IMAT

Analyse dp

Application mécanique, optimisation probabilités, géométrie algébrique, codage orthographique, informatique. Numérique.

imath.fr

Buchitte Guy, google scholar

1. Principes généraux en optimisation 2. Analyse convexe 3. Problèmes en dualité (en dimension infinie) 4. Application en transport optimal

Problèmes du calcul des variations.

Chapitre 1

Principes généraux en optimisation

1.1 initiation

On considère des problèmes du type : $\inf\{F(u)|u \in X\}$, où X—espace vectoriel (Banach de dimension infinie) $F : u \in X \to]-\infty, +\infty]$

- Existence d'un minimisation ù
- Unicité ?
- Conditions d'optimalisés

Nécessaire ou suffisante ou des deux. Si dom $F \neq \varnothing$.

Remarque. *Il existe une suite* (u_n) *dans* X *telle que* $\lim_{n\to\infty} F(u_n) = \inf_X F$

Notations 1. $\operatorname{dom} F = \{u \in X | F(u) < +\infty\}$.

Si dom $F \neq \varnothing \Rightarrow \inf F < +\infty$. $\forall \alpha > \inf_X F \exists u \in X$ tel que $\inf_X F \leq F(u) < \alpha$. (u_n) est une suite minimisante.

1.2 Cas $X = \mathbb{R}^N$

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continue et C une partie fermée, non vide de $\mathbb{R}^N$.

Théorème 1. *f atteint son minimum sur C sous l'une des conditions suivantes :*

(i) C *est bornée*

(ii) $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) \leq +\infty$ *(coercitive)*

Démonstration. Soit (x_n) une suite minimalé i.e. $x_n \in C$ et $f(x_n) \to \alpha := \inf_X f$.

Cas i) $x_n \in C$ compact $\Rightarrow \exists x_{n_k}, \exists \bar{x} | x_{n_k} \to \bar{x}$. Alors $\alpha = \lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$ par continuité de f au pt $\bar{x}$

Cas ii) Soit $\beta > \alpha$. Puisque $f(x) \to +\infty$ qd $n\|x\| \to \infty$: $\exists R > 0 | f(x) > \beta si \|x\| \geq R$. D'autre part $\exists N | \forall n \geq N f(x_n) \leq \beta$. Donc on a $\|x_n\| \leq R$ $\forall n \geq N$ et la suite (x_n) est bornée. Donc $\exists x_{n_k}, \exists \bar{x} \in \mathbb{R}^N | x_{n_k} \to \bar{x}$. $x_{n_k} \in C$ fermé et $x_{n_k} \to \bar{x} \Rightarrow \bar{x} \in C$. donc on a : $\bar{x} \in C$ et $f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \alpha = \inf_C f$ Bien on a : $F : X \to]-\infty, +\infty]$ $\square$

$F(x) = f(s)$ si $x \in C$ et $+\infty$ sinon, $X = \mathbb{R}^n$, $\inf_C f = \inf_X F$.

Remarque. *Ici F n'est pas continue mais dans les cas i) et ii), on a $\lim_{\|x\|\to\infty} F(x) = +\infty$. En optimisation f s'appelle le critère et C est la contrainte. $F = f + \delta_C$. Où $\delta_C = 0$ si $x \in C$ et $+\infty$ sinon.*

Mais F vérifie la propriété $x_n \to x \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} F(x_n) \geq F(x)$ ($\liminf_{n\to\infty} F(x) = \liminf_{n\to\infty}[f(x_n)+\delta_C(x_n)] \geq \underbrace{\liminf_{n\to\infty} f(x_n)}_{f(x)} + \underbrace{\liminf_{n\to\infty} \delta_C(x_n)}_{\geq \delta_C(x)}$)) $\liminf_{n\to+\infty} \delta_C(x_n) \overset{?}{\geq} \delta_C(x)$.

<u>1er</u> cas $\liminf_{n\to\infty} \delta_C(x_n) < +\infty$. $\forall N \exists n > N\ x_n \in C \Rightarrow \exists x_{n_k} | x_{n_k} \in C \forall k \Rightarrow x \in C$ (C est fermé) $\Rightarrow \delta_C(x) = 0$. <u>2me</u> cas $\liminf_{n\to\infty} \delta_C(x_n) = +\infty$ trivial.

Autre preuve. $x \in C$—trivial ; $x \notin C \Rightarrow \exists N | x_n \notin C\ \forall n \geq N \Rightarrow \delta_C(x_n) = +\infty\ \forall n \geq N$.

Définition 1. $F : (X,d) \to]-\infty,+\infty]$ espace métrique est SEMI-CONTINUE INFÉRIEURE au point $x \in X$ si $\forall \alpha < F(x)\ \exists R > 0 \mid d(x,y) < R \Rightarrow F(y) > \alpha$ (ou bien $\exists V$ ouvert contenant x tel que $\inf_V F > \alpha$)

Définition 2. F est f.c.i sur X (f.s.c.—FERMER SEMI-CONTINUONS) si F est s.c.i. en tout point $x \in X$.

