Table des matières

Résumé

Plan :

1. Courbes (plan + espace)
   - étude local
   - étude global
2. surfaces dans $\mathbb{R}^3$

0.1 Courbes

Lesson 1

Définition 1 (Courbe et Courbe Régulière)**.**

1. Une Courbe Paramètre dans $\mathbb{R}^3$ est une function $c : I \to \mathbb{R}^n$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et c est lisse (c est infiniment différentielle, $c \in C^\infty$).
$$I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^3,$$
t – paramètre.
2. Une courbe paramètre est régulièrement si
$$\dot{c}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(t) \neq 0,$$
pour tout $t \in I$.

Si une courbe est régulière, $c(t) \neq \mathrm{const}$. $\dot{c}(t)$ désigne la tangente à la courbe en $c(t)$. Chaque régulière courbe est tangente à la ligne.

Définition 2. La trace d'une courbe paramètre $I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$ est image :
$$\{c(t) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Une cure paramètre est plus que sa trace.
La courbe $\mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, trace $= \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$. Et la courbe $R \ni t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ a la même trace !
$$\dot{c}_1(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ mais \ \dot{c}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 3. Si $I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}$ est une courbe paramètre, $J \subset \mathbb{R}$ – une intervalle et $\varphi : J \to I$ une function lisse t.q. $\varphi^{-1} : J \to I$ est également lisse, on disque(?) :
$$J \ni t \mapsto c^2(t) = c \circ \varphi(t) \in \mathbb{R}^n,$$
est une reparamétrisation de c.

Remarque. *$\dot{\tilde{c}}(t) = \dot{c} \circ \varphi(t) * \dot{\varphi}(t)$. Donc, $\tilde{c}$ - régulière $\Longleftrightarrow$ c est régulière.*
$$\frac{d}{ds}\varphi^{-1}(s) = \frac{1}{\dot{\varphi} \circ \varphi^{-1}(s)} \neq 0$$
$\varphi : J \to I$ est un difféomorphisme comme $\dot{\varphi} \neq 0$, on a

$$\begin{cases} \textit{soit } \dot\varphi(t) > 0, & \textit{pour tout } t \in J \\ \textit{soit } \dot\varphi(t) < 0, & \textit{pour tout } t \in J \end{cases},$$

$$\begin{cases} \varphi \textit{ est } \nearrow \\ \varphi \textit{ est } \searrow \end{cases}.$$

Si φ est $\nearrow$ on dit une la reparamétrisation conserve le sens de parcours (l'orientation). Si φ est $\searrow$, la reparam inverse le sens de parours.

Définition 4.

1. Une `courbe` est une Classe d'Equivalence de Courbes Paramètre pour la relation :
$$c \sim \tilde{c} \Longleftrightarrow \tilde{c} \text{ est une reparamétrisation de } c$$
2. Une `courbe orientée` est une classe d'equivalence des courbes paramètre pour :
$$c \sim \tilde{c} \Longleftrightarrow \tilde{c} \text{ est une reparamétrisation préservante la sens de parcours de } c$$

Définition 5. Si c est une courbe paramètre t.q. $|\dot{c}(t)| = 1$ pour tout $t \in I$. On dit que c'est paramètre pur sa longueur d'arc.

Proposition 1. *Si $I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$ est une courbe paramètre régulière il existe une reparamétrisation de c sa long d'arc :*

$$J \ni s \mapsto \tilde{c}(s) = c \circ \varphi(s) \in \mathbb{R}^n$$

$$|\dot{\tilde{c}}(s)| = 1 \textit{ pour tout } s \in J.$$

Lemme 1. *Si* $\begin{matrix} J_1 \ni s & \mapsto \tilde{c_1}(s) \\ J_2 \ni s & \mapsto \tilde{c_2}(s) \end{matrix}$ *sont 2 paramètre de par long d'arc de la meme courbe $|\dot{c_1}(s)| = 1 = |\dot{c_2}(s)|$. alors $c_2(s) = c_1(s_0 \pm s)$, pour un $s_0 \in \mathbb{R}$ et si c_1 et c_2 ont un pos le meme suis de parcours. Si $c : [a,\ b] \to \mathbb{R}^n$ est une courbe paramètre sa longueur est :*

$$L[c] = \int_a^b |\dot{c}(t)| \, \mathrm{d}\, t$$

$$l = \int_0^t |\dot{c}(u)| \, \mathrm{d}u = t$$

Définition 6. Une courbe paramétrique $c : R \to R^d$ est appelée PÉRIODIQUE de période p, si $c(t+p) = c(t),\ \forall t \in R$.

Définition 7. Une courbe fermée et appeler une COURBE FERMÉE SIMPLE s'il existe une parametrisation régulière, périodique de période p et si : $c_{[0,p)}$ est injectif.

Définition 8. $c \in C^{\infty}(I,\ R^2)$ est appelée COURBE PLANE.

Définition 9. Soit c une courbe paramètre par longueur d'arc (donc une courbe de vitesse 1) (donc $||\dot{c}(t)|| = 1$). Son champs normale est définie par :

$$N(T) := \dot{c}^{\perp}(t),\ t \in I$$

Remarque. $N(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{c}(t)$. *$N$ depend de l'orientation de la courbe.*

Pour chaque t le système $\dot{c},\ N(t)$ est un base orthonormée direct de R^2.

Lemme 2. *Soit une courbe vitesse 1, N son champs normals alors $\ddot{c}(t)$ est parallèle a $N(t)$.*

Démonstration. Idee $||\dot{c}(t)|| = 1,\ \forall t \Longleftrightarrow \ddot{c}(t) \perp \dot{c}(t)$. □

Définition 10. Soit $c \in C^{\infty}(I,\ R^2)$ une courbe plane de vitesse 1, alors $\ddot{c}(t) = \kappa(t)N(t)$, avec $\kappa(t) := \langle \ddot{c}(t),\ N(t)\rangle$. $\kappa(t)$ - scalar.

Alors $\kappa \in C^{\infty}(I,\ R)$ et κ est appelé la courbure de c ($\kappa(t)$ la courbure du point $c(t)$)

Théorème 1. *Formulas de Frenet Soit $c \in C^{\infty}(I,\ R^2)$ une courbe de vitesse 1.*

Soit $\begin{matrix} T(t) := \dot{c}(t), \\ N(t) := T^{\perp}(t) \end{matrix}$ *, $\{T(t),\ N(t)\}$ - le systeme ortogonale vecteur. Est appellé le* REPÉRE DE FRENET, *ou* BASE DE FRENET.

FORMULES DE FRENET *:*

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) &= \kappa(t)N(t) \\ \dot{N}(t) &= -\kappa(t)T(T) \end{aligned}$$

Remarque.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix}$$

Lemme 3. *Soit $c\ :\ C^{\infty}([a,\ b],\ R^2)$ une courbe plane de vitesse, alors il existe $\nu \in C^{\infty}([a,\ b],\ R)$ t.q. $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t),\ \sin\nu(t))$*

Définition 11. Soit $c \in C^{\infty}(R,\ R^2)$ une courbe plane, périodique de période L et de vitesse 1. En particulier régulière. Soit $\nu \in C^{\infty}(R,\ R)$. Talque $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t),\ \sin\nu(t))$ (an dit : une angle de la tangente).

On define Le Nobre de rotation de la tangente de c : $n_c := \frac{1}{2\pi}(\nu(c) - \nu(o))$

Rappel. $c \in C^{\infty}(I;\mathbb{R}^2)$ *régulière. Alors* $\exists \nu \in C^{\infty}(I;)$ *t.q.* $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t), \sin\nu(t))$. *On définie le* NOMBRE DE ROTATION DE LA TANGENTE *pour une courbe periodique de période* L *:*

$$n_c := \frac{1}{2\pi}(\nu(L) - \nu(0))$$

Lemme 4. *Soient* $c_1, c_2 \in C^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ *deux courbes périodiques de période* L*, paramètre par longueur d'arc* S *:* $c_1 = c_2 \circ \varphi$ *avec* $\varphi > 0$ *alors :*

$$n_{c_1} = n_{c_2}$$

Si $\dot{\varphi} < 0$ *alors*

$$n_{c_1} = -n_{c_2}$$

Remarque. *Le nombre de rotation de la tangente est donc invariant par rapport à une reparamétrisation que preserve l'orientation.*

Démonstration. On avait vu que $\varphi(t) = \pm t + t_0$ donc $\dot{\varphi} > 0 \Rightarrow \varphi(t) = t + t_0$. Soit ν_2 t.q. $\dot{c}_2(t) = (\cos\nu_2(t), \sin\nu_2(t))$ alors pour $\nu_1 := \nu_2 \circ \varphi$ on a que $\dot{c}_1(t) = (\cos\nu_1(t), \sin\nu(_1 t))$. Soit $\bar{\nu}_1(t) := \nu_1(t + L)$ on a que $\dot{c}(t) = (\cos\bar{\nu}_1(t), \sin\bar{\nu}(_1 t))$ car $c_1(t) = c_1(t + L)$.

$$2\pi(n_{c_2} - n_{c_1}) = (\nu_2(L) - \nu_2(0)) - (\nu_1(L) - \nu_1(0)) \quad = (\nu_2(L - t_0) - \nu_2(-t_0)) - (\nu_1(L) - \nu_1(0)) \tag{1}$$

□

Théorème 2. *Sait* c *une courbe plane périodique de période* L *et paramètre par longueur d'arc. Soit* κ *la courbure de* c *alors*

$$n_c = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. *En particulier* $\int\limits_0^L \kappa(t)\,\mathrm{d}t \in 2\pi\mathbb{Z}$

Démonstration. Soit $\nu \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction angle pour la tangente, c.à.d. $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t), \sin\nu(t))$. $\ddot{c}(t) = \kappa(t)\dot{c}^{\perp}(t)$ donc $\kappa(t) = \left\langle \ddot{c}(t), \dot{c}^{\perp}(t)\right\rangle$ ou $\ddot{c}(t) = \dot{\nu}(t)(-\sin\nu(t), \cos\nu(t))$ et $\dot{c}^{\perp}(t) = (-\sin\nu(t), \cos\nu(t))$ donc $< \ddot{c}(t), \dot{c}^{\perp}(t) >= \dot{\nu}(t) = \kappa(t)$ ou

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\nu(L) - \nu(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \dot{\nu}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

□

Théorème 3 (Hopf. Turning tangent theorem)**.** *Une courbe plane fermée simple a un nombre de rotation (de la tangente) 1 ou* -1.

Nombre de rotation $n = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}(\nu(L) - \nu(0))$. $c(t+l) = c(t)$ $c(t) = (\cos\nu(t), \sin\nu(t))$, $\dot{\nu} = \kappa$

Remarque. *On avait inclu dans la défini de fermée simple qu'il n'ya pas de point singulier.*

Pour la preuve on aura besoin du lemme de recouvrement.

> **Définition 12.** Sait $X \subset \mathbb{R}^d$ et $x_0 \in X$ On dit que X est ÉTOILE par rapport à x_0, (X is star shaped). Si pour chaque $x \in X$ le segment de droite entre x_0 et x est contenu dans X. C'est dire $\forall x$ $\{x_0 1 - t + xt, t \in [0,1]\} \subset X$

Lemme 5. *De Recouvrement Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ étoilé par rapport à x_0 et soit*

$$e : X \to S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}\text{—une application continue}$$

Alors in existe une application <u>continue</u> $\nu : X \to \mathbb{R}$ t.q. $e(x) = (\cos\nu(x), \sin\nu(x))$. ν est unique sous la condition $\nu(x_0) = \nu_0$.

Démonstration. <u>Cas</u> ou $e : X \to S^1$ n'est pas surjective. Supposons qu'il existe $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0) \notin e(X)$. $e(X) = \{z; z = e(x), x \in X\}$. La fonction $\psi : (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi) \to S^1$ $\{(\cos\varphi_0, \sin\varphi_2\}$ est un homéomorphisme. On $\nu = \psi^{-1} \circ e$ donc ν est continue.

<u>Cas</u> $e(X) = S^1$. Dans le cas $d = 1$, $X = [0,1]$, $x_0 = 0$ on a démontré le théorème ($e = \dot{c}$ dériver d'une courbe)

<u>Cas</u> $d > 1$. Soit $x \in X$. On defini $e_x : [0,1] \to S^1$, $e(x)(t) = e(tx + (1-t)x_0)$. On sait qu'il existe $\nu_x : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue t.q. $e_x(t) = (\cos\nu_x(t), \sin\nu_x(t))$ de $\nu_x(t) = \nu(tx + (1-t)x_0)$ donc $\nu(x) = \nu_x(1)$ donc $e(x) = e_x(1) = (\cos\nu_x(1), \sin\nu_x(1))$ is est e a de monte que $\nu_x(1)$ est continue en e.

