Typesetting test $\sum_i^n \neq 60 \pm \infty \pi \triangle \neg \approx \sqrt{j} \int h \leq \geq$

$\mathbb{R}\mathbb{P}\mathbb{1}\mathbb{P}\mathfrak{S}\mathbb{P} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\mathbb{P}\mathbb{P}$ $\mathrm{d}x$

$$\alpha(x) = \begin{cases} x \\ \frac{1}{1+e^{-kx}} \\ \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{cases}$$

$\langle x \rangle$

$\chi_\rho(ghg^{-1}) = \mathrm{Tr}\big(\rho_{ghg^{-1}}\big) = \mathrm{Tr}\big(\rho_g \circ \rho_h \circ \rho_g^{-1}\big) = \mathrm{Tr}(\rho_h) \overset{\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)}{=} \chi_\rho(h)$ $\bigoplus_{x \in X}$

$\mathrm{Mat}(\rho_g) = (a_{ij}(g))_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq d}}$ et $\mathrm{Mat}(\rho'_g) = (a'_{ij}(g))_{\substack{1 \leq i' \leq d' \\ 1 \leq j' \leq d'}}$

$$\int_a^b \mathbb{R}^2 g(u,v)\,\mathrm{d}P_{XY}\,(u,v) = \iint g(u,v) f_{XY}(u,v) \mathrm{d}\lambda(u) \mathrm{d}\lambda(v)$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

$$\iiiint_V \mu(t,u,v,w)\,dt\,du\,dv\,dw$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$$

$l^2(\mathbb{N}) = \mathrm{l2n}$

Chapitre 1

cha

1.1 sec

Exemple 1. $l^2(\mathbb{N}) = \{n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) \in \mathbb{C}$ t.q. $\sum_{n\geq 0} |f(n)|^2 < \infty\}$

$l^2(\mathbb{N})$ est $\mathbb{C}$ espace. $\forall f, g \in l^2(\mathbb{N})$:

$$(f|g)_{l^2(\mathbb{N})} \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{n\geq 0} f(n)\overline{g(n)}.$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $l^2(\mathbb{N})$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > p \geq N : \quad ||f_n - f_p||_{l^2(\mathbb{N})} < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Question. $\exists f \in l^2(\mathbb{N})$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$?

$(*) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ t.q.\ \forall n > p \geq N\ ||f_n - f_p||^2 = \sum\limits_{j\geq 0} |f_n(j) - f_p(j)|^2 \leq \varepsilon^2$

$\Rightarrow \quad |f_n(j) - f_p(j)| \leq \varepsilon\ \forall j \in \mathbb{N}.$

$\Rightarrow \forall j \in \mathbb{N}\ (f_n(j))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ qui est complet, donc $\exists f(j) \in \mathbb{C}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(j) - f(j)| = 0.$

Il faut montrer que f est la limite dans $l^2(\mathbb{N})$ de la suite f_n.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ t.q. $\forall n > p \geq N\ \sum\limits_{j\geq 0} |f_n(j) - f_p(j)|^2 \leq \varepsilon^2$

$\Rightarrow \forall J \in \mathbb{N}\ \underbrace{\sum\limits_{j=0}^{J} |f_n(j) - f_p(j)|^2}_{\text{somme partielle}} \leq \varepsilon^2$, par passage à la limite sur p : $\sum_{j=0}^{J} |f_n(j) - f(j)|^2 \leq \varepsilon^2$

Conclusion : $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ telle que $\forall n \geq N\ ||f_n - f|| < \varepsilon \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f.$

Mais $f \overset{?}{\in} l^2(\mathbb{N})$.

Vérifions que $f \in l^2(\mathbb{N})$:

$(\sum_{j\geq 0} |f(j)|^2)^{1/2} = (\sum_{j\geq 0} |f_n(j) - f(j) + f(j)|^2)^{\frac{1}{2}} = ||\underbrace{f - f_n}_{\in l2n} + \underbrace{f_n}_{\in l2n}|| \leq ||f - f_n|| + ||f_n|| < +\infty.$

Theorem 1 (Projection orthogonale)**.** *Soit H un espace de Hilbert et C une partie **convexe fermée** et **non vide** de H. Alors $\forall x \in H$ $\exists ! y_0 \in C$ t.q.*

1. $\mathrm{dist}(x, C) := \inf\{d(x,y), y \in C\} = \inf\{||x-y||_H, y \in C\} = ||x - y_0||_H$
2. $\forall y \in C$ $\mathrm{Re}(x - y_0|y - y_0) \leq 0$ *!?*

y_0 est la projection orthogonale de x sur C.

