IMAT

Analyse dp

Application mécanique, optimisation probabilités, géométrie algébrique, codage orthographique, informatique. Numérique.

imath.fr

Buchitte Guy, google scholar

1. Principes généraux en optimisation 2. Analyse convexe 3. Problèmes en dualité (en dimension infinie) 4. Application en transport optimal

Problèmes du calcul des variations.

Chapitre 1

Principes généraux en optimisation

1.1 initiation

On considère des problèmes du type : $\inf\{F(u)|u \in X\}$, où X—espace vectoriel (Banach de dimension infinie) $F : u \in X \to]-\infty, +\infty]$

— Existence d'un minimisation ù

— Unicité ?

— Conditions d'optimalisés

Nécessaire ou suffisante ou des deux. Si dom $F \neq \varnothing$.

Remarque. Il existe une suite (u_n) dans X telle que $\lim_{n\to\infty} F(u_n) = \inf_X F$

Notations 1.1.1. $\operatorname{dom} F = \{u \in X|F(u) < +\infty\}$.

Si dom $F \neq \varnothing \implies \inf F < +\infty$. $\forall \alpha > \inf_X F \exists u \in X$ tel que $\inf_X F \leq F(u) < \alpha$. (u_n) est une suite minimisante.

1.2 Cas $X = \mathbb{R}^N$

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continue et C une partie fermée, non vide de $\mathbb{R}^N$.

Théorème 1. *f atteint son minimum sur C sous l'une des conditions suivantes :*

(i) *C est bornée*

(ii) $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) \leq +\infty$ *(coercitive)*

Démonstration. Soit (x_n) une suite minimalé i.e. $x_n \in C$ et $f(x_n) \to \alpha := \inf_X f$.

Cas i) $x_n \in C$ compact $\implies \exists x_{n_k}, \exists \bar{x}|x_{n_k} \to \bar{x}$. Alors $\alpha = \lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$ par continuité de f au pt $\bar{x}$

Cas ii) Soit $\beta > \alpha$. Puisque $f(x) \to +\infty$ qd $n\|x\| \to \infty$: $\exists R > 0|f(x) > \beta si\|x\| \geq R$. D'autre part $\exists N|\forall n \geq N f(x_n) \leq \beta$. Donc on a $\|x_n\| \leq R\ \forall n \geq N$ et la suite (x_n) est bornée. Donc $\exists x_{n_k}, \exists \bar{x} \in \mathbb{R}^N|x_{n_k} \to \bar{x}$. $x_{n_k} \in C$ fermé et $x_{n_k} \to \bar{x} \implies \bar{x} \in C$. donc on a : $\bar{x} \in C$ et $f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \alpha = \inf_C f$ Bien on a : $F : X \to]-\infty, +\infty]$ □

$F(x) = f(s)$ si $x \in C$ et $+\infty$ sinon, $X = \mathbb{R}^n$, $\inf_C f = \inf_X F$.

Remarque. Ici F n'est pas continue mais dans les cas i) et ii), on a $\lim_{\|x\|\to\infty} F(x) = +\infty$. En optimisation f s'appelle le critère et C est la contrainte. $F = f + \delta_C$. Où $\delta_C = 0$ si $x \in C$ et $+\infty$ sinon.

Mais F vérifie la propriété $x_n \to x \implies \liminf_{n\to\infty} F(x_n) \geq F(x)$ ($\liminf_{n\to\infty} F(x) = \liminf_{n\to\infty}[f(x_n)+\delta_C(x_n)] \geq \underbrace{\liminf_{n\to\infty} f(x_n)}_{f(x)} + \underbrace{\liminf_{n\to\infty} \delta_C(x_n)}_{\geq \delta_C(x)}$)) $\liminf_{n\to+\infty} \delta_C(x_n) \overset{?}{\geq} \delta_C(x)$.

<u>1er</u> cas $\liminf_{n\to\infty} \delta_C(x_n) < +\infty$. $\forall N \exists n > N\ x_n \in C \implies \exists x_{n_k} | x_{n_k} \in C \forall k \implies x \in C$ (C est fermé) $\implies \delta_C(x) = 0$. <u>2me</u> cas $\liminf_{n\to\infty} \delta_C(x_n) = +\infty$ trivial.

Autre preuve. $x \in C$—trivial ; $x \notin C \implies \exists N | x_n \notin C\ \forall n \geq N \implies \delta_C(x_n) = +\infty\ \forall n \geq N$.

> **Définition 1.** $F : (X,d) \to]-\infty,+\infty]$ espace métrique est Semi-Continue Inférieure au point $x \in X$ si $\forall \alpha < F(x)\ \exists R > 0 \mid d(x,y) < R \implies F(y) > \alpha$ (ou bien $\exists V$ ouvert contenant x tel que $\inf_V F > \alpha$)

> **Définition 2.** F est f.c.i sur X (f.s.c.—Fermer Semi-Continuons) si F est s.c.i. en tout point $x \in X$.

Lemme 1. *F est s.c.i. sur X si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifié :*

1. *$\forall R \in \mathbb{R} | \{F \leq R\}$ est un fermé de X ($\{F \leq R\} = \{x \in X | F(u) \leq R\}$)*
2. *L'ensemble $\operatorname{epi} F = \{(u,x) \in X \times \mathbb{R} | F(u) \leq \alpha\}$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$.*
3. *On a pour toute suite (u_n) dans X $u_n \to u \implies \liminf_{n\to\infty} F(u_n) \geq F(u)$*

$X = \mathbb{R}\ F(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \neq 0 \\ -1, \text{ si } x = 0 \end{cases}$

$\operatorname{epi} F = \{(x,\alpha), F(x) \leq \alpha\}$. $F_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq \frac{1}{n} \\ 1 - n|x|, \text{ si } 0 \leq |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$.

Théorème 2. *Soit $F : X \to]-\infty,+\infty]$ où X est un e.v.n. local compact ; F s.c.i. et coercive alors F atteint son minimum et l'ensemble ses solutions $\operatorname{Argmin} F = \{u \in X | F(x) = \inf F\}$ est un compact non vide.*

Démonstration. Soit α_n une suite de de réels telle que : $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$. $\alpha_n \to \inf_X F \alpha_n > \inf_X F$. Posons $K_n = \{u \in X | F(u) \leq \alpha_n\}$. On a :
— $K_n \neq \varnothing$ (car $\alpha_n > \inf F$)
— $K_{n+1} \subset K_n$ (car $\alpha_{n+1} < \alpha_n$)
— K_n fermé (car F est s.c.i.)
Posons $K = \cap_{n=1}^{n=+\infty} K_n$. Si $\lim_{\|u\|\to+\infty} F(u) = +\infty$, alors $\exists R > 0$. $K_n \subset \{\|u\| \leq R\}$ (c'est compact de X) $\forall n$. (car $\exists R > 0 | \|u\| > r \implies F(u) > \alpha_n \forall n$) (K_n) et une suite $\searrow$ de compacts non vides : K_n est fermé borné Donc $K = \cap K_n$ est donc un compact non vide. Or $K = \{u \in X | F(u) \leq \alpha_n \forall n\} = \{u \in X | F(u) \leq \inf_X F\} = \operatorname{Argmin} F$. □

Problème 1.2.1. *X Banach $\dim X = +\infty \implies X$ non local compact ; Idée : utiliser une topologie G plus faible que la topologie de la norme et telle que :*
— *F est G s.c.i. et $\forall \alpha | \{F \leq \alpha\}$ est G-compact.*

1.3 Cas où X est un Hilbert

Rappel. X Hilbert avec produit scalaire $(u|v)$ $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$. Soit C *convexe* fermé non vide de X ; $x \in X$ $f : y \in X \to \|x-y\|$; $\inf_{y\in C} \|x-y\| = d(x,C)$ distance de x à C.

Théorème 1. *$\exists! x^* \in C$ tel que $\|x-x^*\| = d(x,C) = \inf_{y\in C}\|x-y\|$. (ici $F(y) = \|x-y\| + \delta_C(y)$).*

Remarque. F est s.c.i. et coercive. ($\lim_{\|y\|\to+\infty} \|x-y\| = +\infty$) mais X n'est pas local compact.

Démonstration. Soit (y_n) une suite dans C telle que $\|x-y_n\| \to \alpha = d(x,C)$. Alors on montre que (y_n) est une suite de Cauchy en utilisant : $\|a-b\|^2 + \|a+b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$ $a = \frac{x-y_n}{2}$, $b = \frac{x-y_m}{2}$. donc $\frac{\|y_n-y_m\|^2}{4} + \left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 = \frac{\|x-y_n\|^2}{2} + \frac{\|x-y_m\|^2}{2} \to \alpha^2$ (C convexe $\frac{y_n+y_m}{2} \in C$ et $\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\| \geq \alpha$) □

x_1^*, x_2^* solutions $\implies$ $x_1^* + x_2^*/2$ solution. $0 \leq \left\|x - \frac{x_1^*+x_2^*}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}\|x-x_1^*\| + \frac{1}{2}\|x-x_1^*\| < \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha$

x^* est solution $\iff$ $\mathrm{Re}((x^*-x|x^*-y)) \leq 0$ $\forall y \in C$. X espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, $a(u,v)$ forme bilinéaire symétrique : $(a(v,u) = a(u,v))$. Telle que

- $|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$ (continuité) $\forall (a,v) \in X \times X$
- $\exists k > 0$ $a(u,u) \geq k\|u\|^2$ $\forall u \in X$
- f une forme linéaire continue sur X $(f \in X^*)$ (notation $\langle f,u\rangle$ au bien de $f(v)$).

Théorème 2 (Lax-Milgram). *$\exists! u \in X$ tel que $a(u,v) = \langle f,v\rangle$ $\forall v \in X$. De plus, si on pose $F(u) = \frac{1}{2}a(v,u) - \langle f,v\rangle$, on a : $F(u) \leq F(v)$ $\forall v \in X$ (i.e. $F(u) = \min_X F$) et u est l'unique minimiser de F.*

Remarque. F est continue d'après i) (exo) $\lim_{\|u\|\to\infty} F(u) = +\infty$ d'après (ii) (exo) $(F(u) \geq k\|u\|^2 - \langle f,u\rangle \geq k\|u\|_X^2 - \|f\|_{X^*}\|u\|_X)$ F est convexe.