Soit $\varepsilon > 0$ et $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$ une partition t.q. $e_x|_{[t_j, t_{j+1}]} \subset U_h$, $H \in \{1,2,3,4\}$. Soit y t.q. $\|e_x(t) - e_y(t)\| < \varepsilon$, $\forall t \in [0,1]$. Si ε est suffisent petit. $e_y|_{[t_j, t_{j+1})} \subset U_h$. Par example dans le cas $h = 4$ on aura

$$\nu_x(t) = \arctan\left(\frac{e_x^2(t)}{e_x^1(t)}\right) \nu_y(t) \qquad = \arctan\left(\frac{e_y^2(t)}{e_y^1(t)}\right) \tag{2}$$

$e = (e^1, e^2)$ □

Démonstration. du théorème de Hopf Soit c une une paramétrisation de vitesse 1 de période L. Sait $x_0 := \max\{c^1(t); t \in [0,l]\}$. Soit $p = \{(z_1, z_2); z_1 = x_0\} \cap C(\mathbb{R})$ Soit la paramétrisation t.q. $c(0) = p$. $G = p + \mathbb{R}(1,0)$. $C(\mathbb{R}) \cap G$ est à gauche de p. Soit $X = \{(t_1, t_2) : 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq L\}$ X est étoilé par rapport à $(0,0)$. On considère $c : X \to S^1$ Formula after an image.

$$c(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{c(t_1) - c(t_1)}{||c(t_1) - c(t_1)||} & t_2 > t_1 \\ \dot{c}(t) & t_2 = t_1 = t \\ -\dot{c}(0) & (t_1, t_2) = (0, L) \end{cases}$$

Alors $e \in C^0(x, S^1)$, en effet $c \in C^\infty$. $c(t_2) = c(t_1) + \dot{c}(t_1)(t_2 - t_1) + o(|t_2 - t_1|)$

$$\frac{c(t_1)-c(t_1)}{||c(t_1)-c(t_1)||}=\frac{(t_2-t_1)(\dot{c}(t_1)-o(1))}{||(t_2-t_1)(\dot{c}(t_1)-o(1))||}\to\frac{\dot{c}(t_1)}{||\dot{c}(t_1)||}=\dot{c}(t_1)$$
$$t_2\to t_1$$
$$\frac{c(L-\varepsilon)-c(0)}{||c(L-\varepsilon)-c(0)||}=\frac{c(-\varepsilon)-c(0)}{c(-\varepsilon)-c(0)}=\frac{-\varepsilon(\dot{c}(0)+o(1))}{||-\varepsilon(\dot{c}(0)+o(1))||}\to-\dot{c}(0)$$
$$\varepsilon\to(down)+0+$$

De plus X est étoilée par rapport à $(0,0)$. Donc il exist $\nu\in C^0(X)$ t.q. $e(t_1,t_2)=(\cos\nu(t_1,t_2),\sin\nu(t_1,t_2))$. Pour de nombre de rotation de (la tangente de) on a :

$$2\pi n_c=\nu(L,L)-\nu(0,0)=\nu(L,L)-\nu(0,L)+\nu(0,L)-\nu(0,0)$$

(droite $\perp$ à $\dot{c}(0)$) $x_0=\max\{c^{(1)},\ t\in[0,L]\}$ $(1,0)\notin im([0,1]\ni t\mapsto e(0,t))$ car en $c(0),t\mapsto x(t)$ est maximal, donc $im([0,1]\ni t\mapsto\nu(0,t))\subset(0,2\pi)+2\pi k$ (car facile du lemme du recouvrement).

$e(0,L)=-\dot{c}(0)=(0,-1)$ donc $\nu(0,L)=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$ de $\nu(0,0)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ donc $\nu(0,L)-\nu(0,0)=\pi$ de même : $(-1,0)\notin im(t\mapsto e(t,L))\Rightarrow\nu(L,L)-\nu(0,L)=\pi$ donc $2\pi n_C=2\pi$. □

> **Définition 13.** Une courbe plane est appelée Convexe si tout ses points sont sur un des cotés de sa tangente. $\Leftrightarrow$ pour chaque $t_C<c(t)-c(t_0)>\geq(\leq)0,\ \forall t$ avec $n(t_0)\perp T_c(t_0)$.

Théorème 4. *Soit une courbe plane de vitesse 1. Alors :*

1. *Si c est convexe on a pour sa courbe κ on a :*

$$\kappa(t)\geq 0\ \forall t(\ ou\ \kappa(t)\leq 0\forall t)$$

2. *Si c est fermé simple et si $\kappa(t)\geq 0,\ \forall t$ (ou $\kappa(t)\leq 0,\forall t$) alors c est convexe.*

Démonstration. 1. Soit c convexe et supposons que $\langle c(t)-c(t_0),n(t_0)\rangle\geq 0,\ \forall t$. On developpe $c(t)=c(t_0)+\dot{c}(t_0)(t-t_0)+\ddot{c}(t)\frac{(t-t_0)^2}{2}+o(|t-t_0|^2)$. $0\leq\left\langle c(t)-c(t_2),\underbrace{\dot{c}^{\perp}(t_0)}_{n(t_0)}\right\rangle=$
$\underbrace{\langle\ddot{c}(t_0,\dot{c}^{\perp}(t_0))\rangle}_{\kappa(t_0)}\underbrace{\frac{(t-t_0)^2}{2}}_{\geq 0}+o(|t-t_0|^2)$. $\Rightarrow\kappa(t_0)\geq 0$ donc $\kappa(t)\geq 0\forall t\in I$

2. Supposons que $\kappa(t)\geq 0\forall t$ et que c est fermée simple de période L. Si c n'était pas convexe alors il existerait un t_0 t.q. : $\varphi(t):=\langle c(t)-c(t_0),\dot{c}^{\perp}(t_0)\rangle$, a des valeurs positives et négatives. φ atteint un maximum eu point t_2 et un minimum au point t_1 donc $\varphi(t_2)\geq 0$ et $\varphi(t_1)$ et $\varphi(t_1)\leq 0=\varphi(t_0)\leq\varphi(t_2)$ pour un t_0. $\dot{\varphi}(t_1)=0\,\langle\dot{c}(t_1),\dot{c}^{\perp}(t_0)\rangle$ donc $\dot{c}(t_1)=\pm\dot{c}(t_0)$, $\dot{c}(t_2)=\pm\dot{c}(t_0)$. Au moins deux des vecteurs $\dot{c}(t_0,\dot{c}(t_1),\dot{c}(t_2)$ sont donc les mêmes. Soit $s_1,s_2\in\{t_0,t_1,t_2\}$ t.q. $s_1<s_2$ $\dot{c}(s_1)=\dot{c}(s_2)$. On a $\nu(s_2)-\nu(s_1)=2\pi k$ avec $k\in\mathbb{Z}$. $0\leq\kappa(t)\leq\dot{\nu}(t)$ donc ν est croissant donc $k\in\mathbb{N}$ de même. $\nu(s_1+L)-\nu(s_2)=2\pi l$ avec $l\in\mathbb{N}$ donc $2\pi n_c=\nu(s_1+L)-\nu(s_1)=2\pi(l+k)=2\pi$ (Hopf) $\Rightarrow l=0ouk=0$. Supposons que $k=0$. Donc

$\nu(t) = cte \forall t \in [s_1, s_2]$ donc $c(s) = c(s_1) + \dot{c}(s_1)(s - s_1) = c(s_1) + \dot{c}(t_0)(s - s_1)$ pour $s \in [s_1, s_2]$. donc $\varphi(s) = \langle c(s) - c(t_0), \dot{c}^{\perp}(t_0) \rangle = \langle c(s_1) - c(t_0), \dot{c}^{\perp}(t_0) \rangle = cte$ ce qui n'est pas possible car au moins 2 des points t_0, t_1, t_2 sont dans $[s_1, s_2]$.

□

Définition 14. Une courbe plane de vitesse 1. On dit que c admet un sommet en t_0 si $\dot{\kappa}(t_0) = 0$. (sommet=vertex en anglais)

Exemple 0.1.1. On peut démontrer que l'ellipse à quatres sommets.

Remarque. *De manière générale on sait qu'one fonction périodique admet deux points critiques (un maximum et un minimum).*

Théorème 5. *des 4 sommet (four vertex theorem) Soit* $c \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ *périodique de période* L *de vitesse 1 et convexe* c *admet au moins quatre sommets.*

Pour la preuve on a besoin de 2 lemmes

Lemme 6. *Si l'intersection d'une courbe convexe plane fermée simple avec une droite* G *contient plus que deux points différents alors* c *contrent un segment de* G*.*

Remarque.

Démonstration. Supposons que c est orienté positive convexe $= 0$ $\kappa(t) \geq 0 \Rightarrow \dot{\nu}(t) \geq 0$ pour ν une angle $\dot{c}(t) = (\cos \nu(t), \sin \nu(t))$ par Hopf : $\nu(L) - \nu(0) = 2\pi$ donc $\nu : [0, L] \to [0, 2\pi] + \nu_0$ est croissante et surjective. □

Exercice 2

1. Démontrer qu'un segment de droite est la courbe la plus courte (de classe C^1) être deux points. S : $A, B \in \mathbb{R}^d$, $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^d$, $c(0) = A, c(1) = B$. $L(c) = \int_0^1 ||\dot{c}(t)||\mathrm{d}t$. $c(1) - c(0) = B - A = \int_0^1 \dot{c}(t)\mathrm{d}t$, $||B - A|| = || \int_0^1 \dot{c}(t)\mathrm{d}t|| \leq \int_0^1 ||\dot{c}(t)||\mathrm{d}t$.
2. $f(t) = \cos h(t)$ $\gamma(t) = (t, \cos h(t))$. $s(t) = \int_0^t ||\dot{\gamma}(\tau)||\mathrm{d}\tau = \sin ht$, $t \in [0, 2]$. On doit trouves φ t.q pour $c := \gamma \circ \varphi$ on a $||\dot{c}|| = 1$. $t(s) = arcsinhs$, $s \in [0, \sin h2]$, $c : (0, \sin h2) \to \mathbb{R}^2$. $c(s) = \gamma(arcsinhs)$, $s \in (o, sinh2)$. $c(s) = (arcsinhs, \sqrt[2]{1 + s^2})$, $s \in (0, sinh2)$.
3. $\forall t \neq 1 :$ γ est régulier.

Exercice 3

1. Démontrer que si $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une paramétrisation par longueur d'arc d'une courbe fermée, alors c est périodique.
   Exemple : $t \mapsto (\cos(e^t), \sin(e^t))R = f(t)$ $(t \in \mathbb{R})$. f n'est pas périodique, $f(\mathbb{R}) = S^1$.
   Dénoter : si c est une parametrisation t.q. $||\dot{c}(t)|| = 1$ alors c est périodique. Idée : $d(t + T) = d(t)$ T est période. On definit φ en ce fonction de passage. $s(t) = \int_0^t ||\dot{d}(\tau)|| \,\mathrm{d}\tau = \int_0^T ||\dot{d}(\tau)|| \,\mathrm{d}\tau = L + s(t)$. $\varphi(u + L) = \varphi(s(t) + L) - \varphi(s(t + T)) = t + T = \varphi(u) + T$, $u = s(t)$, $s \circ \varphi(u) = u$, φ—function inverse function reciproque. $\bar{c} := d \circ \varphi$ est une parameter par long d'arc. $\bar{c}(u + L) = \varphi(s(t) + L) - \varphi(s(t + T)) = t + T = \varphi(u) + T$. ($\varphi$ la fonction reciproque de s).

Homework all the rest.

Lemme 7. *c une courbe plane fermée simple et convexe. c intersecté une droite un plus de trois points alors c contient un segment de droite.*

Démonstration. Soit $c; [0,1] \leftarrow \mathbb{R}$ la courbe. Supposons que pour la droite $G = p_0 + \mathbb{R}\nu$. $c([0,1]) \cap G = \{c(0), c(t_1), c(t_2)\}$. Supposons que $\kappa \geq 0$ donc pour l'angle ν t.q. $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t), \sin\nu(t))$ an a que $\dot{\nu} = \kappa \geq 0$ et $\nu(L) = \nu(0) = 2\pi$ donc $\nu : [0,L] \leftarrow [0,2\pi] + \nu_0$ est croissante et surjective. Soient $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ $([0,t_1],[t_1,t_2],[t_2,L])$. Supposons que $c(I_j) \cap G \neq c(I_j)$. Soit $G_S = G + s\nu^{\perp}$. Soit $s_1 = sup\{s > 0;\ G_s \cap c(I_j) \neq 0\}$. Soit τ_j define par $c(I_j) \cap G_{s_1} = \{c(\tau_j)\}$ donc $\dot{c}(\tau_j) = \pm\nu$. Donc $\exists \tau_n$ t.q. $0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2 < \tau_3 < L$ t.q. $c(\tau_n) = \pm\nu\ \forall k$. Soit $\theta_1 \in \theta_0 + [0,2\pi)$ t.q. $(\cos\theta_n, \sin\theta_n) = \nu$. Supposons que $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ et $(\cos\nu_2, \sin\nu_2) = -\nu$ donc $c(\tau_k) \in \{\theta_1, \theta_2\}, \forall k \in \{1,2,3\}$. $t \mapsto \theta(t)$ est croissant donc $\exists j$ t.q. $\theta|_{[}t_j, t_{j+1}]$ est constant. □

Lemme 8. *Soit une courbe plane fermée et sample et convexe. G une droite t.q. $G \cap im(c) = \{p_1, p_2\}$ t.q. $T_{p_1}(c) = T_{p_2}(c)$ colinéaire G alors c contient un segment de G.*

Démonstration. $G = T_{p_1}(c)$ donc apr convexité la courbe est situé d'un seul coté de G donc supposons :

$$\left\langle c(t) - p_1, \dot{c}^{\perp}(t_1) \right\rangle > 0$$

Soit $G_\varepsilon = G + \varepsilon\dot{c}^{\perp}(t_1)$. Pout ε suffisent petit $G_\varepsilon \cap im(G) = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ avec $q_j \neq q_k,\ j \neq k,\ q_j \in im(c)$. le résultat suit du lemme précédent. □

Théorème 6 (des 4 sommets)**.** *soit c une courbe plane, convexe fermé simple alors c admet quatre sommet.*

Démonstration. Supposons que c est paramétrique par longueur d'arc et de période L. Pour sa courbure κ on sait que κ atteint son maximum et son minimum dans $[0,L]$ donc il existent $t_0, t_1 \in [0,L)$ t.q. $\dot{\kappa}(t_j) = 0\ j \in \{1,2\}$. Supposons que $t_0 = 0$. Soit $G = Aff(c(0), c(t_1))$ la droite affine passant parce points. S'il existerait un trois ème point d'intersection de G avec c alors la courbe contiendrait un segment de G (lemme précédant) donc on aurait fini car $\dot{\kappa} = 0$ sur ce segment. Si l'intersection éteint tangentielle en $c(0)$ et $c(t_1)$ alors c on tiendrait un segment de droite parle lemme précédant pour $G = p_0 + \mathbb{R}\nu$ on peut donc supposer que :

$$\left\langle c(t) - c(t_0), \mu^{\perp} \right\rangle > 0\ t \in (0, t_1) \tag{3}$$
$$\left\langle c(t) - c(t_0), \mu^{\perp} \right\rangle < 0\ t \in (t_1, L) \tag{4}$$

κ est périodique de période L donc $\int\limits_0^L \dot{\kappa} = 0$. Si $\dot{\kappa}(t) \neq 0\ \forall t \in \{0, t_1\}$. Alors on peut supposer que :

$$\dot{\kappa}(t) > 0\ t \in (t_1, L)$$
$$\dot{\kappa}(t) < 0\ t \in (0, t_1)$$

$\Rightarrow \dot{\kappa}(t)\left\langle c(t) - c(0), \nu^{\perp} \right\rangle > 0,\ t \in (t_1, L)$ et $t \in (0, t_1)$ or $\int \dot{\kappa}(t)(c(t) - c(0))\,\mathrm{d}t = -\int\limits_0^L \kappa(t)\dot{c}(t)\mathrm{d}t$

or on sait que $\dot{n}(t) = \kappa(t)\dot{c}(t)$ équation de Frenet $n = \dot{c}^{\perp}$.

$$\dot{T} = \kappa n$$
$$\dot{N} = -\kappa T$$

$$\int_0^L \dot{\kappa}(t) \left\langle c(t) - c(0), \nu^\perp \right\rangle \mathrm{d}t = \left\langle 0, \nu^\perp \right\rangle = 0$$

C'est une contradiction donc il existe un $t_2 \in \{0, t_1\}$ t.q. $\dot{\kappa}(t_2) = 0$.

