

$$\text{Type setting test} \sum_i^n \neq 60 \pm \infty \pi \Delta \neg \approx \sqrt{j} \int h \leq \geq$$

$$\textcolor{red}{\mathbf{RP1P6P}} \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \mathbb{P}\mathbb{P} \, \mathrm{d} x$$

$$\alpha(x)=\left\{\begin{array}{l} x\\ \frac{1}{1+e^{-kx}}\\ \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \end{array}\right.$$

$$\langle x \rangle \\ \chi_\rho(ghg^{-1})=\mathrm{Tr}\big(\rho_{ghg^{-1}}\big)=\mathrm{Tr}\big(\rho_g\circ\rho_h\circ\rho_g^{-1}\big)=\mathrm{Tr}(\rho_h)^{\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)}\chi_\rho(h)\oplus_{x\in X} \\ \mathrm{Mat}(\rho_g)=(a_{ij}(g))_{\substack{1\leq i\leq a\\ 1\leq j\leq d}} \text{ et } \mathrm{Mat}(\rho'_g)=(a'_{ij}(g))_{\substack{1\leq i'\leq a'\\ 1\leq j'\leq d'}}$$

$$\int_a^b \mathbb{R}^2 g(u,v) \, \mathrm{d} P_{XY} \left( u,v \right) = \iint g(u,v) f_{XY}(u,v) \mathrm{d} \lambda(u) \mathrm{d} \lambda(v)$$

$$\lim_{x\rightarrow\infty}f(x)$$

$$\iiint\limits_V\mu(t,u,v,w)\,dt\,du\,dv\,dw$$

$$\sum_{n=1}^\infty 2^{-n}=1$$

$$\textbf{D\'efinition 1.} \text{ Si } \textcolor{blue}{X} \text{ et } \textcolor{blue}{Y} \text{ sont 2 v.a. ou definit la COVARIANCE entre } \textcolor{blue}{X} \text{ et } \textcolor{blue}{Y} \text{ comme } \text{Cov}(\textcolor{blue}{X},\textcolor{blue}{Y}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[ (\textcolor{blue}{X} - \mathbb{E}(\textcolor{blue}{X}))(\textcolor{blue}{Y} - \mathbb{E}(\textcolor{blue}{Y})) \right] = \mathbb{E}(\textcolor{blue}{XY}) - \mathbb{E}(\textcolor{blue}{X})\mathbb{E}(\textcolor{blue}{Y}).$$



# Chapitre 1

# cha

## 1.1 sec

**Exemple 1.**  $l^2(\mathbb{N}) = \{n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \sum_{n \geq 0} |f(n)|^2 < \infty\}$   
 $l^2(\mathbb{N})$  est  $\mathbb{C}$  espace.  $\forall f, g \in l^2(\mathbb{N})$  :

$$(f|g)_{l^2(\mathbb{N})} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 0} f(n) \overline{g(n)}.$$

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $l^2(\mathbb{N})$  :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > p \geq N : \quad \|f_n - f_p\|_{l^2(\mathbb{N})} < \varepsilon. \tag{*}$$

**Question.**  $\exists f \in l^2(\mathbb{N})$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  ?

$$(??) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ t.q. } \forall n > p \geq N \quad \|f_n - f_p\|^2 = \sum_{j \geq 0} |f_n(j) - f_p(j)|^2 \leq \varepsilon^2$$

$\Rightarrow |f_n(j) - f_p(j)| \leq \varepsilon \quad \forall j \in \mathbb{N}.$   
 $\Rightarrow \forall j \in \mathbb{N} \quad (f_n(j))_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $\mathbb{C}$  qui est complet, donc  $\exists f(j) \in \mathbb{C}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(j) - f(j)| = 0.$

Il faut montrer que  $f$  est la limite dans  $l^2(\mathbb{N})$  de la suite  $f_n$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ t.q. } \forall n > p \geq N \quad \sum_{j \geq 0} |f_n(j) - f_p(j)|^2 \leq \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \forall J \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\sum_{j=0}^J |f_n(j) - f_p(j)|^2}_{\text{somme partielle}} \leq \varepsilon^2, \text{ par passage \u00e0 la limite sur } p : \sum_{j=0}^J |f_n(j) - f(j)|^2 \leq$$

$\varepsilon^2$

Conclusion :  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$  telle que  $\forall n \geq N \quad \|f_n - f\| < \varepsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f.$

Mais  $f \stackrel{?}{\in} l^2(\mathbb{N}).$

V\u00e9rifions que  $f \in l^2(\mathbb{N})$  :

$$(\sum_{j \geq 0} |f(j)|^2)^{1/2} = (\sum_{j \geq 0} |f_n(j) - f(j) + f(j)|^2)^{\frac{1}{2}} = \left\| \underbrace{f - f_n}_{\in l^{2n}} + \underbrace{f_n}_{\in l^{2n}} \right\| \leq \|f - f_n\| +$$

$$\|f_n\| < +\infty.$$

**Theorem 1** (Projection orthogonale). Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $C$  une partie convexe fermée et non vide de  $H$ . Alors  $\forall x \in H \exists ! y_0 \in C$  t.q.