Corollaire 1 (Stampacchia). *Soit C un convexe fermé de X et $E(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f,v\rangle$ (qui est convexe, continue, convexe sur X) $(F(v) = E(v) + \delta_C(v))$. Alors $\exists! u \in C$ tel que $E(u) = \inf_{v\in C} E(v) u$ est caractérisée par l'inéquation : $a(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle$ $\forall v \in C$.*

Remarque. On prenant $C = X$, on retrouve Lux-Milgran car $a(u,w) \geq \langle f,w\rangle$ $\forall w \in X (w = v-u)$ $\implies$ $a(u,w) = \langle f,w\rangle$.

$$a : X \times X \to \mathbb{R} \ f \in X^* \begin{cases} a(u,v) \leq M\|u\|\|v\| \\ a(u,v) \geq k\|u\|^2 \end{cases}.$$

$\inf_{u\in C}\{\frac{1}{2}a(u,u) - \langle f,u\rangle\}$ C convexe fermé de X.

$\exists! \bar{u} \in C$ tel que $\frac{1}{2}a(\bar{u},\bar{u}) - \langle f,\bar{u}\rangle \leq \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f,v\rangle$ $\forall v \in C$. Alors $a(\bar{u}, v-\bar{u}) \geq \langle f, v-\bar{u}\rangle$ $\forall v \in C$.

Remarque. La fonctionnelle $F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f,v\rangle$ est continue sur X (exo). Elle est convexe (même strictement convexe). Elle es coercive car $F(v) \geq \frac{k}{2}\|v\|_X^2 - \|f\|_{X^*}\|v\|_X$ $\implies$ $\lim_{\|v\|\to+\infty} F(v) = +\infty$. Si (u_n) est une suite minimisante sur C, alors (u_n) est bornée dans X. Mais on ne peut pas extraire une sous suite (u_{n_k}) telle que $u_{n_k} \to u$ dans X (X n'est pas loc compact).

Démonstration. (argument analogue à celui du Thm de projection dans un Hilbert)

Posons $(u|v)_a = a(u,v)$. C'est une forme bilinéaire symétrique positive : $(u|u)_a \geq k\|u\|^2 > 0$ si $u \neq 0$. Donc c'est un produit scalaire sur X. Norme associée $\|u\|_a = \sqrt{(u|u)_a}$.

Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_a$ sont équivalente car : $k\|u\|^2 \leq \|u\|_a^2 \leq M\|u\|^2$. En particulier $(X, \|\cdot\|_a)$ est un espace de Hilbert. La forme linéaire. $L : v \in X \to \langle f, v\rangle$ est continue dans $(X, \|\cdot\|_a)$. D'après Riesz :

$$\exists! u_0 \in X \text{ tel que } (u_0|v)_a = \langle f, v\rangle \; \forall v \in X.$$

D'après le Thm de projection (C est un convexe ferme de $(X, \|\cdot\|)$) :

$$\exists! \bar{u} \in C \text{ tel que } \|u_0 - \bar{u}\|_a = \inf_{u \in C} \|u_0 - v\|_a.$$

En particulier, on aura :

$$a(\bar{u} - u_0, \bar{u} - u_0) = \inf_{u \in C} a(v - u_0, v - u_0)$$

Or $\frac{1}{2}a(v-u_0, v-u_0) = \frac{a(v,v)}{2} - a(v,u_0) + \frac{a(u_0,u_0)}{2} = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v\rangle + \frac{a(u_0,u_0)}{2}$ d'où $\frac{1}{2}a(v,v) - \langle f,v\rangle \geq \frac{1}{2}a(\bar{u},\bar{u}) - \langle f, \bar{u}\rangle \; \forall v \in X$. $(\frac{1}{2}a(v-u_0,v-u_0) - \frac{a(u_0,u_0)}{2} \geq \frac{a(\bar{u}-u_0,\bar{u}-u_0)}{2} - \frac{a(u_0,u_0)}{2})$

En fait on a : $\bar{u} \in \operatorname{Argmin}_C F \iff \bar{u} = \operatorname{proj}_C u_0$.

De plus toute suite minimisante (u_n) vérifie $\|u_0 - u_n\|_d \to \inf_{u \in C} \|u_0 - v\|_a$ et donc de Cauchy pour $\|\cdot\|_a$ (donc aussi $\|\cdot\|$)

$\bar{u} sol \iff \bar{u} = \operatorname{proj}_C u_0 \iff (u_0 - \bar{u}|u_0 - v)_a \leq 0 \forall v \in C \iff a(u_0 - \bar{u}|v - u_0) \leq 0 \; \forall v \in C \iff a(\bar{u} - u_0|\bar{u} - v) \leq 0 \forall v \in C \iff a(\bar{u}, \bar{u} - v) \leq a(u_0, \bar{u} - v) \iff a(\bar{u}, v - \bar{u}) \geq a(u_0, v - \bar{u}) \iff a(\bar{u}, v - \bar{u}) \geq \langle f, v - \bar{u}\rangle \; \forall v \in C$. ☐

Remarque. Si la contrante C est un sous espace vectoriel fermé V de X on obtient :

$$\bar{u} \text{ minimise } \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v\rangle \text{ sur } X \iff a(\bar{u}, v) = \langle f, w\rangle \;\; \forall w \in V$$

Si $V = X$ on obtient l'équation $a(\bar{u}, w) = \langle f, w\rangle \forall w \in X$. $(A\bar{u}|w) = \langle f, w\rangle$ où A opérateur linéaire auto adjacent-continue de X dans X. $\implies A\bar{u} = f$

Rappel. $A \in s(X)$ $(A^* = A.)$ $a(u,v) = (Au|v)$ bilinéaire symétrique $|a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|$

Exemple 1. élémentaire. $X = \{u \in L^2(0,1) \mid u' \in L^2(0,1)\}$ $u \in X \iff u \in L^2(0,1)$ et $\exists v \in L^2(0,1)$ tel que : $\int_0^1 u\varphi' \,\mathrm{d}x = -\int_0^1 v\varphi \,\mathrm{d}x$

$\forall f \in C^1(0,1)$ et $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

- si $u \in C^1$ on trouve $v = u'$
- si u est C continue, C^1 par morceaux $u = 1$ si $x < \frac{1}{2}$ et -1 si $x > \frac{1}{2}$ $\int_0^1 u\varphi' = \int_0^{\frac{1}{2}} u\varphi' + \int_{\frac{1}{2}}^1 u\varphi' = -\int_0^1 v\varphi + (u(\frac{1}{2}+0) - u(\frac{1}{2}-0))\varphi(\frac{1}{2})$.

$(u|v) = \int_0^1 (uv + u'v') \,\mathrm{d}x$ $\|u\|^2 = \int_0^1 (|u|^2 + |u'|^2) \,\mathrm{d}x$. $u \in X \implies \exists \tilde{u} = u$ pp $|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq \|u'\|_{L^2(0,1)} \sqrt{|x-y|}$ $x < y$ $|u(x) - u(y)| = |\int_x^y u'(t) \,\mathrm{d}t| \leq \sqrt{|y-x|}\sqrt{\int_0^1 |u'|^2 \,\mathrm{d}t}$. $\inf_{\substack{v \in X \\ v(0)=v(1)=0}} [\frac{1}{2}\int_0^1 |u'|^2 \,\mathrm{d}x - \int_0^1 fv \,\mathrm{d}x]$, $f \in L^1(0,1)$.

Soit $H = \{u \in X \mid u(0) = u(1) = 0\}$. $u_n \xrightarrow{X} \implies u_n \to u$ uniformément sur $[0,1]$. C'est un sous espace fermé de X, donc un Hilbert.

Ici $a(u,v) = \int_0^1 u'v' \,\mathrm{d}x$

- $|a(u,v)| \leq \|x'\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|u\|_H \|v\|_H$

• $a(u,u) = \int_0^1 |u'|^2 \,\mathrm{d}x \overset{?}{\geq} k\|u\|_H^2$. $u(x) = u(0) + \int_0^1 u'(t)\,\mathrm{d}t \implies |u(x)| \leq \|u'\|_{L^2}\sqrt{x} \leq \|u'\|_{L^2}$ $\implies \int_0^1 |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \|u'\|_{L^2}^2 \implies \|u\|_{L^2} \leq \|u'\|_{L^2}$ si $u \in H$, Donc 2 $a(u,u) \geq \int_0^1 u'^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^1 u^2 \,\mathrm{d}x = \|u\|_H^2$.

$a(u,u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_H^2$

Lax Milgram $\implies \exists! u \in H \mid \frac{1}{2}\, u'^2 - \int_0^1 f u' \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |v'|^2 - \int_0^1 f v \,\mathrm{d}x \,\forall v \in H$.

Conclusion de la schuhcnu $a(u,v) = \langle f, v\rangle \,\forall v \in H$ $\int_0^1 u'v' \,\mathrm{d}x = \int_0^1 f v \,\mathrm{d}x, \forall v \in H (u(0) = v(1) = 0)$.

Supposons que la sol u est 2 fois dérivable sur $]0,1[$ $\int_0^1 u'v' \,\mathrm{d}x = [u'v]_0^1 - \int_0^1 u''v \,\mathrm{d}x \implies -\int u''v \,\mathrm{d}x = \int_0^1 f x \,\mathrm{d}x \,\forall v \in H \iff -u'' = f$

Ainsi

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ sur }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Posons $f(x) = \int_0^1 x f(t)\,\mathrm{d}t$ $-u' = F(x) + \lambda$. $u(0) = u(1) = 0 \implies \int_0^1 u'(t)\,\mathrm{d}t = 0 \implies \lambda = -\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x$. $u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)\,\mathrm{d}t \implies u(x) = x\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t$.

1.4 Cas où X est un Banach (non Hilbert)

On considère une topologie C sur X telle que $\forall R$ $\{u \in X \; \|u\| \leq R\}$ est C-compact.

Rappel. C est plus faible que la topologie associée a la norme.

1.4.1 Cas Importantes

— X est un Banach réflexif ($X^{**} = X$) $x \in X \to \hat{x} \in X^{**}$ ou $\hat{x}(f) = f(x) \forall f \in X^*$ (évaluation de f au point x) $\|\hat{x}\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} \hat{x}(f) = \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} f(x) = \|x\|_X$. L'application $x \in X \to \hat{x} \in X^{**}$ est une isométrie.