Supposons que $t_2 \in (t_1, L)$. S'il n'y avait pas de quartier sommet. Il existe donc une droite qui sépare les regions $\dot{\kappa} > 0$ et $\dot{\kappa} < 0$. Par le même argument pour ces regions on conclut qu'il existe un 4ème sommet. □

Remarque. *Le théorème reste vrai sans l'hypothèse de la convexité.*

0.2 Inégalité isopérimetrique

l'aire du cerclée $rayon\ R = \pi\mathbb{R}^2 = A$—area
la $longueur\ 2\pi\mathbb{R} = L\ L^2 = 4\pi^2\mathbb{R} = 4\pi A$.

Théorème 7. *Soit $G \subset \mathbb{R}^2$ une region bornée par une courbe fermé simple de longueur L. Alors pour l'aire A de G on a :*

$$4\pi A \leq L^2$$

et $4\pi A = L^2$ ⇔la courbe est un cercle.

Démonstration. Soit c une paramétrisation de la courbe de vitesse 1, de période L orientée positive. Pour déterminer A à partir de c on utilise le théorème de Stoks. Pour $F \in C'(G, \mathbb{R}^2)$ un champs de vecteurs on a :

$$\int_G \operatorname{rot} F(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int_C \langle F, \mathrm{d}s \rangle := \int_0^L \langle F(c(t)), \dot{c}(t) \rangle \,\mathrm{d}t$$

Un F t.q. $\operatorname{rot} F = 1$
$F(x,y) = \frac{1}{2}(-y, x)$

$$\operatorname{rot} F(x,y) = \partial_x F2 - \partial_y F_1 = 1$$

donc $\int \operatorname{rot} F = \int_G 1 = A = \int \langle F, \cot c \rangle = \int_0^L (x\dot{y} - \dot{x}y)\mathrm{d}t$ avec $c(t) = (x(t), Y(t))$
On utilise un l'analyse de Fourier. Soit

$$z : \mathbb{R} \leftarrow \mathbb{C}^2$$
$$z(t) := x(\frac{L}{2\pi}t) + iy(\frac{L}{2\pi}t)$$

alors $x \in C^\infty$ et $z(t + 2\pi) = z(t)$ par Fourier on sait $z(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}\ \forall t$.

$\dot{x}(t) = \frac{L}{2\pi}(\dot{x}(\frac{l}{2\pi}) + i\dot{y}(\frac{l}{2\pi}))$
$|\dot{z}(t)|^2 = \frac{L^2}{(2\pi)^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(\frac{L}{2\pi}t)$
$\int_0^{2\pi} |\dot{z}(t)|^2 = \frac{l^2}{2\pi}$
$\dot{z}(t) = \sum c_k(ik)e^{iht}\ \forall t\ |\dot{z}|^2(t) = \sum_{k,l}(inc_n)(-il\bar{c}_e)e^{i(k-l)t}\ \int_0^{2\pi} |\dot{z}|^2(t) = \sum_{k,l} \int (\ldots)e^{i(h-l)t}$
donc : $\int_0^{2\pi} |\dot{z}|^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_n|^2$ donc $\frac{L^2}{2\pi} = \sum k^2|c_n|^2$. $Im\dot{z}\bar{z}(t) = (\dot{y}x - x\dot{y})(\frac{L}{2\pi})\frac{L}{2\pi}$.

$$2A = \frac{L}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Im} \dot{z}\bar{z} = \sum k|c_k|^2 \cdot 2\pi$$

$$4\pi A = 4\pi^2 \sum k|c_k|^2$$
$$L^2 = 2\pi \cdot \sum k^2|c_k|^2$$

or $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k|c_k|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2$ avec égalité $\Leftrightarrow c_k = 0$ pour $k \notin \{0,1\}$ donc égalité $\Leftrightarrow z(t) = c_0 + c_1 e^{it} \Leftrightarrow t \mapsto (x(t), y(t))$ est un cercle.

□

0.3 Courbes dans $\mathbb{R}^3$

Définition 15. Soit $c \in C^\infty(I; \mathbb{R}^3)$ une courbe paramétrie et réguliére.

1. $\nu \in C^\infty(I; \mathbb{R}^3)$
$$\nu(t) := \frac{\dot{c}(t)}{||\dot{c}(t)||}$$
est appelée Champs Tangent. c est appelé une courbe paramétrie Biréguliére si $\dot{v}(t) \wedge \ddot{c}(t) \neq 0,\ \forall t \in I$. (produit vectoriel). Dans ce cas on difinit :
$$b(t) := \frac{\dot{c}(t) \wedge \ddot{c}(t)}{||\dot{c}(t) \wedge \ddot{c}(t)||}$$
le Champs Binormalte et le plan Osculateur :
$$\mathbb{P}_c(t) = \{p \in \mathbb{R}^3 : \ \langle p - c(t), b(t)\rangle = 0\}$$
plan affine passant perpendiculaire avec vecteur normale $b(t)$. Le Champs Normale est définie par $n(t) := b(t) \wedge \nu(t)$.
2. Pour une courbe paramétrie biréguliére le `repére orthomal directe` $\{\nu(t), n(t), b(t)\}$ est appelé le Repére de Frenet de la courbe c au point $c(t)$.
$$\kappa(t) := \frac{1}{||\dot{c}(t)||}\langle \dot{\nu}(t), n(t)\rangle$$
est appelée Courbure de coube de c en t :
$$\tilde{c}(t) := \frac{1}{||\dot{c}(t)||}\langle \dot{n}(t), b(t)\rangle$$
est appelée la Torsion de c en t.

Remarque. *1. la biregular assure que le plan osculaleur est bien definie.*
$$\mathbb{P}_c(t) := c(t) + \mathrm{vect}\{\dot{c}(t), \ddot{c}(t)\}$$
2. *le vecteur* $b(t) \perp \mathbb{P}_c(t)$.
3. $n(t) \in \mathrm{vect}\{\dot{c}(t), \ddot{c}(t)\}$
4. $\mathrm{vect}\{\dot{c}(t), \ddot{c}(t)\} = \mathrm{vect}\{\nu(t), n(t)\}$
5. *Si* c *est de vitesse 1 alors* c *biréguliére* $\Leftrightarrow ||\ddot{c}(t)|| \neq 0,\ \forall t$ *car dans ce cas* $\langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t)\rangle = 0$ *donc* $||\dot{c}() \wedge \ddot{c}(t)|| = ||\dot{c}(t)|| \cdot ||\ddot{c}(t)|| \neq 0$ *de plus* $\kappa(t) = ||\ddot{c}(t)||$ *(car* $\kappa(t) = \langle \dot{\nu}, n(t)\rangle = \left\langle \dot{c}(t), \frac{\ddot{c}(t)}{||\ddot{c}(t)||}\right\rangle = ||\ddot{c}(t)||$*).*

6. *En particulier pour une courbe dans l'espace* $\kappa(t) \geq 0 \ \forall$
7. *Si* $c(I) = imc \subset plan \subset \mathbb{R}^3$ *la courbure de* c *n'est pas même que la courbure definie pour la xstihon* $\hat{c}$ *au plan on a* $\kappa = |\hat{\kappa}|$.
8. *Ce plan osculateur est indipendant de la parametrisation.* $\check{c} = c \circ \varphi; \dot{\check{c}} = \dot{c} \circ \varphi \cdot \varphi; \ddot{\check{c}} = \ddot{c} \circ \varphi \dot{\varphi}^2 + \dot{c} \varphi \ddot{\varphi}$. $(\mathrm{vect}\{\dot{\check{c}}(t), \ddot{\check{c}}(t)\} = vect\{\dot{c}(\phi(t)), \ddot{c}(\phi(t))\})$.

Proposition 2. *Equations de Frenet pour une courbe biréguliére.*

$$\begin{aligned} \dot{\nu}(t) &= \frac{1}{||\dot{c}(t)||}\kappa(t)n(t) \\ \dot{n}(t) &= \frac{1}{||\dot{c}(t)||}(-\kappa(t)\nu(t) + \tau(t)b(t)) \\ \dot{b}(t) &= -\frac{1}{||\dot{c}(t)||}\tau(t)n(t) \end{aligned}$$

Memo $\begin{matrix} \nu \\ n \\ b \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}.$

Démonstration. $\kappa = \frac{1}{||\dot{c}||}\langle \dot{\nu}, n\rangle = 0$ (1)
$\langle \dot{\nu}, b\rangle = 0$ car $\dot{\nu} \in \mathrm{vect}\{\dot{c}, \ddot{c}\}$. $\langle \nu, b\rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{\nu}, b\rangle + \left\langle \nu, \dot{b}\right\rangle = 0$ donc $\dot{b} \perp \nu$. $\tau = \frac{1}{||\dot{c}||}\langle \dot{n}, b\rangle$
$\langle n, b\rangle = 0$ $\langle \dot{n}, b\rangle + \left\langle n, \dot{b}\right\rangle = 0 \Rightarrow$(3). (2) découle donc de $\langle \dot{n}, \nu\rangle = -\langle n, \dot{\nu}\rangle$ car $\langle \nu, n\rangle = 0$
$\langle \dot{n}, b\rangle$ definition de τ. ☐

Théorème 8 (foundammentale de la théorie de Frenet)**.** *Soit* I *un intervalle et* $\kappa, \tau \in C^\infty(I, \mathbb{R})$, $\kappa(t) \geq 0$. *Alors il existe une courbe paramétrie de vitesse 1* $c \in C^\infty(I; \mathbb{R}^3)$ *tq. sa courbure et sa torsion sont* τ *et* κ. *Toute autre courbe qui ales mémes propriétés est de la forme :* $\hat{c} = F \circ c$ *avec* $F(x) = Ax + b$ *avec* $A \in SO(3)$.

Démonstration. Ce systéme d'équations differentielles :

$$\begin{aligned} \dot{\nu} &= \kappa n \\ \dot{n} &= -\kappa\nu + \tau b \\ \dot{b} &= -\tau n \end{aligned}$$

est lineaire et d'ordre 1. Pour tout systeme orthonue diuct et $\forall t_0 \in I$: $\{e_1, e_2, e_3\}$ il existe une solution t.q.

$$\begin{aligned} \nu(t_0) &= e_1 \\ n(t_0) &= e_2 \\ b(t_0) &= e_3 \end{aligned}$$

on define $c(t_0) + \int_{t_0}^t \nu$ pour un $c(t_0) \in \mathbb{R}^3$ ☐

Exemple 0.3.1 (Pour courbure et $\bar{c}$osion)**.** $\kappa = \frac{1}{||\dot{c}||}\langle \dot{\nu}, n\rangle$; $\tau =$

$\frac{1}{||\dot{c}||}\langle \dot{n}, b\rangle$

$$\begin{aligned}
c(t) &:= (\cos t, \sin t, t),\ \ t \in \mathbb{R} \\
\dot{c}(t) &= (-\sin t, \cos t, 1);\ \ ||\dot{c}(t)||^2 = 2 \\
\ddot{c}(t) &= (-\cos t, -\sin t, 0) \\
\nu(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, q) \\
b(t) &= \frac{\dot{c} \wedge \ddot{c}}{||\dot{c} \wedge \ddot{c}||}(t) = \frac{(\sin t, -\cos t, 1)}{\sqrt{2}} \\
n(t) &= -(\cos t, \sin t, 0) \\
\dot{\nu}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t, -\sin t, 0) \\
\langle \dot{\nu}, n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \kappa = 1 \\
\dot{n}(t) &= -(-\sin t, \cos t, 0) \\
\langle \dot{n}, b\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \tau = 1
\end{aligned}$$

Remarque (Theoreme foundamentalle dans le plan)**.** *Soit $\kappa \in C^\infty(I; \mathbb{R})$ pour un intervalle I. Alors il existe une courbe paramétrie par lagueur d'arc c t.q. sa courbure est κ. Toute autre courbe set un $\hat{c}$ avec les mêmes proprietes est de forme :*

$$\hat{c}(t) = F \circ c(t + t_0),$$

pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et F une isometrie directe $\Leftrightarrow$deplacement.

Deux résultats sur la géométrie globale des courbes dans l'espace.

> **Définition 16** (courbure totale)**.** Soit $c \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$ une courbe paramétrie par longueur d'arc et périodique de période L, $\kappa \in C^\infty(I; \mathbb{R})$ est sc courbure. Alors $\kappa(c) := \int_0^L \kappa(t)\, \mathrm{d}t$ est appelé COURBURE TOTALE de c.

Remarque. *Dans le p'au on sait (Hopf) que $\kappa(c) = \pm 1$ si c est simple.*

On peut dénoutrer

Théorème 9 (Fenchel)**.** *Soit $c \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$ une courbe fermée simple. Alors pour sa courbure totale :*

$$\kappa(c) \geq 2\pi.$$

De plus on a $\kappa(c) = 2\pi \Leftrightarrow c$ est un courbe plane et convexe.

Démonstration. Sans. □

On peut dénouter

Théorème 10 (Fary-Tlilnor)**.** *Soit $c \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^3)$ une courbe fermée simple. Si c admet un* `noeud` *alors pour la courbure totale on a*

$$\kappa(c) \geq 4\pi.$$

Remarque. *Si c admet un* `noeud`*, c'est à dire on ne peut définir c d'une manière continue en une courbe plane fermée simple.*

Définition 17. Une Isotopie de $\mathbb{R}^3$ est une application.

$$\varphi \in C^0([0,1] \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$$

t.q. $\forall t \in [0,1]$ $\varphi(t,\cdot)$ est un `homeomorphism`.

