi(t) = \|y_0 + \underbrace{t(y - y_0)}_{\in C} - x\|^2 = \|y_0 - x\|^2 + 2t \text{Re}(y_0 - x|y - y_0) + t^2 \|y - y_0\|^2. \ \phi(0) = d^2 \leq \phi(t) \ \forall t \in (0, 1] \Rightarrow \phi'(0) \geq 0. \ \phi'(t) = 2 \text{Re}(y_0 - x|y - y_0) + 2t \|y - y_0\|^2. \ \phi'(0) \leq 0 \Rightarrow 2 \text{Re}(y_0 - x|y - y_0) \leq 0 \Rightarrow (i).$$

□

Théorème 2 (corollaire). Soit F un sous-espace fermé de H alors : $H = F \oplus F^\perp$.

Démonstration. — F est convexe puisque $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \forall x, y \in F \ \alpha x + \beta y \in F \Rightarrow$ Cela est vrai si $\alpha = t, \beta = 1 - t \ t \in [0, 1]$.

On peut ceci appliquer le Thm 1 :

$$\text{— On a toujours } F + F^\perp \subset H \text{ et } F + F^\perp = F \oplus F^\perp \text{ car si } x \in F \cap F^\perp \Rightarrow (x|x) = 0 = \|x\|^2 \Rightarrow x = 0_H$$

Soit $x \in H$, et $y_0 \in F$ sa projection orthogonale : $\forall d \in \mathbb{C}, y \in F, y_0 + dy \in F$ et donc $\text{Re}(x - y_0|y_0 + dy - y_0) \leq 0 \Rightarrow \text{Re}(x - y_0|dy) \leq 0$

$$d = (x - y_0|y) \Rightarrow (x - y_0) \dots$$

Conclusion $\text{Re}(x - y_0|dy) \leq 0$ donc $H = F \oplus F^\perp$.

□

Définition 8. Dans ces conditions, l'application $P : x \in H, x = x_1 + x_2, x_1 \in F, x_2 \in F^\perp$

$$x \xrightarrow{P} x_1 \in F$$

est le PROJECTEUR ORTHOGONAL sur F .

Exemple 1.1.1. Montrer que P est linéaire continue et satisfait $P^2 = P$.

Définition 9. Une partie A de H est dite TOTALE si le plus petit sous espace fermé contenant A est H .

H est SÉPARABLE si H admet une famille totale dénombrable.

Exemple 1.1.2. $H = l^2(\mathbb{N}) : \mathcal{F} = \{e_0, e_1, \dots\}$ avec $e_j(i) = \delta_{ij} \rightarrow (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. \mathcal{F} est totale. Elle est dénombrable, $l^2(\mathbb{N})$ est séparable.

Théorème 3. Soit H un espace de Hilbert et $A \subset H$:

1. $\overline{\text{vect}(A)} = (A^\perp)^\perp$
2. A est un sous-espace alors $(A^\perp)^\perp = \bar{A}$
3. A est totale $\Leftrightarrow A^\perp = \{0_H\}$

1.2 Séries dans un espace vectoriel normé

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé (e.v.n).

Définition 10. On appelle SÉRIE de terme général $u_n \in E$ la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ de E t.q. $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$. La série est CONVERGENTE dans $(E, \|\cdot\|_E)$ si la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ admet une limite dans $E : S$ — c'est la somme de la série.

Définition 11. Une série $\sum u_n$ est dite ABSOLUMENT CONVERGENTE (AC) si la série $\sum \|u_n\|_E$ est convergente dans \mathbb{R}^+ .

Théorème 4. Si E est complet (espace de Banach/Hilbert) Alors toute série AC est convergente et $\|\sum_{n=0}^\infty u_n\| \leq \sum_{n=0}^\infty \|u_n\|$.

Démonstration. $J_n = \sum_{n=0}^N \|u_n\|$ et convergente $\Leftrightarrow (J_n)_{N \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy $\forall \varepsilon > 0 \exists K$ t.q. $\forall N >$

$P \geq K \Rightarrow |J_n - J_p| \leq \varepsilon$. $\sum_{j=p+1}^N \|u_j\| \leq \varepsilon$. meus $\|S_n - S_p\| = \|\sum_{j=p+1}^N u_j\| \leq \sum_{j=p+1}^N \|u_j\|$ inégalité triangulaire.
 $\Rightarrow N > p \geq K \Rightarrow \|S_N - S_P\| \leq \varepsilon \Leftrightarrow (S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E et donc convergente.

D'autre part $\|S_n\| = \|\sum_{j=0}^n u_j\| \leq \sum_{j=0}^n \|u_j\| \leq \sum_{j=0}^\infty \|u_j\| \Rightarrow \|\sum_{j=0}^\infty u_j\| \leq \sum_{j=0}^\infty \|u_j\|$.
 Cfd. □

Définition 12. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{H}$ de \mathbb{H} est dite ORTHOGONAL si $(x_i | x_j) = 0 \forall i \neq j$.

Théorème 5. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite orthogonale dans un espace de Hilbert \mathbb{H} . Alors la série $\sum x_n$ est convergente $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \|x_n\|_H^2$ est convergente et

$$\|\sum_{n \geq 0} x_n\|_H^2 = \sum_{n \geq 0} \|x_n\|_H^2.$$

Démonstration. $\forall l > p$ on a $\|\sum_{n=l}^p x_n\|^2 = (\sum_n = e^p x_n | \sum_n = e^p x_n) = \sum_n n' = l(x_n | x_n) = \sum_n = l^p \|x_n\|^2$ Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ est de Cauchy $\Leftrightarrow (\|x_n\|^2)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{R} .

D'autre part $S_N = \sum_{n \geq 0}^N x_n \Rightarrow \|S_N\|^2 = \sum_{n \geq 0}^N \|x_n\|^2$. Alors $S = \lim S_N = \sum x_n$
 $\|S\|^2 = \|\lim S_N\|^2 = \lim \|S_N\|^2$ par continuité de la $\|\cdot\|$ et donc $\|S\|^2 = \lim_N \sum_n \geq 0^N \|x_n\|^2 = \sum_{n \geq 0} \|x_n\|^2$ \square

1.3 Bases Hilbertiennes

Définition 13. On appelle BASE HILBERTIENNE, une suite de vecteur $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ telle que

1. $\forall n, m (x_n | x_m) = \delta_{nm}$,
2. $\text{vect}\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}\} = \mathbb{H} \Leftrightarrow \text{vect}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^\perp = \{0_H\} \Leftrightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ est totale.

Théorème 6 (Inégalité de Bessel). Soit (x_n) une suite *orthonormale* $(\forall n, m (x_n | x_m) = \delta_{nm})$ dans \mathbb{H} . Alors $\forall x \in \mathbb{H} \sum_{n \geq 0} |(x | x_n)|^2$ est convergente et $\sum_{n \geq 0} |(x | x_n)|^2 \leq \|x\|^2$.

Exemple : $\mathbb{H} = l^2(\mathbb{N})$. $(e_n | e_m) = \sum_{k \geq 0} e_n(k) \overline{e_m(k)} = \sum_{k \geq 0} \delta_{nk} \delta_{mk} = \delta_{nm}$. En fait on montre que $\sum_{n \geq 0} |(e_n | x)|^2 = \|x\|^2$ c'est une base Hilbertienne.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{H}$ on pose $y_i = (x | e_i) e_i$ et $Y_N = \sum_{i=1}^N y_i$, $Z_N = X - Y_N$. Alors :
 $(Z_N | y_i) = (X - Y_N | y_i) = (X | y_i) - (Y_N | y_i)$. $(x | y) = (x | (x | e_i) e_i) = \overline{(x | e_i)} (x | e_i) = |(x | e_i)|^2$.
 $(Y_N | y_i) = \sum_{j=1}^N (y_j | y_i)$ mais $y_j \perp y_i \Rightarrow (Y_N | y_i) = \|y_i\|^2$ si $N \geq i$. (autrement =0)

Dans ces conditions puisque $\|y_i\|^2 = |(x | e_i)|^2$. Alors $(Z_N | y_i) = 0 \Rightarrow (Z_N | Y_N) = 0$
cas $Y_n = \sum_{i=0}^N y_i \Rightarrow \|x\|^2 = \|Z_n\|^2 + \|Y_n\|^2$ ($x = Z_n + Y_n$ et $Z_n \perp Y_n$) $\Rightarrow \|y_n\|^2 = \sum \|y_n\|^2 \leq \|x\|^2$

La suite $\sum \|y_n\|^2$ est positive, majorée donc convergente et par passage à la limite :
 $\sum_{n \geq 0} \|y_n\|^2 = \sum |(x | e_n)|^2 \leq \|x\|^2$. QED \square

Théorème 7 (Egalité de Parseval). Soit (e_n) une base Hilbertienne de \mathbb{H} alors

1. La série $\sum_{n \geq 0} |(x | e_n)|^2$ est convergente et $\|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} |(x | e_n)|^2$,
2. La série $\sum_{n \geq 0} (x | e_i) e_i$ est convergente dans \mathbb{H} et $\sum_{i \geq 0} (x | e_i) e_i = x$.

Démonstration. En utilisant le théorème précédent alors $\sum |(x|e_i)|^2$ est convergent. On utilise l'identité de la médiane : $\sum (x|e_i)e_i$ est convergente dans H ($\| \sum (x|e_i)e_i \|^2 = \sum |(x|e_i)|^2$). On pose $y = \sum_{i \geq 0} (x|e_i)e_i$ alors $\|y\|^2 = \sum_{i \geq 0} |(x|e_i)|^2$ mais $(y|e_j) = (\sum (x|e_i)e_i | e_j) = \sum (x|e_i)(e_i|e_j) = (x|e_j) \dots$ Conclusion $\forall j \in \mathbb{N} (x|e_j) = (y|e_j) \Leftrightarrow (x - y|e_j) = 0 \Rightarrow x - y \in \text{vect}((e_n)_{n \in \mathbb{N}})^\perp \Rightarrow x - y = 0_H \Leftrightarrow x = y = \sum (x|e_i)e_i \quad \square$

Remarque. Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormale telle que $\forall x \in H \ x = \sum_{i \geq 0} (x|e_i)e_i$: $x = \lim_N \sum_{i \geq 0}^N a_i e_i$ où $a_i = (x|e_i) \in \mathbb{C}$

$\in \text{vect}\{(e_n)_n \in \mathbb{N}\}; a_i = (x|e_i) \Rightarrow \text{vect}\{(e_n)_n \in \mathbb{N}\} = H$. $(e_n)_n \in \mathbb{N}$ est une base Hilbertienne. ii) $(e_n)_n \in \mathbb{N}$ est base Hilbertienne de $H \Leftrightarrow \forall x \in H : \sum (x|e_i)e_i = x$ $\sum (x|e_i)e_i = x \Leftrightarrow \sum |(x|e_i)|^2 = \|x\|^2$ (e_n) est une base Hilbertienne de $H \Leftrightarrow \sum |(x|e_i)|^2 = \|x\|^2 \forall x \in H$

Exemple (suite) : $H = l^2(\mathbb{N})$. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} t.q. e_n(k) = \delta_{nk}$.