C=topologie faible de X. $x_n \overset{\text{faible}}{\to} x \overset{\text{def}}{\iff} \forall f \in X^*$ $f(x_n) \to f(x)$

Ex. X Hilbert sur $\mathbb{R}$ $(\cdot|\cdot)$. $f \in X^* \implies \exists y \in X \mid f(x_n) = (x_n|y)$

$x_n \overset{\text{faible}}{\to} x \iff (x_n|y) \to (x|y) \;\forall y \in X$. $x_n \overset{\text{febi}}{\to} x \iff x_n \overset{\text{faible}}{\to} x \oplus \limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$.

On a toujours : $x_n \overset{\text{faible}}{\to} x \implies \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geq x$ La fondamentale $F(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - f(x)$ est C s.c.i. pour tout $f \in X^*$.

Rappel. Dans un Banach réflexif pour tout $R > 0$, $\{x \in X \mid \|x\| \leq R\}$ est faiblement-compact. De toute suite bornée (x_n) on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) telle que il existe $x \in X$ tel que $x_{n_k} \overset{\text{faible}}{\to} x$ qd $k \to \infty$.

Exercice 1. X Hilbert $\{e_n,\; n \in \mathbb{N}\}$ borne orthonormale $\|e_n\| = 1$.

$\forall y \in X$ $(e_n|y) \implies \lim_{n\to\infty}(y|e_n) = 0 \forall y \in E e_n \rightharpoonup 0$ faiblement.

Exercice 2. $X = L^2(0,1)$ $f_n(x) = \sin(2\pi n x)$

$(f_n|g) = \int_0^1 f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x \to \int_0^1 fg$

$|\int_0^1 g(x)\sin(2\pi n x)\,\mathrm{d}x| = |\int_0^1 g'(x)\frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n}\,\mathrm{d}x| \leq \frac{C}{2\pi n} \to 0$.

$\int_0^1 g(x)\sin(2\pi n x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. $\|f_n\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$L^p(\Omega)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^N u \in L^p(\Omega) \iff \int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x < +\infty$. $\|u\|_{L^p} = (\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}} prel \in [1, +\infty[$.

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \; \exists k \mid (u|u) \leq k\}$ $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{k \mid |u(x)| \leq kpp\}$

Sii Ω est borne dans $\mathbb{R}^N$ $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ si $1 \leq q \leq p \leq +\infty$. $u \in L^\infty(\Omega) \implies \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{q\to\infty} \|u\|_{L^q(\Omega)}$

$L^p(\Omega)$ est Banach séparable $\forall p \in [1, +\infty]$. $L^p(\Omega)$ réflexif $\iff 1 < p < +\infty$.

$(L^p(\Omega))^* \sim L^{p'}(\Omega)$ si $p \in [1, +\infty[$ et $p' = \frac{p}{p-1}$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$; $p' = \infty$ si $p = 1$.

$l \in (L^p(\Omega))^* \implies \exists g \in L^{p'}(\Omega) \mid l(f) = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}x \;\forall f \in L^p(\Omega)$, $(L^p(\Omega))^{**} \sim (L^{p'}) \sim L^p(\Omega)$ si $1 < p < +\infty$.

$L^1(\Omega)$ **n'est pas réflexif** $\Omega = \mathbb{R}$ $u_n(x) = \begin{cases} n \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ $\|u_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$. $u_n \to u$ faiblement dans $L^1(\mathbb{R})$ si (définition) $\forall v \in L^\infty$ $\int_0^1 u_n v \,\mathrm{d}x \to \int_0^1 uv \,\mathrm{d}x$. Soit v continue sur $[0, 1]$.

$\int_0^1 u_n v \,\mathrm{d}x = n \int_0^{\frac{1}{n}} v(x) \,\mathrm{d}x$. Donc $\int_0^1 u_n v \,\mathrm{d}x \to v(0)$. $\langle \delta_0, v\rangle = v(0)$. Si u existe, on doit avoir $u(0) = \int uv \,\mathrm{d}x$.

2eme cas important. X est le dual d'un espace de Bansch séparable Y. $X = Y^*$ (ex. $X = L^\infty(\Omega)$, $Y = L^1(\Omega)$))(ex. $X = M_b(\mathbb{R})$, $Y = C_0(\mathbb{R})$)

On choisit pour C la topologie *-faible Soit (f_n) suite dans X^*.

> **Définition 1.** $f_n \overset{*}{\to} f \iff \forall x \in X$ $f_n(x) \to f(x)$.

Théorème 1. *$\|f_n\|_{X^*} \leq M$ $\forall n \implies \exists f_{n_k}, \exists f \in X$ tel que $f_{n_k} \overset{*}{\to} f$.*

Exemple 2. Soit (u_n) une suite dans $L^\infty(\Omega)$ (Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$). Telle que $|u_n(x)| \leq M$ pp $x \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors $\exists u \in L^\infty(\Omega)$, $\exists u_{n_k} \mid \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_{n_k} v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega uv \,\mathrm{d}x$ $\forall v \in L^1(\Omega)$.

Exemple 3. Soit (ψ_n) une suite de mesures positives bornées sur $[0, 1]$. Alors $\exists \psi$ mesure borne sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 \varphi \,\mathrm{d}\psi \to \int_0^1 \varphi \,\mathrm{d}\psi$ $\forall \varphi$ continue sur $[0, 1]$ $\psi_n = f_n \,\mathrm{d}x$ $\psi = \delta_0$

$\psi_n \overset{*}{\to} \delta_0, \psi$

X Banach G `faible` si X réflexif et `*faible` si $X = Y^\perp Y$ Banach séparable. Propreté $\|u_n\|_X \leq C \implies \exists u \in X \exists u_{nk} \mid u_{nk} \overset{G}{\to} u$

Notations : $\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ faible} \\ u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ *faible} \end{cases}$

Théorème 2. *Soit $F : X \to]-\infty, +\infty]$ telle que :*

1. *F est G s.c.i. (et $\exists u_0 \in X$ $F(u_0) < +\infty$)*
2. *$\lim_{\|u\|\to\infty} F(u) = +\infty$*

Alors $\operatorname{Argmin} F$ est un G-compact non vide de X.

Démonstration. (identique au cas X local compact) □

Remarque. La propriété i) est souvent difficile à établir même si F est continue par la topologie forte de X.

Exemple 4. $X = \{u \in C^0([0, 1]) \mid u(0) = u(1) = 0 \mid u' \in L^2(0, 1)\}$ $I =]0, 1[$ $\|u\|_X = \sqrt{\int_0^1 |u|^2 + |u'|^2 \,\mathrm{d}x}$ (ou bien $\|u\| = (\int_0^1 |u'|^2 \,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$) $(|u(x)| \leq \int_0^1 |u'(x)| \,\mathrm{d}x) \leq \|u'\|_{L^2} \implies \|u\|_{L^2} \leq \|u'\|_{L^2})$

X est Hilbert noté $H_0^1(I)$ (ou bien $W_0^{1,2}(I)$)

Choix de G. G topologie faible (X est réflexif) (ou G topologie associe a la convergence uniforme $u_n \overset{G}{\to} si \sup_I |u_n - u| \to 0$)

$u_n \rightharpoonup u$ faiblement $\iff$ def $\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \ L^2\text{-faible} \\ u_n' \rightharpoonup u' \ L^2\text{-faible} \end{cases}$

$\overset{Rellich}{\Longrightarrow}$ $u_n \to u$ uniformément. $|u_n(x) - u_n(y)| \leq \sqrt{|y-x|}\|u_n'\|_{L^2}$

Théorème 3 (Ascoli)**.** *u_n continue sur un compact équicontinue et $\forall x(u_n(x))$ bornée dans $\mathbb{R}$ $\implies$ $\exists u_{nk}$, $\exists u$ continue / $u_{nk} \to u$ uniformément.*

$\inf_{u\in X} F(u) o F(u) = \int_0^1 |1 - u'^2| \, dx + \int_0^1 u^2 \, dx$

• On a bien que $\lim_{\|u\|_X \to +\infty} F(u) = +\infty$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |(u')^2 - 1| \, dx &\geq \int_0^1 |u'|^2 - 1 \\ &\geq \|u\|_X^2 - 1 \end{aligned}$$

• F est elle faiblement s.c.i. Soit φ une fonction 1-périodique de classe C^1 telle que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ (par exemple $\varphi(x) = \sin 2\pi x$). Soit $u_n = \frac{1}{n}\varphi(nx)$. Alors $u_n(0) = u_n(1) = 0(\varphi(0) = \varphi(1) = 0)$. $u_n' = \varphi'(nx)$ $\int_0^1 |u_n|^2 \, dx = \frac{1}{n^2} \int_0^1 |\varphi(nx)|^2 \, dx \leq \frac{C}{n^2}$ où $C = \sup |\varphi^2| \implies u_n \to 0$ uniformément et dans $L^2(I)$.

$\int_0^1 |u_n'|^2 \, dx = \int_0^1 |\varphi'(nx)|^2 \, dx = \int_0^1 |\varphi'(y)|^2 \, dy$

Donc (u_n) est bornée dans X. Soit (u_{nk}) une sous-suite telle que $u_{nk} \overset{G}{\to} u$ (G=faible sans X)

Alors on a $u = 0$ d'où $u_n \overset{G}{\to} 0$ ($u_n' \to 0$ dans $L^2(I)$ faible)

Exemple 5. $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1 périodique $\int_0^1 |\psi|^2 \, dx < +\infty$. Alors $\psi_n(x) = \psi(nx)$ est une suite bornée dans $L^2(0,1)$ et bornée dans $L^1(0,1)$ et $\psi_n \to c$ faiblement dans $L^2(0,1)$ où $c = \int_0^1 \psi(y) \, dy$. En particulier si $\psi = \varphi'$ où φ est 1-périodique, on a $\psi_n \to 0$ car $\int_0^1 \psi(y) \, dy = \int_0^1 \varphi'(y) \, dy = \varphi(1) - \varphi(0) = 0$. Conclusion $u_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans X. Calculons :

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} F(u_n) &= \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 |1 - (u_n')^2|^2 \, dx \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 |1 - \varphi^2| \, dy \end{aligned}$$

$F(0) = \int_0^1 |1 - 0|^2 \, dx = 1$

Si F était G s.c.i., on aurait : $\int_0^1 |1 - (\varphi')^2| \, dx \geq 1$. $\forall \varphi$ 1-périodique avec $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

Impossible (prendre $\varphi = \frac{1}{2} - |\frac{1}{2} - x|$).

