Table des matières

Résumé

Plan :

1. Courbes (plan + espace)
   — étude local
   — étude global
2. surfaces dans $\mathbb{R}^3$

1 Courbes

Lesson 1

Définition 1. Courbe et Courbe Régulière

1. Une courbe paramètre dans $\mathbb{R}^3$ est une function $c : I \to \mathbb{R}^n$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et c est lisse (c est infiniment différentielle, $c \in C^\infty$).
$$I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^3,$$
t – paramètre.
2. Une courbe paramétrée est régulièrement si
$$\dot{c}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(t) \neq 0,$$
pour tout $t \in I$.

Si une courbe est régulière, $c(t) \neq const.$ $\dot{c}(t)$ ¡diuge la tangente à la courbe en $c(t)$.

Chaque régulière courbe est tangente à la ligne.

Définition 2. La trace d'une courbe paramètre $I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$ est image :
$$\{c(t) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Une cure paramètre est plus une sa trace.

La courbe
$$R \ni t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$
$trace = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$. Et la courbe
$$R \ni t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$
a la même trace !
$$\dot{c}_1(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix},\ mais\ \dot{c}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 3. Si $I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}$ est une courbe paramètre, $J \subset \mathbb{R}$ – une intervalle et $\varphi : J \to I$ une function lisse t.q. $\varphi^{-1} : J \to I$ est également lisse, on disque(?) :

$$J \ni t \mapsto c^2(t) = c \circ \varphi(t) \in \mathbb{R}^n,$$

est une reparametrisation de c.

Remarque : $\dot{\tilde{c}}(t) = \dot{c} \circ \varphi(t) * \dot{\varphi}(t)$. Donc, $\tilde{c}$ - régulière $\Longleftrightarrow$ c est régulière.

$$\frac{d}{ds}\varphi^{-1}(s) = \frac{1}{\dot{\varphi} \circ \varphi^{-1}(s)} \neq 0$$

$\varphi : J \to I$ est un diffeomprphisme comme $\dot{\varphi} \neq 0$, on a

$$\begin{cases} \text{soit } \dot{\varphi}(t) > 0, & \text{pour tout } t \in J \\ \text{soit } \dot{\varphi}(t) < 0, & \text{pour tout } t \in J \end{cases},$$

$$\begin{cases} \varphi \text{ est } \nearrow \\ \varphi \text{ est } \searrow \end{cases}.$$

Si φ est $\nearrow$ on dit une la reparametrisation conserve le sens de parcours (l'orientation). Si φ est $\searrow$, la reparam inverse le sens de parours.

Définition 4.

1. Une courbe est une classe d'equivalence de courbes parametrie pour la selation :

$$c \sim \tilde{c} \Longleftrightarrow \tilde{c} \text{ est une reparemetrisation de } c$$

2. Une courbe on entee est une classe d'equivalence des courbes parametrie pour :

$$c \sim \tilde{c} \Longleftrightarrow \tilde{c} \text{ est une reparemetrisation puservantle sense le parours de } c$$

Définition 5. Si c est une courbe paramètre t.q. $|\dot{c}(t)| = 1$ pour tout $t \in I$. On dit que c'est paramitee pur sa louger d'arc.

Proposition 1. *Si $I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$ est une courbe param reguliere il existe une reparametrisation de c par ca long d'arc :*

$$J \ni s \mapsto \tilde{c}(s) = c \circ \varphi(s) \in \mathbb{R}^n$$

$$|\dot{\tilde{c}}(s)| = 1 \textit{ pour tout } s \in J.$$

Lemme 1. *Si* $\begin{matrix} J_1 \ni s \mapsto \tilde{c_1}(s), \textit{ et} \\ J_2 \ni s \mapsto \tilde{c_2}(s) \end{matrix}$ *sont 2 parametr de par long d'arc de la meme courbe $|\dot{c_1}(s)| = 1 = |\dot{c_2}(s)|$. alors $c_2(s) = c_1(s_0 \pm s)$, pour un $s_0 \in \mathbb{R}$ et si c_1 et c_2 ont un pos le meme suis de parcours. Si $c : [a,\ b] \to \mathbb{R}^n$ est une courbe parametre sa longen est :*

$$L[c] = \int_a^b |\dot{c}(t)| \,\mathrm{d}t$$

$$l = \int_0^t |\dot{c}(u)| \, du = t$$

2 Lesson 2

Définition 6. Une courbe paramétrie $c : R \to R^d$ est appelie PERIODIQUE de periode p, si $c(t+p) = c(t),\ \forall t \in R$.

Définition 7. Une courbe fermee et appeler une COURBE FERMEE SIMPLE s'il existe une parametrisation reguliere, periodique de periode p et si : $c_{[0,p)}$ est injectif.

Définition 8. $c \in C^\infty(I,\ R^2)$ est applee COURBE PLANE.

Définition 9. Soit c une courbe parametree par longueur d'arc (donc une courbe de vitess 1) (donc $||\dot{c}(t)|| = 1$). Son hamps normale est definie par :

$$N(T) := \dot{c}^\perp(t),\ t \in I$$

Remarque. $N(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{c}(t)$. *$N$ depend de l'orientation de la courbe.*

Pour chaquet lestome $\dot{c},\ N(t)$ est un base otrthonormee direct de R^2.

Lemme 2. *Soite une courbe vitesse 1, N son alors $\ddot{c}(t)$ est parallier a $N(t)$.*

Démonstration. Idee $||\dot{c}(t)|| = 1,\ \forall t \iff \ddot{c}(t) \perp \dot{c}(t)$. □

Définition 10. Soit $c \in C^\infty(I,\ R^2)$ une courbe plane de vitesse 1, alors $\ddot{c}(t) = \varkappa(t)N(t)$, avec $\varkappa(t) :=< \ddot{c}(t),\ N(t) >$. $\varkappa(t)$ - scalar.

Alors $\varkappa \in C^\infty(I,\ R)$ et $\varkappa$ est appele la courbe dec ? ? ($\varkappa(t)$ la courbe du point $c(t)$)

Theorem 1. *Formulles de Fenet Soit $c \in C^\infty(I,\ R^2)$ une courbe de vitesse 1.*

Soit $\begin{matrix} T(t) := \dot{c}(t), \\ N(t) := T^\perp(t) \end{matrix}$ *, $\{T(t),\ N(t)\}$ - le systeme ortogonale vecteur. Est appeli le* REPPERE DE FRENET, *ou* BASE DE FRENET. FORMULES DE FRENET *:*

$$\begin{gathered} \dot{T}(t) = \varkappa(t)N(t) \\ \dot{N}(t) = -\varkappa(t)T(T) \end{gathered}$$

Remarque.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varkappa \\ -\varkappa & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix}$$

Lemme 3. *Soit $c : C^\infty([a,\ b],\ R^2)$ une courbe plane devitesse, alors il existe $\nu \in C^\infty([a,\ b],\ R)$ t.q. $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t),\ \sin\nu(t))$*

Définition 11. Soit $c \in C^\infty(R,\ R^2)$ une courbe plane, periodique comenode L et de vitesse 1. (en partiquliere reguliere). Soit $\nu \in C^\infty(R,\ R)$. Telque $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t),\ \sin\nu(t))$ (an dit : une angle de la tangente).

On define le nobn de rotation de la tangente de c : $n_c = \frac{1}{2\pi}(\nu(c) - \nu(o))$