Lemme 1. *F est s.c.i. sur X si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifié :*

1. *$\forall R \in \mathbb{R} | \{F \leq R\}$ est un fermé de X ($\{F \leq R\} = \{x \in X | F(u) \leq R\}$)*
2. *L'ensemble $\operatorname{epi} F = \{(u,x) \in X \times \mathbb{R} | F(u) \leq \alpha\}$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$.*
3. *On a pour toute suite (u_n) dans X $u_n \to u \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} F(u_n) \geq F(u)$*

$X = \mathbb{R}\ F(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \neq 0 \\ -1, \text{ si } x = 0 \end{cases}$

$\operatorname{epi} F = \{(x,\alpha), F(x) \leq \alpha\}$. $F_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq \frac{1}{n} \\ 1 - n|x|, \text{ si } 0 \leq |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$.

Théorème 2. *Soit $F : X \to]-\infty,+\infty]$ où X est un e.v.n. local compact ; F s.c.i. et coercive alors F atteint son minimum et l'ensemble ses solutions $\operatorname{Argmin} F = \{u \in X | F(x) = \inf F\}$ est un compact non vide.*

Démonstration. Soit α_n une suite de de réels telle que : $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$. $\alpha_n \to \inf_X F \alpha_n > \inf_X F$. Posons $K_n = \{u \in X | F(u) \leq \alpha_n\}$. On a :

— $K_n \neq \varnothing$ (car $\alpha_n > \inf F$)

— $K_{n+1} \subset K_n$ (car $\alpha_{n+1} < \alpha_n$)

— K_n fermé (car F est s.c.i.)

Posons $K = \cap_{n=1}^{n=+\infty} K_n$. Si $\lim_{\|u\|\to+\infty} F(u) = +\infty$, alors $\exists R > 0$. $K_n \subset \{\|u\| \leq R\}$ (c'est compact de X) $\forall n$. (car $\exists R > 0 | \|u\| > r \Rightarrow F(u) > \alpha_n \forall n$) (K_n) et une suite $\searrow$ de compacts non vides : K_n est fermé borné Donc $K = \cap K_n$ est donc un compact non vide. Or $K = \{u \in X | F(u) \leq \alpha_n \forall n\} = \{u \in X | F(u) \leq \inf_X F\} = \operatorname{Argmin} F$. $\square$

Problème 1. *X Banach $\dim X = +\infty \Rightarrow X$ non local compact ; Idée : utiliser une topologie G plus faible que la topologie de la norme et telle que :*

— *F est G s.c.i. et $\forall \alpha | \{F \leq \alpha\}$ est G-compact.*

1.3 Cas où X est un Hilbert

Rappel. X *Hilbert avec produit scalaire* $(u|v)$ $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$. *Soit* C convexe *fermé non vide de* X ; $x \in X$ $f : y \in X \to \|x-y\|$; $\inf_{y\in C} \|x-y\| = d(x,C)$ *distance de* x *à* C.

Théorème 3. $\exists! x^* \in C$ *tel que* $\|x-x^*\| = d(x,C) = \inf_{y\in C} \|x-y\|$. *(ici* $F(y) = \|x-y\| + \delta_C(y)$*).*

Remarque. F *est s.c.i. et coercive.* $(\lim_{\|y\|\to+\infty} \|x-y\| = +\infty)$ *mais* X *n'est pas local compact.*

Démonstration. Soit (y_n) une suite dans C telle que $\|x-y_n\| \to \alpha = d(x,C)$. Alors on montre que (y_n) est une suite de Cauchy en utilisant : $\|a-b\|^2 + \|a+b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$ $a = \frac{x-y_n}{2}$, $b = \frac{x-y_m}{2}$. donc $\frac{\|y_n-y_m\|^2}{4} + \left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 = \frac{\|x-y_n\|^2}{2} + \frac{\|x-y_m\|^2}{2} \to \alpha^2$ (C convexe $\frac{y_n+y_m}{2} \in C$ et $\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\| \geq \alpha$) $\square$

x_1^*, x_2^* solutions $\Rightarrow x_1^* + x_2^*/2$ solution. $0 \leq \left\|x - \frac{x_1^*+x_2^*}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}\|x-x_1^*\| + \frac{1}{2}\|x-x_1^*\| < \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha$

x^* est solution $\Leftrightarrow \operatorname{Re}((x^*-x|x^*-y)) \leq 0$ $\forall y \in C$. X espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, $a(u,v)$ forme bilinéaire symétrique : $(a(v,u) = a(u,v))$. Telle que

- $|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$ (continuité) $\forall (a,v) \in X \times X$
- $\exists k > 0$ $a(u,u) \geq k\|u\|^2$ $\forall u \in X$
- f une forme linéaire continue sur X $(f \in X^*)$ (notation $\langle f,u\rangle$ au bien de $f(v)$).

Théorème 4 (Lax-Milgram)**.** $\exists! u \in X$ *tel que* $a(u,v) = \langle f,v\rangle$ $\forall v \in X$. *De plus, si on pose* $F(u) = \frac{1}{2}a(v,u) - \langle f,v\rangle$*, on a :* $F(u) \leq F(v)$ $\forall v \in X$ *(i.e.* $F(u) = \min_X F$*) et* u *est l'unique minimiser de* F.