$u \in H \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} |u(n)|^2 = \|u\|^2$ mais $u(n) = (u|e_n) = \sum u(k)e_n(k) \Leftrightarrow \sum_n \geq 0 (u|e_n)|^2 = \|u\|^2, \Rightarrow$ c'est une base Hilbertienne. !?

1.4 Dual d'un espace de Hilbert

On rappelle que si S est un e.v.n. une FORME LINÉAIRE sur X est une application linéaire de X dans \mathbb{C} . Soit $l : X \rightarrow \mathbb{C} : \forall d \in \mathbb{C} \forall x, y \in X l(x + dy) = l(x) + dl(y)$. L'ensemble des formes linéaires de X : est un espace vectoriel X^* . On considère X' dual topologique : c'est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur X : $\{l : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)\}$.

Exercice 1. l est continue \Leftrightarrow

$$\exists C > 0 \ x \forall x \in X, |l(x)| \leq C\|x\| \quad (*)$$

On définit $l \in X', \|l\| = \inf\{C > 0 \text{ t.q. } (*) \text{ est satisfait}\} = \sup\{|l(x)| \mid \|x\| = 1\}$. $(X', \|\cdot\|)$ est un espace de Banach (un e.v.n. complet)

Théorème 8 (Théorème de représentation de Riez). . Soit H un espace de Hilbert H' son dual topologique. On définit $I : H \rightarrow H'$ par $\forall x \in H I(x) = (\cdot|x)$. Alors I est un isomorphisme isométrique de $H \rightarrow H'$.

Remarque. $H = \mathbb{C}^n$, une forme linéaire sur $\mathbb{C}^n : l. l(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, a_i \in \mathbb{C}$ $|l(x)| = |\sum_{i=1}^n a_i x_i| \leq \sup\{a_i\} \cdot \|x\|_{\mathbb{R}^n}$. Ici $X^* = X'$!?

$$l(x) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$= (\bar{a}|x) \forall x \in \mathbb{C}^n \forall l \in X', \exists a \in \mathbb{C} : l(x) = (x|\bar{a})$ Généralisation à la dimension quelconque c'est le théorème de Riez : $\forall l \in H' \exists a \in H \forall x \in H : l(x) = (x|a)$

Démonstration. Soit $l \in H' l \neq 0'_h \Leftrightarrow$

lei $l \neq H$ puisque $\exists \in \text{tql}(x) \neq 0_h$. On sait que $\ker l$ est ferme sait $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\ker l$ convergente dans $H : x_n \rightarrow x \in H$ mais : $l(x_n) \rightarrow l(l(x))$ mais $l(x_n) = 0 \forall n. \Rightarrow l(x) = 0 \ x \in \ker I$. Alors $H = \ker l \oplus (\ker l)^{\text{perp}}$

Puisque $(\ker l) \neq H \Rightarrow \ker l^\perp = 0_H$. Soit $x \in \ker \phi^\perp, \|x\| = 1) \ x \neq 0_H$
 $\forall y \in H$ soit $z = -l(x)y_l y)x \in H$ et $l(lx) = -l(x_l(y) + l(y)l(x) = 0 \ x \in \ker I \Rightarrow (x|z) = 0$

$\Rightarrow x|l(x)y + l(y)x \Rightarrow l(x) \rightarrow l(x)(y|x) = l(y)(X|X) \Rightarrow \forall y \in H \ l(y) = (y|\overline{l(x)X})|)|)$
 $\forall l \in H' \exists a \in H$ t.q. $\forall x \in H \ l(x) = (x|a) \mid I$ est surjective. Montrons que I est injective.

Soit $x \in H$ t.q. $I(x) = 0_H \Leftrightarrow \forall y \in H \ l(x)(y) = (y|x) = 0 \Rightarrow x \perp H \Rightarrow X = 0_H$
 $\ker I = \{0_h\}$ I est injective donc bijection.

Enfin : $\|I(x)\| = \sup\{|(y|x)|, \|y\| = 1\} - \|x\|$ isométrie β)
 Parce que $|(y|x)| \leq \|y\| \|x\| \ \|x\| = \|x\| \ y = \frac{x}{\|x\|} \ \|y\| = 1 \ |(y|x)| = \|x\|$

□

Remarque. Si l est anti-linéaire : $\forall d \in \mathbb{C} \ \forall x, y \in H \ l(x + dy) = l(x) + \bar{d}l(y)$ et $\exists u$ t.q. $\forall x \in H : l(x) = (u|x)$

1.5 Convergence faible dans les espaces de Hilbert

1.5.1 Définition et premières propriétés

Définition 14. Soit H un espace de Hilbert. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H est dit CONVERGE FAIBLEMENT VERS $x \in H$ si $\forall y \in H \ (x_n|y) \rightarrow (x|y)$. On notera $x_n \rightharpoonup x$, x est dite limite faible de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exp. $H = l^2(\mathbb{N}), x_n \in l^2(\mathbb{N}^*)$ t.q. $x_n(j) = \delta_{nj}$.

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ est une base hilbertienne de H . On regarde la convergence faible. Soit $y \in l^2(\mathbb{N}^*)$ on doit calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n|y), (x_n|y) = \sum_j x_n(j) \overline{y(j)} = \overline{y(n)}$. $|(x_n|y)| \leq |y(n)|$ on sait $\sum_j |y(j)|^2 < +\infty \Rightarrow |y(j)| \rightarrow 0$ qd $j \rightarrow +\infty$ et donc $|(x_n|y)| = |y(n)| \rightarrow 0$ qd $n \rightarrow +\infty$. On écrit $0 = (0_H|y)$ alors $\lim_n (x_n|y) = (0_H|y)$. 0_H est une limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ (On montrera la limite faible est unique). $\|x_n\|^2 = \sum_j |x_n(j)|^2 = 1 \Rightarrow x_n \not\rightarrow 0$ puisque $\lim_n \|x_n - 0_H\| = \lim_n \|x_n\| = 1 \not\rightarrow 0$. 0_H n'est pas limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 1. La limite faible, si elle existe elle est unique.

Démonstration. Supposons que $\forall y \in H \ (x_n|y) \rightarrow (x|y)$ et $(x_n|y) \rightarrow (x'|y), \ x, x' \in H$. Supposons $x \neq x' \Leftrightarrow x - x' \neq 0_H \Rightarrow \exists y \in H$ t.q. $(x|y) \neq (x'|y)$ (*)

Remarque. On suppose (*) faux : $\forall y \in H \ (x|y) = (x'|y) \Leftrightarrow (x - x'|y) = 0 \Rightarrow x - x' \perp H \Rightarrow x - x' = 0_H$ c'est Absurde.

On pose $u_n = (x_n|y) \ u = (x|y) \ u' = (x'|y) \ u_n \rightarrow u : \forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t.q. $\forall n \geq N \ |u_n - u| \leq \varepsilon$. On choisit $\varepsilon < |u - u'|$ alors on a toujours si $n \geq N \ |u_n - u'| = |u_n - u + u - u'| = ||u - u'| - |u_n - u|| \geq |u - u'| - \varepsilon \geq \frac{|u - u'|}{2} \Rightarrow \forall n \geq N \ |u_n - u'| \geq \frac{|u - u'|}{2} \Rightarrow |u_n - u'| \not\rightarrow 0 \Rightarrow u_n \not\rightarrow u'$ QED. □

Dans l'exemple précédent 0_H est la limite unique de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Exemple. $H = L^2(\mathbb{R})$. Soit $H_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(x) = \varphi_0(x - n) \ x \in \mathbb{R}$.

Rappel. $C_c^\infty(\mathbb{R})$ ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$.

* support f compact : borne et ferme.

* $f \in C_c^n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f \in C_X^\infty(\mathbb{R})$ support $f = \overline{\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}}$

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R})} | \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\varphi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N} \varphi_n(x) = \varphi_0(x - n).$$

$$\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}) : (\varphi_n | \psi) \rightarrow 0 = (0_H | \psi) \quad (\varphi_n | \psi) = \int_{\mathbb{R}} dx \varphi_n(x) \overline{\psi(x)} = \int_{n-1}^{n+1} dx \varphi_0(x - n) \overline{\psi(x)}. \quad |(\cdot | \cdot)|_{L^2((n-1, n+1))} \leq \|\cdot\| \|\cdot\| \Rightarrow \int_{n-1}^{n+1} |\varphi_0(x - n)|^2 dx = \int_{-1}^{+1} |\varphi_0(t)|^2 dt = 1 \Rightarrow |(\varphi_n | \psi)| \leq (\int_{n-1}^{n+1} |\psi(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$\psi \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{n-1}^{n+1} |\psi(t)|^2 dt \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad \|\psi\| = \sum_n \int_{n-1}^{n+1} |\psi|^2 dt < \infty.$$

Proposition 2. 1. soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $x_n \rightarrow x \in H$ alors $(x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ Converge faiblement et $x_{k(n)} \rightarrow x$

2. si $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit deux suites t.q. $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$ alors $x_n + y_n \rightarrow x + y$

3. si $x_n \rightarrow x$ et soit $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des \mathbb{C} t.q. $d_n \rightarrow d \in \mathbb{C} \Rightarrow d_n x_n \rightarrow dx$.