1.  $\text{dist}(x, C) := \inf\{d(x, y), y \in C\} = \inf\{\|x - y\|_H, y \in C\} = \|x - y_0\|_H$
2.  $\forall y \in C \text{ Re}(x - y_0 | y - y_0) \leq 0$  !?

$y_0$  est la projection orthogonale de  $x$  sur  $C$ .

**Remarque.**

1.  $C$  est convexe si  $\forall x, y \in C [x, y] = \{tx + (1 - t)y, t \in [0, 1]\} \in C$
2.  $H = \mathbb{R}^2 : [x, y] \in C$
3. si  $x_0 \in C$  dans le cas  $y_0 = x_0$  et  $\text{dist}(x_0, C) = 0 = \|x_0 - x_0\|_H$

*Démonstration.* Notons par  $d = d(x, C) > 0$  ( $x \in H \setminus C$ ). Soit  $y, z \in C$  on pose  $b = x - \frac{1}{2}(y + z)$ ,  $c = \frac{1}{2}(y - z) : \|b\| = \|x - \underbrace{\frac{1}{2}(y + z)}_{\in C}\| \geq d$ . On a aussi  $b - c = x - y$  et

$$b + c = x - z \Rightarrow \|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 = \|b - c\|^2 + \|b + c\|^2 = (b - c | b - c) + (b + c | b + c) = \|b\|^2 + \|c\|^2 - (b | c) - (c | b) + \|b\|^2 + \|c\|^2 + (b | c) + (c | b).$$

$$\|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 = 2(\|b\|^2 + \|c\|^2) \geq 2d^2 + 2\frac{1}{4}\|y - z\|^2 \Rightarrow \|y - z\|^2 \leq 2(\|x - y\|^2 - d^2) + 2(\|x - z\|^2 - d^2). \text{ Pour } n \in \mathbb{N} \ C_n = \{y \in C | \|x - y\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\} \text{ est fermée dans } H \text{ (boule fermée).}$$

Puisque  $C$  est fermé,  $C_n = \{y \in H | \|x - y\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\} \cap C$  est fermé dans  $C$ . De plus :  $\delta(n) := \sup\{\|y - z\|, (y, z) \in C_n \times C_n\} \leq * \sup\{[2(\|x - y\|^2 - d^2) + 2(\|x - z\|^2 - d^2)]^{\frac{1}{2}}, y, z \in C_n\} \Rightarrow \delta(n) \leq \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

$H$  est complet et  $C \subset H_x$   $c$  est fermé.  $C$  est un espace métrique complet. Il satisfait le critère de Cantor :  $\bigcap_n C_n = \{y_0\}$ .

$$y_0 \in \bigcup_n C_n \ d^2 \leq \|x - y_0\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} \Rightarrow \|x - y_0\| = d^2.$$

$$\text{Aadff ii) : } \forall t \in [0, 1], \forall \in H \ \phi(t) = \underbrace{\|y_0 + t(y - y_0) - x\|^2}_{\in C} = \|y_0 - x\|^2 + 2t \text{Re}(y_0 - x | y - y_0) + t^2 \|y - y_0\|^2. \ \phi(0) = d^2 \leq \phi(t) \ \forall t \in (0, 1] \Rightarrow \phi'(0) \geq 0. \ \phi'(t) = 2 \text{Re}(y_0 - x | y - y_0) + 2t \|y - y_0\|^2. \ \phi'(0) \leq 0 \Rightarrow 2 \text{Re}(y_0 - x | y - y_0) \leq 0 \Rightarrow (i).$$

□

**Theorem 2** (corollaire). Soit  $F$  un sous-espace FERMÉ de  $H$  alors :  $H = F \oplus F^\perp$ .

*Démonstration.* —  $F$  est convexe puisque  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \forall x, y \in F \ \alpha x + \beta y \in F \Rightarrow$  Celaeitvnai..  $\alpha = t, \beta = 1 - t \ t \in [0, 1]$ .