Remarque. F *est continue d'après i) (exo)* $\lim_{\|u\|\to\infty} F(u) = +\infty$ *d'après (ii) (exo)* $(F(u) \geq k\|u\|^2 - \langle f,u\rangle \geq k\|u\|_X^2 - \|f\|_{X^*}\|u\|_X)$ F *est convexe.*

Corollaire 1 (Stampacchia)**.** *Soit* C *un convexe fermé de* X *et* $E(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f,v\rangle$ *(qui est convexe, continue, convexe sur* X*)* $(F(v) = E(v) + \delta_C(v))$*. Alors* $\exists! u \in C$ *tel que* $E(u) = \inf_{v\in C} E(v) u$ *est caractérisée par l'inéquation :* $a(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle$ $\forall v \in C$.

Remarque. *On prenant* $C = X$*, on retrouve Lux-Milgran car* $a(u,w) \geq \langle f,w\rangle$ $\forall w \in X (w = v-u) \Rightarrow a(u,w) = \langle f,w\rangle$.

$a : X \times X \to \mathbb{R}$ $f \in X^*$ $\begin{cases} a(u,v) \leq M\|u\|\|v\| \\ a(u,v) \geq k\|u\|^2 \end{cases}$.

$\inf_{u\in C}\{\frac{1}{2}a(u,u) - \langle f,u\rangle\}$ C convexe fermé de X.

$\exists! \bar{u} \in C$ tel que $\frac{1}{2}a(\bar{u},\bar{u}) - \langle f,\bar{u}\rangle \leq \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f,v\rangle$ $\forall v \in C$. Alors $a(\bar{u}, v-\bar{u}) \geq \langle f, v-\bar{u}\rangle$ $\forall v \in C$.

Remarque. *La fonctionnelle* $F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f,v\rangle$ *est continue sur* X *(exo). Elle est convexe (même strictement convexe). Elle es coercive car* $F(v) \geq \frac{k}{2}\|v\|_X^2 - \|f\|_{X^*}\|v\|_X \Rightarrow \lim_{\|v\|\to+\infty} F(v) = +\infty$*. Si* (u_n) *est une suite minimisante sur* C*, alors* (u_n) *est bornée dans* X*. Mais on ne peut pas extraire une sous suite* (u_{n_k}) *telle que* $u_{n_k} \to u$ *dans* X *(*X *n'est pas loc compact).*

Démonstration. (argument analogue à celui du Thm de projection dans un Hilbert)

Posons $(u|v)_a = a(u,v)$. C'est une forme bilinéaire symétrique positive : $(u|u)_a \geq k\|u\|^2 > 0$ si $u \neq 0$. Donc c'est un produit scalaire sur X. Norme associée $\|u\|_a = \sqrt{(u|u)_a}$.

Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_a$ sont équivalente car : $k\|u\|^2 \leq \|u\|_a^2 \leq M\|u\|^2$. En particulier $(X, \|\cdot\|_a)$ est un espace de Hilbert. La forme linéaire. $L : v \in X \to \langle f, v\rangle$ est continue dans $(X, \|\cdot\|_a)$. D'après Riesz :

$$\exists! u_0 \in X \text{ tel que } (u_0|v)_a = \langle f, v\rangle \; \forall v \in X.$$

D'après le Thm de projection (C est un convexe ferme de $(X, \|\cdot\|)$) :

$$\exists! \bar{u} \in C \text{ tel que } \|u_0 - \bar{u}\|_a = \inf_{u\in C} \|u_0 - v\|_a.$$

En particulier, on aura :

$$a(\bar{u} - u_0, \bar{u} - u_0) = \inf_{u\in C} a(v - u_0, v - u_0)$$

Or $\frac{1}{2}a(v - u_0, v - u_0) = \frac{a(v,v)}{2} - a(v, u_0) + \frac{a(u_0,u_0)}{2} = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v\rangle + \frac{a(u_0,u_0)}{2}$ d'où $\frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v\rangle \geq \frac{1}{2}a(\bar{u},\bar{u}) - \langle f, \bar{u}\rangle \; \forall v \in X$. ($\frac{1}{2}a(v-u_0, v-u_0) - \frac{a(u_0,u_0)}{2} \geq \frac{a(\bar{u}-u_0,\bar{u}-u_0)}{2} - \frac{a(u_0,u_0)}{2}$)

En fait on a : $\bar{u} \in \operatorname{Argmin}_C F \Leftrightarrow \bar{u} = \operatorname{proj}_C u_0$.

De plus toute suite minimisante (u_n) vérifie $\|u_0 - u_n\|_d \to \inf_{u\in C} \|u_0 - v\|_a$ et donc de Cauchy pour $\|\cdot\|_a$ (donc aussi $\|\cdot\|$)

$\bar{u} sol \Leftrightarrow \bar{u} = \operatorname{proj}_C u_0 \Leftrightarrow (u_0 - \bar{u}|u_0 - v)_a \leq 0 \forall v \in C \Leftrightarrow a(u_0 - \bar{u}|v - u_0) \leq 0 \; \forall v \in C$ $\Leftrightarrow a(\bar{u} - u_0|\bar{u} - v) \leq 0 \forall v \in C \Leftrightarrow a(\bar{u}, \bar{u} - v) \leq a(u_0, \bar{u} - v) \Leftrightarrow a(\bar{u}, v - \bar{u}) \geq a(u_0, v - \bar{u})$ $\Leftrightarrow a(\bar{u}, v - \bar{u}) \geq \langle f, v - \bar{u}\rangle \; \forall v \in C$. □

