Typesetting test $\sum_i^n \neq 60 \pm \infty\pi\triangle\neg \approx \sqrt{j} \int h \leq\geq$
$\mathbb{RP}\mathbb{1}\mathbb{P}\mathfrak{S}\mathbb{P}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\mathbb{PP}$ $\mathrm{d}x$

$$\alpha(x) = \begin{cases} x \\ \frac{1}{1+e^{-kx}} \\ \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{cases}$$

$\langle x \rangle$
$\chi_\rho(ghg^{-1}) = \mathrm{Tr}\big(\rho_{ghg^{-1}}\big) = \mathrm{Tr}\big(\rho_g \circ \rho_h \circ \rho_g^{-1}\big) = \mathrm{Tr}(\rho_h) \overset{\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)}{=} \chi_\rho(h)$ $\oplus_{x \in X}$
$\mathrm{Mat}(\rho_g) = (a_{ij}(g))_{\substack{1\leq i\leq d \\ 1\leq j\leq d}}$ et $\mathrm{Mat}(\rho'_g) = (a'_{ij}(g))_{\substack{1\leq i'\leq d' \\ 1\leq j'\leq d'}}$

$$\int_a^b \mathbb{R}^2 g(u,v)\,\mathrm{d}P_{XY}\,(u,v) = \iint g(u,v) f_{XY}(u,v)\mathrm{d}\lambda(u)\mathrm{d}\lambda(v)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

$$\iiiint_V \mu(t,u,v,w)\,dt\,du\,dv\,dw$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$$

Définition 1. Si X et Y sont 2 v.a. ou definit la COVARIANCE entre X et Y comme $\mathrm{Cov}(X,Y) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Table des matières

Résumé

Plan :

1. Courbes (plan + espace)
   — étude local
   — étude global
2. surfaces dans $\mathbb{R}^3$

0.1 Courbes

Lesson 1

Définition 2 (Courbe et Courbe Régulière)**.**

1. Une Courbe Paramètre dans $\mathbb{R}^3$ est une function $c : I \to \mathbb{R}^n$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et c est lisse (c est infiniment différentielle, $c \in C^\infty$).

$$I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^3,$$

   t – paramètre.

2. Une courbe paramètre est régulièrement si

$$\dot{c}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(t) \neq 0,$$

   pour tout $t \in I$.

Si une courbe est régulière, $c(t) \neq \text{const}$. $\dot{c}(t)$ désigne la tangente à la courbe en $c(t)$. Chaque régulière courbe est tangente à la ligne.

Définition 3. La trace d'une courbe paramètre $I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$ est image :

$$\{c(t) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Une cure paramètre est plus que sa trace.
La courbe $\mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, trace $= \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$. Et la courbe $R \ni t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ a la même trace !

$$\dot{c}_1(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ } mais \text{ } \dot{c}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 4. Si $I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}$ est une courbe paramètre, $J \subset \mathbb{R}$ – une intervalle et $\varphi : J \to I$ une function lisse t.q. $\varphi^{-1} : J \to I$ est également lisse, on disque(?) :

$$J \ni t \mapsto c^2(t) = c \circ \varphi(t) \in \mathbb{R}^n,$$

est une reparamétrisation de c.

Remarque. $\dot{\tilde{c}}(t) = \dot{c} \circ \varphi(t) * \dot{\varphi}(t)$. *Donc,* $\tilde{c}$ *- régulière* $\Longleftrightarrow$ c *est régulière.*

$$\frac{d}{ds}\varphi^{-1}(s) = \frac{1}{\dot{\varphi} \circ \varphi^{-1}(s)} \neq 0$$

$\varphi : J \to I$ *est un difféomorphisme comme* $\dot{\varphi} \neq 0$*, on a*

$$\begin{cases} \textit{soit } \dot{\varphi}(t) > 0, & \textit{pour tout } t \in J \\ \textit{soit } \dot{\varphi}(t) < 0, & \textit{pour tout } t \in J \end{cases},$$

$$\begin{cases} \varphi \textit{ est } \nearrow \\ \varphi \textit{ est } \searrow \end{cases}.$$

Si φ est $\nearrow$ on dit une la reparamétrisation conserve le sens de parcours (l'orientation). Si φ est $\searrow$, la reparam inverse le sens de parours.

Définition 5.

1. Une `courbe` est une Classe d'Equivalence de Courbes Paramètre pour la relation :
$$c \sim \tilde{c} \Longleftrightarrow \tilde{c} \text{ est une reparamétrisation de } c$$
2. Une `courbe orientée` est une classe d'equivalence des courbes paramètre pour :
$$c \sim \tilde{c} \Longleftrightarrow \tilde{c} \text{ est une reparamétrisation préservante la sens de parcours de } c$$

Définition 6. Si c est une courbe paramètre t.q. $|\dot{c}(t)| = 1$ pour tout $t \in I$. On dit que c'est paramètre pur sa longueur d'arc.