On peut lu applieuer le Thm 1 :

$$\text{— On a tanga.. } F + F^\perp \subset H \text{ et } F + F^\perp = F \oplus F^\perp \text{ onu si } x \in F \cap F^\perp \Rightarrow (x | x) = 0 = \|x\|^2 \Rightarrow x = 0_H$$

Soit  $x \in H$ , et  $y_0 \in F$  sa projection an Thegerale :  $\forall d \in \mathbb{C}, y \in F, y_0 + dy \in F$  et donc  $\text{Re}(x - y_0 | y_0 + dy - y_0) \leq 0 \Rightarrow \text{Re}(x - y_0 | dy) \leq 0$

$$d = (x - y_0 | y) \Rightarrow (x - y_0) \dots$$

Conclusion  $\text{Re}(x - y_0 | dy) \dots$  donc  $H = F \oplus F^\perp$ .

□

**Définition 2.** Dans ces condition, l'application  $P : x \in H, x = x_1 + x_2, x_1 \in F, x_2 \in F^\perp \xrightarrow{P} x_1 \in F$ . est le PROJECTION ORTHOGONAL sur  $F$ .

**Exemple 1.1.1.** Montrer que  $P$  est linéaire continue et satisfait  $P^2 = P$ .

**Définition 3.** Une partie  $A$  de  $H$  est dite TOTALE si le plus petit sous espace fermé contenant  $A$  et  $H$ .

$H$  est SÉPARABLE si  $H$  admet une famille totale dénombrable.

**Exemple 2.**  $H = l^2(\mathbb{N}) : \mathcal{F} = \{e_0, e_1, \dots\}$  avec  $e_j(i) = \delta_{ij} \rightarrow (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ .  $\mathcal{F}$  est totale. Elle est dénombrable,  $l^2n$  est séparable.

**Theorem 3.** Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $A \subset H$  :

1.  $\overline{\text{vect}(A)} = (A^\perp)^\perp$
2.  $A$  est on sous-espace alors  $(A^\perp)^\perp = \bar{A}$
3.  $A$  est totale  $\Leftrightarrow A^\perp = \{0_H\}$

## 1.2 Séries dans un espace vectoriel normé

Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace vectoriel normé (e.v.n).

**Définition 4.** On appelle SÉRIE de terme général  $u_n \in E$  la suite  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$  de  $E$  t.q.  $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ . La série est CONVERGENTE dans  $(E, \|\cdot\|_E)$  si le suite  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$  admet une limite dans  $E$  :  $S$  — toute la somme de la somme la série.

**Définition 5.** Une série  $\sum u_n$  est dite ABSOLUMENT CONVERGENTE (AC) si la série  $\sum \|u_n\|_E$  est convergente dans  $\mathbb{R}^+$ .

**Theorem 4.** Si  $E$  est complet (espace de Banach/Hilbert) Alors toute série AC est convergente et  $\|\sum_{n=0}^\infty\| \leq \sum_{n=0}^\infty \|u_n\|$ . !?

*Démonstration.*  $J_n = \sum_{n=0}^N \|u_n\|$  et convergente  $\Leftrightarrow (J_n)_{N \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy  $\forall \varepsilon > 0 \exists K$  t.q.  $\forall N >$

$P \geq K \Rightarrow |J_n - J_p| \leq \varepsilon$ .  $\sum_{j=p+1}^N \|u_j\| \leq \varepsilon$ . meus  $\|S_n - S_p\| = \|\sum_{j=p+1}^N u_j\| \leq \sum_{j=p+1}^N \|u_j\|$  Thegalite trianguler.

$\Rightarrow N > p \leq K \Rightarrow \|S_N - S_P\| \leq \varepsilon \Leftrightarrow (S_N)_{N \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $E$  et donc convergente.

D'autre part  $\|S_n\| = \|\sum_{j=0}^n u_j\| \leq \sum_{j=0}^n \|u_j\| \leq \sum_{j=0}^n \|u_j\| \Rightarrow \|\sum_{j=0}^n u_j\| \leq \sum_{j=0}^n \|u_j\|$ .  
Cqfd.  $\square$

**Définition 6.** Une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $H$  est dite ORTHOGONALE si  $(x_i | x_j) = 0 \forall i \neq j$ .