• $\inf_{u\in X} F(u) = 0$

$u_n = \frac{1}{n}\varphi(nx)$ où $\varphi(x) = x$ si $x < \frac{1}{2}$ et $1 - x$ si $x > \frac{1}{2}$ sur la période $[0,1]$

Alors $F(u_n) \to 0$ qd $n \to \infty$ car $\int_0^1 |1 - |u_n'|^2| \, dx = 0$ et $\int u_n^2 = \to 0$.

Puisque $F \geq 0$, on a donc $\inf_X F = 0$. L'infinum n'est pas atteint car $F(u) = 0 \implies \int_0^1 |1 - u'^2| \, dx + \int_0^1 |u|^2 \, dx = 0 \implies u = 0$ pp et $u' = \pm 1$ pp impossible. Donc $F(u) > 0 \; \forall u \in X$.

Raidon Théorique

Exemple 6. $X = H_0^1(0,1)$ $F(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 |u'|^2 + \int_0^1 g(u) \, dx$ où $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ est s.c.i.

$G =$ topologie faible de X ($u_n \overset{G}{\rightharpoonup} u \implies \begin{cases} u_n' \to u' \text{ faible } L^(0,1) \\ u_n \to u \text{ uniformément} \end{cases}$)

où $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ est s.c.i.

Alors F vérifie :

i G s.c.i.

ii $\lim_{\|u\|\to+\infty} F(u) = +\infty$ $(F(u) \geq \frac{1}{2}\|u'\|^2_{L^2} \geq \frac{1}{4}\|u\|^2_X)$

Soit $u_n \xrightarrow{G} u$. Alors $u_n' \to u'$ faible $\implies \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 |u_n'|^2 \geq \int_0^1 |u'|$. $(\liminf \|u_n'\| \geq \|u'\|)$
$\implies \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 g(u_n)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 (\liminf_n (g(u_n)))\,\mathrm{d}x \geq \int g(x)\,\mathrm{d}x$ (car $\liminf_{n\to\infty} g(u_n) \geq g(u)$).

Exemple 7. Ω ouvert convexe et fermé de $\mathbb{R}^d$

$k(x)$ continue : $\bar{\Omega} \to]0,+\infty[$. Soit $a, b \in \Omega$. $\sup\{u(b)-u(a) \mid u \in Lip(\Omega) |\nabla u(x)| \overset{pp}{\leq} k(x) \text{ sur } \Omega\} := M_{k,\Omega}(a,b)$

Soit $\gamma(t) : [0,1] \to \Omega \mid \gamma(0) = a et \gamma(1) = b$

$$\begin{aligned}
u(b) - u(a) = u(\gamma(1)) - u(\gamma(0)) = u(\gamma(t))|_0^1 &= \int_0^1 (u\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \nabla u(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 k(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq C\int_0^1 |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq CL(\gamma)
\end{aligned}$$

où $C = \sup_{\bar{\Omega}} k(x)$

$L(\gamma)$ =longer de la courbe

Donc $M_{k,\Omega}(a,b) < +\infty$ s'il existe une courbe de longueur finie joignant a à b.

On considère $X = Lip(\Omega) = \{u \text{ continue, } u(b) = 0 \mid \nabla u \in L^\infty(\Omega)\}$

$F : u \in X \to \begin{cases} u(a) \text{ si } |\nabla u| \leq k|x| \text{ et } u(b) = 0 \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$

$\inf_X F(u) = \inf\{u(a) \mid |\nabla u| \leq k \text{ pp sur } \Omega\ u(b) = 0\} = -M_{k,\Omega}(a,b)$

$\|u\|_X \overset{\text{def}}{=} \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}$

(si $\nabla u = 0$ pp $\implies u = \text{const} \implies u = 0$(car $u(b) = 0$))

Choix de G

$\|u_n\|_X \leq C \implies \|\nabla u_n\|_{L^\infty} \leq CL^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))^*$

Alors $\forall x |u_n(x) - u_n(y)| \leq C|x-y|$ pour y racine de x

$\implies (u_n)$ est équicontinue au point x

$u_n(b) = 0 \implies |u_n(x)| \leq CL(\gamma)$ où φ est une courbe joignant b au point x.

Alors d'après Ascoli : $\exists u_{uk}$ $\exists u$ continue $\mid u_{uk} \to u$ uniformément sur $\bar{\Omega}$ $\|\nabla u_{nk}\|_{L^\infty} \leq M$
$\implies \nabla u_{nk} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible.

G= converge uniforme sur $\bar{\Omega}$.

1. $F(u) < +\infty \implies \|u\|_X \leq \sup_\Omega k = M \implies \lim_{\|u\|\to\infty} F(u) = +\infty$
2. F est G s.c.i.

Soit (u_n) une suite telle que $u_n \to u$ uniformément et telle que $\liminf_{n\to\infty} F(u_n) < +\infty$ Il faut montrer que $\liminf F(u_n) \geq F(u)$. Quitte à extraire une sous suite, on peut suppo- ser que $\liminf_n F(u_n) = \lim_{n\to\infty} F(u_n)$. Alors $F(u_n)$ est majoré pour n assez grand et donc $\sup_n \|u_n\|_X < +\infty$. Donc on a $u_n \to u$ uniformément $|\nabla u_n| \leq M$.

On a donc $u_n(a) \to u(a)$. Montrons que $u \in X$ et $|\nabla u(x)| \leq k(x)$ pp sur Ω.

On sait que $\nabla u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u$ dans $L^\infty(\Omega)$

$\implies \int_\Omega \nabla u_n \cdot v(x) \to \int_\Omega \nabla u(x) v(x)$

$\forall v \in (L^1(\Omega))^d$ $v(x) = z\mathbb{1}_{B(x_0,\varepsilon)} z \in \mathbb{R}^2$

• $B(x_0,\varepsilon)$ boule centre dans $\Omega \implies \int_{B(x_0,\varepsilon)} (\nabla u_n(x), z) \to \int_{B(x_0,\varepsilon)} \nabla u(x), z$

$|\int_{B(x_0,\varepsilon)} \nabla u_n(x)z| \le \int_{B(x_0,\varepsilon)} \nabla|u_n(x)||z|\,\mathrm{d}x \le (\int_{B(x_0,\varepsilon)} k(x)\,\mathrm{d}x)|z|$

d'où qd $n \to \infty$ $|\int_{B(x_0,\varepsilon)} \nabla u(x)z| \le (\int_{B(x,\varepsilon)} k(x))|z|$

$\implies \frac{1}{B(x_0,\varepsilon)}|\int_{B(x_0,\varepsilon)} \nabla u_n(x)z\,\mathrm{d}x\,| \le \frac{1}{B(x_0,\varepsilon)}|\int_{B(x_0,\varepsilon)} k(x)\,\mathrm{d}x\,|z|$

D'après le Thm des points de Lebesgue pp $x_0 \in \Omega \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{B(x_0,\varepsilon)} \int_{B(x_0,\varepsilon)} \nabla u(x)z = \nabla u(x_0)z$

$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{B} \int_{B(x_0,\varepsilon)} k(x)\,\mathrm{d}x = k(x_0)$

$\nabla u(x_0)z \le k(x_0)z\ \forall z \in \mathbb{R}^d ppx_0 \in \Omega \implies |\nabla u(x_0)| \le k(x_0)ppx_0 \in \Omega$

Conclusion $u_n(a) \to u(a)$ $u_n(b)$ $\forall x \implies u(b) = 0$ $|\nabla u| \le k(x)ppx \in \Omega$

Donc $u \in X$, avec $|\nabla u| \le k$ pp et $F(u) = u(a)$.

Rappel. $F(u_n) = u_n(a)$. Donc $F(u_n) \to F(u)$ $F(u_n) \to \alpha$, $\alpha < +\infty$ $u_n \rightharpoonup u$ uniformément $\alpha = F(u)$

Ainsi F est G s.c.i. d'où existence d'une solution $u \in X$. On a : $M_{k,\Omega}(a,b) = \sup\{u(b) - u(a) \mid |\nabla u| \le k sur \Omega\} = \inf(\int_0^1 k(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\,, \gamma \in Lip(0,1,\Omega)\ \gamma(0) = a\ \gamma(1) = b)$

On a déjà vu que $u(b) - u(a) \le \int_0^1 k(\gamma)|\gamma(a)|$ si $u \in X$ et $\gamma \in Lip([0,1],\Omega)$ $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b \implies M_{\Omega,k}(a,b) \le \inf\{\int_0^1 k(\gamma)|\gamma'|\,\mathrm{d}t\,,\ \gamma(0) = a\ \gamma(1) = b\ \}$—distance géodésique.

Posons $\bar{U}(x) = -\inf\{\int_0^1 k(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\ \mid \gamma(0) = x\ \gamma(1) = b\}$

Alors $\bar{u}(b) = 0$ $-\bar{u}(a) = d_{\Omega,k}(a,b)$—distance géodésique entre a et b.

Si $|\nabla\bar{u}| \le k(x)$ pp sur Ω, alors

$M_{\Omega,k}(a,b) \ge -\bar{u}(a) = d_{\Omega,k}(a,b)$

$z\nabla\bar{u}(x) = \lim \frac{\bar{u}(x+tx)-\bar{u}(x)}{t}$

$|\bar{u}(x+tz) - \bar{u}(x)| \le \int_0^t k(x+tz)t|z|\,\mathrm{d}z \implies \nabla\bar{u}(x)z \le k(x)|z|$

$k(x) = k_1, k(x) = k_2$

$k_1|c-a| + k_2|b-c|$

Chapitre 2

Analyse Convexe

E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

2.1 Ensembles et fonctions convexes

$x, y \in E$ Notation $[x, y] = \{x + tx + ty | t \in [0, 1]\}$ $]x, y[= \{x + tx + ty | t \in]0, 1[\}$ $[x, y[= \{x + tx + ty | t \in [0, 1[\}$

Définition 1. ACE convexe si : $\forall (x, y) \in A \times A [x, y] \subset A$

Remarque. A convexe $\implies \frac{x+y}{2} \in A \forall (x, y) \in A \Leftarrow$ vrai si A est fermé pomme topologie G ($\mathbb{R}^d$) telle que $t \to (1 - t) + ty (x, y \in E)$ conime de $\mathbb{R}$ dans E.