Proposition 1. *Si $I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$ est une courbe paramètre régulière il existe une reparamétrisation de c sa long d'arc :*

$$J \ni s \mapsto \tilde{c}(s) = c \circ \varphi(s) \in \mathbb{R}^n$$

$$|\dot{\tilde{c}}(s)| = 1 \textit{ pour tout } s \in J.$$

Lemme 1. *Si $\begin{matrix} J_1 \ni s & \mapsto \tilde{c_1}(s) \\ J_2 \ni s & \mapsto \tilde{c_2}(s) \end{matrix}$ sont 2 paramètre de par long d'arc de la meme courbe $|\dot{c_1}(s)| = 1 = |\dot{c_2}(s)|$. alors $c_2(s) = c_1(s_0 \pm s)$, pour un $s_0 \in \mathbb{R}$ et si c_1 et c_2 ont un pos le meme suis de parcours. Si $c : [a,\ b] \to \mathbb{R}^n$ est une courbe paramètre sa longueur est :*

$$L[c] = \int_a^b |\dot{c}(t)| \,\mathrm{d}\, t$$

$$l = \int_0^t |\dot{c}(u)| \,\mathrm{d}u = t$$

Définition 7. Une courbe paramétrique $c : R \to R^d$ est appelée Périodique de période p, si $c(t+p) = c(t),\ \forall t \in R$.

Définition 8. Une courbe fermée et appeler une COURBE FERMÉE SIMPLE s'il existe une parametrisation régulière, périodique de période p et si : $c_{[0,p)}$ est injectif.

Définition 9. $c \in C^{\infty}(I,\ R^2)$ est appelée COURBE PLANE.

Définition 10. Soit c une courbe paramètre par longueur d'arc (donc une courbe de vitesse 1) (donc $||\dot{c}(t)|| = 1$). Son champs normale est définie par :

$$N(T) := \dot{c}^{\perp}(t),\ t \in I$$

Remarque. $N(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{c}(t)$. N *dépend de l'orientation de la courbe.*

Pour chaque t le système $\dot{c},\ N(t)$ est un base orthonormée direct de R^2.

Lemme 2. *Soit une courbe vitesse 1,* N *son champs normals alors* $\ddot{c}(t)$ *est parallèle a* $N(t)$.

Démonstration. Idee $||\dot{c}(t)|| = 1,\ \forall t \Longleftrightarrow \ddot{c}(t) \perp \dot{c}(t)$. □

Définition 11. Soit $c \in C^{\infty}(I,\ R^2)$ une courbe plane de vitesse 1, alors $\ddot{c}(t) = \kappa(t)N(t)$, avec $\kappa(t) := \langle \ddot{c}(t),\ N(t) \rangle$. $\kappa(t)$ - scalar.

Alors $\kappa \in C^{\infty}(I,\ R)$ et κ est appelé la courbure de c ($\kappa(t)$ la courbure du point $c(t)$)

Theorem 1. *Formulas de Frenet Soit* $c \in C^{\infty}(I,\ R^2)$ *une courbe de vitesse 1.*

Soit $\begin{matrix} T(t) := \dot{c}(t), \\ N(t) := T^{\perp}(t) \end{matrix}$, $\{T(t),\ N(t)\}$ *- le systeme ortogonale vecteur. Est appellé le* REPÉRE DE FRENET, *ou* BASE DE FRENET.

FORMULES DE FRENET *:*

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) &= \kappa(t)N(t) \\ \dot{N}(t) &= -\kappa(t)T(T) \end{aligned}$$

Remarque.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix}$$

Lemme 3. *Soit* $c : C^{\infty}([a,\ b],\ R^2)$ *une courbe plane de vitesse, alors il existe* $\nu \in C^{\infty}([a,\ b],\ R)$ *t.q.* $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t),\ \sin\nu(t))$

Définition 12. Soit $c \in C^\infty(R,\ R^2)$ une courbe plane, périodique de période L et de vitesse 1. En particulier régulière. Soit $\nu \in C^\infty(R,\ R)$. Talque $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t),\ \sin\nu(t))$ (an dit : une angle de la tangente).