Remarque. *Si la contrante C est un sous espace vectoriel fermé V de X on obtient :*

$$\bar{u} \textit{ minimise } \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v\rangle \; \textit{ sur } X \Leftrightarrow a(\bar{u}, v) = \langle f, w\rangle \; \forall w \in V$$

Si $V = X$ on obtient l'équation $a(\bar{u}, w) = \langle f, w\rangle \forall w \in X$. $(A\bar{u}|w) = \langle f, w\rangle$ où A opérateur linéaire auto adjacent-continue de X dans X. $\Rightarrow A\bar{u} = f$

Rappel. *$A \in s(X)$ $(A^* = A.)$ $a(u,v) = (Au|v)$ bilinéaire symétrique $|a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|$*

Exemple 1. élémentaire. $X = \{u \in L^2(0,1) \mid u' \in L^2(0,1)\}$ $u \in X \Leftrightarrow u \in L^2(0,1)$ et $\exists v \in L^2(0,1)$ tel que : $\int_0^1 u\varphi' \,\mathrm{d}x = -\int_0^1 v\varphi \,\mathrm{d}x$

$\forall f \in C^1(0,1)$ et $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

— si $u \in C^1$ on trouve $v = u'$

— si u est C continue, C^1 par morceaux $u = 1$ si $x < \frac{1}{2}$ et -1 si $x > \frac{1}{2}$ $\int_0^1 u\varphi' = \int_0^{\frac{1}{2}} u\varphi' + \int_{\frac{1}{2}}^1 u\varphi' = -\int_0^1 v\varphi + (u(\frac{1}{2}+0) - u(\frac{1}{2}-0))\varphi(\frac{1}{2})$.

$(u|v) = \int_0^1 (uv + u'v') \,\mathrm{d}x$ $\|u\|^2 = \int_0^1 (|u|^2 + |u'|^2) \,\mathrm{d}x$. $u \in X \Rightarrow \exists \tilde{u} = u$ pp $|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq \|u'\|_{L^2(0,1)} \sqrt{|x-y|}$ $x < y$ $|u(x) - u(y)| = |\int_x^y u'(t) \,\mathrm{d}t| \leq \sqrt{|y-x|}\sqrt{\int_0^1 |u'|^2 \,\mathrm{d}t}$.

$\inf_{\substack{v\in X \\ v(0)=v(1)=0}} [\frac{1}{2}\int_0^1 |u'|^2 \,\mathrm{d}x - \int_0^1 fv \,\mathrm{d}x]$, $f \in L^1(0,1)$.

Soit $H = \{u \in X \mid u(0) = u(1) = 0\}$. $u_n \xrightarrow{X} \Rightarrow u_n \to u$ uniformément sur $[0,1]$. C'est un sous espace fermé de X, donc un Hilbert.

Ici $a(u,v) = \int_0^1 u'v' \, dx$

— $|a(u,v)| \leq \|x'\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|u\|_H \|v\|_H$

— $a(u,u) = \int_0^1 |u'|^2 \, dx \overset{?}{\geq} k\|u\|_H^2$. $u(x) = u(0) + \int_0^1 u'(t) \, dt \Rightarrow |u(x)| \leq \|u'\|_{L^2} \sqrt{x} \leq \|u'\|_{L^2} \Rightarrow \int_0^1 |u(x)|^2 \, dx \leq \|u'\|_{L^2}^2 \Rightarrow \|u\|_{L^2} \leq \|u'\|_{L^2}$ si $u \in H$, Donc 2 $a(u,u) \geq \int_0^1 u'^2 \, dx + \int_0^1 u^2 \, dx = \|u\|_H^2$.

$a(u,u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_H^2$

Lax Milgram $\Rightarrow \exists! u \in H \mid \frac{1}{2} \, u'^2 - \int_0^1 fu' \, dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |v'|^2 - \int_0^1 fv \, dx \, \forall v \in H$.

Conclusion de la schuhcnu $a(u,v) = \langle f, v\rangle \, \forall v \in H \ \int_0^1 u'v' \, dx = \int_0^1 fv \, dx, \forall v \in H (u(0) = v(1) = 0)$.

Supposons que la sol u est 2 fois dérivable sur $]0,1[$ $\int_0^1 u'v' \, dx = [u'v]_0^1 - \int_0^1 u''v \, dx$ $\Rightarrow -\int u''v \, dx = \int_0^1 fx \, dx \, \forall v \in H \Leftrightarrow -u'' = f$

Ainsi

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ sur }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Posons $f(x) = \int_0^1 xf(t) \, dt$ $-u' = F(x) + \lambda$. $u(0) = u(1) = 0 \Rightarrow \int_0^1 u'(t) \, dt = 0 \Rightarrow \lambda = -\int_0^1 F(x) \, dx$. $u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t) \, dt \Rightarrow u(x) = x \int_0^1 F(t) \, dt - \int_0^x F(t) \, dt$.

1.4 Cas où X est un Banach (non Hilbert)

On considère une topologie C sur X telle que $\forall R \ \{u \in X \ \|u\| \leq R\}$ est C-compact.