Remarque (indication). $D = \{t \in [0, 1] | (1 - t)x + y \in A\}$ D est fermé $D \supset \{0, \frac{1}{2}, 1\} \implies D \supset \{\frac{k}{2^n}, 0 \leq k \leq 2^n\}$

Si E est un e.v.n. (G associée à la norme de E) alors

Lemme 1. *A convexe de E tel que $\neq \varnothing$. Alors $x \in$, $y \in \implies [x, y[\supset$. De plus :$^{-} = A$ et est convexe.*

Théorème 1 (properties). — *$(A_i)_{i \in I}$ famille de convexes $\implies \cup_{i \in I} A_i$ est un convexe.*

— *A convexe $\implies \begin{cases} convexe \\ \bar{A} convexe \end{cases}$*

Définition 2. $co(A)$ enveloppe convexe de $A = \cup_{\substack{Bconvex \\ B \supset A}}$ plus petit convexe contenant A. $\overline{co}(A) = \{\cup B | Bconvexe fermB \supset A\} = \overline{co(A)}$.

Si $\dim E < \infty$ ($E = \mathbb{R}^N$) Carateodory.

A fermé $\subset E$. $\overset{co(A)}{=} \{\sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i x_i | \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i = 0 \ x_i \in A\}$ compinaison convexe des vecteurs $x_1, ..., x_{N+1}$.

$N = 2$, $A = a, b, c$ $\forall x \in co(A) \exists ! \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 | \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = x, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ coordonnées barycentriques

2.2 Fonctions convexes

$f : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$

Définition 1. f convexe si $\forall (x,y) \in E \times e \forall \lambda \in [0,1] : f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ (inegalite dans $]-\infty,+\infty]$) f est strictement convexe si de plus si l'égalité entraine que $x = y$ ou bien $\lambda \in \{0,1\}$.

Alors $x + y \implies f(\frac{x+y}{2}) < \frac{1}{2}[f(x) + f(y)]$

Exemple 1. Ee.v.n. $f_p(x) = \frac{1}{p}\|x\|^p$ $1 \leq p < +\infty$ Alors f_p est convexe $\forall p \in [1,+\infty[$strictement convexe si $p > 1$
• $p = 2$ $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \frac{1}{2}\|x-y\|^2$
• $p = 1$ $y = 2x$ $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \frac{3}{2}\|x\|\frac{1}{2}(\|x\| + \|y\|) = \frac{3}{2}\|x\|$
• $p = +\infty$ $f_\infty(x) = \{_{+\infty si \|x\| > 1}^{0 si \|x\| \leq 1}$ convexe sci $E \rightarrow [0,+\infty]$

Lemme 1. *f convexe $\iff$ $epi f = \{(x,\alpha) \in E \times \mathbb{R}\ f(x) \leq \alpha\}$ est un convexe de $E \times \mathbb{R}$; f convexe sci $\iff$ $epi f$ est un convexe fermé de $e \times \mathbb{R}$.*

Remarque. f convexe $\implies \forall \alpha \in \mathbb{R}\{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\}$ est un convexe de e. $\Leftarrow$ faux, mais vrai si f ne prend que les valeurs 0 et $+\infty$)

Exemple 2. $\delta_A : x \in E \rightarrow \left\langle_{+\infty si x \notin A}^{0 si x \in A}\right|$ (indicatrice de l'ensemble A.) δ_A convexe $\implies$ A convexe .($epi(\delta_A) = A \times \mathbb{R}^+$)

2.3 Continuité des fonctions convexes

E e.v.n. sur $\mathbb{R}$. $f : E \rightarrow]-\infty,+\infty]$ convexe

Définition 1. $\operatorname{dom} f = \{x \in E \mid f(x) < +\infty\}$.

Lemme 1. *Soit V un ouvert de E tel que $\sup_V f < +\infty$. Alors f est continue, localement Lipstitzienne) sur V.*

Démonstration. Soit $x_0 \in V$ et $M = \sup_V f$ $(M < +\infty)$. Quitte à ecrire fo sous la forme $f(x) = f(x_0) + g(x - x_0)$; on peut supposer que $x_0 = 0_E$ et $f(x_0) = 0$. • V ouvert contenant $0 \implies \exists R > 0 \|\|x\| \leq R$. $f(x) \leq M$

Alors pour tout $x \in E$ telle que $\|x\| < r$ (avec $r < R$) on a : $f(\frac{R}{r}x) \leq M \implies f(\frac{r}{R}(\frac{Rx}{r}) \leq convexite = \frac{r}{R}f(\frac{Rx}{r}) + (1-\frac{r}{R})f(0) \implies f(x) \leq \frac{r}{R}M$, si$\|x\| < r$. $f(x) - f(0) \leq \frac{\|x\|R}{M}.\forall \|x\| < R \implies \limsup_{\|x\| \rightarrow 0} f(x) \leq 0 = f(0_E)$

Montrons que $\liminf_{\|x\| \rightarrow 0} f(x) \geq 0$

$z = -kx$ $(1-\lambda)x + \lambda z = 0 \implies x = \lambda(x - z) = \lambda(1+k)x$. $\lambda = \frac{1}{1+k}$, $\lambda \in]0,1[$

$\frac{k}{1+k}x + \frac{z}{1+k} = 0 \implies f(0_e) = 0 \leq \frac{k}{1+k} + \frac{1}{1+k}f(z) \implies 0 \leq \frac{k}{1+k}f(x) + \frac{m}{1+k} \implies f(x) \geq -\frac{M}{k}$ si $\|-kx\| \leq R \implies f(x) \geq -\frac{M}{\frac{R}{\|x\|}} = -\frac{M}{R}\|x\|$

Finalement on a obtenu : $|f(x) - f(0_E)| \leq \frac{M}{R}\|x\|, \forall x \in B_R$.

d'où $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} = f(0_E)$ □

Corollaire 1. *1. f convexe majorée sur toute boule de $E \implies f$ continue sur E.*

2. f est continue sur $\overset{\circ}{\text{dom}} f$ si f est s.c.i.
$\text{dom} f = \cup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x \in E \mid f(x) \leq n\}}_{fermée}$.

Baire $\overset{\circ}{\text{dom}} f \neq 0 \implies \exists n_0 \mid \overset{\circ}{\{x \in E \mid f(x) \leq n\}} \neq \varnothing, \forall n \geq n_0$. *Alors* $x \in \overset{\circ}{\text{dom}} f$ $\implies \exists n \mid x \in V_n = \{f \overset{\circ}{\leq} n\} f$ *majorée sur l'ouvert* $V_n \implies f$ *continue au pt* x.

2.4 Conjuguée de Fenchel

X e.v.n. sur $\mathbb{R}$ $f : X \to]-\infty, +\infty]$ $\text{dom} f = \{x | f(x) < +5\} \neq \varnothing$.

Définition 1. $f* : X^* \to \bar{\mathbb{R}}$ $\forall x^* \in X^* \quad \text{and} \quad f^*(x^*) = \sup\{\langle x, x^* \rangle - f(x) \mid x \in X\}$.

Remarque. Si E est un Hilbert $(X^* \sim X)$, f^* s'appelle la conjuguée de Fenchel de f. On a : $\forall x \in X \forall x^* \in X^* \quad \text{and} \quad \langle x, x^* \rangle \leq f(x) + f^*(x^*)$ inégalité de Fenchel.

• Interprétation si $X = \mathbb{R}$ $y = f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + f(\bar{x})$ ordonné de l'intersection avec $x = 0$ de la tangente au graphe de f dont la ponte est égale à x^* (il faut une tangente en dessous du graphe)

Exemple 3. — Economie $X = \mathbb{R}^n$ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ cout de fonction de quantités $x_1, x_2, ..., x_n$ de produits $A_1, A_2, ..., A_n$. $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, x_i^* =prix de vente unitaire de A_i.
Profit $= x_1 x_1^* + ... + x_n x_n^* - f(x_1, x_2, ..., x_n)$ $f^*(x^*)$=profit optimal. X Hilbert $f_p(x) = \frac{1}{p}\|x\|^p$ $1 \leq p < +\infty$. $f_1^*(x^*) = \sup_{x \in X}(x|x^*) - \|x\|$ $f^*(x^*) \geq t\|x^*\|^2 - t\|x^*\| \geq t\|x^*\|(\|x^*\| - 1) \forall t \geq 0$.
$f^*(x^*) = +\infty si \|x^*\| \leq 1$
Si $\|x^*\| \leq 1$, on a : $(x|x^*) \leq \|x\| \implies (x|x^*) - \|x\| \leq 0, \forall x \in X. \implies f^*(x^*) = 0$.
$f_1^*(x^*) = \sup_{x \in X}((x|x^*) - \|x\|) = \begin{cases} 0 si \|x^*\| \leq 1 \\ +\infty si \|x^*\| > 1 \end{cases} = f_\infty(x^*)$ où $f_\infty = \begin{cases} 0 si \|y\| \leq 1 \\ +\infty si \|y\| > 1 \end{cases} = f_\infty(x^*)$
$1 < p < +\infty$ $f_p^+(x^*) = \sup_{x \in X}\{(x|x^*) - \frac{1}{p}\|x\|^p\}$ $\forall x \in X, \exists! t \geq 0, \exists! u \in X \|u\| = 1$tel que $x = tu$
$(t = \|x\|$ et $u = \frac{1}{\|x\|})$
$f_p^*(x^*) = \sup_{\substack{t \geq 0 \\ \|u\|=1}} |t(u|x^*) - \frac{1}{p}|t|^p| = \sup_{\|u\|=1} \sup_{t \geq 0} |t(u|x^*) - \frac{1}{p}|t|^p|$
$\varphi(t) = t(u|x^*) - \frac{1}{p}t^p$ $\varphi'(t) = (u|x^*) - |t|^{p-2}t$
$\varphi'(\bar{t}) = 0 \iff |\bar{t}|^{p-2}t = (u|x^*)$
$\sup_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t) = \varphi(\bar{t}) = \bar{t}(u|x^*) - \frac{1}{p}|\bar{t}|^p = \bar{t}\bar{t}|\bar{t}|^{p-2} - \frac{1}{p}|\bar{t}|^p = |\bar{t}|^p(1 - \frac{1}{p})$.
$|\bar{t}|^{p-1} = |(u|x^*)| \implies |\bar{t}|^p = |(u|x^*)|^{\frac{p}{p-1}} = |(u|x^*)|^{p'} o(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1) \implies \sup_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t) = \frac{1}{p'}|(u|x^*)|^{p'}$ où p' est expression conjugué de p.
$f_p^*(x^*) = \sup_{\|u\|=1} \frac{1}{p'}|(u|x^*)|^{p'}$ $\sup_{\|u\|=1}(u|x^*) = \|x^*\| \implies f_p^*(x^*) = \frac{1}{p'}\|x^*\|^{p'}$ $f_p^* = f_{p'}$
Pour $p = 2$, on obtenir $f_2^* = f_2$, $f_p^* = f_{p'}$ $\forall p \in]1, +\infty[$ $f_1^* = f_\infty . f_\infty^*$?
$f_\infty^*(x^*) = \sup[(x|x^*) - f_\infty(x)] = \sup_{\|x\| \leq 1}(x|x^*) = \|x^*\| = f_1$.
Inégalité de Fenchel $\langle x, x^* \rangle \leq \frac{1}{p}\|x\|^2 + \frac{1}{p'}\|x^*\|^{p'}$ égalité $\iff x = x^{p-2}x$.