Démonstration. 1. i est évident $\forall y \in H$ si $u_n = (y | x_n) \Rightarrow u = (y | x) \Rightarrow u_{k(n)} \rightarrow u \Rightarrow$
i)

$$2. \forall y \in H (y | x_n + z_n) = (y | x_n) + (y | z_n) \rightarrow (y | x) + (y | z) = (y | x + z).$$

$$3. \text{ On suppose } \forall y \in H (x_n | y) \rightarrow (x | y) \text{ et } d_n \rightarrow d. \quad (d_n x_n - dx | y) = (d_n x_n - dx_n + dx_n - dx | y) = (d_n - d)(x_n | y) + d(x_n - x | y) \Rightarrow |(d_n x_n - dx | y)| \leq |d_n - d| |(x_n | y)| + |d| |(x_n - x | y)|$$

$$(a) (x_n | y) \rightarrow (x | y) \Rightarrow \exists M \text{ t.q. } |(x_n | y)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |d_n - d| |(x_n | x)| \leq |d_n - d| M \rightarrow 0 \text{ qd } n \rightarrow +\infty. \quad |(x_n - x | y)| \rightarrow 0 \text{ qd } n \rightarrow +\infty \text{ par } (*) \text{ la proposition est démontrer.}$$

□

Remarque. On a toujours que $|(x_n - x | y)| \leq \|x_n - x\|_H \|y\|_H$. Si $\lim_n \|x_n - x\| = 0 \Leftrightarrow \lim_n x_n = x \Rightarrow x_n \rightarrow x$! l'inverse est faux en général.

Proposition 3. Si $x_n \rightarrow x$ dans H alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \|x_n\| \geq \|x\|$.

Remarque. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\exists x \in H$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0$ alors par $\| \|x\| - \|x_n\| \| \leq \|x - x_n\| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$. Mais si on a que $x_n \rightarrow x$ on ne sait pas que la suite $\|x_n\|$ converge, c.a.d. que la limite existe par contre $\lim_n \inf \|x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{\|x_k\|, k \geq n\}$ et $\lim_n \sup \|x_n\| - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \{\|x_k\|, k \geq n\}$ existe toujours.

Démonstration. Puisque $x_n \rightarrow x$, alors $(x_n | x) \rightarrow (x | x) = \|x\|^2$ en utilisant Cauchy Schwartz $|(x_n | x)| \leq \|x_n\| \|x\| \Rightarrow \|x\|^2 \leq \|x_n\| \|x\| \Leftrightarrow \|x\| \leq \|x_n\| \Rightarrow \|x\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|x_n\|$.

□

Proposition 4. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans H . Alors $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n \rightharpoonup x$ et $\lim_n \sup \|x_n\| \leq \|x\|$

Démonstration. $(\Rightarrow) x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$ et $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ $(\Leftarrow) \|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2 \operatorname{Re}(x | x_n)$ $\lim_n \sup \|x - x_n\|^2 \leq \|x\|^2 + \lim_n \sup \|x_n\|^2 - 2 \|x\|^2$. $\lim_n \sup \|x - x_n\|^2 \leq \lim_n \sup \|x_n\|^2 - \|x\|^2 \leq 0 \Rightarrow \lim_n \sup \|x - x_n\|^2 = 0 \geq \lim_n \inf \|x - x_n\|^2 \geq 0 \Rightarrow \lim_n \sup \|x - x_n\|^2 = \lim_n \inf \|x - x_n\|^2 = \lim_n \|x\|$

□

Exemple 1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de H . Soit $D \subset H$ dense ($\bar{D} = H$). Alors $x_n \rightharpoonup x$ sur $H \Leftrightarrow (x_n|y) \rightarrow (x|y) \forall y \in D$.

Exercice 2. On considère $H = L^2(\mathbb{R}, dx)$, soit $\varphi \in H \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |\varphi|^2 dx = \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$. $H = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R})}$

Soit $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tq $\|\varphi_0\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ (sinon on pose $\varphi = \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|}$, $\|\varphi\| = 1$) On pose $\varphi_n(x) = \varphi_0(x - n)$, on veut montrer que $\varphi_n \rightharpoonup \varphi \in L^2(\mathbb{R})$ On remarque que : $\|\varphi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\varphi_0(x - n)|^2 dx$ On pose $u = x - n$: $\|\varphi_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} du |\varphi_0(u)|^2 = 1$ $\varphi_n \not\rightarrow 0 \|f_n - 0\| = 1$.

Est ce que la suite conv faiblement ? $\exists \varphi \in H, (\varphi_n|\psi) \rightarrow (\varphi|\psi) \forall \psi \in H$.

Soit $\psi : \psi(x) = 1$ ssi $x \in [-1, 1]$ $\psi(x) = 0$ sinon. $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-1}^1 1 dx = 2$ On choisit $n \geq N$ avec N tq $a + N \geq \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \psi dx = 0$ On a montré $(f_c|\psi) \rightarrow 0 = (0|\psi)$.
Question $\varphi_n \rightharpoonup 0_{L^2(\mathbb{R})}$?

Proposition 5. Soit H un espace de Hilbert $D \subset H$ dense dans $H : \bar{D} = H$. Alors soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans H , $x_n \rightharpoonup x \in H \Leftrightarrow (x_n|y) \rightarrow (x|y) \forall y \in D$.

Exercice(suite) On doit montrer que $\forall \psi \in C^2(\mathbb{R}) : (\varphi_n|\psi) \rightarrow 0$. On remarque que $\|\varphi_n\| = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ donc elle est bornée. (Suite bornée : $\exists \prod tq \forall n \|x_n\| \leq \prod$) Il suffit de montrer $(\varphi_n|\varphi) \rightarrow 0 \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrons a dernier point : $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) \varphi_n(x) dx ; \exists a, b \in \mathbb{R}, \text{supp} \psi \subset [A, B]$. On choisit tq $\text{supp} \varphi_N = [a + N, b + N]$, $a + N > B \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \psi \varphi_n = 0 \Rightarrow \lim_n (\psi|\varphi_n) = 0 = (\psi|0)$

Démonstration. Si $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ dans $H \Rightarrow \varphi_n \rightharpoonup \varphi$ dans D . Supposons que $(\varphi_n|\psi) \rightarrow (\varphi|\psi) \forall \psi \in D$. Soit $\eta \in H \exists (\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite de D tq $\lim_n \|\eta_k - \eta\| = 0$. On calcul $(\varphi_n|\eta) = (\varphi_n|\eta_k) + (\varphi_n|\eta - \eta_k)$. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists K$ tq si $k > K \|\eta - \eta_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ alors $|(\varphi_n|\eta - \eta_k)| \leq \|\varphi_n\| \|\eta - \eta_k\| \leq \prod \varepsilon$. On fixe un tel k . On conclut que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tq si $n \geq N$; $|(\varphi_n|\eta)| \leq (\prod + 1)\varepsilon \Rightarrow (\varphi_n|\eta) \rightarrow 0$. \square

Théorème 9 (1). Toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert est bornée.

Théorème 10 (2, Banach-Alaoglu-Bourbaki). Une espace de Hilbert vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass faible. De toute suite bornée de H , on peut extraire une sous suite.

Remarque. Dans \mathbb{R} , de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite c.v. (B.W.) c'est vrai si $p < +\infty$. Mais c'est faux en dimension quelconque. Le Thm 2 \succ c'est vrai au sous faible.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $H : \exists L > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N} \|x_n\| \leq L$. Soit $M = \text{vect}(x_n)$. Si M est de dimension finie, alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B_f(0_M, L) \subset M$. qui est compact \Leftrightarrow elle satisfait la propriété de B.W. $\exists (x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ sous suite et $x \in B_f(0, L)$ tq $\lim_n \|x_{k(n)} - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow x_{k(n)} \rightarrow x$ dans H . Alors le Theoreme 2 est démontré. Supposons que M n'est pas de dimension finie. M est un espace Hilbert (sous espace fermé de H) Soit $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de M . La suite $((x_n|\varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée car $|x_n|\varphi_1| \leq \|x_n\| \|\varphi_1\| \leq L \cdot 1 = L$ On applique la propriété de B.W. dans \mathbb{C} : $\exists (a_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $c_1 \in \mathbb{C}$ tq $a_{k(n)} \rightarrow c_1$ qd $n \rightarrow +\infty$ on réécrit : $a_{k(n)}$ on pose $x_{k(n)} = x'_n$. $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $(x'_n|\varphi_1) \rightarrow c_1$ qd $n \rightarrow +\infty$. 2 la suite $(x'_n|\varphi_2)$ est bornée, \exists une sous suite $(x''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $c_2 \in \mathbb{C}$ tq $(x''_n|\varphi_2) \rightarrow c_2$ qd $n \rightarrow +\infty$ etc...

Conclusion : On a construit des sous suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \dots (x''_n)_{n \in \mathbb{N}} \dots$ et des complexes $C_k, k = 1, 2, 3 \dots$ tq $(x''_n|\varphi_k) \rightarrow c_k$ qd $n \rightarrow +\infty$. (présidé diagonal de Cantor) :

on pose $z_n = x_n^n$. Montrer que $z_n \rightarrow \sum_k c_k e_k$ si $\sum_k c_k e_k$ est conv dans H . Le thm 2 est démontré. Montrons que $\sum_k c_k e_k = z \in M$ i.e (*). Puisque M est complet alors il faut montrer $S_n = \sum_{k=1}^n c_k e_k$ est de Cauchy : $\|s_n - s_m\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^m c_k e_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |c_k|^2$ (Parseval). S_n est de Cauchy $\Leftrightarrow \tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n |c_k|^2$ est de Cauchy $\Leftrightarrow \tilde{S}_n$ est convergent dans \mathbb{C} . Montrons ce dernier point. On utilise l'inégalité de Bessel. $\sum_{k=1}^N |(x_n|e_k)|^2 \leq \|z_n\|^2 \leq L^2$ mais : $(z_n|e_k) + (x_n^n|e_k) \rightarrow c_k$ qd $n \rightarrow +\infty$. puisque $(x_n^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous suite de $(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $n \geq k$.

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (x_n^2)_{n \in \mathbb{N}} \subset \dots (x_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \subset (x_n^{k+1})_{n \in \mathbb{N}} \dots x_1^1 x_2^2 \dots x_k^k$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n^n|e_k) = c_k$. Alors $\sum_{k=1}^N |c_k|^2 = \sum_{k=1}^N \lim_n |(x_n^n|e_k)|^2 = \lim_n \sum_{k=1}^N |(x_n^n|e_k)|^2 = \lim_n \sum_{k=1}^N |(z_n|e_k)|^2$ on utilisant (*) alors $\sum_{k=1}^N |c_k|^2 \leq L^2$ (par passage à la limite) Par conséquent $\sum |c_k|^2$ est convergente donc $\sum_{k \geq 1} c_k \varphi_k$ est convergente dans M . Soit $z = \sum_{k=1}^\infty c_k \varphi_k$ alors $\langle z|e_c \rangle = c_e$. Alors on a montre que $\forall C \in \mathbb{N}^* (z_n|e_c) \rightarrow c_e = \langle z|e_c \rangle$ En utilisant que $\text{vect}(e_k, k \in \mathbb{N}^*) = M$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée alors cela entraine la convergence faible sur M . $\forall y \in M : (x_n^n|y) \rightarrow (z|y)$ On a couverture une sous suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui conv faiblement sur M vers $z \in H$. On étend la propriété sur $H : M$ est un sous espace fermé on lui applique le théorème des ces projection. $\forall \eta \in HM \exists ! y_0 \in M$ projection de y sur M .