Définition 18. Deux courbes fermeies simples c_1, c_2 sontnt appélé Isotope. S'il existe une isotopie φ t.q.

$$\varphi(0, X) = X \ \forall x \in \mathbb{R}^3; \ \varphi(1, \mathrm{img}(c_0)) = \mathrm{img}(c_1).$$

Définition 19.
- Un noeud est une class l'equivalence d'une isotopie.
- Une courbe fermé simple est Sans Noeud, si elle est isotope à une courbe plane fermée simple.

0.4 surfaces

Définition 20 (Surface régulière)**.** Soit $S \subset \mathbb{R}^3$. S est appelé Surface Régulière. Si pour chaque $p \in S$ il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^3$ t.q. $p \in V$ et s'il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et un $F : \underbrace{U}_{\subset \mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}^3$ C^∞ t.q.

1. $F(U) = S \cap V$ et $F : U \to S \cap V$ est un homéomorphisme (c.a.d. $F|_U$ continue et son inverse $F^{-1}|_U$ est continue)
2. Le Jacobien DuF a rank 2 $\forall u \in U$

Remarque. *La matrice jacobienne dans U repère standard :*

$$F(X_1, X_2) = (F_1(X_1, X_2), F_2(X_1, X_2), F_3(X_1, X_2))$$

$$DuJ = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} F_1 & \partial_{x_2} F_1 \\ \partial_{x_1} F_2 & \partial_{x_2} F_2 \\ \partial_{x_1} F_3 & \partial_{x_2} F_3 \end{pmatrix}$$

$U = (x_1, X_2)$ $\partial_{x_j} F = \begin{pmatrix} \partial_{x_j} F_1 \\ \partial_{x_j} F_2 \\ \partial_{x_j} F_3 \end{pmatrix}$

donc rang $DuF = 2 \Leftrightarrow \partial_{x_1} F, \partial_{x_2} F$ *sont indépendants* $\dim \operatorname{vect}\{\partial_{x_1} F, \partial_{x_2} F\} = 2$ $\Leftrightarrow$ *deux vecteurs tangents à* S *au point* $F(u)$ *qui sont indépendant c'est a dire : on peut définir l'espace tangent* $\Leftrightarrow || \partial_{x_1} F \wedge \partial_{x_2} F|| \neq 0$.

$u_1 = (x_1, x_2)$ *la ligne* $x_2 = \mathrm{const}$ *qui passe par* U. $\mathbb{R} \ni t \mapsto (x_1, x_2 + t) =: c(t)$, $c(0) = u$. $t \mapsto F(c(t))$ *est la courbe correspondante sur* S.

$\frac{\partial}{\partial F}(c(t))|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial F}(x_1, x_2 + t)|_t = 0 = \partial_{x_2} F(x_1, x_2)$

> **Définition 21.** Pour une surface régulière l'application $F : U \to S \cap V$ (on encore (U, F, V)) Paramétrisation Locale de Sau point p. $S \cap V$ est appelé un Voisinage de Coordonnées et les composantes (u_1, u_2) de u t.q. $F(u) = p$ les Coordonnées de p par Rapport à F.

Exemple 1. Pour $p \in \mathbb{R}3$ et X_1, $X_2 \in \mathbb{R}^3$ le plan affine $S := \{X, X = p + u_1 X_1 + u_2 X_2\}$ est une surface régulière. Car : On peut prendre (pour tout $p \in S$) $V := \mathbb{R}^3; U := \mathbb{R}^2$ $F(u_1, u_2) = p + u_1 X_1 + u_2 X_2$

F es une fonction affine donc F est différentiable. (en tout que fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$) $F(U) = S = S \cap \mathbb{R}^3 F : U \to S$ est un homéomorphisme.

Exemple 2. graphe d'une fonction (Une seule paramétrisation !) Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ ouvert $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable. $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in U, x_3 = f(x_1, x_2)\}$

On peut prendre de nouveau $V = \mathbb{R}^3$ U (est U) $F(u_1, u_2) := (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$ $F : U \to \mathbb{R}^3$ est différentiable. $F : U \to F(U) = S$ est continue $F|_n^{-1}$ est la projection orthogonale donc continue. La surface est régulière car $\partial_{u_1} F = (1, 0, \partial_{u_1} f(u_1, u_2))$ $\partial_{u_2} F = (0, 1, \partial_{u_2} f(u_1, u_2))$ $\partial_{u_1} \wedge \partial_{u_1} = (., ., 1) \neq 0$

Addendum : le plan affine est régulier $X = p + u_1 X_1 + u_2 X_2$ $\partial_{u_1} F = X_1$, $\partial_{u_2} F = X_2$ $\partial_{u_1} F \wedge \partial_{u_2} F = X_1 \wedge X_2 \neq Si X_1, X_2$ sont indépendantes $\Leftrightarrow \dim \operatorname{vect}\{X_1, X_2\} = 2$.

Exemple 3. $S(= S^2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ S est une surface régulière ? Soit $p = (p_1, p_2, p_3) \in S$ t.q. $p_3 > 0$ $F(X, Y) = (X, Y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ $(x^2 + y^2 < 1)$ $U := \{(X, Y);\ x^2 + y^2 < 1\}; V := \{(x, y, z); z > 0\}$

$S \cup V_3$ est le graphe de $(X, Y) \mapsto \sqrt{1 - x^1 - y^2}$ qui est C^∞ par l'exemple du graphe on a que F est une paramétrisation en $p$pour chaque $p \in S \cap V_+$

Soit $p \in S$; $p_3 < 0$ on choisi $U := \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$ $V_- = \{(x, y, z); z < 0\}$ $F_-(x, y) := (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2})$ $(x, y) \in U$ $V_- = \{(x, y, z); z < 0\}$ parce que $S \cap V_-$ est le graphe de $U \ni (x, y) \mapsto -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ qui est différentiel. Par le précédent (U, F_-, V_-) est un voisinage de coordonnées pour chaque point $p \in S$ t.q. $p_3 < 0$.

$\{p \in S$ t.q. $p_2 > 0\}$ est le graphe $U \in (x, y) \mapsto \sqrt{1 - y^2 - z^2}$ donc par le précédent $(U, F_{1\pm}, V_{1\pm})$ avec $V_{1\pm} = (x, y, z), x ><\ 0$ et $F_{1\pm} = (y, z, \pm\sqrt{1 - y^2 - x^2})$ De même : $(U, F_{2\pm}, V_{2\pm})$ avec $V_{2\pm} = \{x, y, zx > 0\ y < 0\}$ $F_{2\pm}(X, z) = (x, z, \pm\sqrt{1 - x^2 - z^2})$ est un voisinage de coordonnées pour $\{p \in S; p_2 ><\ 0\}$

En résumé : S^2 est une surface régulière.

Remarque. *Il nous a falloir 6 paramétrisations pour monter que S est la une surface régulière. On peut faire avec 2 paramétrisations mais pas avec 1.*

Proposition 3. *Soit $V_0 \subset \mathbb{R}^3$ ouvert $f \in C^\infty(V_0;\mathbb{R})$ $S := \{(x,y,z) \in V_0; f(x,y,z) = 0\}$ Si $\nabla f(p) \neq 0 \forall p \in S$ alors S est une surface régulière.*

Remarque.
- *$S^2 = f^{-1}(0)$ pour $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$*
- *S — le plan affine $= f^{-1}(0)$ de $f(X) = \langle X-P, n\rangle$ pour un $p \in S$ et n un vecteur normale à S.*

Démonstration. Soit $p = (X_0, Y_0, Z_0)$ $gradf(p) = (\partial_x f(p), \partial_y f(p), \partial_z f(p)) \neq (0,0,0)$

Supposons que $\partial_z f(p) \neq 0$. Par le théorème des fonctions implicites il existe un voisinage $V \subset V_b$ de p un voisinage $U \subset \mathbb{R}^2$ de (X_0, Y_0) et une fonction $g \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ t.q. $S \cap V = \{(x,y,g(x,y)); x,y \in U\}$ donc on conclure en utilisant l'exemple du graphe d'une fonction (cad $f(x,y,g(x,y)) = 0$). □

Attention : la condition $\nabla f(p) \neq 0 (p \in S)$ est suffisante mais pas nécessaire. Par exemple $S^2 = \tilde{f}^{-1}(0)$ pour $\tilde{f}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-1)^2$ $\nabla \tilde{f}(x,y,z) = 2(x^2+y^2+z^2-1)2(x,y,z) = 0$ si $x^2+y^2+z^2 = 1$

Exemple 4. $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2 (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ $S = f^{-1}(0)$ $\nabla f(x,y,z) = 2(x,y,-z) = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0) (0,0,0) \in S$

In faut donc examine S autour (=dans un voisinage) de $(0,0,0)$ $S = \{(x,y,z); |z| = \sqrt{x^2+y^2}\}$

S est un double-cône

Remarque. *rotation de la courbe $X \mapsto (X,Z)$ avec $|x| = |y|$ autour de l'axe des z*

Il ne eut exister de voisinage $V \subset \mathbb{R}^3$ de $(0,0,0)$ et $U \subset \mathbb{R}$ ouvert t.q. $F|_U : U \to S \cap V$ soit homeomorphe avec $F : U \to \mathbb{R}^2$ t.q. DuF est de $rang2$ car pour $p \in S \cup V$ avec $p_3 > 0$ et $q \in S \cap V$ avec $q_3 < 0$ et toute courbe $c : [0,1] \to S \cap V$avec $c(0) = p$, $c(1) = q$. $\exists t_0$ t.q. $c(t_0) = (0,0,0)$ or dans U il existent des courbes qui évitent l'origine. C'est à dire $\gamma \in C^0([0,1],U)$ $\gamma(0) = F^{-1}(q)$ $\gamma(1) = F^{-1}(p)$ $\gamma(t) \neq F^{-1}(0) \forall t \in [0,1]$.

Proposition 4. *$S \subset \mathbb{R}^2$ surface régulière et (U,F,V) une paramétrisation Loz- a U. Soit $W \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $\phi : W \to \mathbb{R}^3$ t.q. $\varphi(W) \subset S \cap V$ alors $\varphi \in C^\infty(W;\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow F^{-1} \circ \varphi \in C^\infty(W,U)$.*

Démonstration.
$(\Leftarrow)$ $\varphi = \underbrace{F}_{\mathbb{C}^\infty} \circ \underbrace{(F^{-1} \circ \varphi)}_{\mathbb{C}^\infty}$ $(\Rightarrow)$ Soit φ différentielle. On sait que rang $D_u f = 2$

$$D_u f \cong \begin{pmatrix} \partial u_1 F_1 & \partial u_2 F_1 \\ \partial u_1 F_2 & \partial u_2 F_2 \\ \partial u_1 F_3 & \partial u_2 F_3 \end{pmatrix}$$

Supposons qui $\det \begin{pmatrix} \partial u_1 F_1 \, \partial u_2 F_1 \\ \partial u_1 F_2 \, \partial u_2 F_2 \end{pmatrix} \neq 0$.

Soit $G : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. $G(u_1, u_2, T) := F(u_1, u_w) + (0,0,t) = (F_1(u_1, u_2, F(u_1,u_2), F(u_1,u_2) + t))$ alors G est différentiable, $D_{(u_1 u_2 t)} G \cong \begin{pmatrix} \partial u_1 F_1 & \partial u_2 F_1 & 0 \\ \partial u_1 F_1 & \partial u_1 F_1 & 0 \\ \partial u_1 F_1 & \partial u_1 F_1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\det D_{(u_1 u_2 t)} G \neq 0$.

Donc par le théorie de la fonction inverse il existe $U_1 \subset U \times \mathbb{R}^2 et V_1 \subset V$ t.q. $G|_{U_1} : U_1 \to V_1$ est un difféomorphisme. Soit $W_1 = \varphi^{-1}(V_1)$ pour $\hat{p} \in W_1$ on $G^{-1} \circ \varphi(\hat{p}) = (F^{-1} \circ \varphi(\hat{p}), 0)$ car $F(u_1, u_2) = G(u_1, u_2, 0)$ $G^{-1} \circ \varphi$ est C^∞ sur W_1. □

Corollaire 1. *Soit S une surface régulière et (U_1, V_1, F_1) et (U_2, V_2, F_2) deux paramétrisations locales. Alors $F_2 \circ F_1^{-1} : F_1^{-1}(V \cap V_2) \to F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ est $\mathbb{C}^\infty$.*

Démonstration. On applique la proposition précédente à $W = F_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$ et $\varphi = F_1$ et

$$(U, V, F) := (U_2, V_2, F_2)$$

□

Proposition 5. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière $F : S \to \mathbb{R}^n$ continue. Soit $p \in S$, alors sont équivalents :*

1. *$\exists V \subset \mathbb{R}^3$ voisinage de p et une extension $\hat{f}$ de $f|_{S \cap V}$ à V*
2. *$\exists$ une paramétrisation locale (U, F, V) avec $p \in V$ t.q. $f \circ F : U \to \mathbb{R}^n$ est C^∞*
3. *$\forall$ paramétrisation locale (U, F, V) avec $p \in V$ $f \circ F : U \to \mathbb{R}^n$ est C^∞*

Démonstration.

1. (1) $\Rightarrow$ (2) Car F est C^∞ $f \circ F = \hat{f} \circ F$
2. (3) $\Rightarrow$ (2) Ok
3. (2) $\Rightarrow$ (1) On considère (de nouveum) $(U_1, U_2, t) := F(u_1, u_2) + (0, 0, t)$ Soit $g(u_1, u_2) := f \circ F(u_1, u_2) = f \circ G(u_1, u_2, 0)$ donc g est C^∞ en $(F^{-1}(p), 0)$ et $\hat{f} := g \circ G^{-1}$.

□

Définition 22. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière et $f : S \to \mathbb{R}^n$ continue. On dit que f est C^∞ EN p si une des trois assertions équivalentes du précédent est vraie.

Définition 23. Soit $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ deux surfaces régulières. Soit $f : S_1 \to S_2$ continue On dit que f est C^∞ en $p \in S_1$. Si'l existe une paramétrisation locale (U_1, V_1, F) de S_1 en p et une paramétrisation locale (U_2, V_2, F_2) de S_1 en $f(p)$ t.q. $F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : F_1^{-1}(f^{-1}(V_2) \cap V_1) \to U_2$ est C^∞ en p.