**Theorem 5.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite orthogonale dans un espace de Hilbert  $H$ . Alors la série  $\sum x_n$  est convergente  $\iff \sum_{n \geq 0} \|x_n\|_H^2$  est convergente et

$$\|\sum_{n \geq 0} x_n\|_H^2 = \sum_{n \geq 0} \|x_n\|_H^2.$$

*Démonstration.*  $\forall l > p$  on a  $\|\sum_{n=l}^p x_n\|^2 = (\sum_{n=l}^p x_n | \sum_{n=l}^p x_n) = \sum_{n=l}^p (x_n | x_n) = \sum_{n=l}^p \|x_n\|^2$ . Alors  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy  $\iff (\|x_n\|^2)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ .

D'autre part  $S_N = \sum_{n=0}^N x_n \Rightarrow \|S_N\|^2 = \sum_{n=0}^N \|x_n\|^2$ . Alors  $S = \lim S_N = \sum x_n$   
 $\|S\|^2 = \|\lim S_N\|^2 = \lim \|S_N\|^2$  par continuité de la  $\|\cdot\|$  et donc  $\|S\|^2 = \lim_N \sum_{n=0}^N \|x_n\|^2 = \sum_{n=0}^\infty \|x_n\|^2$ .  $\square$

## 1.3 Bases Hilbertiennes

**Définition 7.** On appelle BASE HILBERTIENNE, une suite de vecteur  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

1.  $\forall n, m (x_n | x_m) = \delta_{nm}$ ,
2.  $\text{vect}\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\} = H \iff \text{vect}(x_n)_{n \in \mathbb{N}}^\perp = \{0_H\} \iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est totale.

**Theorem 6** (Inégalité de Bessel). Soit  $(x_n)$  une suite *orthonormale* ( $\forall n, m (x_n | x_m) = \delta_{nm}$ ) dans  $H$ . Alors  $\forall x \in H \sum_{n \geq 0} |(x | x_n)|^2$  est convergente et  $\sum_{n \geq 0} |(x | x_n)|^2 \leq \|x\|^2$ .

**Exemple :**  $H = l^2(\mathbb{N})$ .  $(e_n | e_m) = \sum_{k \geq 0} e_n(k) \overline{e_m(k)} = \sum_{k \geq 0} \delta_{nk} \delta_{mk} = \delta_{nm}$ . En fait on montre que  $\sum_{n \geq 0} |(e_n | x)|^2 = \|x\|^2$  c'est une base Hilbertienne.

*Démonstration.* Soit  $x \in H$  on pose  $y_i = (x | e_i) e_i$  et  $Y_N = \sum_{i=1}^N y_i$ ,  $Z_N = X - Y_N$ . Alors :  
 $(Z_N | y_i) = (X - Y_N | y_i) = (X | y_i) - (Y_N | y_i)$ .  $(x | y) = (x | (x | e_i) e_i) = \overline{(x | e_i)} (x | e_i) = |(x | e_i)|^2$ .  
 $(Y_N | y_i) = \sum_{j=1}^N (y_j | y_i)$  mais  $y_j \perp y_i \Rightarrow (Y_N | y_i) = \|y_i\|^2$  si  $N \geq i$ . (autrement = 0)

Dans ces conditions puisque  $\|y_i\|^2 = |(x | e_i)|^2$ . Alors  $(Z_N | y_i) = 0 \Rightarrow (Z_N | Y_N) = 0$   
cas  $Y_N = \sum_{i=0}^N y_i \Rightarrow \|x\|^2 = \|Z_N\|^2 + \|Y_N\|^2$  ( $x = Z_N + Y_N$  et  $Z_N \perp Y_N$ )  $\Rightarrow \|y_n\|^2 = \sum \|y_n\|^2 \leq \|x\|^2$

La suite  $\sum_{n=0}^\infty \|y_n\|^2$  est positive, majorée donc convergente et par passage à la limite :  
 $\sum_{n=0}^\infty \|y_n\|^2 = \sum |(x | e_n)|^2 \leq \|x\|^2$ . QED  $\square$

**Theorem 7** (Egalité de Parseval). Soit  $(e_n)$  une base Hilbertienne de  $H$  alors

1. La série  $\sum_{n \geq 0} |(x | e_n)|^2$  est convergente et  $\|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} |(x | e_n)|^2$ ,