Remarque.

1. *C est convexe si $\forall x, y \in C$ $[x,y] = \{tx + (1-t)y, t \in [0,1]\} \in C$*
2. *$H = \mathbb{R}^2$: $[x,y] \in C$*
3. *si $x_0 \in C$ dans le cas $y_0 = x_0$ et $\mathrm{dist}(x_0, C) = 0 = ||x_0 - x_0||_H$*

Démonstration. Notons par $d = d(x,C) > 0$ $(x \in H \setminus C)$. Soit $y, z \in C$ on pose $b = x - \frac{1}{2}(y+z)$, $c = \frac{1}{2}(y-z)$: $||b|| = ||x - \frac{1}{2}\underbrace{(y+z)}_{\in C}|| \geq d$. On a aussi $b - c = x - y$ et $b + c = x - z \Rightarrow ||x-y||^2 + ||x-z||^2 = ||b-c||^2 + ||b+c||^2 = (b-c|b-c) + (b+c|b+c) = ||b||^2 + ||c||^2 - (b|c) - (c|b) + ||b||^2 + ||c||^2 + (b|c) + (c|b)$.

$||x-y||^2 + ||x-z||^2 = 2(||b||^2 + ||c||^2) \geq 2d^2 + 2\frac{1}{4}||y-z||^2 \Rightarrow ||y-z||^2 \leq 2(||x-y||^2 - d^2) + 2(||x-z||^2 - d^2)$. Pour $n \in N$ $C_n = \{y \in C | ||x-y||^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\}$ est fermée dans H (boule fermée).

Puisque C est fermé, $C_n = \{y \in H | ||x-y||^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\} \cap C$ est fermé dans C. De plus : $\delta(n) := sup\{||y-z||, (y,z) \in C_n \times C_n\} \leq *sup\{[2(||x-y||^2 - d^2) + 2(||x-z||^2 - d^2)]^{\frac{1}{2}}, y, z \in C_n \Rightarrow \delta(n) \leq \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

H est complet et $C \subset H_x$ c est fermé. C est un espace métrique complet. Il satisfait le critère de Cantor : $\bigcap_n C_n = \{y_0\}$.

$y_0 \in \cup_n C_n$ $d^2 \leq ||x - y_0||^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}* = \mathbb{N}$
$\{0\} \Rightarrow ||x - y_0|| = d^2$.

Aadff ii) : $\forall t \in [0,1]$, $\forall \in H$ $\phi(t) = ||\underbrace{y_0 + t(y-y_0)}_{\in C} - x||^2 = ||y_0 - x||^2 + 2tRe(y_0 - x|y - y_0) + t^2||y-y_0||^2$. $\phi(0) = d^2 \leq \phi(t)$ $\forall t \in (0,1] \Rightarrow \phi'(0) \geq 0$. $\phi'(t) = 2Re(y_0 - x|y - y_0) + 2t||y - y_0||^2$. $\phi'(0) \leq 0 \Rightarrow 2Re(y_0 - x|y - y_0) \leq 0 \Rightarrow (i)$.

□

Theorem 2 (corollaire)**.** *Soit F un sous-espace* FERMÉ *de H alors : $H = F \bigoplus F^{\perp}$.*

Démonstration. — F est convexe puisque $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \forall x, y \in F$ $\alpha x + \beta y \in F \Rightarrow$
Celaeitvnai.. $\alpha = t$, $\beta = 1 - t$ $t \in [0,1]$.
On peut lu applieuer le Thm 1 :

— On a tanga.. $F + F^{\perp} \subset H$ et $F + F^{\perp} = F \bigoplus F^{\perp}$ onu si $x \in F \cap F^{\perp} \Rightarrow (x|x) = 0 = ||x||^2 \Rightarrow x = 0_H$
Soit $x \in H$, et $y_0 \in F$ sa projectien an Thegerale : $\forall d \in \mathbb{C}, y \in F, y_0 + dy \in F$ et donc $Re(x - y_0|y_0 + dy - y_0) \leq 0 \Rightarrow Re(x - y_0|dy) \leq 0$
$d = (x - y_0|y) \Rightarrow (x - y_0)$ ...
Conclusion $Re(x - y_0|dy)$.. donc $H = F \bigoplus F^{\perp}$.