Alors $y = y_0 + (y - y_0)$ et $(x_n^n|y) = (x_n^n|y_0) + (z_n|y - y_0)$ mais $(z_n|y - y_0) = 0$. $z_n \in M$ et $y - y_0 \in \prod^\perp \Rightarrow \lim_n (z_n|y) = (z|y_0)$ (ce que l'on a démontré précédent) mais $z \in M$, donc $(z|y - y_0) = 0 : \lim_n (x_n^n|y) = (z|y_0) + (z|y - y_0) = (z|y)$ ce qui montre la conv faible sur H . \square

Théorème 11 (Completion). Si $(\mathcal{V}, (\cdot|\cdot)_{\mathcal{V}})$ est un espace préhilbertien, alors, il existe un espace de Hilbert $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot)_{\mathcal{H}})$ et une application $U : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}$ que :

1. U est bijective
2. U est linéaire
3. $(Ux|Uy)_H = (x|y)_{\mathcal{V}} \forall x \in \mathcal{V}, \forall y \in \mathcal{V}$
4. $U(\mathcal{V}) = \{Ux \mid x \in \mathcal{V}\}$ est dense dans \mathcal{H} .

Théorème 12. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ une espace préhilbertien. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille libre de E . Alors il existe une famille orthonormale de E , telle que :

- $\text{vect}((e_n)) = \text{vect}((v_n))$
- $(e_n|v_n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Procédé de Gram-Schmidt.

Soit $u_1 = v_1$, et $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$; $u_2 = v_2 - \frac{(v_2|u_1)}{\|u_1\|^2} u_1$, et $e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$; $u_3 = v_3 - \frac{(v_3|u_1)}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{(v_3|u_2)}{\|u_2\|^2} u_2$ et $e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$ etc...

Chapitre 2

Opérateurs sur un espace de Hilbert

2.1 Généralités

Soit X, Y deux espaces de Banach, on note par $L(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires de $X \rightarrow Y$, si $X = Y$ on note par $L(X)$. Dans le cas d'espace de Hilbert l'ensemble des applications linéaires $L(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ respectivement $L(\mathcal{H})$ si $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$.

$T \in L(X, Y) N(T) = \{x \in X, Tx = 0_y\}$ null of T .

$R(T) = \{y \in Y, \exists x \in X \text{ et } Tx = y\}$ range of T .

$G(T) = \{(x, Tx) \mid x \in X\}$ graphe de T .

Proposition 6. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces du Banach soit $f \in L(X, Y)$, alors les assertions suivantes ont équivalentes.

1. f est continue sur X
2. f est continue en un point $x_0 \in X$
3. $\exists C > 0$ t.q. $\forall x \in X$ on a $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$.

Démonstration. (\Rightarrow) i) \Rightarrow ii), montrons iii) \Rightarrow i) on a $\forall x, y \in X \quad \|f(x) - f(y)\|_Y = \|f(x - y)\|_Y \leq C\|x - y\|_X \Rightarrow f$ est Lipschitz sur X donc continue. Montrons ii) \Rightarrow iii) On choisit $x_0 = 0_X$ alors f est continue en 0_X . $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta(\varepsilon)$ t.q. $\forall x \in X$ et $\|x\|_X \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(0)\|_Y = \|f(x)\|_Y \leq \varepsilon$. Soit $\varepsilon = 1$, soit $\eta = \eta(1)$, $\forall x \in X$ on pose $\tilde{x} = \frac{\eta}{2} \frac{x}{\|x\|_X}$; On a $\|\tilde{x}\| = \frac{\eta}{2} \frac{1}{\|x\|_X} \|x\|_X = \frac{\eta}{2} \leq \eta \Rightarrow \|f(\tilde{x})\| \leq 1$. Mais $f(\tilde{x}) = f(\eta \frac{x}{\|x\|}) = \eta \frac{1}{\|x\|} f(x)$ et $\frac{\eta}{2\|x\|_Y} \|f(x)\|_Y \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\|_Y \leq \frac{2}{\eta} \|x\|_X$ QED. \square

Remarque. iii) $\exists C > 0$ tq $\forall x \in X : \|f(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \Leftrightarrow \left\|f\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\| \leq C$ si $\|x\|_X \neq 0$
 $\Leftrightarrow x \neq 0_X \Leftrightarrow \forall x \in X \|x\|_X = 1; \|f(x)\|_Y \leq C. f(B_f(0_X, 1)) \subset B_f(0_Y, C)$.

* Un opérateur de $X \rightarrow Y$ et une application linéaire de $X \rightarrow Y$.

* Une application linéaire $X \rightarrow Y$ continue est un opérateur borné de $X \rightarrow Y$.

* On notera par $\mathcal{B}(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs bornés de $X \rightarrow Y$.

Exp. $\mathcal{H} = \mathcal{H}' = l^2(\mathbb{Z})$ on considère l'application $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \forall u \in \mathcal{H} (Tu)(n) = u(n-1)$ shift a droite. T est linéaire : $T(\lambda u + \mu v)(n) = (\lambda u + \mu v)(n-1) = \lambda u(n-1) + \mu v(n-1) = \lambda Tu(n) + \mu Tv(n)$ T est borné (donc continue) $\forall u \in \mathcal{H} \|Tu\|_{\mathcal{H}}^2 = (Tu|Tu)_{\mathcal{H}} =$

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} Tu(n) \overline{Tu(n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(n-1) \overline{u(n-1)} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} u(e) \overline{u(e)} = \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \Rightarrow \|Tu\|_{\mathcal{H}} = \|u\|_{\mathcal{H}}$
 T est une isométrie.

$B(X, Y)$ est un espace normé, muni de la norme naturelle. $T \in B(X, Y) \quad \|T\| = \inf\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X\}$

Exercice 3. Montrer que $(*)$ définit une norme sur $B(X, Y)$.

Proposition 7. *Propriété* Soit $T \in B(X, Y)$ alors

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\|_Y, \|x\|_X = 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\|_Y, \|x\|_X \leq 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\|_Y, \|x\|_X < 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|T\| &= \inf\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X\} \\ &= \inf\{C > 0 \mid \forall x \in X : \left\|T \frac{x}{\|x\|_X}\right\|_Y \leq C\} \\ &= \inf\{C > 0 \mid \forall x \in X : \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X\} \\ &= \sup\{\|Tx\|_Y \mid \|x\|_X = 1\} \end{aligned}$$

Soit X un espace de Banach.

Proposition 8. Si Y est un espace de Banach, alors $(B(X, Y), \|\cdot\|)$ est lui même un espace de Banach.

Application : X' le dual topologique de X : $\varphi \in X'$ si $\varphi \in L(X, \mathbb{C})$ qui satisfait $\exists C > 0 \forall x \in X : |\varphi(x)| \leq C\|x\|_X$. \mathbb{C} est complet alors par la prop. 3 X' est complet.

Exercice 4. Montrer la proposition 3. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite du Cauchy des $B(X, Y)$ il faut montrer $\exists T \in B(X, Y)$ tq $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$.

2.2 Adjoint d'un opérateur

Soit $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ deux espaces de Hilbert (séparables).

Proposition 9. Soit $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, li existe $T^* \in B(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ dit opérateur adjoint qui satisfait : $\forall x \in \mathcal{H}, \forall y \in \mathcal{H}'$

$$(Tx|y) = (x|T^*y)$$

Exemple 1. $\mathcal{H} = \mathcal{H}' = l^2(\mathbb{Z})$ T shift adjointe, calculons $T^* \cdot \forall u, v \in \mathcal{H}, (Tu|v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} Tu(n) \cdot \overline{v(n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(n-1) \overline{v(n)} = \sum_{e \in \mathbb{Z}} u(e) \overline{v(e+1)} = (u|w)$ avec $w(e) = v(e+1)$. On pose $T^*v = w$.

Démonstration. Dans ces conditions $x \in \mathcal{H} \mapsto (Tx|y)$ est une forme linéaire sur \mathcal{H} comme la composition de T et $(\cdot|y)$. De plus on a que $|(Tx|y)| \leq \|Tx\|_{\mathcal{H}'} \|y\|_{\mathcal{H}} \leq \|T\| \|x\|_{\mathcal{H}} \|y\|_{\mathcal{H}'}$ $|\varphi(x)| \leq \text{const} \|x\|_{\mathcal{H}'}$, $\text{const} = \|T\| \|y\|_{\mathcal{H}'}$ alors φ est continue (bornée). D'après le Théorème de Riez $\exists ! \in \mathcal{H} \mapsto (x|z) \forall x \in \mathcal{H}$. On pose $z = T^*y$, montrons que $T^* \in B(\mathcal{H}', \mathcal{H})$. Soit $y_1, y_2 \in \mathcal{H}'$, $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ on calcule $T^*(d_1 y_1 + d_2 y_2)$:
 $\forall x \in \mathcal{H} (x|T^*(d_1 y_1 + d_2 y_2)) = (Tx|d_1 y_1 + d_2 y_2)$ (def)

$\bar{d}_1(Tx|y_1) + \bar{d}_2(Tx|y_2) = \bar{d}_1(x|T^*y_1) + \bar{d}_2(x|T^*y_2) = (x|d_1T^*y_1 + d_2T^*y_2) \Rightarrow \forall x \in \mathcal{H}(x|T^*(d_1y_1 + d_2y_2) - d_1T^*y_1 - d_2T^*y_2) = 0 \Rightarrow T^*(d_1y_1 + d_2y_2) - d_1T^*y_1 - d_2T^*y_2 = 0_{\mathcal{H}}.$