— C convexe de E $f = \delta_C(x) = \begin{cases} 0 si x \in C \\ +\infty sinon \end{cases}$ $f^*(x^*) = \delta - C^*(x^*) = \sup_{x \in C}(x|x^*)$ δ_C^* est convexe, sous additive $(\delta_C^*(x^* + y^*) \leq \delta_C^*(x^*) + \delta_C^*(y^*))$ et positivement 1-homogène : $\delta_C^*(\lambda x^*) = \lambda \delta_C^*(x^*)$ $\forall x \geq 0$.

δ_C^* est appelée fonction d'appeau de C.

Exercice 1. δ_c^* est une semi-norme si et seulement si C fermé et $-C = C$. Ce sera une norme si de plus $0 \in \dot{C}$.

2.5 Biconjuguée de Fenchel

$f : x \to]-\infty, +\infty[$ $f^{**} : X \to \bar{\mathbb{R}}$ est définie par : $f^{**}(x) = \sup\{\langle x, x^*\rangle - f^*(x^*) | x^* \in X^*\}$

Exemple 4. XHilbert $f_p = \frac{1}{p}\|x\|^p$ $1 \leq p < +\infty$ $\forall p \in [1, +\infty]$ $f_p^{**} = f_p$, $f_\infty^{**} = f_\infty$.

Théorème 1 (properties)**.** *[de f^* et f^{**}]*

1. *f^* est convexe et s.c.i. pour la topologie * faible (=faible ssi E est réflexif).*
2. $\inf_X f = -f^*(0)$ $f \leq g \implies f^* \geq g^*$
3. *$(f_i)_{i\in I}$ famille de fonctions sur X $(\inf_{i\in I} f_i)^* = \sup_{i\in I}(f_i)^*$*
4. *$f^{**} \leq f$ (mais $f^{***} = f^*$)*

Démonstration. 1) $f^*(x^*) = \sup\{\langle x, x^*\rangle - f(x) \mid x \in X\} o g_x : x^* \in E^* \to \langle x, x^*\rangle - f(x)$ affine * faiblement continue. G =topologie faible g_x affine, G-continue. Or $g^* = \sup_{x\in X} g_x$ g_x convexe, G—s.c.i. enveloppe superior de fonctions convexes s.c.i.

$f^*(0) = \sup\{-f(x) \mid x \in X\} = -\inf_X f$

$f \leq g \implies \langle x, x^*\rangle - f(x) \geq \langle x, x^*\rangle - g(x), \ \forall x \in X. \implies f^*(x^*) \geq f^*(x^*)$ 4) $(\inf_{i\in I} f_i)^*|x^*) = \sup_x |\langle x, x^*\rangle - \inf_{i\in I} f_i(x)| = \sup_x |\langle x, x^*\rangle + \sup_{i\in I} -f_i(x)| = \sup_{i\in I} \underbrace{\sup_x |\langle x, x^*}_{f_i^*(}$

5) $\langle x, x^*\rangle \leq f(x) + f^*(x^*) \forall x \in X, \forall x^* \in X^*$

Donc $\langle x, x^*\rangle - f^*(x^*) \leq f(x) \implies \underbrace{\sup_{x^*} \langle x, x^*\rangle - f^*(x^*) \leq f(x)}_{f^{**}}$ $\forall x \in X. g_x, G$ ☐

Lemme 1. $f^{**}(x) = \begin{cases} \sup\{g(x) \mid gaffinecontinueg \leq f\} \\ -\infty s'il n'existepasdetelmimisantsg \end{cases}$

Démonstration. Soit g une fonction affine continue telle que $f \geq g$. Alors $\exists x^* \in X^*$, $\exists \beta \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \langle x, x^*\rangle - \beta$ et $g \leq g \iff \langle x, x^*\rangle - \beta \leq f(x)$, $\forall x \in X$ $\iff \sup_{x\in X}(\langle x, x^*\rangle - f(x)) \leq \beta \iff f^*(x^*) \leq \beta$ ($\implies x^* \in \operatorname{dom} f^*$). Si $\operatorname{dom} f^* \neq \varnothing$ $(f^* = +\infty) \implies \nexists g$ affine continue $\leq f$. $\operatorname{dom} f^* \neq \varnothing \iff \exists g$ affine continue $\leq f$ Supposons $\operatorname{dom} f^* \neq \varnothing$ alors $\sup_{\substack{g \leq f \\ gaffine}} g(x) = \sup_{(x^*,\beta)\in E^*\times\mathbb{R}}\{\langle x, x^*\rangle - \beta \mid f^*(x^*)\} = \sup_{x^*\in \operatorname{dom} f^*} |sup_{\beta \geq f^*(x^*)} \langle x, x^*\rangle - \beta| = \sup_{x^*\in\operatorname{dom} f^*} |\langle x, x^*\rangle - f^*(x^*)| = \sup_{x\in X^*} \langle x, x^*\rangle - f^*(x^*) = f^{**}(x)$ ☐

Théorème 2. *X e.v.n. f convexe : $X \to]-\infty, +\infty]$ tel que $\exists x_0 \in X \mid f(x) < +\infty$. Alors*

1. *f s.c.i. sur $X \implies f^{**} = f$*
2. *supposons que $\operatorname{dom} f^* \neq \varnothing$ alors $f^{**} = \bar{f}$.*

où f est la plus grande fonction s.c.i. inferiore à G $(\bar{f}(x) = \sup\{g(x) \mid gs.c.i. \leq f\}) =$ $\inf_{x_n\to x} \liminf_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{r>0}(\inf_{B(u,r)} G))$

Remarque. $\operatorname{epi}\bar{f} = \overline{\operatorname{epi} f}$

Preuve de ii).

Rappel. $f^{**} \leq f \implies f^{**} \leq \bar{f}$ $f^{**}(x) = \sup\{g(x) \mid g affinecontinue \leq f\}$

Soit $x_0 \in X$ et $\alpha_0 < \bar{f}(x_0)$. Montrons que $\alpha_0 < f^{**}(x_0)$ (alors on aura $\bar{f}(x_0) \leq f^{**}(x_0)$)

Il suffit de montrer $g(x) = \langle x, x_0^* \rangle - \beta_0$ tel que $g \leq f$ et $\alpha_0 \leq g(x_0)$. $\bar{f}(x_0) > \alpha_0 \implies (x_0, \alpha_0) \notin \bar{f}$. convexe fermé de $X \times \mathbb{R}$. D'après Hahn-banach $\exists (x_0^*, \beta_0) \in X^* \times \mathbb{R}$ tel que $\langle x_0, \alpha_0 \rangle + \alpha_0\beta_0 < \gamma_0 = \inf\{\langle x, x_0^* \rangle + \alpha\beta_0\}$

en particulier $\langle x_0, x_0^* \rangle + \alpha_0\beta_0 < \langle x, x^* \rangle + \alpha\beta_0 \implies \beta_0 \leq 0$ (sinon si $f(x) < +\infty$ on peut faire $\alpha \to \infty$).

$\beta_0 < 0$ impossible car ssi $\bar{x}$ est tel que $f(\bar{x}) < +\infty$ alors $\langle x_0, x_0^* \rangle + \alpha_0\beta_0 < \langle \bar{x}, x_0^* \rangle + \alpha\beta_0$ $\forall \alpha > f(\bar{x})$ qd $\alpha \to +\infty$ on obtient une contradiction. Donc $\beta_0 \geq 0$.

1er cas $\beta_0 > 0$ On a : $\langle x_0, x_0^* \rangle + \alpha_0\beta_0 \leq \langle x, x_0^* \rangle + \beta_0 \bar{f}(x)$ $(\alpha = \bar{f}(x)) \implies \bar{f}(x) \geq \underbrace{\left\langle x_0 - x, \frac{x_0^*}{\beta} \right\rangle + \alpha_0}_{g(x) affinecontinue}$ $g(x_0) = \alpha_0$. □

$f : X \to]-\infty, +\infty]$, $\operatorname{epi} f = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R}\ f(x) \leq \alpha\}$

$\bar{f}(x) \overset{\text{def}}{=} \sup\{g(x) \mid gscig \leq f\}$

$(x_0, x_0^*) + \alpha_0\beta_0 < \inf\{\langle x, x_0^+ \rangle + \alpha\beta_0 \mid \bar{f}(x) \leq \alpha\}$

$f^{**}(x_0) \overset{?}{\geq} \bar{f}(x_0), \alpha_0 < \bar{f}(x_0)$.

où $f^{**}(x_0) = \sup\{g(x_0) \mid g$—affine continue $g \leq f\}\beta_0 \geq 0$

$\beta_0 > 0$ OK $f^{**}(x_0) \leq \alpha_0\ \forall \alpha_0 < \bar{f}(x_0) \implies f^{**}(x_0) \geq \bar{f}(x_0)$.

$\beta_0 = 0$ on va montrer que $f^{**}(x_0) = +\infty$ Par hypotese $\exists g_0$ affine continue telle que $g_0 \leq f$.

Soit $\varepsilon > 0$ et posons $\gamma_0 = \inf\{\langle x, x_0^* \rangle + 0 \mid \bar{f}(x) \leq \alpha\}$ $(\beta_0 = 0)$

On soit que $\langle x_0, x_0^* \rangle < \gamma_0$ et $\langle x, x_0^* \rangle \geq \gamma$ si $\bar{f}(x) < +\infty$.

$\langle x, x_0^* \rangle + \varepsilon f(x) \geq \gamma_0 + \varepsilon g_0(x)$ $\forall x \in \operatorname{dom} f$ $(\bar{f}(x) \leq f(x) < +\infty)$.