Remarque. *Si $F_2^{-1} \circ f \circ F_1 est C^\infty$ pour deux paramétrisations alors $\tilde{F}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{F}_1$ est C^∞ pour toutes paramétrisations $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2$. Car $F_1^{-1} \circ \tilde{F}_1$ et $F_2^{-1} \circ \tilde{F}_2$ sont C^∞ par le précédent.*

Corollaire 2. *Soient S_1, S_2 deux surfaces régulières et $V \subset \mathbb{R}^3$ ouvert t.q. $S_1 \subset V$. Soit $f : V \to \mathbb{R}^3$ t.q. $f(S_1) \subset S_2$ alors $f|_{S_1} : S_1 \to S_2$ est différentiable.*

Définition 24. Soit S_1, S_2 deux surfaces régulières. $f : S_1 \to S_2$ est appelé DIFFÉOMORPHISME si f est bijection et si f et f^{-1} sont différentiables. Dans ce cas on dit que S_1 est DIFFÉOMORPHE à S_2.

Exemple 0.4.1. Soit $S_2 = S^2$ (la sphère) et $S_1 \to S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ pour $a, b, c > 0$ e'ellipsoïde S_1 est une surface régulière car $S_1 = g^{-1}(0)$ pour $g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ $\nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ pour $(x, y, z) \in S_1$. Soit $f : S_1 \to S_2$ $f(x, y, z) := (\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}) = (f_1, f_2, f_3)$ est bien définie car $(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)(x, y, z) = 1$ pour $(x, y, z) \in S_1$ $f^{-1}(x, y, z) = (ax, by, cz)$ f et f^{-1} sont continue et C^∞. en tant que fonctions de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donc f est un difféomorphisme et l'ellipsoïde et la sphère sont difféomorphes.

Exemple 5. $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\varphi \in C^\infty$ alors le graphe de φ est difféomorphe à $U \times \{0\}$ car $(x, y, 0) \mapsto (x, y, \varphi(x, y)) = f(x, y)$ est un difféomorphisme. $f^{-1}(p_1, p_2, p_3) = (p_1, p_2)$.

Définition 25. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière. L'espace tangent à S au point $p \in S$ est

$$T_pS := \{X \in \mathbb{R}^3; \text{il existe une courbe } c \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon)); S) \text{ t.q. } c(0) = p \text{ t.q. } \dot{c}(0) = X\}$$

Proposition 6. *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière, $p \in S$ et (U, F, V) une paramétrisation en p. Soit $u_0 = F^{-1}(p)$ alors $T_pS =$ « image de $(D_{u_0}F)$ » $= \mathrm{vect}\{\partial_1 F(u_0), \partial_2 F(u_0)\}$.*

Démonstration. ($\supset$) Soit $X \in$ « image $D_{u_0}F$ » et $Y \in \mathbb{R}^2$ t.q. $D_{u_0}F(Y) = \partial_y F(u_0) = \frac{\partial}{\partial t}F(u_0 + ty)|_{t=0} = X$ Soit $c(t) := F(u_0 + ty)$ $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ pour ε suffisamment petit pour $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \mapsto u_0 + ty' \in U$. Donc $\frac{\partial}{\partial t}c(t)|_{t=0} = D_{u_0}F(y)$ ($\subset$) Soit $X \in T_pS$ et c t.q. $\dot{c}(0) = X$. Soit $u(t) := F^{-1} \circ c(t) u \in C^\infty$ en u_0 (parce cest C^∞). Soit $y := \dot{u}(0)$. Alors $D_{u_0}F(y) := \frac{\partial}{\partial t}F \circ u(t)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}c(0)$. □

Corollaire 3. $\dim T_pS = 2$

Démonstration. $T_pS = \mathrm{Im}\, D_{u_0}F,\ \mathrm{rank}\, D_{u_0}F = 2\ \forall u_0$ □

Proposition 7. *Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ est ouvert $f : V \to \mathbb{R}^3$ une fonction C^∞ $S := f^{-1}(0)$ $\nabla f(X) \neq 0$ si $f(x) = 0$*

Alors pour $p \in S$ $T_pS = [\nabla f(p)]^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle X - p, \nabla f(p)\rangle = 0$.

Démonstration. $t \mapsto c(t) \in S$; $X = \dot{c}(0) \Rightarrow f \circ c(t) = 0$; $\frac{\partial}{\partial t}f \circ c(t)|_0 = D_{c(0)}f(\dot{c}(0)) = \langle \nabla f(c(0)), \dot{c}(0)\rangle = \langle \nabla f(c(0)), X\rangle = 0$. □

Exemple 0.4.2. $p \in S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = 1\}$ $T_pS^2 = p^\perp \nabla \Big(X \mapsto \|X\|^2 - 1\Big) = 2X$

Définition 26. Soient S_1, S_2 deux surfaces régulières $f \in C^\infty(S_1, S_2)$. Alors $p \in S_1$ la dérivée de f est définie par $d_pf : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$. définie telle que pour $X \in T_pS_1 X = \dot{c}(0)$ pour $c \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon); S^1)$; $p = c(0)$ car $d_pf(X) :=$

$\frac{\partial}{\partial t} f \circ c(0) \in T_{f(p)} S_2$

Proposition 8. **La définition de $f(X)$ ne dépend pas de la courbe c qu'on utilise pour définir $d_p f(X)$*
** $d_p f : t_p S_1 \to T_f(p) S_2$ est linéaire.*

Démonstration. $\hat{f} = F_2^{-1} \circ f \circ F_1$. Soit $u_0 = F_1^{-1}(p)$. Soit $a(t) := F_1^{-1}(x(t))$ donc $D_{u_0} F_1(\dot{u}(0)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(t)|_{t=0}$ $d_p f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ c(t)|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_2 f_2^{-1} \circ f \circ F_1(u(t))|_{t=0} = D_{u_0}(F_2 \circ \hat{f})(D_{u_0} F_1)^{-1}(X)$.

Donc $d_p f(x) = Du0(F_2 \circ \hat{f})((Du0F_1)^{-1}(X))$la membre de droite est indépendant de c et linéaire.

□

Remarque. *$d_p f$ est donc essentiellement déterminé par le Jacobien de $\hat{f}$.*
cad diagramme *est un diagramme commutatif.*

La première forme fondamentale d'une surface régulière S au point p la restriction du produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$ sur $T_p S$

Définition 27. Soit S une surface régulière et $p \in S$. $g_p : T_p S \times T_p S \to \mathbb{R}$ $g_p(X_p, Y_p) := \langle X_p, Y_p \rangle$

Remarque. *Soit (U, F, V) une paramétrisation en p alors on peut exprimer la forme bilinéaire g_p par une matrice.* $((g_{ik}(p)))$ $T_p S = \operatorname{vect}\{\partial_1 F(p), \partial_2 F(p)\}$ $((g_{ik}(p))) = \begin{pmatrix} g_p(\partial_1 F(p), \partial_1 F(p)) & g_p(\partial_1 F(p), \partial_2 F(p)) \\ g_p(\partial_2 F(p), \partial_1 F(p)) & g_p(\partial_2 F(p), \partial_2 F(p)) \end{pmatrix}$ *donc pour* $X = X^1 \partial_1 + X^p \partial_F$ *avec* $X^1, X^2 \in \mathbb{R}$ $Y = \sum_{j=1}^2 Y^j \partial_j F$ *alors* $g_p(X_p, Y_p) = \sum_{j,k}^2 g_{ik}(p) X^j(p) Y^k(p)$

Remarque. *$S \ni p \mapsto g_p$ est une fonction à valeurs dans les formes bilinéaires tenseur covariance de degré 2.*

Exemple 6. $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2$ indépendantes
A) $S = \operatorname{vect}\{X_1, X_2\} X = \sum_j X^j X_j$; $Y = \sum_k Y^k X_k$ $\langle X, Y \rangle = \sum X^j Y^k \langle X_i, X_k \rangle$
Ex : $X_1 = (()1$
1
$0), X_2 = (()0$
3
$0)$ alors $g_{jk} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ B) $F : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 F(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$
$\partial_1 F(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$ $\partial_2 F(r, \varphi) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$ $((f_{ik})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$
C) Ex 1(ii) $F(x, y) - (\cos x \cos y, \cos y \sin y, \sin x) x \in (-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R}$ F est une paramétrisation de $S^2 \diagdown \{N, S\} N = north, S = south$ $((g_{ik}(x, y))) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 x \end{pmatrix}$

Champ normal, application de Gauss, Orientabilité

Rappel. *Définition de la courbure pour une courbe plane (de vitesse 1)* $\kappa = \langle \dot{v}, n \rangle = -\langle \dot{n}, v \rangle$ *ν-tangente n-normale La courbure est donc la variation de la normal dans la direction de la tangente.*

Définition 28. Soit S une surface régulière un champs normal sur

$$S$$

est une application

$$N : S \to \mathbb{R}^3$$

t.q.

$$N(p) \perp T_p S \forall p \in S$$

.

Exemple 7. A)

$$S = \mathbb{R}^3 \times \{0\}$$

alors

$$S \ni p \mapsto N(p) = (0, 0, 1)$$

est un champs normal unitaire. B)

$$S^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 : \ \|p\| = 1\}$$

$$N(p) = p$$

est un champs normal unitaire

$$\|n(p)\|(f)fgd = gdf1$$

$$N(p) = 2p$$

est un champs normal

$$N(p) = g(p)p$$

est un champs normal pour

$$g(p) : S^2 \to \mathbb{R}$$

. C) le ruban de Môbius n'admet pas de champs normale unitaire continue.

Définition 29. Une surface régulière appelé orientable s'il existe un champs normale unitaire différentiable.

Remarque. *Chaque surface est localement orientable c'est à dire : Soit*

$$(U, F, V)$$

une paramétrisation.

$$\partial_1 F \wedge \partial_2 F \neq 0$$

alors

$$u \ni p \mapsto \frac{\partial_1 F(p) \wedge \partial_2 F(p)}{\|\partial_1 F(p) \wedge \partial_2 F(p)\|} \in \mathbb{R}^3$$

est bien définie (régularité) et différentiable. Soit

$$(U_2, F_2, V_2)$$

une deuxième paramétrisation.

$$N_2(p) = \frac{\partial_1 F(p) \wedge \partial_2 F(p)}{\|\partial_1 F(p) \wedge \partial_2 F(p)\|}|_{V=F_2^{-1}(p)}$$

$$N_1(p) = \pm N_2(p) = \det F_2^{-1} \circ F_1(u) n_2(p)^r$$

$$Ax \wedge Ay = \det A A(x \wedge y)$$

$$\partial_j F_D F(e_j)$$

$$DF_2 \circ F_1 = DF_2 \circ F_1 DF$$

Théorème 11. *Une surface régulière est orientable si et seulement si; it existe un recouvrement par des paramétrisation* (U_j, F_j, V_j) *telle que* $\det D(F_j^{-1} \circ F_k) > 0$ *pour tout* j, k.

La deuxième forme fondamentale

Remarque. *Une application* $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, A = A^T$
** peut être caractérise complètement par la forme bilinéaire* $(X, Y) \mapsto \langle X, AY \rangle$ ** peut être degonalisé (*$\Leftrightarrow$ *valeurs propres vecteur propres)*
** on va considère* $d_p N$

Définition 30. Soit S une surface régulière orientable et $N : S \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ un champs normale unitaire différentiable. N est appelée une application de Gauss. L'endomorphisme $W_p : T_pS \to T_pSX \mapsto W_p(X) := -d_pN(X) = -dpXN(p)$ — drive directionnelle. est appelé l'application de forme (shape orientator) ou application de Weingarten.

Remarque. $d_pN(X) \in T_pS$ *car* $N(p) \perp T_pS\|N(p)\| = 1$ *donc* $\langle d_pN(X), N(p)\rangle = 0$

Exemple 8. A) $S = planN(p) = (0, 0, 1) \Rightarrow p_pN = 0$ B) S^2 la sphère $N(p) = pd_pN = 1$

Proposition 9. *Soit* S *surface régulière orientable. L'application* W_p *est une application symétrique par rapport à la première forme fondamentale, c'est a dire* $g(X, WY) = g(WY, X)$ *c'est à dire,* $\forall p \in S; X_p, Y_p \in T_pS$. $\langle X_p, W_pY_p\rangle = \langle W_pX_p, Y_p\rangle$

Proposition 10. *La forme bilinéaire* $h_p : TpS \times T_pS \to \mathbb{R}$ *i)* $h_p(X_p, y_p) := g_(X_p, W_pY_p) = \langle X_p, W_p(Y_p)\rangle = -\langle X_p, d_pN(Y_p)\rangle$ *est appelée la deuxième forme fondamentale de* S *en* p.
ii) W_p *est appelée diagonalisable. les vecteurs propres de* W_p *sont appelés directions principales les valeurs propres sont appelées les courbures principales.*
iii) $p \mapsto \det W_p$ *est appelée la courbure de Gauss.*
iv) $p \mapsto 1/2traceW_p$ *est appelée la courbure moyenne.*

Proposition 11. *(U, F, V) une paramétrisation dans la base $\{\partial_1 F(p), \partial_2 F(p)\}$ de T_pS $g_{jk}(p) := \langle \partial_j F, \partial_k F \rangle$ sont les coefficients de la première forme fondamentale.$h_{jk}(p) = \langle \partial_{jk} F, N \rangle (p)$ sont les coevidientd de deuxième forme fondamentale $((W))$ le matrice de W_p est donné par $((W)) = ((g))^{-1}((h))$*

$w_{jk} = \sum_e g_{je}^{-1} h_{ek}$

*$k(p) = \det W_p = \frac{\det((W))}{\det((g))}$ $H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}((g))^{-1}((h))$

En chaque pt de u, le vecteur normal à M en $p = F(u)$. $n(u)$, $\|n(u)\| = 1$, $\langle n(u), e_i(u) \rangle = 0$.

$n(u) = \pm \frac{e_1(u) \wedge e_2(u)}{\|e_1(u) \wedge e_2(u)\|}$ avec : $\|e_1(u) \wedge e_2(u)\| = \left\| \det \left[e_1 \; e_2 \; \begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{pmatrix} \right] \right\|$.

$M \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$. $p = F(u) \mapsto n(u)$.

Application de Gauss de M. M est orientable s'il $\exists$ ensemble de cartes covariant M et une application de Gauss définie globalement sur M que est continue.

Mais le Ruban de Möbius pas orientable.