Montrons que $T^* \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \forall y \in \mathcal{H}'$. $\|T^*y\|_{\mathcal{H}}^2 = (T^*y|T^*y)_{\mathcal{H}} = (T(T^*y)|y)_{\mathcal{H}'} \Rightarrow \|T^*y\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|T(T^*y)\|_{\mathcal{H}'} \|y\|_{\mathcal{H}'} \leq \|T\| \|T^*y\|_{\mathcal{H}} \|y\|_{\mathcal{H}'} \Rightarrow \|T^*y\|_{\mathcal{H}} \leq \|T\| \|y\|_{\mathcal{H}'} \forall y \in \mathcal{H}'$ tq $T^*y \neq 0_{\mathcal{H}}$. Si $y \in N(T^*)$ on a que $0 \leq \|T\| \|y\|_{\mathcal{H}'}$ donc $T^* \in B(\mathcal{H}', \mathcal{H})$, $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Unicité. $\exists S \in B(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ tq $\forall (x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}' (Tx|y) = (x|Sy) = (x|T^*y) \Rightarrow \forall x \in \mathcal{H} (x|Sy - T^*y) = 0 \Rightarrow Sy = T^*y.$ \square

Exemple 2. $\mathcal{H} = \mathcal{H}' = L^2(\mathbb{R})$. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. On définit l'action de T sur $C_0^\infty(\mathbb{R}) \ni \varphi : T\varphi(x) = f(x)\varphi(x)$ $f \cdot \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) : T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \mapsto C_0^\infty(\mathbb{R})$. T est linéaire $\Rightarrow f\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. $T : C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ est continue. $\|T\varphi\|^2 = (T\varphi|\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)\varphi(x)\bar{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f^2(x)|\varphi(x)|^2 dx \leq \|f\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 dx \Rightarrow \|T\varphi\|^2 \leq \|f\|_\infty^2 \|\varphi\|^2$. T est continue sur $C_0^\infty(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$. T est uniformément continue car $\|T\varphi - T\psi\| = \|T(\varphi - \psi)\| \leq \|f\| \|\varphi - \psi\|$. $\|f\|_\infty$ Lipsitz. On utilise que toute applications T uniformément continue sur D et $\bar{D} = \mathcal{H}$, admet un prolongement par continuité sur \mathcal{H} défini comme : $\forall \varphi \in \mathcal{H}, \exists (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Suite de D et $\lim_n \varphi_n = \varphi$.

On pose $T\varphi = \lim_n T\varphi_n$. T est borne et $\|T\| \leq \|f\|_\infty$. $\|T\varphi\| = \lim_n \lim_n T\varphi_n T\varphi_n$ mais $\|T\varphi_n\| \leq \|f\|_\infty \|\varphi_n\|$. $\|Tf\| \leq \|f\|_\infty \|\varphi\|$. Calculons. $T^* \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H} (T\varphi|\psi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\bar{\psi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\bar{f(x)\psi(x)} dx = (\varphi|T\psi) \Rightarrow T^* = T$.

Remarque. Dans la preuve de la proposition III21 On peut inverser la rôle de T et T^* , alors on montre aussi que $\|T^*\| \geq \|T\|$ alors $\|T^*\| = \|T\|$ (ex)

Définition 15. Un opérateur $T \in B(\mathcal{H})$ est dit auto adjoint si $T = T^*$. $T \in B(\mathcal{H})$ est dit unitaire si $T \circ T^* = T^* \circ T = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$.

Remarque. Si $T = T^* \forall x \in \mathcal{H} (Tx|x) = (x|Tx) \Rightarrow (Tx|x) = \overline{(Tx|x)} \Rightarrow (Tx|x) \in \mathbb{R}$.

Définition 16. $T = T^*$ est positif si $\forall x \in \mathcal{H} (Tx|x) \geq 0$ $T = T^*$ est défini positif si $\forall x \in \mathcal{H}, x \neq 0_X (Tx|x) > 0$. T est défini positif si T est positif et $(Tx|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$.

Exemple 3. $H = l^2(\mathbb{Z})$ $\varphi \in H$ $(T_+\varphi)(n) = \varphi(n-1)$, $(T^*\varphi)(n) = \varphi(n+1) := (T_-\varphi)(n)$. On considère : $S = T_+ + T_-$. $\forall \varphi \in H : (S\varphi)(n) = \varphi(n-1) + \varphi(n+1)$. Calculons : $S^* = (T_+ + T_-)^*$:

1. Si $A, B \in B(H)$ alors $(\mu A + \lambda B)^* = \bar{\mu}A^* + \bar{\lambda}B^*$, $\forall \mu, \lambda \in \mathbb{C}$. $\forall u, v \in H ((\lambda A + \mu B)u|v) = \lambda(Au|v) + \mu(u|v) = \lambda(u|A^*v) + \mu(u|B^*v) = (u|\bar{\lambda}A^*v) + (u|\bar{\mu}B^*v) = (u|\bar{\mu}\lambda A^* + \bar{\mu}B^*|v)$ par unicité de l'adjoint on en déduit le résultat.

$$(\mu A + \lambda B)^* = \bar{\mu}A^* + \bar{\lambda}B^*$$

$$\text{Dans notre cas : } S^* = T_+^* + T_-^* = T_- + T_+ = S$$

donc S est auto-adjoint.

Remarque. $T_- = *_+ \Rightarrow *_- = +$ et $T_-^* = T_+^{**} \Rightarrow T_+ = T_+^*$

C'est vrai en général : $A^{**} = A \forall (\cdot, v) \in H \times H, (A^*u, v) = (u, A^{**}v) = (u, Av) \Rightarrow A^{**} = A$

Proposition 10. Soit H, H' 2 espaces se Hilbert. $T \in B(H, H')$ alors :

1. $N(T) = R(T^*)^\perp$
2. $\overline{R(T)} = N(T^*)$

Démonstration. $u \in N(T) \iff Tu = 0_{H'} \iff \forall v \in H' (Tu|v) = 0 \iff (u|T^*v) = 0 \iff u \in R(T^*)^\perp$ $R(T)$ n'est pas nécessairement fermé, mais $N(T^*)$ est fermé puisque le noyau d'un opérateur borné est toujours fermé alors l'égalité doit s'écrire avec $\overline{R(T)} \implies$ à finir en exercice. \square

Proposition 11. Dans les mêmes conditions que la proposition 2, si $T \in B(H)$ est inversible : T^{-1} existe et $T^{-1} \in B(H)$ on a : $(T^*)^{-1}$ existe et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Démonstration. Soit $A, B \in B(H)$; $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^* \forall \varphi \in H (A \cdot B)\varphi = A(B\varphi)$.

Si T est inversible $\implies \mathbb{1}_H T^{-1} T = T T^{-1}$. $\mathbb{1}_H^* = \mathbb{1}_H$ donc $(T^{-1} T)^* = T^* (T^{-1})^* = \mathbb{1}_H^* = \mathbb{1}_H$ Idem pour l'autre sens. \square

Proposition 12. Soit $T \in B(H)$, T autre adjoint : $T = T^*$ alors $\|T\| = \sup\{|(Tu|u)| : u \in H, \|u\| = 1\}$

Remarque. $\sup\{|(Tu|u)|, u \in H, \|u\| = 1\} = \sup\{\|Tu\|, u \in H, \|u\| = 1\}$

Démonstration. Soit $\gamma = \sup\{|(Tu|u)| : u \in H, \|u\| = 1\}$ alors on a $\forall u \in H, \|u\| = 1$ $|(Tu|u)| \leq \|T\| \implies \gamma \leq \|T\|$

l'autre sens : On utilise que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in H (T(v \pm \lambda w)|v \pm \lambda w) = (Tv|v) \pm 2\lambda \operatorname{Re}(Tv|w) + \lambda^2 \|w\|^2$.

$$|(T(v \pm \lambda w)|v \pm \lambda w)| = \underbrace{\left| \frac{T(v \pm \lambda w)}{\|v \pm \lambda w\|^2} \middle| \frac{v \pm \lambda w}{\|v \pm \lambda w\|^2} \right|}_{\gamma} \|v \pm \lambda w\|^2$$

On calcule

$$\begin{aligned} & (T(v + \lambda w)|v + \lambda w) - ((v - \lambda w)|(v - \lambda w)) = 4\lambda \operatorname{Re}(Tv|u) \\ & \implies 4|d| \cdot |\operatorname{Re}(Tv|u)| \leq |(T(v + \lambda w)|w + \lambda w)| + |(Tw - \lambda w|v - \lambda w)| \leq \varphi(\|w + \lambda w\|^2 + \|v - \lambda w\|^2) \text{ (c.f.*)} \\ & \leq 2\gamma(\|v\|^2 + \lambda^2 \|w\|^2) \\ & \implies 2\gamma\lambda^2 \|w\|^2 - 4|\lambda| \cdot |\operatorname{Re}(Tv|w)| + 2\gamma\|v\|^2 \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \implies \Delta = 12(|\operatorname{Re}(Tv|w)|^2 - \gamma^2 \|v\|^2 \|w\|^2) \leq 0 \end{aligned}$$

Supposons la dernière inégalité fautive : P a deux racines λ_1, λ_2 tq $\lambda_1 + \lambda_2 = 4 \frac{|\operatorname{Re}(Tv|w)|}{2\gamma\|w\|^2} \geq 0$ et donc une des deux racines est positive : alors $P(d) = 2\gamma\lambda^2 \|w\|^2 - 4|\lambda| |\operatorname{Re}(Tv|w)| + 2\gamma\|v\|^2$ doit changer de signe pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ce qui est absurde, $\implies (**)$.
et donc $|\operatorname{Re}(Tv|w)|^2 \leq \gamma^2 \|v\|^2 \|w\|^2$. on choisit $w = Tv : \|Tv\|^2 \leq \gamma^2 \|v\|^2 \implies \|T\| \leq \gamma$. \square

Exemple 4. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ et l'opérateur défini sur H par : $\forall \varphi \in H : (T\varphi)(x) = f(x)\varphi(x)$

(on définit T sur $C_c^\infty(\mathbb{R})$ et on étend)

On peut montrer que $\|T\| = \|f\|_\infty$

On sait que : $\|T\varphi\|^2 = \int |f(x)|^2 |\varphi(x)|^2 dx \leq \|f\|_\infty^2 \|\varphi\|^2 \implies \|T\| \leq \|f\|_\infty$

Exemple 5. En utilisant une suite bien choisie dans H , montrer que $\|T\| = \|f\|_\infty$, ici $\exists x_0$ tq $|f(x_0)| = \|f\|_\infty$. On peut choisir.