Rappel. *C est plus faible que la topologie associée a la norme.*

1.4.1 Cas Importantes

— X est un Banach réflexif ($X^* = X$) $x \in X \to \hat{x} \in X^{**}$ ou $\hat{x}(f) = f(x) \forall f \in X^*$ (évaluation de f au point x) $\|\hat{x}\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} \hat{x}(f) = \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} f(x) = \|x\|_X$. L'application $x \in X \to \hat{x} \in X^{**}$ est une isométrie.

C=topologie faible de X. $x_n \overset{\text{faible}}{\to} x \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall f \in X^* \ f(x_n) \to f(x)$

Ex. X Hilbert sur $\mathbb{R}$ $(\cdot|\cdot)$. $f \in X^* \Rightarrow \exists y \in X \mid f(x_n) = (x_n|y)$

$x_n \overset{\text{faible}}{\to} x \Leftrightarrow (x_n|y) \to (x|y) \ \forall y \in X$. $x_n \overset{\text{febi}}{\to} x \Leftrightarrow x_n \overset{\text{faible}}{\to} x \oplus \limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$.

On a toujours : $x_n \overset{\text{faible}}{\to} x \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geq x$ La fondamentale $F(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - f(x)$ est C s.c.i. pour tout $f \in X^*$.

Rappel. *Dans un Banach réflexif pour tout $R > 0$, $\{x \in X \mid \|x\| \leq R\}$ est faiblement-compact. De toute suite bornée (x_n) on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) telle que il existe $x \in X$ tel que $x_{n_k} \overset{\text{faible}}{\to} x$ qd $k \to \infty$.*

Exercice 1. X Hilbert $\{e_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ borne orthonormale $\|e_n\| = 1$.

$\forall y \in X \ (e_n|y) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(y|e_n) = 0 \forall y \in E e_n \rightharpoonup 0$ faiblement.

Exercice 2. $X = L^2(0,1)$ $f_n(x) = \sin(2\pi n x)$
$(f_n|g) = \int_0^1 f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x \to \int_0^1 fg$
$|\int_0^1 g(x)\sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x\,| = |\int_0^1 g'(x)\frac{\cos(2\pi nx)}{2\pi n}\,\mathrm{d}x\,| \leq \frac{C}{2\pi n} \to 0.$
$\int_0^1 g(x)\sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. $\|f_n\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$L^p(\Omega)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^N u \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow \int_\Omega |u|^p\,\mathrm{d}x < +\infty$. $\|u\|_{L^p} = (\int_\Omega |u|^p\,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}} prel \in [1,+\infty[$.
$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}\ \exists k \mid (u|u) \leq k\}$ $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{k \mid |u(x)| \leq kpp\}$
Sii Ω est borne dans $\mathbb{R}^N$ $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ si $1 \leq q \leq p \leq +\infty$. $u \in L^\infty(\Omega) \Rightarrow \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{q\to\infty} \|u\|_{L^q(\Omega)}$
$L^p(\Omega)$ est Banach séparable $\forall p \in [1,+\infty]$. $L^p(\Omega)$ réflexif $\Leftrightarrow 1 < p < +\infty$.
$(L^p(\Omega))^* \sim L^{p'}(\Omega)$ si $p \in [1,+\infty[$ et $p' = \frac{p}{p-1}$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$; $p' = \infty$ si $p = 1$.
$l \in (L^p(\Omega))^* \Rightarrow \exists g \in L^{p'}(\Omega) \mid l(f) = \int_\Omega fg\,\mathrm{d}x\ \forall f \in L^p(\Omega)$, $(L^p(\Omega))^{**} \sim (L^{p'}) \sim L^p(\Omega)$ si $1 < p < +\infty$.

$L^1(\Omega)$ **n'est pas réflexif** $\Omega = \mathbb{R}$ $u_n(x) = \begin{cases} n \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ $\|u_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$. $u_n \to u$ faiblement dans $L^1(\mathbb{R})$ si (définition) $\forall v \in L^\infty$ $\int_0^1 u_n v\,\mathrm{d}x \to \int_0^1 uv\,\mathrm{d}x$. Soit v continue sur $[0,1]$.
$\int_0^1 u_n v\,\mathrm{d}x = n\int_0^{\frac{1}{n}} v(x)\,\mathrm{d}x$. Donc $\int_0^1 u_n v\,\mathrm{d}x \to v(0)$. $\langle \delta_0, v\rangle = v(0)$. Si u existe, on doit avoir $u(0) = \int uv\,\mathrm{d}x$.
2eme cas important. X est le dual d'un espace de Bansch séparable Y. $X = Y^*$ (ex. $X = L^\infty(\Omega)$, $Y = L^1(\Omega)$))(ex. $X = M_b(\mathbb{R})$, $Y = C_0(\mathbb{R})$)
On choisit pour C la topologie *-faible Soit (f_n) suite dans X^*.

> **Définition 3.** $f_n \xrightarrow{*} f \Leftrightarrow \forall x \in X\ f_n(x) \to f(x)$.

Théorème 5. $\|f_n\|_{X^*} \leq M\ \forall n \Rightarrow \exists f_{n_k}, \exists f \in X$ *tel que* $f_{n_k} \xrightarrow{*} f$.

Exemple 1. Soit (u_n) une suite dans $L^\infty(\Omega)$ (Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$). Telle que $|u_n(x)| \leq M$ pp $x \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors $\exists u \in L^\infty(\Omega)$, $\exists u_{n_k} \mid \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_{n_k} v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x\ \forall v \in L^1(\Omega)$.