$\left\langle n(u), \frac{\partial n(u)}{\partial u} \right\rangle = 0 \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial u^1}, \frac{\partial n}{\partial u^2}$ sont des vecteurs tangents à M en $p = F(u)$.

$\|n(u)\|^2 = \langle n(u), n(u) \rangle = 1$ $\frac{\partial}{\partial u^i} \langle n(u), n(u) \rangle = 0$

$= \left\langle \frac{\partial n(u)}{\partial u^i}, n(u) \right\rangle + \left\langle n(u), \frac{\partial n(u)}{\partial u^i} \right\rangle = 2 \left\langle n(u), \frac{\partial n(u)}{\partial u^i} \right\rangle = 0$

$\frac{\partial n(u)}{\partial u^i} = W_i^j(u) e_j(u)$

L'application linéaire $W : T_pM \to T_pM$ $T_pM \ni X = X^i e_i(u) \mapsto W_i^j(u) X^i e_j(u) \in T_pM$ est l'endomorphisme de Weingarten.

$$\underbrace{\left\langle \frac{\partial n(u)}{\partial u^i}, e_k(u) \right\rangle}_{L_{ik}(u)} = W_i^j(u) \underbrace{\langle e_j(u), e_k(u) \rangle}_{g_{ik}(u)}$$
$$= W_i^j(u) g_{ik}(u)$$

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{kn})$

$AB = C = C(c_r s) \Rightarrow C_{rs} = \sum a_{rj} b_{js}$

$$\begin{aligned} (g^{ij}(u)) &= \begin{pmatrix} g^{11}(u) & g^{12}(u) \\ g^{21}(u) & g^{12}(u) \end{pmatrix} \\ &= (g_{ij}(u))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} g_{11}(u) & g_{12}(u) \\ g_{21}(u) & g_{22}(u) \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

$L = Wg \Rightarrow W = Lg^{-1}$

$W_i^j(u) = L_{ik}(u) g^{kj}(u)$

$L_{ij}(u) = \left\langle \frac{\partial n(u)}{\partial u^i}, e_j(u) \right\rangle = -\left\langle n(u), \frac{\partial}{\partial e_j}(u^i) \right\rangle$

$\langle V(u), W(u) \rangle = 0$

$\frac{\partial}{\partial u^i} \left\langle \frac{\partial V}{\partial u^i}, W(u) \right\rangle + \left\langle V(u), \frac{\partial W(u)}{\partial u^i} \right\rangle = 0$

$L(u) = (L_{ij}(u)) = \begin{matrix} L_{11}(u) & L_{12}(u) \\ L_{21}(u) & L_{22}(u) \end{matrix}$ 2ème forme fondamental de M

Si $X, Y \in T_pM, F(u)$, $X = X^i e_i(u)$, $Y = Y^j e_j(u)$.

$L(X,Y) = L_{ij}(u)X^iY^j$ forme bilinéaire sur T_pM.

$$\begin{aligned} L(X,Y) &= L_{ij}X^iY^j = L_{ji}X^iY^j = L(Y,X) \\ &= (W_i^k g_{kj})X^iY^j \text{ (W est auto-adjoint)} \\ &= g_{kj}(W_i^k X^i)Y^j \\ &= \langle WX, Y\rangle = \langle XY, X\rangle = \langle X, WY\rangle \end{aligned}$$

Définition 31. La courbure moyenne est : $\bar{\kappa} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(W) = \frac{1}{2}W_i^i = \frac{1}{2}(W_1^1 + W_2^2)$ corbure de Gauss.

$\kappa = \det(W)$

Les courbures principales κ_1, κ_2 valeurs propres de W zéros de $\det(W - ZI)$

$\bar{\kappa} = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \quad = \kappa_1\kappa_2$

0.5 Courbures normale et geodesique

$M \subset \mathbb{R}^3$ surface régulière (F, U, V) une carte de M

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j} = L_{ij}(u)n(u) + \Gamma_{ij}^k(u)e_k(u)$$

Formule de Gauss.

Les $\Gamma_{ij}^k(u)$ sont les symbols de Christoffel de M dans la carte (F, U, V).

$\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}, \frac{\partial}{\partial F}$

Le paraboloïde hyperbolique : $F(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ -\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \end{pmatrix}$ $e_u = \partial\, Fu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{2u}{u^2} \end{pmatrix}$ $e_v = \partial\, Fv = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2v}{b^2} \end{pmatrix}$

$g = \begin{pmatrix} g_{uu} & g_{uv} \\ g_{vu} & g_{vv} \end{pmatrix}$

$\Gamma_{uuu} = 4\frac{u}{a^4}$ $\Gamma_{uuv} = -d\frac{v}{a^2b^2}$ $\Gamma_{uvu} = 0$ $\Gamma_{uvv} = 0$ $\Gamma_{vvu} = -4\frac{u}{a^2b^2}$ $\Gamma_{vvv} = 4\frac{v}{b^4}$

$$g^{-1} = \frac{g^T}{1 + 4(\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4}})$$

$\Gamma_{uu}^u = \Gamma_{uuu}g^{uu} + \Gamma_{uuv}g^{vu} = \frac{4u}{\Delta a^4}$ $\Gamma_{uu}^v = \Gamma_{uuu}g^{uv} + \Gamma_{uuv}g^{vv} = -\frac{4v}{\Delta a^2b^2}$ $\Gamma_{uv}^u = 0$ $\Gamma_{uv}^v = 0$ $\Gamma_{vv}^u = \Gamma_{vvu}g^{uu} + \Gamma_{vvv}g^{vu} = -\frac{4u}{\Delta a^2b^2}$ $\Gamma_{vv}^v = \frac{4v}{\Delta b^4}$

Equation de Gauss

$\frac{\partial^2\, F}{\partial\, u^1\, \partial\, u^2} = L_{ij}n + \Gamma_{ij}^k e_k$normal tangentielle

0.6 Arc de Surface

Vecteur tangent :$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(u(s)) = \frac{\partial F}{\partial u^1}\dot{u}^1(s) + \frac{\partial F}{\partial u^2}\dot{u}^2(s) = \dot{u}^i(s)e_j(u(s))$ Les composantes du vecteur tangent dans les base locale $\{e_1, e_2\}$ sont $\dot{u}^1(s)$ et $\dot{u}^2(s)$. La normale du vecteur tangent est : $\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(u(s))\right\|^2 = \left\langle \dot{u}^i e)i, \dot{u}^j e_j \right\rangle = \dot{u}^i(s)\dot{u}^j(s)\left\langle e_1(u(s)), e_j(u(s))\right\rangle = g_{ij}(u(s))\dot{u}^1(s)\dot{u}^j(s)$

s est long d'arc sur la courbe ssi $g_{ij}(u(s))\dot{u}^1(s)\dot{u}^j(s) = 1 \forall s$.

Son suppose que s est longueur d'arc.

$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}F(u(s)) = \kappa(s)N(s)$ courbure normale principale.

$\kappa(s)N(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g_{ij}(u(s)\dot{u}^i(s)\dot{u}^j(s)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial f}{\partial u^i}\dot{u}^i(s) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}\dot{u}^i(s)\dot{u}^j(s) + \frac{\partial F}{\partial u^j}\ddot{u}^i(s) = (L_{ij}((j))n(s + \Gamma^n_{ij}(u(s))e_n(u(s))\dot{u}^j(s)\dot{u}^j(s) + \ddot{u}^i(s)e_i(u(s))))$

$\kappa(s)N(s) = (\ddot{u}^k(s) + \Gamma^n_{ij}(u(s)\dot{u}^j(s)\dot{u}^j(s))e_n(u(s)) + L_{ij}(u(s))\dot{u}^1(s)\dot{u}^(s)n(s(s))$ La courbure normale de la courbe est $\kappa_s(s) = L_{ij}(u(s))\dot{u}^i(s)\dot{u}^j(s) = \kappa(s)\left\langle N(s), nnn\right\rangle = \kappa(s)\cos(\alpha(s)) = L(T(s), T(s))$

La courbure géodésique de la courbure est la norme du vecteur $K_g = (\ddot{u}^k(s) + \Gamma^k_{ij}\dot{u}^1(s)\dot{u}^j(s))e_k(u(s))\kappa_g(s) = \|K_g\| = \sqrt{\langle K_g, K_g\rangle}$

Définition 32. Une géodésique de la surface M est une courbe sur M dont la courbure géodésique est nulle.

L'équation d'une géodésique est donc : $\ddot{u}^k(s) + \Gamma^k_{ij}(u(s))\dot{u}^i(s)\dot{u}^j(s) = 0$

La courbure normale d'une courbe paramètre par long d'arc est

$$\kappa_n(s) = L(T(s), T(s)) = L_{ij}(u(s))\dot{u}^i(s)\dot{u}^j(s)$$

Théorème 12. *La courbure normale d'une courbe régulière sur une surface régulière est donnée par :*

$$\kappa_n(t) = \frac{L(T(s), T(s))}{g(T(s), T(s))}$$

Démonstration. $s = \int_{t_0}^t \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}F(u(\tau))\right\| \mathrm{d}\tau$

$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{g_{ij}(u(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t)}\; T(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(u(t(s))) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(u(t))|_{t=t(s)}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\dot{u}^j(t)e_j(u(t))}{\sqrt{g_{ij}(u(t))\dot{u}(t)\dot{u}^j(t)}}|_{t=t(}$
$\frac{T(t)}{\sqrt{\cdots}}$

$\kappa_n(t(s)) = L(\tilde{T}(s), \tilde{T}(s)) = L(T(t(s))/\sqrt{\ldots}, T(t(s))/\sqrt{\ldots}) \Rightarrow \kappa_n(t) = \frac{L(T(t(s)), T(t(s)))}{g(T(t), T(t))}$ □

Définition 33. La courbure normale de la surface M dans la direction $e \in T_pM$ est $\kappa_n(p) = \frac{L(e,e)}{g(e,e)} = \frac{L(e,e)}{\|e\|^2}$

La courbure normale d'une courbe sur M est la courbure normale de M dans la direction du vecteur tangent à le courbe.

$\kappa_n(s) = K(s)\cos\alpha(s), \alpha(s) = KK(n(u(s)), N(s))\; \rho(s) = \frac{1}{K(s)} =$ rayon de courbure de la c
$\rho_n(s) = \frac{1}{\kappa_n(s)} =$ le rayon de courbure normale $\rho(s) = \rho_n(s)\cos\alpha(s)$

La courbe est géodésique ssi : $\kappa_g = 0 \Leftrightarrow K = \kappa_n \Leftrightarrow \rho = \rho_n \Leftrightarrow \cos\alpha = 1 \Leftrightarrow N(s)$ et $n(u(s))$ sont colinéaire.

T_pM est engendré par $T(s)$ et $n(u(s)) \wedge T(s)$ $X(s) = F(u(s))$ s=long.d'arc $\left\langle \dot{x}(s), \ddot{(s)} \right\rangle = 0$. Donc la composante tangentielle de $\ddot{x}$ est colinéaire à $n(u(s)) \wedge T(s)$ $\kappa_\gamma(\sigma) = \langle \ddot{x}(s), n(u(s)) \wedge T($

$\langle a, [b\wedge] \rangle = [a, b, c]$ produit triple $= \det[abc]$ $\kappa_g(s) = [\ddot{x}(s), n(u(s)), \dot{x}(s)] = [\dot{x}(s), \ddot{x}(s), n(u(s))]$ si s =long. d'arc.

Courbures normale et géodésique. $\kappa_n = \frac{L(\dot{x},\dot{x})}{g(\dot{x},\dot{x})} = L(\dot{x},\dot{x})$, si $|\dot{x}| = 1$

Courbure normale de M en p la direction $e \in T_0M$ est $\frac{L(e,e)}{g(e,e)} = \kappa_n(e)$.

$K_g = (\ddot{u}^i + R^i_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k)e_i sig_{iy}\dot{u}^i\dot{u}^j = 1$, si $g_{ij}\dot{u}^1\dot{u}^j = 1$. $\kappa_y = |_y|$.

Exemple 1.

1. Droit sur la selle $F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \end{pmatrix}$ Droite :

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \alpha t \\
y(t) &= y_0 + \beta t \\
z(t) &= -\frac{x(t)^2}{a^2} + \frac{y(t)^2}{b^2} \\
&= -\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - (\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2})t^2 - 2(-\frac{x_0\alpha}{a^2} + \frac{y_0\beta}{b^2})t
\end{aligned}
$$

Si $\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 0$ alors $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ est une droite sur M passant par $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$.

En chaque point de M passant 2 droites sur M. (α, β), $(\alpha, -\beta)$. $X(t) = F(x(t), y(t))$

$\dot{X}(t) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2\frac{x(t)}{a^2} \end{pmatrix} + \beta(0$

1

$2\frac{y(t)}{b^2}) = e_1 + e_2$ Courbure normale : $\kappa_n(t) = \frac{L(\dot{X}(t,\dot{X}(t)}{g(\dot{X}(t,\dot{X}(t)} = 0$ (parce que $L = 0$)

2. Cercles sur la sphère $\rho = \sin\nu$ $\alpha = \pi - \nu$ $\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sin\nu}$

$$
\begin{aligned}
\kappa_n &= \kappa \cos\alpha \\
&= -\frac{\sin\nu}{\sin\nu} = -1
\end{aligned}
$$

La courbure normale d'on cercle sur la sphère est -1. La courbure géodésique est donc : $K^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$ $\frac{1}{\sin^2\nu} = 1/\kappa_g^2 \Rightarrow \kappa_g^2 = (\operatorname{ctg}\nu)^2$ $\kappa_g = 0 \Leftrightarrow \nu = \frac{\pi}{2} \mod \pi \Leftrightarrow$ le cercle est un grand cercle. Les grands cercles sont des géodésiques de la sphère.

0.7 L'indicatrice de Dupin

L'équation $L(\xi,\xi) = \pm 1$; $L_{ij}\xi^i\xi^j = \pm 1$ $L_{11}(\xi^1)^2 + L_{12}\xi^1\xi^2 + L_{21}\xi^2\xi^1 + L_{22}(\xi^2)^2 = \pm 1$ définit une conique := L'indicatrice de Dupin.

ellipse si L est definie positive parabole si $L \neq 0$ et $\det(L) = 0$ hyperbole si L est indéfinie et $\det(L) \neq 0$.

On dit que $p \in M$ est un point :

elliptique si l'indic. de Dupin est une ellipse. parabolique si ... hyperbolique si ... plat si $L_p = 0$

Exemple 1.