Proposition 13. Soit H, H' deux espaces de Hilbert et $T \in L(H, H')$. Alors les 4 assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de } H, \text{ tq } u_n \rightarrow u \in H \implies Tu_n \rightarrow Tu \text{ dans } H' \text{ (} T \in B(H, H') \text{)}$

(ii) $\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de } H, \text{ tq } u_n \rightharpoonup u \in H \implies Tu_n \rightharpoonup Tu \text{ dans } H'$

(iii) $\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de } H, \text{ tq } u_n \rightarrow u \in H \implies Tu_n \rightharpoonup Tu \text{ dans } H'$

Démonstration. i) \implies ii) si i) est vérifié, $T \in B(H, H')$ et donc $T^* \in B(H', H)$ tq $\forall u \in H, v \in H' (Tu|v)_H = (u|T^*v)_H$

soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans H $u_n \rightharpoonup u$ alors par (*) $\forall v \in H' : (Tu_n - Tu|v) = (T(u_n - u)|v) = (u_n - u|T^*v) \rightarrow 0$ qd $n \rightarrow \infty$ puisque $u_n \rightharpoonup u \implies Tu_n \rightharpoonup Tu$. ii) \implies iii) Supposons ii). Alors soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de H tq $u_n \rightarrow u \in H \implies u_n \rightharpoonup u \implies Tu_n \rightharpoonup Tu$.

Montrons en fin que iii) \implies i). On suppose iii) et i) faux. $\forall C > 0, \exists u \in H$ tq $\|Tu\| > C\|u\|$, on peut construire $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de H tq $\forall n \|Tu_n\| > n^2\|u_n\| \iff \left\| T \frac{u_n}{n\|u_n\|} \right\| > n$.

Conclusion : $v_n = \frac{u_n}{n\|u_n\|}$ on a donc $\|v_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ qd $n \rightarrow +\infty$, $\|Tv_n\| > n$ cette suite non borné $\implies Tu_n \not\rightarrow 0$ iii) es faux ce qui est absurde. \square

Chapitre 3

rappels sur la compacité

Soit H un espace de Hilbert, $A \subset H$ est compact si il satisfait la propriété de Belzane.- Weirstrass : De toute suite de $A : (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ il existe une sous-suite $(u_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $u \in A$ tq $u_{k(n)} \rightarrow u : \lim_n \|u_{k(n)} - u\|_H = 0$.

Exemple 1. En dimension finie les sous-ensembles compact sont les sous ensembles bornés et fermés.

Définition 17. $A \subset H$ es précompact si \bar{A} est compact A est compact si de toute suite de $A (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ il existe une sous-suite $(u_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $u \in H$ tq $u_{k(n)} \rightarrow u \in H \setminus A$

Exemple 2. En dimension finie, les sous ensembles précompact sont les sous ensembles bornes.

- Lemme 1.**
1. $A \subset H$ est précompact si $\forall \varepsilon > 0$, soit $F \subset A$ tq $\forall (x, y) \in F^2, \|x - y\| > \varepsilon \implies F$ est fini
 2. $A \subset H$ est précompact si $\forall \varepsilon > 0 \exists$ une famille finie de partie $\{E_i\}_{i \in I}$ de H , $\text{diam}(E_i) < \varepsilon$ tq $A \subset \cup_{i \in I} E_i$.

Element de preuve. Supposons i) satisfaite, $\forall \varepsilon > 0$, soit $F_\varepsilon \subset A$. Satisfaisant i) alors F est finie, supposons faux. Tout suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F ne contient aucune sous suite convergent.

A n'est pas précompact, absurde. i) \implies ii) Soit $\varepsilon > 0$ et F le sous ensemble de H tq $\forall (x, y) \in F, \|x - y\| > \varepsilon$. d'après i) F est fini $F = \{x_1 x_2 \dots x_N\} \forall x \in H \setminus F$ des $\exists x_i \in F$ tq $d(x_i, x) < \varepsilon$. (autrement $x \in F$ par hypothèse faux) $x \in B(x_i, \varepsilon) \implies A \subset \cup B(x_i, \varepsilon)$

ii) \implies i) supposons ii) $A \subset \cup_{i \in I} E_i$ avec diamètre $E_i < \varepsilon$ alors si $(x, y) \in A \times A$ et $\|x - y\| > \varepsilon \implies x \in E_i$ et $y \in E_j$ avec $i \neq j \implies F = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ avec $x_i \in E_i$. Il reste à montrer que si i) ou ii) est vérifié A est précompact. \square

Chapitre 4

Opérateurs compacts

Définition 18. Soit H, H' deux espaces de Hilbert et $T \in L(H, H')$. T est dit compact si l'image de la boule unité dans $H : B_f(0_H, 1)$ est précompact dans H' . $T(B_f(0_H, 1))$ est précompact dans H' .

Remarque. En particulier $T(B_f(0_H, 1))$ est borné dans H' , $\exists r > 0$ t.q. $T(B_f(0_H, 1)) \subset B_f(0_{H'}, r) \iff \forall x, \|x\|_H \leq 1 \implies \|Tx\|_{H'} \leq r \implies \forall x \in H, \left\| \frac{x}{\|x\|_H} \right\| = 1 \implies \left\| T \frac{x}{\|x\|_H} \right\|_{H'} \leq r \implies \|Tx\|_{H'} \leq r\|x\|$. Alors T est borné (continu).

Exemple 1. Soit $T \in L(H, H')$ continu de rang fini : $\dim R(T) < +\infty$. $\exists C > 0$ tq $\forall x \in H, \|Tx\|_{H'} \leq C\|x\|_H \implies T(B_f(0_H, 1)) \subset B_f(0_{H'}, C)$ mais $TB_f(0_H, 1) \subset R(T)$ c'est borné dans une espace de dimension finie : c'est précompact. Soit p un projecteur sur H sur sous-espace de dimension 1. $D_n = \{\lambda u, \lambda \in \mathbb{C}\} \forall x \in H : Px = (x|u)u$. Alors $\dim \mathbb{R}(P) = 1$ de plus on a que $\|Px\| = |(x|u)|\|u\| = ((x|u)u|(x|u)u)$ alors $\|Px\| \leq \|x\|\|u\|^2$ (Cauchy-Schwartz) P est continue de rang 1. Il est compact.

Proposition 14. Dans les mêmes conditions, T est compact si de tout suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H , bornée, il existe une sous-suite de $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fortement convergente dans H .

Cette proposition découle de la définition de loi precompactité.

Proposition 15. Dans le mêmes conditions, T est compact \iff pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H tq $x_n \rightharpoonup x \in H$ alors $tx_n \rightarrow Tx$ dans H' .

Remarque. — si $x_n \rightarrow x \implies Tx_n \rightarrow Tx$, T est borné
— si $x_n \rightharpoonup x \implies Tx_n \rightharpoonup Tx$, T est borné
— si $x_n \rightharpoonup x \implies Tx_n \rightarrow Tx$, T est borné
— si $x_n \rightharpoonup x \implies Tx_n \rightarrow Tx$, T est compact.

Pour démontrer la proposition 2 on utilise le lemme de Cantor.

Lemme 2. Dans u espace topologique : $x_n \rightarrow x \iff$ toute sous-suite $(x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ contient à son tour une sous suite convergent vers x .

Démonstration. Exercice.

□

Démonstration. Supposons T compact. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de H tq $x_n \rightharpoonup x$ montrons que $Tx_n \rightarrow Tx$. Soit $(x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite on pose $y_n = x_{k(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ alors $y_n \rightharpoonup x$ et puisque T est borné $Ty_n \rightarrow Tx$. D'après la proposition 1, la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors il existe une sous suite $(y_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ tq $Ty_{k(n)} \rightarrow y \notin \cdot \implies Ty_{k(n)} \rightharpoonup y$, par unicité de la limite faible alors $Tx = y$. D'après le lemme de Canter $Tx_n \rightarrow Tx$.

Réciproquement : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans H . D'après B.W. faible elle contient une suite convergente faiblement $x_{k(n)} \rightharpoonup x \in H$, Test continue : $Tx_{k(n)} \rightarrow Tx$. D'après la proposition 1, la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors : de toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contient une sous suite cv.

On notera par $B_0(H, H')$; l'ensemble de opérateurs compacts de $H \rightarrow H'$ ($B_0(H)$ si $H = H'$).

Exercice 5. Montrer que $B_0(H)$ est un sous-espace vectorielle normé de $B(H')$.

Attention. Il faut montrer en particulier que si $T_1, T_2 \in B_0(H)$, $T_1 + T_2 \in B_0(H)$.

Exercice 6. Montrer que si $T_1 \in B(H)$, $T_2 \in B(H)$; T_1, T_2 et $T_2 T_1 \in B_0(H)$.

□

Proposition 16. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $B_0(H, H')$ convergente dans $B(H, H')$: $\exists t \in B(H, H')$ tq $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$ alors $T \in B_0(H, H')$.

Remarque. $B_0(H, H')$ est une sous espace fermé de $B(H, H')$.

Corollaire 1. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $B(H, H')$ convergente vers T . Supposons que $\forall n, \dim R(T_n) < +\infty$. (opérateurs de rang fini) alors T est compact.

$$R, R^2, R^3, \dots, R^n, \dots, R^\infty = \{x_0, x_1, x_3, \dots, x_n, \dots, \dots \text{—suite}\} \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty \iff l^2(\mathbb{N}).$$

Corollaire 2. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $B(H, H')$ convergente vers T . Supposons que $\forall n, \dim R(T_n) < +\infty$ (opérateurs de rang fini) alors T est compact.

Démonstration. Soit $B = B(0_H, 1)$ la boule unité dans H montrons que TB est précompact dans H' . soit $\varepsilon > 0$ et n tq $\|T - T_n\| < \varepsilon/2$. $T_n B$ est précompact : $\exists \{E_i\}_{i \in I}$, I inie, diamètre $E_i = \{\sup \|x - y\|_{H'}, x, y \in E_i\} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ tq $T_n B \subset \cup_{i \in I} E_i$ (il rappels).