□

Définition 1. Dans ces condition, l'application $P : x \in H, x = x_1 + x_2, x_1 \in F, x_2 \in F^{\perp} \overset{P}{\mapsto} x_1 \in F$. est le PROJECTION ORTHOGONAL sur F.

Exemple 1.1.1. Montrer que P est linéaire continue et satisfait $P^2 = P$.

Définition 2. Une partie A de H est dite TOTALE si le plus petit sous espace fermé contenant A et H.

H est SÉPARABLE si H admet une famille totale dénombrable.

Exemple 2. $H = l^2(\mathbb{N}) : \mathcal{F} = \{e_0, e_1, ...\}$ avec $e_j(i) = \delta_{ij} \to (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...0)$. $\mathcal{F}$ est totale. Elle est dénombrable, $l2n$ est séparable.

Theorem 3. *Soit H un espace de Hilbert et $A \subset H$:*

1. $\overline{vect(A)} = (A^{\perp})^{\perp}$
2. *A est on sous-espace alors $(A^{\perp})^{\perp} = \bar{A}$*
3. *A est totale $\Leftrightarrow A^{\perp} = \{0_H\}$*

1.2 Séries dans un espace vectoriel normé

Soit $(E, ||\cdot||_E)$ un `espace vectoriel normé` (e.v.n).

Définition 3. On appelle SÉRIE de terme général $u_n \in E$ la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de E t.q. $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n$. La série est CONVERGENTE dans $(E, ||\cdot||_E)$ si le suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans E : S — toute la somme de la somme la série.

Définition 4. Une série $\sum u_n$ est dite ABSOLUMENT CONVERGENTE (AC) si la série $\sum ||u_n||_E$ est convergente dans $\mathbb{R}^+$.

Theorem 4. *Si E est* `complet` *(espace de Banach/Hilbert) Alors toute série AC est convergente et $|| \sum\limits_{n=0}^{\infty} || \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} ||u_n||$. !?*

Démonstration. $J_n = \sum\limits_{n=0}^{N} ||u_n||$ et convergente $\Leftrightarrow (J_n)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\forall \varepsilon > 0 \, \exists K \; t.q. \, \forall N > P \geq K \Rightarrow |J_n - J_p| \leq \varepsilon$. $\sum_{j=p+1}^{N} ||u_j|| \leq \varepsilon$. meus $||S_n - S_p|| = ||\sum_{j=p+1}^{N} u_j|| \leq \sum_{j=p+1}^{N} ||u_j||$ Tnegalite trianguler.

$\Rightarrow N > p \leq K \Rightarrow ||S_N - S_P|| \leq \varepsilon \Leftrightarrow (S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E et donc convergente.

D'au the peut $||S_n|| = ||\sum_{j=0}^n u_j|| \leq \sum_{j=0}^n \leq \sum_{j=0} ||u_j|| \Rightarrow ||\sum_{j=0} u_j|| \leq \sum_{j=0} ||u_j||$. Cqfd. $\square$

Définition 5. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H est dite ORTHOGONAL si $(x_i|x_j) = 0\ \forall i \neq j$.

Theorem 5. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite orthogonal dans un espace de Hilbert H. Alors le série $\sum x_n$ est convergente $\iff \sum_{n\geq 0} ||x_n||_H^2$ est convergente et*

$$||\sum_{n\geq 0} x_n||_H^2 = \sum_{n\geq 0} ||x_n||_H^2.$$

Démonstration. $\forall\ l > p$ on a $||\sum_{n=l}^p||^2 = (\sum_n = e^p x_n | \sum_n = e^p x_n) = \sum_n, n' = l(x_n|x_n') = \sum_n = l^p ||x_n||^2$ Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\Leftrightarrow (||x_n||^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Couchy dans $\mathbb{R}$.

D'aute peut $S_N = \sum_{n\geq 0}^N x_n => ||S_N||^2 = \sum_{n\geq 0}^N ||x_n||^2$. Alors $S = limS_N = \sum x_n$ $||S||^2 = ||limNS_N||^2 = lim||S_N||^2$ par continite de la $||\cdot||$ et donc $||S||^2 = lim_N \sum_n \geq 0^N ||x_n||^2 = \sum_{n\geq 0} ||x_n||^2$ $\square$

1.3 Sases hilberienes