Donc $f(x) \geq \underbrace{g_0(x) + \frac{\gamma_0 - \langle x, x_0^* \rangle}{\varepsilon}}_{g_\varepsilon \text{ affine continue}}, \forall x \in X. \implies f^{**}(x_0) \geq g_\varepsilon(x_0) = g_0(x_0) + \frac{\gamma_0 - \langle x_0, x_0^* \rangle}{\varepsilon}, \forall \varepsilon > 0$.

$\gamma_0 > \langle x_0, x_0^* \rangle \implies \lim_{\varepsilon \to 0_+} g_\varepsilon(x_0) = +\infty \implies f^{**}(x_0) = +\infty$.

f convexe et admet une minimisant affine continue $\implies f^{**} = \bar{f}$.

Remarque. f admet minimisante affine continue $\iff \exists x_0^* \mid f^*(x_0) < +\infty$ $(\operatorname{dom} f^* \neq \varnothing)$.

Démonstration. i) f est supposée convexe s.c.i. avec $\operatorname{dom} f \neq \varnothing$. Si f admet une minimisante affine continue, d'apres ii), on aura $\bar{f} = f = f^{**}$. Montrons l'existence d'une telle minimisante. $\operatorname{epi} f$ est une convexe fermé de $X \times \mathbb{R}$ (car f est convexe sci) qui est non vide car $\exists x_0 \in X$ tel que $f(x_0) < +\infty$. De plus $f(x_0) > -\infty \implies \exists \alpha_0 < f(x_0)$ $\implies (x_0, \alpha_0) \in \operatorname{epi} f$. D'après HB strict : $\exists x_0^* \in X^*$, $\exists \beta_0 \in \mathbb{R} \left| \left\langle x_0, x_{)}^* \right\rangle + \alpha_0\beta_0 < \inf\{\langle x, x_0^* \rangle + \alpha\beta_0 \mid (x, \alpha) \in \operatorname{epi} f\}\right.$

Alors $\beta_0 \geq 0$.

Si $\beta_0 = 0$, on doit aura $\langle x_0, x_0^* \rangle < \langle x, x_0^* \rangle$, $\forall x \in \operatorname{dom} f$. Pour $x = x_0$, on obtient une contradiction d'où $\beta_0 > 0$.

Donc $\beta_0 > 0$ et pour $\alpha = f(x)$ $x \in \operatorname{dom} f$ $\langle x_0, x_0^* \rangle + \alpha_0\beta_0 \leq \langle x, x_0^* \rangle + \beta_0 f(x) \implies \forall x \in \operatorname{dom} f,\ f(x) \geq \langle x_0 - x, x^*/\beta \rangle + \alpha_0 \implies f \geq g_0$ où g_0 affine continue $g_0(x)$. $\square$

Rappel. H.B. analogique E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. V sous espace vectoriel de E. $p : E \to [0, +\infty[$ telle que $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall (x,y) \in E^2$ $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall \lambda \geq 0 \forall x \in E$.

$f : V \to \mathbb{R}$ forme linéaire telle que $f(x) \leq p(x)$ $\forall x \in V$

Alors $\exists \tilde{f}$ forme lineaire sur E telle que $\tilde{f}(x) = f(x)$ $\forall x \in V \tilde{f}(x) \leq p(x)$ $\forall x \in E$. Si $p(-x) = p(x)$ (semi. norme) alors $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in E$

cas E=Hilbert f continue sur V fermé $|f(x)| \leq C\|x\|$ $\forall x \in V E = V \oplus V^\perp$. $\tilde{f}(x) = f(P_V x)$ où $P_V x = x^* \iff x^* \in V x - x^* \in V^\perp$

$|\tilde{f}(x)| \leq C\|P_V x\| \leq C\|x\|$ $\forall x \in E$.

Exemple 5. C convexe de E. $0_E \in C j_C(x) = \inf_{t>0}\{\frac{x}{t} \in C\}$

$C = \{\|x\| \leq 1\}$

$\left\|\frac{x}{t}\right\| = \frac{1}{t}\|x\| \leq 1 \frac{x}{t} \in C \iff t \geq \|x\|$

$j_c(x) = \|x\|$

$\{f_c < 1\} \subset C \subset \{j_C \leq 1\}$

$0 < t < t'$ $\frac{x}{t} \in C \implies \frac{x}{t'} \in C$?

$\frac{x}{t'} = \frac{t}{t'}\frac{x}{t} + (1 - \frac{t}{t'})0_E$.

$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{t} \in C\\ 0 \in C\end{array}\right. \implies \frac{x}{t'} \in C$

Donc $\{t > 0 \mid \frac{x}{t} \in C\} = [j_C(x), +\infty[ou]j_C(x), +\infty] \supset [1, +\infty]$

$\bullet\, j_C(x) < 1 \implies \{t > 0 \mid \frac{x}{t} \in C\} \supset [1, +\infty[\implies x \in C$ $\bullet\, x \in C \implies 1 \in \{t > 0 \mid \frac{x}{t} \in C\} \implies j_C(x) \leq 1$

b) $j_C(x+y) \leq j_C(x) + j_C(y)$ Soit $j_C(x) < \alpha$ et $j_C(y) < \beta$ et montrons que $j_C(x+y) < \alpha + \beta$ $j_C(x) < \alpha + \beta$ $j_C(x) < \alpha \implies \frac{x}{\alpha} \in C et j_C(y) < \beta \implies \frac{y}{\beta} \in C$

$\implies \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{y}{\beta} \in C$ (convexité de C et $0 < \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \leq 1$) $\implies \frac{x+y}{\alpha+\beta} \in C \implies j_C(x+y) \leq \alpha + \beta$ d'où la conclusion qd $\alpha \downarrow j_C(x)$ et $\beta \downarrow j_C(y)$.

$j_C(\lambda x) = \lambda j_C(x)$ pour $\lambda \geq 0$ est évident

c) $0 \in \mathring{C} \iff \exists M |_{j_C(x)} \leq M\|x\|, \forall x \in E$ (1) $\iff$ (2) (1) $\implies$ (2) $0 \in \mathring{C} \implies \exists r > 0 : \overline{B(0,r)} \subset C \implies \forall x \neq 0_E$ $r\frac{x}{\|x\|} \in C \implies \forall x \neq 0_E$ $\frac{x}{t} \in C si t \geq \frac{\|x\|}{r} \implies j_C(\frac{x}{t}) < 1 \forall t \geq \|x\|/r \implies j_C(\frac{x}{t}) \leq 1 \forall t \geq \frac{\|x\|}{r} \implies j_C(x) \leq t \forall t \geq \|x\|/t. \implies j_C(x) \leq \|x\| r (M = \frac{1}{r})$ (2) $\implies$ (1) $j_C(x) \leq M\|x\| \implies j_C(x) < 1$ si $\|x\| < \frac{1}{M} \implies \{\|x\| < \frac{1}{M}\} \subset C \implies 0 \in C$

d) C ouvert $\iff 0 \in \mathring{C}$ et $C = \{j_c < 1\}$ (1) $\iff$ (2) (2) $\implies$ (1) $0 \in \mathring{C} \implies j_C(x) \leq M\|x\| \implies j_C$ convexe , j_C continue sur toute boule $\implies \{j_C < 1\}$ est ouvert $\implies C$ ouvert.

$\bullet\, j_C((1-\theta)x + \theta y) \leq j_C((1-\theta)x) + j_C(\theta y) \leq (1-\theta)j_C(x) + \theta j_C(y) \implies j_C$ est convexe sous additif et 1 lienague

(1) $\implies$ (2) C ouvert $\implies \mathring{C} = C$ (donc $0 \in C \implies 0 \in \mathring{C}$)

On $0 \in \mathring{C} \implies j_C$ continue $\implies \{j_C < 1\}$ est ouvert contenu dans C. Il reste à établir que $C \subset \{j_C < 1\}$. $x \in C \{t > 0 \mid \frac{x}{t} \in C\}$

$x \in C$ $\varphi : t \to \frac{x}{t}$ continue de $]0, +\infty[$ à valeurs dans $E \implies \varphi^{-1}(C) = \{t > 0 \mid \frac{x}{t} \in C\}$ est un ouvert de $]0, +\infty[$ comme image réciproque de l'ouvert C

Donc $\{t > 0, \frac{x}{t} \in C\} x \in C \implies 1 \in]j_C(x), +\infty[\implies j_C(x) < 1$ Donc C ouvert $\implies \{j_C < 1\} = C$

Rappel. f convexe s.c.i. $\implies f^{**} = f$.

Théorème 3. *Soit* $h : X \to]-\infty, +\infty]$ *convexe telle que* h *continue au point* $x = 0$. *Alors*

(i) h^* *atteint son minimum sur* X^* *(et* $\arg\min h^*$ *est *faiblement compact dans* X^{**}*)*

(ii) $\inf_{X^*} h^*(= \min_{X^*}) = -h(0)$

Remarque. variante h continue en x_0. Même résultat mais avec $x^* \to h^*(x^*) - \langle x_0, x^* \rangle$ et $\inf[h^*(\cdot) - \langle x_0, \cdot \rangle] = -h(x_0)$

$\sup_x |\langle x, x^* \rangle - h(x_0 + x)| = h^*(x^*) - \langle x_0, x^* \rangle$. $(h(x_0 + \cdot))^* = h^* - \langle x_0, \cdot \rangle$

Démonstration. h continue en $0 \implies \exists R > 0\ \exists M>$ tels que $h(x) \leq M\ \forall \|x\| <$R. Alors $h^*(x^*) = \sup_{x \in X} \langle x, x^* \rangle - h(x) \geq \sup_{\|x\| \leq R} |\langle x, x^* \rangle - M| \geq R\|x^*\|_{X^*} - M$

$\implies \lim_{\|x^*\| \to +\infty} h^*(x^*) = +\infty$.

$\forall h^*$ est convexe sur X^* $\forall R' \{\|x^*\| \leq R'\}$ est *faiblement compact h^* est *faiblement s.c.i.

$\implies \operatorname{argmin}_{X^*} h^*$ est un convexe non vide compact par la topologie faible.

$K_n = \{h^* \leq \alpha_n\}$ compact $\neq \varnothing$ $\alpha_n \downarrow \inf h^*$.

Alors : $\operatorname{argmin} h^* = \{x^* \in X^* h^*(x^*) \leq \inf h^*\} = \cap_n \{h^* \leq \alpha_n\}$

Preuve de ii) $\inf h^* = -(h^*)^*(0) = -\bar{h}(0)$ h continue en $0 \implies \bar{h}(0) = h(0)$ □

2.6 Differentiabilite des fonctions convexes

Soit $f : X \to]-\infty, +\infty]$.