On pose $\tilde{E}_i = \{x \in H', \text{dist}(x, E_i) = \inf_{y \in E_i} \|x - y\|_{H'} \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$ $E_i \subset \tilde{E}_i$ et diamètre $\tilde{E}_i < \varepsilon$ diamètre $\tilde{E}_i = \sup\{\|x - y\|_{H'}, x, y \in \tilde{E}_i\}$
 $z, z' \in E_i \|x - y\|_H \leq \|x - z + x - z' + z' - y\| \leq \|x - z\| + \|z - z'\| + \|z' - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors soit $y = Tx$, $x \in B$, existe $i \in I$ tq $T_n x \in E_i$ mais $\|T_n x - Tx\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \implies$ distance $(tx, E + i) < \frac{\varepsilon}{2} \implies Tx \in \tilde{E}_i \implies TB \subset \cup_{i \in I} \tilde{E}_i$ il est précompact.

□

Proposition 17. Dans les mêmes conditions que la proposition précédente. $T \in B_0(H, H')$ $\iff \exists (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des $B(H, H')$, $\dim R(T_n) < +\infty$ et $T = \lim_n T_n \iff \lim_n \|T - T_n\| = 0$.

Démonstration. Le sens \Leftarrow est implique par le corollaire précédent. Montrons \implies . On suppose T compact soit $B = B_H(0, 1)$ pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie de $TB : I_\varepsilon$ tq $TB_H \subset \cup_{x_i \in I_\varepsilon} B_{H'}(x_i, \varepsilon)$ (precompactité) Soit $G = \text{vect}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \tilde{G}$. ($\dim G \leq N$). Soit P_G la projection orthogonale sur G . On pose $T_\varepsilon = P_G \circ T$, Alors $\dim \mathbb{R}(T_\varepsilon) < +\infty$, car $R(T_\varepsilon) \subset R(P_G)$.

Montrons que $\|T - T_\varepsilon\| < 2\varepsilon$. Soit $x \in B \exists x_i \in I_\varepsilon$ tq $\|Tx - x_i\| < \varepsilon$ (2), $Tx \in TB \implies \|P_G \circ Txf - P_G X_i\| \leq \|P_G\| \|Tx - x_i\| \leq \|Tx - x_i\| < \varepsilon$.

Mais $P_G x_i = x_i, x_i \in G \implies \|P_G \circ T - x_i\| < \varepsilon$ (2) (1) $\implies \|P_G \circ Tx - Tx\| < 2\varepsilon : \|T_\varepsilon x - Tx\| < 2\varepsilon \implies \|T_\varepsilon - T\| < 2\varepsilon$.

Concluez : On choisit $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*, T_\varepsilon = T_n$ et donc on a construit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $B(H, H') \dim R(T_n) < +\infty$ et $\|T - T_n\| \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0 \text{ n} \rightarrow +\infty$. \square

Exemple 2. $H = H' = l^2(\mathbb{N})$ soit $n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) = \frac{1}{n+1}$. Alors $\forall u \in H (Tu)(n) = \frac{1}{n+1} u(n)$
 $\|Tu\|^2 = \sum_{n \geq 0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2} \leq \sum_{n \geq 0}^\infty |u(n)|^2 = \|u\|^2$

T est donc une application linéaire bornée sur H . Montrons que T est compact ; en utilisant la critère de la proposition 4 : Soit $N \in \mathbb{N}^*$ soit l'opérateur $T_N : \begin{cases} (T_N u)(n) = (Tu)(n) & n \leq N \\ (T_N u)(n) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Dans ces conditions $N > 0 \ T_N u \rightsquigarrow (u(0), \frac{u(1)}{2}, \frac{u(2)}{3}, \dots, \frac{u(N)}{N+1}, 0, \dots) \sum_{i=0}^N \frac{u(i)}{i+1} e_i : (e_i(j) = \delta_{ij})$.

Alors $\dim R(T_N) = N + 1$ de rang fini. Montrent que $\lim_n \|T_N - T\| = 0$ au quel cas T est compact.

On calcule $\|T_N - T\| : \forall u \in H \| (T_N - T)u \|^2 = \sum_{n \geq 0}^\infty |(T_N - T)u(n)|^2 = \sum_{n \geq 0}^N |(T_N - T)u(n)|^2 = \sum_{n \geq N+1}^\infty |u(n)|^2 \leq \sum_{n \geq N+1}^\infty \frac{1}{(n+1)^2} |u(n)|^2 \leq \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{n \geq N+1}^\infty |u(n)|^2 \leq \frac{1}{(N+1)^2} \|u\|^2$. Alors $\|(T_N - T)u\| \leq \frac{1}{N+1} \|u\| \implies \|T_N - T\| \leq \frac{1}{N+1} \rightarrow 0 \text{ qd } N \rightarrow +\infty$.

Remarque. On définit l'opérateur X_N sur $H : \begin{cases} (X_N u)(n) = u(n) & \text{si } n \leq N \\ (X_N u)(n) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$ Alors $X_N^2 = X_N$
 X_N c'est un projecteur $\dim R(X_N) = N + 1$. Alors $T_N = X_N \circ T = X_N T$

Exemple 3. Les opérateurs Hilbert Schmidt. Soit H, H' deux espace se Hilbert, $T \in (H, H')$ tq $\sum_{k=1}^\infty \|Te_k\|^2 < +\infty$ au $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base helbertienne de H . On note par $B_2(H, H')$ l'ensemble des opérateurs Hilbert-Schmidt. $B_2(H, H')$ c'est un sous espace de $B(H, H')$ (ex) $\forall T \in B_2(H, H')$, on note $\|T\|_2 = (\sum_{k=1}^\infty \|Te_k\|^2)^{\frac{1}{2}}$. $\|\cdot\|_2$ est une norme (ex) : c'est la norme Hilbert-Schmidt et $(B_2(H, H'), \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach. De plus $\forall j \in \mathbb{N} \|Te_j\|^2 \leq \sum_{k=1}^\infty \|Te_k\|^2 \implies \|Te_j\| \leq \|T\|_2$. Plus généralement sot $u \in H, \|u\| = 1, u = \sum_{k \geq 0} \alpha_k e_k, 1 = \|u\|^2 = \sum_{k \geq 0} |\alpha_k|^2. \|Tu\|^2 = (Tu|Tu) = \sum_k (Te_k|Tu) \leq \sum_k |\alpha_k| \|Te_k\| \|Tu\| \implies \|Tu\| \leq \sum_k |\alpha_k| \|Te_k\| \leq (\sum_k |\alpha_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_k \|Te_k\|^2)^{\frac{1}{2}} = 1 \cdot \|T\|_2$ en utilisant Cauchy-Schwartz : $\|Tu\| \leq \|T\|_2 \implies \|T\| \leq \|T\|_2$.

Montrons que $B_2(H, H') \subset B_0(H, H')$. On suppose que $\sum_{n \geq 0}^\infty \|Te_k\|^2 < +\infty \iff \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_N^\infty \|Te_k\|^2 = 0$

$\forall \varepsilon \exists M t. \forall N \geq M \sum_{N \geq M}^\infty \|Te_k\|^2 \leq \varepsilon$.

Soit $T_M \in B(H, H')$ tq $(T_M u)(n) = (Tu)(n)$ si $n \leq M, (T_M u)(n) = 0$ sinon.

$\dim(R(T_M)) < +\infty$ (il est de rang finie) On a que $\|T - T_M\|^2 \leq \|T - T_M\|_2^2 = \sum_{k \geq M}^\infty \|Te_k\|^2 \rightarrow 0 \text{ qd } M \rightarrow +\infty$. L'opérateur de l'exemple 1 : $\|T\|_2^2 = \sum_{k \geq 0}^\infty \|Te_k\|^2 = \sum_{k \geq 0}^\infty \frac{1}{(k+1)^2} < +\infty$.

Exemple 4. $H = L^2(\mathbb{R})$ soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue tq $\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f(x, y)|^2 dx dy < +\infty$, soit T l'opérateur définie par $\forall \varphi \in H (T\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} dy \underbrace{f(x, y)}_{\text{noyau de } T} \varphi(y)$ T est compact. (cas important dans l'étude des EDO)

Chapitre 5

Le Théorème de Lax Milgram

Théorème 13. Soit H un espace de Hilbert et $T \in B(H)$. Supposons que $\exists \alpha > 0$ tq $\forall u \in H \quad |(Tu|u)| \geq \alpha \|u\|^2$ (T est coercif) alors T^{-1} existe, $T^{-1} \in B(H)$ et $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$.

Exemple 1. $H = L^2(\mathbb{R})$, $f \in C^0 \cap L^\infty$ $f \geq C > 0$. $(T\varphi)(x) = f(x)\varphi(x) : (T\varphi|\varphi) = \int_{\mathbb{R}} dx f(x)|\varphi(x)|^2 \geq C\|\varphi\|^2$
 T^{-1} existe, il est borné.

Démonstration. Soit $u \in H$, on a : $\|Tu\|\|u\| \geq |(Tu|u)| \geq \alpha \|u\|^2$ et donc $\|Tu\| \geq \alpha \|u\|$
(*) T est injectif, soit $u \in N(T)$, $Tu = 0_H$, alors $0 = \|Tu\| \geq \alpha \|u\| \implies \|u\| = 0 \iff u = 0_H$
 $N(T) = \{0_H\}$. Montrons que T est surjectif : $R(T)$ est fermé et $R(T)^\perp = \{e_H\} \implies R(T) = H$.

Montrons 1) Soit $(Tu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergent dans $H : \exists tq Tu_n \rightarrow u$, montrons que $u \in R(T)$, elle est de Cauchy et par (*) $\alpha \|u_n - u_p\| \leq \|Tu_n - Tu_p\|$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de Cauchy : $\exists n \in \mathbb{N} tq u_n \rightarrow u \implies Tu_n \rightarrow Tu$ Par continuité : alors $v = Tu$ et $v \in R(T)$.

Montrons 2) $R(T)^\perp = \{v \in H tq (Tu|v) = 0 \forall u \in H\}$ En particulier $(Tv|v) = 0$ mais $0 = |(Tv|v)| \geq \alpha \|v\|^2 \implies \|v\| = 0 \iff v = 0_H : R(T)^\perp = \{0_H\}$. \square

Chapitre 6

Eléments spectraux

H désigné un espace de Hilbert, $T \in B(H)$.

- Définition 19.** 1. On appelle en ensemble résolvant de T que l'on note $\rho(T) = \{z \in \mathbb{C}, (T - z\mathbb{1}_H)^{-1} \in B(H)\}$
2. Le spectre de T , $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$
3. $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de T si $\exists u \in H, u \neq 0_H$ et $Tu = \lambda u$ dans ces conditions $N(T - \lambda\mathbb{1}_H)$ est le sous espace propre associée $u \in N(T - \lambda\mathbb{1}_H)$ est le vecteur propre associée à λ .