1. La sphère : $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 u \end{pmatrix} \xi^2 + \sin^2 \nu \eta^2 = 1$. L'indicatrice de Dupin est une ellipse $\Rightarrow$ tous les points de la sphère sont elliptiques.
2. Le tore : $L = \begin{pmatrix} (a + b\cos\beta)\cos\beta & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $0 < b < a$. $(a + b\cos\beta)\cos\beta\xi^2 + b\eta^2 = \pm 1$

   Si $\cos\beta > 0$: le point de coord (α, β) est elliptique. Si $\cos\beta = 0$: le point est parabolique. Si $\cos\beta < 0$: c'est un point hyperbolique.

Interprétation : L'équation du translaté du plan tangent est : $(X - p) \cdot n(p) = \pm\varepsilon$. L'intersection de M avec ce plan est décrit par : $(F(u) - p) \cdot n(p) = \pm\varepsilon$ Développement de Taylor de $F(u)$ an pt. $u + uF(u) = p$. On peut supposer $F(0) = p$ $F(u) = F(0) + \frac{\partial F}{\partial u^1}u^1 + \frac{\partial F}{\partial u^2}u^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial u^1 \partial u^2}u^i u^j + O(u^2) = p + u^1 e_1 + u^2 e_2 + \frac{1}{2}(L_{ij}n(p) + \Gamma^k_{ij}e_k)u^i u^j + O(u^3)$

$(F(u) - p) \cdot n(0) = (u^1 e_1 + u^2 e_2 + \frac{1}{2}(L_{ij}n + \Gamma^k_{ij}e_k)) \cdot n + O(u^3) = \frac{1}{2}L_{ij}u^i u^j + O(u^3) = \pm\varepsilon$ $\Rightarrow \frac{1}{2}L_{ij}\frac{u^i}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{u^j}{\sqrt{\varepsilon}} + O(..) = \pm 1$ $\frac{1}{2}L_{ij}\frac{u^i}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{u^j}{\sqrt{\varepsilon}} = \pm 1$

L'indic. de Dupin est les somme asymptotique lorsque $\varepsilon \to 0$ de l'intersection de M avec son pan tangent translaté de ε.

Exemple 2. Ellipse elliptique tore elliptique tore

0.8 Géodésiques

En géométrie euclidienne les segments se droites peuvent être caractérisés comme :

1. des courbes de courbure nulle
2. le plus court chemin entre deux points
3. une courbe dont les vecteurs tangents sont parallèle les autres

Théorème 13. *Soit M une surface régulière et (F, U, V) une carte p.t. $p \in V = F(U)$. Soit $z \in T_pM$ t.q. $|z| = 1$, alors il existe une courbe géodésique sur V passant par p où son vect. tangent est z. De plus cette géodésique est unique.*

Elle est donné par la solution de l'équation diff-le

$$\begin{cases} \ddot{u}(s)^i + \Gamma^i_{jk}(u(s))\ddot{u}(s)\dot{u}^k(s) = 0 \\ F(u(0)) = p \\ \dot{u}^i(0)e_i(u(0)) = z \end{cases}$$

La géodésique est $F(u(s))$ où s est une longueur d'arc.

Démonstration. (g) admet une unique solution pour toutes données initiales p et $z \in T_pM$. Soit $s \mapsto u(s)$ cette solution et $X(s) = F(u(s))$ la courbe sur M associée. Si s est longueur d'arc de cette courbe, c.à.d. si $|\dot{X}(s)| = 1$, alors sa courbure géodésique est $(\ddot{u}^i(s) + \Gamma^i_{ik}(u(s))\dot{u}^j(s)\dot{u}^k(s))e_i(u(s)) = 0 \Rightarrow$ c'est une géodésique.

Pour démontrer le Thm il suffit de montrer que $|\dot{X}(s)|^2 = 1$ pour tout s. Pour $s = 0$ on a : $\dot{X}(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(u(s))|_{s=0} = \frac{\partial F}{\partial u^1}\dot{u}^1(0) + \frac{\partial F}{\partial u^2}\dot{u}^2(0) = \dot{u}^1(0)e_1(u(0)) + \dot{u}^2(0)e_2(u(0)) = z \Rightarrow$ $|\dot{X}(0)|^2 = |z|^2 = 1$ On doit donc montrer que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|\dot{X}(s)|^2 = 0$. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|\dot{X}(s)|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\langle \dot{X}(s), \dot{X}(s)\right\rangle =$ $2\left\langle \dot{X}(s), \ddot{X}(s)\right\rangle$

$\dot{X}(s) = \dot{u}^i(s)e_1(u(s))$ $\ddot{X}(s) = (\ddot{u}^i(s) + \Gamma^i_{jk}(u(s))\dot{u}^j(s)\dot{u}^k(s))e_i(u(s)) + L_{ij}(u(s))n(u(s))\dot{u}^i(s)\dot{u}^j($

$\left\langle \dot{X}(s), \ddot{X}(s)\right\rangle = \left\langle \dot{u}^l(s)e_l(u(s)), (\ddot{u}^i(s) + \Gamma^i_{jk}(u(s))\dot{u}_j(s)\dot{u}_k(s))e_i(u(s))\right\rangle = \dot{u}^l(\ddot{u}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{u}^j\dot{u}^k)\langle e$ $0 \cdot g_{li} \Rightarrow |\dot{X}(s)|^2 = |\dot{X}(0)|^2 = 1$. □

Exemple 1. Géodésiques se la sphère. toutes les courbes sur la sphère ont courbure normale -1 : $L = -g$, $\frac{L}{g} = -1$. $^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2 = \kappa_g^2 + 1$ une courbe est géodésique sur la sphère si sa courbure est 1 $\ddot{X} = n = \kappa_n n = -n = -X$ $X(s) = X(0)\cos(s) + \dot{X}(0)\sin(s)$ $X(s)$ est le grand cercle intersection de la sphère avec le plan dirigé pur $X(0)$ et $\dot{X}(0)$.

0.9 Changement de Coordonnées

$\Phi : F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ est un difféomorphisme.

$e_1(u) = \frac{\partial F_1}{\partial u^1}$ $e_2(u) = \frac{\partial F_1}{\partial u^2}$ $\bar{e}_1(v) = \frac{\partial F_1}{\partial v^1}$ $\bar{e}_2(v) = \frac{\partial F_1}{\partial v^2}$

$F_2 \circ \Phi = F_1\varphi(u) = \begin{bmatrix}\Phi_1(u_1, u_2)\\ \Phi_2(v_1, v_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$

$e_1(u) = \frac{\partial}{\partial u^1}F_2 \circ \Phi(u) = \frac{\partial F_2}{\partial v^1} \circ \Phi(u) \circ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u^1} + \frac{\partial F_2}{\partial v^2} \circ \Phi(u) \circ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u^1} = \bar{e}_1 \circ \Phi\frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} + \bar{e}_2 \circ \Phi\frac{\partial \Phi_2}{\partial u^1}$ $= \frac{\partial v_1}{\partial u^1}\bar{e}_1(v) + \frac{\partial v_2}{\partial u^1}\bar{e}_2(v) = \frac{\partial v^i}{\partial u^1}\bar{e}_i(v)$

$e_2(u) = ... = \frac{\partial v^i}{\partial u^2}\bar{e}_i(v)$

Si $X \in T_{F_1(U)}M = T_{F_2(V)}M$ $X = X^j e_j(u) = \bar{X}^i\bar{e}_i(v)$

$\bar{X}^i\bar{e}_i(v) = X^j\frac{\partial V^i}{\partial u^j}\bar{e}_i(v)$

donc $\bar{X}^i = X^j\frac{\partial V^i}{\partial u^j}$

$\bar{X}^i = T^i_j X^j$

Matrice de passage $T^i_j = \frac{\partial V^i}{\partial u^j} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial u^j} =$ matrice Jacobienne de $\Phi = D\Phi = \Phi'$.

$g_{ij}(u) = \langle e_i(u), e_j(u)\rangle$ $\bar{g}_i j(v) = \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j(v)\rangle \Rightarrow g_{ij}(u) = \left\langle \frac{\partial v^k}{\partial u^i}\bar{e}_k(v), \frac{\partial v^l}{\partial u^j}\bar{e}_l(v)\right\rangle = \frac{\partial v^k}{\partial u^i}\frac{\partial v^l}{\partial u^j}\langle\bar{e}_k(v),$ $\frac{\partial v^k}{\partial u^i}\frac{\partial v^l}{\partial u^j}\bar{g}_{kl}(v)$

$\bar{g}_{ij}(v) = \frac{\partial u^k}{\partial v^i}\frac{\partial u^l}{\partial v^j}g_{kl}(u)$ $\frac{\partial u^k}{\partial v^i} =$ matrice jacobienne de $\Phi^{-1} = D\Phi^{-1} = (\Phi^{-1})' = (D\Phi)^{-1} \circ \Phi^{-1} = (\Phi')^{-1} \circ \Phi^{-1} = \bar{T}^k_i(v)$

$\Phi^{-1} \circ \Phi = Id$ $(\Phi^{-1})' \circ \Phi\Phi' = Id$ $\bar{T}^k_i(v)T^i_j(u) = \delta^i_j$ $\bar{T}(v) = T(u)^{-1}$

$T^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_n}$ est un tenseur k fois contravariant et n fois covariant si il se transforme comme :

$$\bar{T}^{i'_1 i'_2 \dots i'_k}_{j'_1 j'_2 \dots j'_n}(v) = T^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_n} \cdot \frac{\partial u^{j_1}}{\partial v^{j'_1}} \dots \frac{\partial u^{j_n}}{\partial v^{j'_n}} \cdot \frac{\partial v^{i'_1}}{\partial v^{i_n}} \dots \frac{\partial v^{i'_k}}{\partial u^{i_k}}$$

Exemple : La 1ère forme fondamentale est un tenseur 2 fois covariant. Un champ de vecteur tangent sur M est un tenseur 1 fois contravariant.

La 2ème forme fondamentale :

$$L_{ij}(u) = \left\langle \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^i \partial u^j}, n(u)\right\rangle$$

$$\bar{L}_{ij}(v) = \left\langle \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^i \partial u^j}, n(v) \right\rangle$$

$$F_2 \circ \Phi = F_1$$

$$L_{ij}(u) = \left\langle \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^i \partial u^j} \circ \Phi(u), n(u) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}(\frac{\partial v^k}{\partial u^j}\frac{\partial F_2}{\partial v^k} \circ \Phi(u)), n(u) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 v^k}{\partial u^i \partial u^j}\bar{e}_k(v) + \frac{\partial v^k}{\partial u^j}\frac{\partial^2}{\partial v^k}\right.$$

La 2ème forme fondamentale est un tenseur 2 fois covariant. Si X et $Y \in T_{F(u)}M = T_{F(v)}M$ $L(X,Y) = L_{ij}(u)X^iY^j = \bar{L}_{kl}(v)\frac{\partial v^k}{\partial u^i}\frac{\partial v^l}{\partial u^j}X^iY^j = \bar{L}_{kl}(v)(\frac{\partial v^k}{\partial u^i}X^i)(\frac{\partial v^l}{\partial u^j}Y^j) = \bar{L}_{kl}(v)\bar{X}^k\bar{Y}^j$

$g(X,Y) = \langle X, Y\rangle = g_{ij}(u)X^iY^j = \bar{g}_{kl}(v)\bar{X}^k\bar{Y}^l$

$(g^{ij}(u)) = (g_{ij}(u))^{-1}$

$g_{ij} = \bar{g}_{kl}\frac{\partial v^k}{\partial u^j}\frac{\partial v^l}{\partial u^i}$ $g = (D\Phi)\bar{g}(D\Phi)$

$g^{-1} = (D\Phi)^{-1}\bar{g}^{-1}(D\Phi)^{-1}$

$g^{ij} = \frac{\partial u^i}{\partial v_k}\bar{g}^{kl}\frac{\partial u^j}{\partial v^l}$

g^{ij} est un tenseur 2 fois contravariant.

Weingarten : $W^i_j(u) = -\frac{\partial n^i}{\partial u^j}$ est un tenseur 1 fois covariant et 1 fois contravariant.

Γ^k_{ij} n'est pas un tenseur !

0.10 Géodésiques

1. Courbure nulle $\Rightarrow$ courbure géodésique nulle.
2. Courbe le longueur minimale entre 2 pts. $\Rightarrow$ courbe de long. Extrémale parmis toutes les courbes reliant 2 points.
3. vecteurs tangents tous parallèle $\Rightarrow$ vecteurs tangents parallèle sur la courbe.

Longueur d'une courbe sur M : $c : [a,b] \ni t \mapsto F(u(t)) = c(t) \in M$.

$\mathcal{L} = \mathcal{L}[a] = \int_a^b \underbrace{\sqrt{g_{ij}(u(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t)}}_{\|\dot{c}(t)\|}\,\mathrm{d}t$

$c(a) = A$, $c(b) = B$.

$\min \mathcal{L}[a] = \mathcal{L}_{\min}$

$$\begin{cases} u : [a,b] \to U \\ F(u(a)) = A \\ F(u(b)) = B \end{cases}$$

Si $\bar{u} : [a,b] \to U$ t.q. $F(\bar{u}(a)) = A$ et $F(\bar{u}(b)) = B$ Satisfait $\mathcal{L}[\bar{u}] = \mathcal{L}_{\min}$ alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{L}[\bar{u} + \lambda v]|_{\lambda=0} = 0$$

Pour tout $v : [a,b] \to U$ t.q. $v(a) = v(b) = 0$. $\mathcal{L}[u] = \int_a^b L(u(t), \dot{u}(t))\,\mathrm{d}t$ où $L(u,w) = \sqrt{g_{ij}(u)w^iw^j}$

$\mathcal{L}[u + \lambda v] = \int_a^b L(u(t) + \lambda v(t), \dot{u}(t) + \lambda\dot{v}(t))\,\mathrm{d}t$.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{L}[u + \lambda v]|_{\lambda=0} = \int_a^b [\frac{\partial L}{\partial u}v(t) + \frac{\partial L}{\partial w}\dot{v}(t)]\,\mathrm{d}t = \frac{\partial L}{\partial w}v(t)|_a^b + \int_a^b [\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial w}]v(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b [...]v(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

$\Rightarrow$ Equation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial u}(u(t),\dot{u}(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial w}(u(t),\dot{u}(t))\&\&\forall t \in [a,b]$$

Avec $L(u,w) = \sqrt{g_{ij}w^i w^j}$ on a : $\frac{\partial L}{\partial u^k} = \frac{1}{2}\frac{g_{i_1 k}(u)w^i w^j}{\sqrt{g_{ij}(u)w^i w^j}}$
$\frac{\partial L}{\partial w^k} = \frac{1}{2}\frac{g_{ij}(u)(\delta^i_k w^j + w^i \delta^j_k)}{\sqrt{\cdots}} = \frac{1}{2}\frac{g_{kj}w^2 + g_{ik}w^i}{\sqrt{\cdots}} = \frac{g_{ki}w^i}{\sqrt{\cdots}}$.