Définition 1. Soit $x \in \operatorname{dom} f$ et $x^* \in X^*$. Alors x^* est dans le sous-différentiel de f au point x si $\forall y \in X\, f(y) \geq \underbrace{f(x) + \langle y - x, x^* \rangle}_{g(y) \text{ affine}}$.

Exemple 6. $f(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$. $\forall x^* \in [-1, 1] x^* \in \frac{\partial}{\partial f}()$. $|y| \geq 0 + (y - 0)x^*$, $y \in \mathbb{R}$. x^* est an sous-gradient de f au point x $\frac{\partial}{\partial f}(x) = \{x^* \in X^* \mid x^* sousgradientaupointx\}$

$f(x) = |x|$ au $\mathbb{R}$. $\frac{\partial}{\partial f}(x) = \begin{cases} \{\frac{x}{|x|}\} \text{ si } x \neq 0 \\ [-1, 1] \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Lemme 1. *1.* $x^* \in \frac{\partial}{\partial f}(x) \iff \langle x, x^* \rangle = f(x) + f^*(x^*)$

2. Si f *est convexe sci alors* $x^* \in \frac{\partial}{\partial f}(x) \iff x \in \frac{\partial}{\partial f}^*(x^*)$

Démonstration. $x^* \in \frac{\partial}{\partial f}(x) \iff f(y) > f(x) + \langle y - x, x^* \rangle\ \forall y \in X \iff \langle x, x^* \rangle - f(x) \geq \langle y, x^* \rangle - f(y)\ \forall y \in X \iff \langle x, x^* \rangle - f(x) \geq \sup_{y \in X} \langle y, x^* \rangle - f(y) \iff \langle x, x^* \rangle \geq f(x) + f^*(x^*) \iff =$

ii) $x \in \frac{\partial}{\partial f}^*(x^*) \iff$ (i) $f^*(x^*) + \underbrace{f^{**}(x)}_{f(x)} = \langle x, x^* \rangle$ car f convexe s.c.i. □

Théorème 1. f *convexe* $X \to]-\infty, +\infty]$ *tel que* $\exists x_0 \in \operatorname{dom} f | f$ *continue en* x_0. *Alors* $\forall x \in \overset{\circ}{\operatorname{dom}} f\, \frac{\partial}{\partial f}(x)$ *est une convexe compact non vide de* X^* *(topologie *faible).*

Démonstration. on applique le Thm 2 avec $h(y) = f(x+y)$ où x est un point de continuite de f (f continue au point $x \iff x \in \overset{\circ}{\operatorname{dom}} f$ et $\overset{\circ}{\operatorname{dom}} f \neq \varnothing$) Alors $h(0) = -\min h^*, h^*(x^*) = f^*(x^*) - \langle x, x^* \rangle. \implies f(x) = -\min_{X^*}[f^*(x^*) - \langle x, x^* \rangle]$

Si x^* realese le minimum, on a : $f(x) = -f^*(x^*) + \langle x, xt \rangle$. Donc $x^* n \frac{\partial}{\partial f}(x) \iff x^* \in \operatorname{argmin}[f^* - \langle \cdot, x^* \rangle]$—compact non vide. □

2.7 lien avec la différentialité

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ continue dérivée de f dans la direction $h \in X$ au point x : $\lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{f(x+\varepsilon h) - f(x)}{\varepsilon} \overset{\text{def}}{=} f'(x, h)$.

> **Définition 1.** f est G-dérivable au point x si $f'(x,h)$ existe et est lineaire continue par rapport à h. Notons $f'(x)$ l'eelement de X^* associé à cette forme lineaire.

On a : $f'(x,h) = \langle h, f'(x) \rangle \, \forall h \in H. f'(x)$ est la G-dérivée de f au point x.

Si f est de classe C^1 sur X alors $f'(x)$ coïncide avec la différentielle de f noté $df(x)$ ou bien $\nabla f(x)$ si X est un Hilbert

Exercice 2. f classe C^1 sur $\mathbb{R}^N \nabla f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_N}) \lim_{t \to 0_+} \frac{f(x) + th) - f(x)}{t} = (\nabla f(x) | h)$

Lemme 1. *Soit $f : X \to]-\infty, +\infty]$ convexe telle que f est minorée par une function affine. Alors $\forall x \in \operatorname{dom} f$, $f'(x,h)$ existe $\forall h \in x$ et on a $f'(x,h) \geq \langle h, x^* \rangle \;\; \forall h \in \frac{\partial}{\partial f}(x)$.*

Démonstration. $\frac{f(x+\varepsilon h) - f(x)}{\varepsilon}$ est une fonction monotone croissante de ε. Donc : $\lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{f(x+\varepsilon h) -}{\varepsilon}$
$\inf_{\varepsilon > 0} \frac{f(x+\varepsilon h) - f(x)}{\varepsilon}$.

Soit $x^* \in \frac{\partial}{\partial f}(x)$ ($x \in \overset{\circ}{\operatorname{dom}} f \implies \frac{\partial}{\partial f}(x) \neq \varnothing$)).Alors $f(x+\varepsilon h) \geq f(x) + \langle \varepsilon h, x^* \rangle \implies \frac{f(x+\varepsilon h) - f(x)}{\varepsilon} \geq \langle h, x^* \rangle \, \forall \varepsilon$.

Donc on a $f'(x,h) \geq \langle x^*, h \rangle \;\; \forall x^* \in \frac{\partial}{\partial f}(x)$. □

Corollaire 1. *Si f est convexe, G dérivable au point x, alors $\frac{\partial}{\partial f}(x) = \{f'(x)\}$ où $f'(x)$ est la G dérivée de f.*

Démonstration. $\langle h, f'(x) \rangle = f'(x,h) \geq \langle h, x^* \rangle \;\; \forall x^* \in \frac{\partial}{\partial f}(x)$

Par linéarité, on a donc $f'(x) = x^*$. □

Théorème 1. *Si f est convexe centre au point x. Alors f est G dérivable au point $x \iff \frac{\partial}{\partial f}(x)$ est réduit à un point.*

2.8 Application de la dualité en optimisation

Soit $f : X \to]-\infty, +\infty]$ convexe s.c.i. et C un compacte fermé de X. On considère le Pb $\inf_{x \in C} f(x)$.

On cherche des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité.

Théorème 1. *On supposons que $\exists x_0 \in c$ tel que f continue en x_0. Alors $\bar{x}$ solution $\iff \exists x^* \in \frac{\partial}{\partial f}(\bar{x})$ tel que $\langle y - \bar{x}, x^* \rangle \geq 0 \; \forall y \in C$.*

Démonstration. Soit $F = f + \delta_C$. $F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in C \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$

f est convexe sci $\operatorname{dom} F \neq 0$. ($F(x_0) < +\infty$).

$\bar{x}$ solution $\iff$ $F(\bar{x}) = \inf F = -F^*(0)$ $\iff$ $F(\bar{x}) + F^*(0) = \langle \bar{x}, 0 \rangle$ $\iff$ $0 \in \frac{\partial}{\partial F}(\bar{x})$

Supposons que : $\frac{\partial}{\partial F}(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial(} f + \delta_C)(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial f}(\bar{x}) + \frac{\partial}{\partial \delta}_C(\bar{x})$

Alors $\bar{x}$ solution $\iff$ $0 \in \frac{\partial}{\partial f}(\bar{x}) + \frac{\partial}{\partial \delta}_C(\bar{x})$ $\iff$ $\exists x^* \in \frac{\partial}{\partial f}(\bar{x})$ avec $-x^* \in \frac{\partial}{\partial \delta}_C(\bar{x})$

$-x^* \in \frac{\partial}{\partial \delta}_C(\bar{x})$ $\iff$ $\underbrace{\delta_C(\bar{x})}_{0} + \delta_C^*(-x^*) = -\langle \bar{x}, x^* \rangle$ $\iff$ $\sup_{y \in C} \langle y, -x^* \rangle = -\langle \bar{x}, x^* \rangle$

$\iff$ $\forall y \in C - \langle y, x^* \rangle \leq -\langle \bar{x}, x^* \rangle$ $\iff$ $\langle y - \bar{x}, x^* \rangle \geq 0 \forall y \in C$.

□

Théorème 2. *f, g convexes s.c.i. $X \to]-\infty, +\infty]$ $\exists x_0 \in \operatorname{dom} g | f$ continue au point x_0. Alors $\frac{\partial}{\partial(} f + g)(x) = \frac{\partial}{\partial f}(x) + \frac{\partial}{\partial g}(x)$.*

2.9 Kuhn-Tucker

$C = \{x \in X \mid g_i(x) \leq 0, 1 \leq i \leq N\}$ on g_i affine continue sur X. (C déterminé par N contraintes linéaires de type inégalité)

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N) \in \mathbb{R}_+^N$ et posons $F_X(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{i=N} \lambda_i g_i(x)$

$\sup_{\lambda \geq 0} F_\lambda(x) = f(x)$ si $x \in C$ et $+\infty$ sinon.

On pénalise la contrante C en remplacent δ_C par $\sum \lambda_i g_i(x)$.

Théorème 1. *Supposons qu'il existe $x_0 \in \operatorname{dom} f$ tel que $g_i(x_0) < 0$ $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., N\}$*

Condition de qualification SLATER) ($x_0 \in \overset{\circ}{C}$).

Alors $\bar{x} \in C$ solution $\iff$ $\exists \bar{\lambda} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ tel que :

1. *$F_{\bar{x}}(\bar{x}) \leq F_{\bar{x}}$ $\forall x \in X$. ($\bar{x}$ réalise $\inf_X F_{\bar{x}}$)*
2. *$\bar{X}_i g_i(\bar{x})$ et $g_i(\bar{x}) \leq 0 \forall i \in \{1, ..., N\}$ ($g_i(\bar{x}) < 0 \implies \bar{\lambda}_i = 0$)*

En pratique si $g_i(x) = \langle x, x_i^* \rangle + \beta_i$ et si f est G dérivable la condition équivalent à $F'_{\bar{x}}(\bar{x}) = 0$

$f'(\bar{x}) + \sum_{i=1}^N \bar{\lambda}_i x_i^* = 0$

$L(\bar{x}, x) \leq L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq L(x, \bar{\lambda})$ $\forall x \in X \forall \lambda \in R_N^+$