Exemple 2. Soit (ψ_n) une suite de mesures positives bornées sur $[0,1]$. Alors $\exists\psi$ mesure borne sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 \varphi\,\mathrm{d}\psi \to \int_0^1 \varphi\,\mathrm{d}\psi\ \forall\varphi$ continue sur $[0,1]$ $\psi_n = f_n\,\mathrm{d}x\ \psi = \delta_0$
$\psi_n \xrightarrow{*} \delta_0, \psi$

X Banach G `faible` si X réflexif et `*faible` si $X = Y^\perp Y$ Banach séparable. Propreté $\|u_n\|_X \leq C \Rightarrow \exists u \in X \exists u_{nk} \mid u_{nk} \xrightarrow{G} u$

Notations : $\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ faible} \\ u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ *faible} \end{cases}$

Théorème 6. *Soit* $F : X \to]-\infty,+\infty]$ *telle que :*

1. F *est* G *s.c.i. (et* $\exists u_0 \in X\ F(u_0) < +\infty$*)*
2. $\lim_{\|u\|\to\infty} F(u) = +\infty$

Alors $\mathrm{Argmin}\,F$ *est un* G*-compact non vide de* X.

Démonstration. (identique au cas X local compact) $\square$

Remarque. *La propriété i) est souvent difficile à établir même si F est continue par la topologie forte de X.*

Exemple 3. $X = \{u \in C^0([0,1]) \mid u(0) = u(1) = 0 \mid u' \in L^2(0,1)\}$ $I =]0,1[$ $\|u\|_X = \sqrt{\int_0^1 |u|^2 + |u'|^2 \,\mathrm{d}x}$ (ou bien $\|u\| = (\int_0^1 |u'|^2 \,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$) ($|u(x)| \leq \int_0^1 |u'(x)| \,\mathrm{d}x) \leq \|u'\|_{L^2} \Rightarrow \|u\|_{L^2} \leq \|u'\|_{L^2}$)

X est Hilbert noté $H_0^1(I)$ (ou bien $W_0^{1,2}(I)$)

Choix de G. G topologie faible (X est réflexif) (ou G topologie associe a la convergence uniforme $u_n \xrightarrow{G}$ si $\sup_I |u_n - u| \to 0$)

$u_n \rightharpoonup u$ faiblement $\Leftrightarrow$def $\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \ L^2\text{-faible} \\ u'_n \rightharpoonup u' \ L^2\text{-faible} \end{cases}$

$\overset{Rellich}{\Rightarrow}$ $u_n \to u$ uniformément. $|u_n(x) - u_n(y)| \leq \sqrt{|y-x|}\|u'_n\|_{L^2}$

Théorème 7 (Ascoli)**.** *u_n continue sur un compact équicontinue et $\forall x (u_n(x))$ bornée dans $\mathbb{R} \Rightarrow \exists u_{nk}$, $\exists u$ continue / $u_{nk} \to u$ uniformément.*

$\inf_{u \in X} F(u) o F(u) = \int_0^1 |1 - u'^2| \,\mathrm{d}x + \int_0^1 u^2 \,\mathrm{d}x$

• On a bien que $\lim_{\|u\|_X \to +\infty} F(u) = +\infty$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |(u')^2 - 1| \,\mathrm{d}x &\geq \int_0^1 |u'|^2 - 1 \\ &\geq \|u\|_X^2 - 1 \end{aligned}$$

• F est elle faiblement s.c.i. Soit φ une fonction 1-périodique de classe C^1 telle que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ (par exemple $\varphi(x) = \sin 2\pi x$). Soit $u_n = \frac{1}{n}\varphi(nx)$. Alors $u_n(0) = u_n(1) = 0 (\varphi(0) = \varphi(1) = 0)$. $u'_n = \varphi'(nx)$ $\int_0^1 |u_n|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\int_0^1 |\varphi(nx)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \frac{C}{n^2}$ où $C = \sup|\varphi^2| \Rightarrow u_n \to 0$ uniformément et dans $L^2(I)$.

$\int_0^1 |u'_n|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 |\varphi'(nx)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 |\varphi'(y)|^2 \,\mathrm{d}y$

Donc (u_n) est bornée dans X. Soit (u_{nk}) une sous-suite telle que $u_{nk} \xrightarrow{G} u$ (G=faible sans X)

Alors on a $u = 0$ d'où $u_n \xrightarrow{G} 0$ ($u'_n \to 0$ dans $L^2(I)$ faible)

Exemple 4. $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1 périodique $\int_0^1 |\psi|^2 \,\mathrm{d}x < +\infty$. Alors $\psi_n(x) = \psi(nx)$ est une suite bornée dans $L^2(0,1)$ et bornée dans $L^1(0,1)$ et $\psi_n \to c$ faiblement dans $L^2(0,1)$ où $c = \int_0^1 \psi(y) \,\mathrm{d}y$. En particulier si $\psi = \varphi'$ où φ est 1-périodique, on a $\psi_n \to 0$ car $\int_0^1 \psi(y) \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \varphi'(y) \,\mathrm{d}y = \varphi(1) - \varphi(0) = 0$. Conclusion $u_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans X. Calculons :

$$\begin{aligned} \liminf_{n \to \infty} F(u_n) &= \liminf_{n \to \infty} \int_0^1 |1 - (u'_n)^2|^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \liminf_{n \to \infty} \int_0^1 |1 - | \\ &= \liminf_{n \to \infty} \int_0^1 |1 - \varphi^2| \,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

$F(0) = \int_0^1 |1-0|^2 \,\mathrm{d}x = 1$

Si F était G s.c.i., on aurait : $\int_0^1 |1-(\varphi')^2| \,\mathrm{d}x \geq 1$. $\forall \varphi$ 1-périodique avec $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

Impossible (prendre $\varphi = \frac{1}{2} - |\frac{1}{2} - x|$).