On suppose que la courbe $\bar{u}$ est paramétrée par longueur d'arc $\sqrt{g_{ij}(\bar{u}(t))\dot{\bar{u}}^i(t)\dot{\bar{u}}^j(t)} = 1$
$\frac{\partial L}{\partial u^k} = \frac{1}{2}g_{ij_1 k}(u(t))\dot{\bar{u}}^i\ddot{\bar{u}}^j(t)$
$\frac{\partial L}{\partial w^k} = g_{ki}(u(t))\dot{\bar{u}}^i(t)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial w^k} = g_{ki,j}(\bar{u}(t)\dot{\bar{u}}^j(t)\dot{\bar{u}}^i(t) + g_{ki}(\bar{u}(t))\ddot{\bar{u}}^i(t))$
$\frac{1}{2}g_{ij,k}(\bar{u}(t))\dot{\bar{u}}^i(t)\dot{\bar{u}}^j(t) = g_{ki,j}(\bar{u}(t))\dot{\bar{u}}^j(t)\dot{\bar{u}}^i(t) + g_{ki}(\bar{u}(t))\ddot{\bar{u}}^i(t) = g_{ki}(\bar{u}(t))\ddot{\bar{u}}^i(t) + \underbrace{\frac{1}{2}(g_{ki,j}(\bar{u}(t)) +}$

0

$\sum_{ij} a_{ij}b_{ij} = \sum_{ij}\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ij})b_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{ij}a_{ij}b_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{ij}a_{ji}b_{ij} = \sum_{ij}a_{ij}\frac{1}{2}(b_{ij}+b_{ij})$
$g^{kl}(\bar{u}(t))[g_{ki}(\bar{u}(t))\ddot{\bar{u}}^i(t) + T_{ijk}(\bar{u}(t))\dot{\bar{u}}^i(t)\dot{\bar{u}}^j(t)] = 0$
$\ddot{\bar{u}}^l(t) + \Gamma^l_{ij}(\bar{u}(t))\dot{\bar{u}}^i(t)\dot{\bar{u}}^j(t) = 0$
$\Rightarrow c(t) = F(\bar{u}(t))$ est géodésique !

Théorème 14 (III.19)**.** *Une courbe sur la surface M relient $A \in M$ à $B \in M$ est géodésique ssi sur longueur est extrémale parmis les courbes sur M relient A à B.*

Exemple 1.

1. Sphère
2. Cylindre

0.11 Dérivée directionnelle et covariante

> **Définition 34.** $TM = \{(p,v)|p \in M, v \in T_pM\}$ Fibré tangent à M. v un champ de vecteur sur M est une application lisse $v : M \to TM$ t.q. $v(p) \in T_pM$.

Si $[a,b] \ni t \mapsto c(t) \in M$ est une courbe sur M, un champ de vecteurs sur c est une application lisse $[a,b] \ni t \mapsto v(t) \in T_{c(t)}M$.

En coord locales un champ de vect. sur M est décrit par $V(F(u)) = V^i(u)e_i(u)$ où la fonctions $V^i(u)$ sont lisses. On champ sur les courbe $c(t) = F(u(t))$ est définit par : $v(t) = v^i(t)e_i(F(u(t)))$ les fonction $v^1(t)$ et $v^2(t)$ e'tant lisses.

Si v est un champ de vecteurs sur M, alors les $v^i(u)$ forment un tenseur 1 fois contravariant.

$v(F(u)) = v^i(u)e_i(u) = \bar{u}^j(v)\bar{e}_j(\bar{v}) = V(G(v))$.
Si $F(u) = G(v)$.
$e_i(u) = \frac{\partial F}{\partial u'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u'}\ G(v(u)) = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}v^j}\frac{\mathrm{d}V_j}{\mathrm{d}u^i} = \bar{e}_j(v)\frac{\partial V_j}{\partial u^i}$
$V^i(u)\frac{\partial V_j}{\partial u^i}\bar{e}_j(v) = \bar{v}^j(v)\bar{e}_j(v)$

$v^i(u)\frac{\partial V_j}{\partial u^i} = \bar{v}^j(v)$.

Exemple 1.

1. Sur la sphère : $F(v,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin v \cos\varphi \\ \sin v \sin\varphi \\ \cos v \end{pmatrix}$ $e_v(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v \cos\varphi \\ \cos v \sin\varphi \\ -\sin v \end{pmatrix}$définit un champ de vecteur sur la sphère sauf aux pôles.
2. Le gradient d'une fonction. $f : M \to \mathbb{R}$ $d_p f : T_p M \to \mathbb{R}, X \mapsto d_p f(X)$ dérivée de f en p, application linéaire
   $d_p f(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(c(t))|_{t=0}$ où $c(t)$ est une courbe sur M t.q. $c(0) = p$ et $\dot{c}(0) = X$
   $d_p f(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ F(u(t))|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{f}(u(t))|_{t=0} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^1}\dot{u}^1(0) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^2}\dot{u}^2(0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^1}X^1 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^2}X^2 = \langle \nabla_p f, X\rangle = g_{ij}(u(0))(\nabla_p f)^i X^j$
   $(\nabla_p f)^i = g^{ik}(u(0))\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k}$
   $\underbrace{g_{ji}g^{ik}}_{\delta_j^k}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k}X^j = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^j}x^j$
   le gradient d'une function. En cord. locale, le gradient d'une function f est le champ de vecteur $(\nabla f)^i = g^{ij}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^j}$ $(\nabla f)(F(u)) = g^{ij}(u)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^j}e_i(u)$
   $\begin{pmatrix} (\nabla f)^1 \\ (\nabla f)^1 \end{pmatrix} = g^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u^1} \\ \frac{\partial f}{\partial u^2} \end{pmatrix}$
   Les $(\nabla f)^i$ forment un tenseur 1 fois contravariant. Les dérivée partielles $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^j} = f_{,j}$ Se transforment selon :
   $\tilde{f}(u) = \bar{\tilde{f}}(v)$
   $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial v^j}\frac{\partial v^j}{\partial u^i}$
   ce sont les composantes d'un tenseur 1 fois covariant.

Définition 35. La dérivée directionnelle d'une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ en $p \in M$ dans en direction $X \in T_p M$ est $\partial_X\, f(p) = d_p f(X) = \langle \nabla_p f, X\rangle$

Lemme 9. *Si $X, Y \in T_p M$, il existe un unique $Z \in T_p M$, tel que pour toute fonction $f : M \to \mathbb{R}$: $\partial_x\,\partial_y\, f(p) - \partial_x\,\partial_y\, f(p) = \partial_z\, f(p)$. On note $Z = [X,Y]$. Z est la Crochet de Lie de X et Y.*

Démonstration. Localement : $X = X^i e_i$ $Y = Y^j e_j$ $p = F(0)$ $\partial_X\, f(p) = X^i(0) f_{,i}(0)$ $\partial_Y\, f(p) = Y^j(0) f_{,j}(0)$ $\partial_X\,\partial_Y\, f(p) = X^i(0)\frac{\partial}{\partial u^i}(\partial_Y\, f)(F(u)) = X^i(0)\frac{\partial}{\partial u^i}Y^j(u)\frac{\partial f}{\partial u^j}|_{u=0} = X^i(0)Y^j_{,i}(0)\frac{\partial f}{\partial u^j} + X^i(0)Y^j(0)\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}$

$\partial_X\,\partial_Y\, f - \partial_Y\,\partial_X\, f = X^i(0)Y^j_{,i}(0)\frac{\partial f}{\partial u^j} - Y^i(0)X^j_{,i}(0)\frac{\partial f}{\partial u^j} = X^j\frac{\partial f}{\partial u}$

$Z^j = X^i(0)Y^j_{,i}(0) - Y^i(0)X^j_{,i}(0)$

$|box[X,Y](F(u)) = (X^i(u)Y^j_{,i}(u) - Y^i(u)X^j_{,i}(u)e_j(u))|$ □

Remarque.

$$\left\{\begin{pmatrix} [\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X,Z] + \mu[Y,Z] \\ [X,Y] = -[Y,X] \\ Jacobi : [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \end{pmatrix}\right.$$

L'ensemble des champs de vect . sur M est une algèbre de Lie pour $[\cdot,\cdot]$ Notation Moderne

$X = X^i(u)\frac{\partial}{\partial u^i}$

$e_i(u) = \frac{\partial}{\partial u^i}$

> **Définition 36.** Pour pM, soit π_p la projection orthogonal de $\mathbb{R}^3$ sur T_pM la dérivée covariante d'un champ de vecteurs X sur une courbe $c : [a,b] \to M$ est défini comment $\frac{DX}{\mathrm{d}t}(t) = \pi_{c(t)}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$

Exemple 2.

1. Courbe plane $\Rightarrow$ n=const $Y(t) \in \mathcal{P} \Rightarrow \forall t \dot{Y}(t) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{Y(t+\varepsilon)-Y(t)}{\varepsilon} \in \mathcal{P} \Rightarrow \dot{Y}(t) = \frac{DY}{\mathrm{d}t}(t)$.
2. Sur la sphère. $c(t) = (\cos t\sin\theta, \sin t\sin\theta, \cos\theta)$
   $\frac{D\dot{c}}{\mathrm{d}t}(t) = e_\varphi(t,\theta)$
   $\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t\sin\theta \\ \cos t\sin\theta \\ 0\end{pmatrix}$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{c}(t) = \ddot{c}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t\sin\theta \\ -\sin t\sin\theta \\ 0\end{pmatrix}$ $n(\theta,\varphi) = F(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}$
   $\frac{D\dot{c}}{\mathrm{d}t}(t) = \pi_{c(t)}\ddot{c}(t) = \ddot{c}(t) - n(\theta,t)\langle n(\theta,t),\ddot{c}(t)\rangle = \begin{pmatrix} -\cos t\sin\theta \\ -\sin t\sin\theta \\ 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos t\sin\theta \\ \sin t\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}(-\sin^2\theta) = -(1-\sin^2\theta)\begin{pmatrix} \cos t\sin\theta \\ \sin t\sin\theta \\ 0\end{pmatrix} + \cos\theta\sin^2\theta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}$.
   $\frac{D\dot{c}}{\mathrm{d}t}(t) = 0 \Leftrightarrow \sin 2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$ où $\theta = \frac{\pi}{2}$
   Les cercles sur la sphère t.q. $\frac{D\dot{c}(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ sont les grand cercles (les géodésiques !).
   $\frac{DX}{\mathrm{d}t}(t) = \pi_{c(t)}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = (\dot{X}^k(t) + \Gamma^k_{ij}(u(t))X^i(t)\dot{U}^j(t))e_k(u(t))$.

> **Définition 37.** Soit X un champ de vecteur sur M et $Y \in T_pM$. La dérivée covariante du champ X en p dans la direction Yest
>
> $$(\nabla_Y X)(p) = \frac{DX(c(t))}{\mathrm{d}t}|_{t=0}$$
>
> où c est une courbe sur M tq. $c(0) = 0$ et $\dot{c}(0) = Y$.

Remarque. $\frac{DX(c(t))}{\mathrm{d}t}|_{t=0}$ *ne dépend que de $c(0)$ et $\dot{c}(0)$.*

En coordonnes locale on a : $c(t) = F(u(t))$ avec $F(u(0)) = p$ et $\dot{c}(t) = \dot{u}^i(0)e_i(u(0)) = Y$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(c(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(F(u(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X^i(u(t))e_i(u(t)) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X^i(t) = \frac{\partial X^i}{\partial u^j}\dot{u}^j(t)$ $(\nabla_Y X)(p) = (X^k_{ij}(u(0))\dot{u}^j(0) + \Gamma^k_{ij}(u(0))X^i\dot{u}^j(0))e_k(u(0))$

$\nabla_Y X = (X^k_{ij} + \Gamma^k_{ij}X^i)\dot{u}^j = (X^k_{ij} + \Gamma^k_{ij}X^i)Y^j)e_k = (\partial_Y X^k + \Gamma^k_{ij}XY^j)e_k$.

Propriété 1. *$\lambda,\mu \in \mathbb{R}; X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2$ champs de vecteurs $f : M \to \mathbb{R}$.*

$\nabla_Y(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda\nabla_Y X_1 + \mu\nabla_Y X_2$ $\nabla_Y(fX) = (\mathrm{d}_Y f)X + f\nabla_Y X e_k(u(0))$

$\mathrm{d}_Y\langle X_1, X_2\rangle = \langle\nabla_Y X_1, X_2\rangle + \langle X_1, \nabla_Y X_2\rangle$ $\nabla_{\lambda Y_1 + \mu Y_2}X = \lambda\nabla_{Y_1}X + \mu\nabla_{Y_2}X$ $\nabla_{fY}X = f\nabla_Y X$.

Exemple 3. Sur la sphère $\nabla_Y X = (\nabla_Y X)^\theta e_\theta + (\nabla_Y X)^\varphi e_\varphi$

$(\nabla_Y X)^\theta = (X^\theta_\theta + \Gamma^\theta_{\theta\theta})Y^\theta + \Gamma^\theta_{\varphi\theta} X^\varphi Y^\theta + ({}^\theta_\varphi + \Gamma^\theta_{\theta\varphi} X^\theta)^\varphi + \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} X^\varphi Y^\varphi = {}^\theta_{,\theta} Y^\theta + X_{,\varphi}{}^\varphi - \frac{1}{2}\sin(2\theta) X^{\varphi\varphi}$

$(\nabla_Y X)^\varphi = X^\varphi_{,\theta} Y^\theta + X^\varphi_{,\varphi} + \mathrm{ctg}(\theta)(X^{\varphi\theta} + X^\theta Y^\varphi)$