2. La série  $\sum_{n \geq 0} (x|e_i)e_i$  est convergente dans  $H$  et  $\sum_{i \geq 0} (x|e_i)e_i = x$ .

*Démonstration.* En utilisant le théorème précédent alors  $\sum |x|e_i|^2$  est convergent on utilise l'identité de la médiane :  $\sum (x|e_i)e_i$  et convergente dans  $H$  ( $||\sum (x|e_i)e_i||^2 = |\sum (x|e_i)|^2$ ). On pose  $y = \sum_{i \geq 0} (x|e_i)e_i$  alors  $||y||^2 = \sum_{i \geq 0} |x|e_i|^2$  mais  $(y|e_j) = (\sum (x|e_i)e_i|e_j) = \sum (x|e_i)(e_i|e_j) = (x|e_j)$  ... Conclusion  $\forall j \in \mathbb{N} (x|e_j) = (y|e_j) \Leftrightarrow (x - y|e_j) = 0 \Rightarrow x - y \in \text{vect}((e_n)_{n \in \mathbb{N}})^\perp \Rightarrow x - y = 0_H \Leftrightarrow x = y = \sum (x|e_i)e_i$   $\square$

**Remarque.** Si  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite orthonormal telle que  $\forall x \in H x = \sum_{i \geq 0} (x|e_i)e_i$  :  $x = \lim_N \sum_{i \geq 0}^N a_i e_i$  où  $a_i = (x|e_i) \in \mathbb{C}$   
 $\in \text{vect}\{(e_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ ;  $a_i = (x|e_i) \Rightarrow \text{vect}\{(e_n)_{n \in \mathbb{N}}\} = H$ .  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base Hilbertienne. ii)  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est base Hilbertienne de  $H \Leftrightarrow \forall x \in H : \sum (x|e_i)e_i = x$   
 $\sum (x|e_i)e_i = x \Leftrightarrow \sum |x|e_i|^2 = ||x||^2 \Leftrightarrow (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base Hilbertienne de  $H \Leftrightarrow \sum |x|e_i|^2 = ||x||^2 \forall x \in H$

Exemple (suite) :  $H = l^2(\mathbb{N})$ .  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  t.q.  $e_n(k) = \delta_{nk}$ .  
 $u \in H \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} |u(n)|^2 = ||u||^2$  mais  $u(n) = (u|e_n) = \sum u(k)e_n(k) \Leftrightarrow \sum_n \geq 0 |u(e_n)|^2 = ||u||^2$ ,  $\Rightarrow$  c'est une base Hilbertienne. !?

## 1.4 Dual d'un espace de Hilbert

On rappelle que si  $S$  est un e.v.n. une FORME LINIÈRE sur  $X$  — une application linéaire de  $X$  dans  $\mathbb{C}$  soit  $l : X \rightarrow \mathbb{C} : \forall d \in \mathbb{C} \forall x, y \in X l(x + dy) = l(x) + dl(y)$ . L'ensemble des formes linéaires de  $X$  : est un espace vectoriel  $X^*$ . On considère  $X'$  dual topologique : c'est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur  $X$  :  $\{l : (X, || \cdot ||_X) \rightarrow (\mathbb{C}, | \cdot |)\}$ .

**Exercice 1.**  $l$  est continue  $\Leftrightarrow$

$$\exists C > 0 \forall x \in X, |l(x)| \leq C||x|| \quad (*)$$

On définit  $l \in X'$ ,  $||l|| = \inf\{C > 0 \text{ t.q. } (*) \text{ est satisfait}\} = \sup\{|l(x)| \mid ||x|| = 1\}$ .  $(X', || \cdot ||)$  est un espace de Banach (un e.v.n. complet)

**Theorem 8** (Théorème de représentation de Riez). . Soit  $H$  est un espace de Hilbert  $H'$  son dual topologique. On définit  $I : H \rightarrow H'$  par  $\forall x \in H I(x) = (\cdot|x)$ . Alors  $I$  set un isomorphisme isométrique de  $H \rightarrow H'$ .

**Remarque.**  $H = \mathbb{C}^n$ , une forme linéaire sur  $\mathbb{C}^n : l. l(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, a_i \in \mathbb{C}$   
 $|l(x)| = |\sum_{i=1}^n a_i x_i| \leq \sup\{a_i\} \cdot ||x||_{\mathbb{R}^n}$ . Ici  $X^* = X' !?$

$$l(x) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$= (\bar{a}|x) \forall x \in \mathbb{C}^n \forall l \in X', \exists a \in \mathbb{C} : l(x) = (x|\bar{a})$  Généralisation à la dimension quelconque c'est le théorème de Riez :  $\forall l \in H' \exists a \in H \forall x \in H : l(x) = (x|a)$

*Démonstration.* Soit  $l \in H' l \neq 0'_h \Leftrightarrow$

$\square$

**Remarque.** Si  $l$  est anti-linéaire :  $\forall d \in \mathbb{C} \ \forall x, y \in H \ l(x + dy) = l(x) + \bar{d}l(y)$  et  $\exists u$  t.q.  
 $\forall x \in H : \ l(x) = (u|x)$