- $\inf_{u\in X} F(u) = 0$

$u_n = \frac{1}{n}\varphi(nx)$ où $\varphi(x) = x$ si $x < \frac{1}{2}$ et $1-x$ si $x > \frac{1}{2}$ sur la période $[0,1]$

Alors $F(u_n) \to 0$ qd $n \to \infty$ car $\int_0^1 |1-|u_n'|^2| \,\mathrm{d}x = 0$ et $\int u_n^2 = \to 0$.

Puisque $F \geq 0$, on a donc $\inf_X F = 0$. L'infinum n'est pas atteint car $F(u) = 0 \Rightarrow \int_0^1 |1-{u'}^2| \,\mathrm{d}x + \int_0^1 |u|^2 \,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow u = 0$ pp et $u' = \pm 1$ pp impossible. Donc $F(u) > 0 \ \forall u \in X$.

Raidon Théorique

Exemple 5. $X = H_0^1(0,1)$ $F(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 |u'|^2 + \int_0^1 g(u) \,\mathrm{d}x$ où $g : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ est s.c.i.

$G =$ topologie faible de X ($u_n \xrightarrow{G} u \Rightarrow \begin{cases} u_n' \to u' \text{ faible } L^(0,1) \\ u_n \to u \text{ uniformément} \end{cases}$)

où $g : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ est s.c.i.

Alors F vérifie :

i G s.c.i.

ii $\lim_{\|u\|\to+\infty} F(u) = +\infty$ ($F(u) \geq \frac{1}{2}\|u'\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{4}\|u\|_X^2$)

Soit $u_n \xrightarrow{G} u$. Alors $u_n' \to u'$ faible $\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 |u_n'|^2 \geq \int_0^1 |u'|$. ($\liminf \|u_n'\| \geq \|u'\|$)

$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 g(u_n) \,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 (\liminf_n (g(u_n))) \,\mathrm{d}x \geq \int g(x) \,\mathrm{d}x$ (car $\liminf_{n\to\infty} g(u_n) \geq g(u)$).

Exemple 6. Ω ouvert convexe et fermé de $\mathbb{R}^d$

$k(x)$ continue : $\bar{\Omega} \to]0,+\infty[$. Soit $a,b \in \Omega$. $\sup\{u(b)-u(a) \mid u \in Lip(\Omega)|\nabla u(x)| \overset{pp}{\leq} k(x) \text{ sur } \Omega\} := M_{k,\Omega}(a,b)$

Soit $\gamma(t) : [0,1] \to \Omega \mid \gamma(0) = a et \gamma(1) = b$

$$\begin{aligned} u(b)-u(a) = u(\gamma(1)) - u(\gamma(0)) = u(\gamma(t))|_0^1 &= \int_0^1 (u\circ\gamma)'(t) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \nabla u(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) \,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^1 k(\gamma(t))|\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t \\ &\leq C\int_0^1 |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t \\ &\leq CL(\gamma) \end{aligned}$$

où $C = \sup_{\bar{\Omega}} k(x)$

$L(\gamma) =$longer de la courbe

Donc $M_{k,\Omega}(a,b) < +\infty$ s'il existe une courbe de longueur finie joignant a à b.

On considère $X = Lip(\Omega) = \{u \text{ continue}, u(b) = 0 \mid \nabla u \in L^\infty(\Omega)\}$

$F : u \in X \to \begin{cases} u(a) \text{ si } |\nabla u| \leq k|x| \text{ et } u(b) = 0 \\ \qquad +\infty \text{ sinon} \end{cases}$

$\inf_X F(u) = \inf\{u(a) \mid |\nabla u| \leq k$ pp sur Ω $u(b) = 0\} = -M_{k,\Omega}(a,b)$
$\|u\|_X \overset{\text{def}}{=} \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}$
(si $\nabla u = 0$ pp $\Rightarrow u = \text{const} \Rightarrow u = 0$(car $u(b) = 0$))
Choix de G
$\|u_n\|_X \leq C \Rightarrow \|\nabla u_n\|_{L^\infty} \leq CL^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))^*$
Alors $\forall x |u_n(x) - u_n(y)| \leq C|x-y|$ pour y racine de x
$\Rightarrow (u_n)$ est équicontinue au point x
$u_n(b) = 0 \Rightarrow |u_n(x)| \leq CL(\gamma)$ où φ est une courbe joignant b au point x.
Alors d'après Ascoli : $\exists u_{uk}$ $\exists u$ continue $|$ $u_{uk} \to u$ uniformément sur $\bar{\Omega}$ $\|\nabla u_{nk}\|_{L^\infty} \leq M \Rightarrow \nabla u_{nk} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ dans $L^\infty(\Omega)$ faible.
G= converge uniforme sur $\bar{\Omega}$.