Remarque. — si λ est valeur propre de $T : N(T - \lambda\mathbb{1}_H) \neq \{0_H\} \iff T - \lambda\mathbb{1}_H$ est non injectif donc non inversible $\implies \lambda \in \sigma(T)$.

— le cas de la dimension finie : $\dim H = n$ alors $T \in L(H) = B(H)$ est représenté par matrice : $\text{Mat}(T) \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. dans ce cas T n'a que des valeurs propres que sont solution ; de $P(\lambda) = \det(\cdot T - \lambda B_H) = 0 \iff T - \lambda\mathbb{1}_H$ est non inversible.

Exemple 1. Soit $T \in B(H) T = T^*$, soit $z \in \mathbb{C} ((T - z\mathbb{1}_H)u|u) = ((T - \text{Re } z\mathbb{1}_H)u|u) - i \text{Im } z \|u\|^2$. On sait que $(Tu|u) \in \mathbb{R} \implies \text{Im}((T - z\mathbb{1}_H)u|u) = -\text{Im } z \|u\|^2$ $|((T - z\mathbb{1}_H)u|u)|^2 = |(T - \text{Re } z\mathbb{1}_H)u|u|^2 + (\text{Im } z)^2 \|u\|^4 \geq (\text{Im } z)^2 \|u\|^2$.

Conclusion $\|(T - z\mathbb{1}_H)u\| \geq |\text{Im } z| \|u\|$ il est coersif : $(T - z\mathbb{1}_H)^{-1} \in B(H)$ d'après Lac Milgram. Si $\text{Im } z \neq 0 \implies \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(T) \iff \sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

En particulier les valeurs propres d'un opérateur autoadjoint sont réelles.

Exemple 2. Soit $T \in B_0(H)$, alors $0 \in \sigma(T)$. Supposons faux $0 \in \rho(T) \iff (T - 0\mathbb{1}_H)^{-1} = T^{-1}$ existe et $T^{-1} \in B(H)$. Alors $\mathbb{1} = TT^{-1} \in B_0(H)$. Produit d'un Borel et d'un compact $\implies \mathbb{1}_H B(0_H, 1) = B(0_H, 1)$ est précompact dans H ce qui n'est vrai que si $\dim H < +\infty$ (Théorème de Riez) dans le cas contravariant absurde.

Exemple 3. Suite : $H = \ell^2(\mathbb{N}) (Tu)(n) = \frac{1}{n+1}u(n), T \in B_0(H) 0 \in \sigma(T)$. Est ce que 0 est valeur propre de T . $\exists u? \|1\| = 1 : Tu = 0 u \neq 0_H$.

$\forall n \in \mathbb{N} Tu(n) = \frac{1}{n+1}u(n) = 0 \implies u(n) = 0 \iff u = 0_H$.

0 n'est pas valeur propre de T .

Chapitre 7

La pratique

7.1 exercice 26

- F fermé
 - $F^\perp \subset G := \{f \in E | f|_{[0,1]} = 0\}$
 - $F^\perp \supset G$
- 2) $sig \in E$, tel que $g(0) \neq 0$, par ex. $g(x) = 1 - |x|$. Comme $f(0) = 0$ si $f \in F$ et $h(0) = 0$ si $h \in f^\perp$, li est ´vident que g ne peut pas s’´crire comme somme d’une fonction de F et d’une fonction de F^\perp . Donc $g \notin F + F^\perp$, et donc $E \neq F + F^\perp$. Ceci bien possible, car E muni la norme L^2 , n’est par un Hilbert.

Remarque. Si on remplace E par l’espace complété $L^2([-1, 1])$, alors, si F un espace vectoriel fermé, alors on a : $F + F^\perp = L^2([-1, 1])$.

7.2 Exercice 2.11

Famille maximale (espace pr  hilbert) Famille totale (espace hilbert) Bases Hilbertienne (espace hilbert)

- Base Hilbertienne $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{e_n\}$ est une famille orthonormée $(e_i | e_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$
- et $\overline{\text{vect } \{e_n\}} = E$ (famille totale).
- $L^2([-\pi, \pi]) = \{\cos(nx), \sin(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ —une base.
- $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \cos(nx) + \mu_n \sin(nx)$
- On a bien $\|u\|_{l^2} = \sum_n (\frac{1}{n})^2 \leq +\infty$.
- (1) soit $v \in F$, donc il existe une famille finie. $(\lambda_k)_{k \in J}$ ($J \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$) et μ tel que $v = \mu u + \sum_{k \in J} \lambda_k e_k$. Si $\forall i \geq 2, (v | e_i) = 0$, alors : Soit $e_0 \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) \setminus J$. Alors $(v | e_{i_0}) = 0 \implies 0 = \mu (u | e_{i_0}) + \underbrace{\sum_{k \in J} \lambda_k (e_k | e_{i_0})}_{\delta=0, \text{ car } i_0 \notin J} = \mu \frac{1}{i_0} + 0 \implies \mu = 0$.
- Soit $k_0 \in J$. $0 = (v | e_{k_0}) = \underbrace{\mu (u | e_{k_0})}_{0, \text{ car } \mu=0} + \underbrace{\sum_{k \in J} \lambda_k (e_k | e_{k_0})}_{\lambda_{k_0}}$. Donc $\forall k_0 \in J, \lambda_{k_0} = 0$.
- Donc $v = 0$. d’où, $\{e_n\}_{n \geq 2}$ et une famille maximale (elle est bien orthonormale)

(2) $\{e_n\}_{n \geq 2}$ n'est pas totale pour F , car $u \in F$, mais, u n'est pas limite d'une suite de vecteurs combinaisons linéaire des e_n ($n \geq 2$). En effet, si on avait $u = \sum_{n=2}^{+\infty} \lambda_n e_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} (\sum_{n=2}^N \lambda_n e_n)$.

Remarque. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base Hilbertienne de E Hilbert, Alors, la propriété $E = \overline{\text{vect}(\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}})}$ un vecteur est dans $\text{vect}(\{v_n\})$ si il est combinaison linéaire finie de vecteur de $\{v_n\}$.

$\overline{\text{vect } v_n} = E$, signifie que, $\forall v \in E$, v est limite de vecteurs de $\text{vect}(\{v_n\})$. On écrit $v = \lim_{N \rightarrow +\infty} (\sum_{j=0}^N \lambda_j v_j) \stackrel{\text{notation}}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j v_j$.

Exemple 1. de base algébrique, soit F =ensemble des polynômes F est un espace vectoriel. Base algébrique = $\{1, x, x^2, x^3, ..., x^n, ...\}$.

Si $(e_n)_{n \geq 2}$ était une base Hilbertienne de F , on aurait, $F \ni u = \sum_{j=2}^{+\infty} \lambda_j e_j = (\underbrace{0}_{\text{pas possible}}, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...)$, *car* $u = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$.

On a conduit une famille maximale que n'était pas totale (possible car F n'est pas complet)

7.3 exercice 2.12

H -un espace $\dim(H) < \infty \implies \exists \{\tilde{e}_n\}_{n=0}^N$ base de H, $\varphi : H \rightarrow l^2(\mathbb{N})$, $\tilde{e}_n \mapsto e_n = (0, 0, ..., 1, 0, ..) \in l^2(\mathbb{N})$

$\forall u \in H : \|u\| = \sqrt{\sum_{i=0}^N u_i^2} = \|\varphi(u)\|$
 $\dim(H) = \infty \implies \exists \{\tilde{e}_n\}_{n=0}^\infty$ base de H $\varphi : H \rightarrow l^2(\mathbb{N})$ $\tilde{e}_n \mapsto e_n = (0, ..., 0, 1, 0, 0, ...)$
 $u \in H : \|u\|^2 = \sum_{n=0}^\infty u_n^2 < \infty \implies \varphi(u) \in l^2(\mathbb{N})$ d'inégalité de Parseval. $\|u\|_u = \|\varphi(u)\|_{l^2(\mathbb{N})}$.

7.4 2.16

Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormale. D'après l'inégalité de Bessel, on a $\sum_{n=0}^\infty |(g_n|x)|^2 < +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |(g_n|x)|^2 = 0 \implies (g_n|x) \rightarrow 0 = (0, x)$ mais $\|g_n - 0\| = \|g_n\| = 1 \not\rightarrow 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Si (g_n) est orthonormale, mais n'est pas une base, alors, pour $F := \overline{\text{vect}\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$, on a : F fermé dans l'Hilbert E , donc F est un Hilbert. (g_n) base de F .

On a alors, $\forall x \in E$, $(g_n|x) = (\underbrace{g_n}_{\rightarrow 0 \text{ d'après partie 1}} |P_F x) + (g_n| \underbrace{x - P_F x}_{\in F^\perp})$

7.5 2.17

$D \subset E$, $\bar{D} = E$, E Hilbert, $u \in E$ ($u \in D$ ou non). \implies évident car $D \subset E \Leftarrow$ On suppose que $\forall y \in D$, $(u_n|g) \rightarrow (u|g) \forall \varepsilon > 0 \exists 1 = (\varepsilon, g) : \forall n \geq N(\varepsilon, g) \ (u_n - u|g) < \frac{\varepsilon}{2}$. $\forall f \in E$. $\bar{D} = E \implies \exists \{g_n\} \subset D$, $g_n \rightarrow f$, $n \rightarrow \infty \implies \exists N_\varepsilon = N(\varepsilon, f) \ \forall m \geq N_\varepsilon : \|f - f_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$. $\forall f \in E \ |(u_n - u|f)| = |(u_n - u|g_n)| + |\underbrace{(u_n - u|f - g_m)}_{\text{borne}}| \leq$

$\varepsilon/2 + c\|f - g_m\| = \varepsilon$.

Remarque. 1. $|(u_n - u|f - g_m)| \stackrel{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \|u_n - u\| \|f - g_m\| \leq \underbrace{(\|u_n\| + \|u\|)}_{\leq C \text{ borne parthdecours}} \cdot \|f -$

2. $u_n - u \rightarrow 0$, implique $(u_n - u)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée.

Chapitre 8

Exercices 3

Opérateurs bornés. (adjoint, inverse, spectre) Après Opérateurs compacts.

8.1 3.3

Soit H un espace de Hilbert séparable. Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base de H on considère l'opérateur T défini par : $forall u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n e_n, Tu := \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n e_{n+1}$. En particulier, $Te_n = e_{n+1}$.

Montrer que T est un opérateur borné, de norme.