1. $F(u) < +\infty \Rightarrow \|u\|_X \leq \sup_\Omega k = M \Rightarrow \lim_{\|u\| \to \infty} F(u) = +\infty$
2. F est G s.c.i.

Soit (u_n) une suite telle que $u_n \to u$ uniformément et telle que $\liminf_{n\to\infty} F(u_n) < +\infty$ Il faut montrer que $\liminf F(u_n) \geq F(u)$. Quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que $\liminf_n F(u_n) = \lim_{n\to\infty} F(u_n)$. Alors $F(u_n)$ est majoré pour n assez grand et donc $\sup_n \|u_n\|_X < +\infty$. Donc on a $u_n \to u$ uniformément $|\nabla u_n| \leq M$.

On a donc $u_n(a) \to u(a)$. Montrons que $u \in X$ et $|\nabla u(x)| \leq k(x)$ pp sur Ω.
On sait que $\nabla u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u$ dans $L^\infty(\Omega)$
$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u_n \cdot v(x) \to \int_\Omega \nabla u(x) v(x)$
$\forall v \in (L^1(\Omega))^d$ $v(x) = z\mathbb{1}_{B(x_0,\varepsilon)} z \in \mathbb{R}^2$
• $B(x_0,\varepsilon)$ boule centre dans $\Omega \Rightarrow \int_{B(x_0,\varepsilon)} (\nabla u_n(x), z) \to \int_{B(x_0,\varepsilon)} \nabla u(x), z$
$|\int_{B(x_0,\varepsilon)} \nabla u_n(x) z| \leq \int_{B(x_0,\varepsilon)} \nabla |u_n(x)||z| \,\mathrm{d}x \leq (\int_{B(x_0,\varepsilon)} k(x)\,\mathrm{d}x)|z|$
d'où qd $n \to \infty$ $|\int_{B(x_0,\varepsilon)} \nabla u(x) z| \leq (\int_{B(x,\varepsilon)} k(x))|z|$
$\Rightarrow \frac{1}{B(x_0,\varepsilon)} |\int_{B(x_0,\varepsilon)} \nabla u_n(x) z \,\mathrm{d}x\,| \leq \frac{1}{B(x_0,\varepsilon)} |\int_{B(x_0,\varepsilon)} k(x)\,\mathrm{d}x\,|z|$
D'après le Thm des points de Lebesgue pp $x_0 \in \Omega \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{B(x_0,\varepsilon)} \int_{B(x_0,\varepsilon)} \nabla u(x) z = \nabla u(x_0) z$
$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{B} \int_{B(x_0,\varepsilon)} k(x)\,\mathrm{d}x = k(x_0)$
$\nabla u(x_0) z \leq k(x_0) z$ $\forall z \in \mathbb{R}^d ppx_0 \in \Omega \Rightarrow |\nabla u(x_0)| \leq k(x_0) ppx_0 \in \Omega$
Conclusion $u_n(a) \to u(a)$ $u_n(b)$ $\forall x \Rightarrow u(b) = 0$ $|\nabla u| \leq k(x) ppx \in \Omega$
Donc $u \in X$, avec $|\nabla u| \leq k$ pp et $F(u) = u(a)$.

Rappel. $F(u_n) = u_n(a)$. *Donc* $F(u_n) \to F(u)$ $F(u_n) \to \alpha$, $\alpha < +\infty$ $u_n \rightharpoonup u$ *uniformément* $\alpha = F(u)$

Ainsi F est G s.c.i. d'où existence d'une solution $u \in X$. On a : $M_{k,\Omega}(a,b) = \sup\{u(b) - u(a) \mid |\nabla u| \leq k sur \Omega\} = \inf(\int_0^1 k(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\,, \gamma \in Lip(0,1,\Omega)$ $\gamma(0) = a$ $\gamma(1) = b)$
On a déjà vu que $u(b) - u(a) \leq \int_0^1 k(\gamma)|\gamma(a)|$ si $u \in X$ et $\gamma \in Lip([0,1],\Omega)$ $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b \Rightarrow M_{\Omega,k}(a,b) \leq \inf\{\int_0^1 k(\gamma)|\gamma'|\,\mathrm{d}t\,,\ \gamma(0) = a$ $\gamma(1) = b$ $\}$—distance géodésique.
Posons $\bar{U}(x) = -\inf\{\int_0^1 k(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \mid \gamma(0) = x$ $\gamma(1) = b\}$
Alors $\bar{u}(b) = 0$ $-\bar{u}(a) = d_{\Omega,k}(a,b)$—distance géodésique entre a et b.
Si $|\nabla \bar{u}| \leq k(x)$ pp sur Ω, alors
$M_{\Omega,k}(a,b) \geq -\bar{u}(a) = d_{\Omega,k}(a,b)$
$z\nabla \bar{u}(x) = \lim \frac{\bar{u}(x+tx) - \bar{u}(x)}{t}$
$|\bar{u}(x+tz) - \bar{u}(x)| \leq \int_0^t k(x+tz)t|z|\,\mathrm{d}z \Rightarrow \nabla \bar{u}(x) z \leq k(x)|z|$

$k(x) = k_1, k(x) = k_2$
$k_1|c - a| + k_2|b - c|$