On define Le Nobre de rotation de la tangente de c : $n_c := \frac{1}{2\pi}(\nu(c) - \nu(o))$

Rappel. $c \in C^\infty(I;\mathbb{R}^2)$ *reguliere. Alors* $\exists\nu \in C^\infty(I;)$ *t.q.* $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t), \sin\nu(t))$. *On définie le* Nombre de Rotation de la Tangente *pour une courbe periodique de période* L *:*

$$n_c := \frac{1}{2\pi}(\nu(L) - \nu(0))$$

Lemme 4. *Soient* $c_1, c_2 \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ *deux courbes périodiques de période* L*, paramètre par longueur d'arc* S *:* $c_1 = c_2 \circ \varphi$ *avec* $\varphi > 0$ *alors :*

$$n_{c_1} = n_{c_2}$$

Si $\dot{\varphi} < 0$ *alors*

$$n_{c_1} = -n_{c_2}$$

Remarque. *Le nombre de rotation de la tangente est donc invariant par rapport à une reparamétrisation que preserve l'orientation.*

Démonstration. On avait vu que $\varphi(t) = \pm t + t_0$ donc $\dot{\varphi} > 0 => \varphi(t) = t + t_0$. Soit ν_2 t.q. $\dot{c}_2(t) = (\cos\nu_2(t), \sin\nu_2(t))$ alors pour $\nu_1 := \nu_2 \circ \varphi$ on a que $\dot{c}_1(t) = (\cos\nu_1(t), \sin\nu(_1 t))$. Soit $\bar{\nu}_1(t) := \nu_1(t+L)$ on a que $\dot{c}(t) = (\cos\bar{\nu}_1(t), \sin\bar{\nu}(_1 t))$ car $c_1(t) = c_1(t+L)$.

$$2\pi(n_{c_2} - n_{c_1}) = (\nu_2(L) - \nu_2(0)) - (\nu_1(L) - \nu_1(0)) \quad = (\nu_2(L - t_0) - \nu_2(-t_0)) - (\nu_1(L) - \nu_1(0)) \tag{1}$$

□

Theorem 2. *Sait* c *une courbe plane périodique de période* L *et paramètre par longueur d'arc. Soit* κ *la courbure de* c *alors*

$$n_c = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. *En particulier* $\int\limits_0^L \kappa(t)\,\mathrm{d}t \in 2\pi\mathbb{Z}$

Démonstration. Soit $\nu \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction angle pour la tangente, c.à.d. $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t), \sin\nu(t))$. $\ddot{c}(t) = \kappa(t)\dot{c}^\perp(t)$ donc $\kappa(t) = \left\langle \ddot{c}(t), \dot{c}^\perp(t)\right\rangle$ ou $\ddot{c}(t) = \dot{\nu}(t)(-\sin\nu(t), \cos\nu(t))$ et $\dot{c}^\perp(t) = (-\sin\nu(t), \cos\nu(t))$ donc $< \ddot{c}(t), \dot{c}^\perp(t) >= \dot{\nu}(t) = \kappa(t)$ ou

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\nu(L) - \nu(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \dot{\nu}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

□

Theorem 3 (Hopf. Turning tangent theorem)**.** *Une courbe plane fermée simple a un nombre de rotation (de la tangente) 1 ou* -1*.*

Nombre de rotation $n = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}(\nu(L) - \nu(0))$. $c(t+l) = c(t)$ $c(t) = (\cos\nu(t), \sin\nu(t))$, $\dot{\nu} = \kappa$

Remarque. *On avait inclu dans la défini de fermée simple qu'il n'ya pas de point singulier.*

Pour la preuve on aura besoin du lemme de recouvrement.

> **Définition 13.** Sait $X \subset \mathbb{R}^d$ et $x_0 \in X$ On dit que X est ÉTOILE par rapport à x_0, (X is star shaped). Si pour chaque $x \in X$ le segment de droite entre x_0 et x est contenu dans X. C'est dire $\forall x$ $\{x_0 1 - t + xt, t \in [0,1]\} \subset X$

Lemme 5. *De Recouvrement Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ étoilé par rapport à x_0 et soit*

$$e : X \to S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\} \text{—une application continue}$$

Alors in existe une application continue $\nu : X \to \mathbb{R}$ t.q. $e(x) = (\cos\nu(x), \sin\nu(x))$. ν est unique sous la condition $\nu(x_0) = \nu_0$.

Démonstration. Cas ou $e : X \to S^1$ n'est pas surjective. Supposons qu'il existe $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0) \notin e(X)$. $e(X) = \{z; z = e(x), x \in X\}$. La fonction $\psi : (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi) \to S^1$ $\{(\cos\varphi_0, \sin\varphi_2\}$ est un homéomorphisme. On $\nu = \psi^{-1} \circ e$ donc ν est continue.

Cas $e(X) = S^1$. Dans le cas $d = 1$, $X = [0,1]$, $x_0 = 0$ on a démontré le théorème ($e = \dot{c}$ dériver d'une courbe)

Cas $d > 1$. Soit $x \in X$. On defini $e_x : [0,1] \to S^1$, $e(x)(t) = e(tx + (1-t)x_0)$. On sait qu'il existe $\nu_x : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue t.q. $e_x(t) = (\cos\nu_x(t), \sin\nu_x(t))$ de $\nu_x(t) = \nu(tx + (1-t)x_0)$ donc $\nu(x) = \nu_x(1)$ donc $e(x) = e_x(1) = (\cos\nu_x(1), \sin\nu_x(1))$ is est e a de monte que $\nu_x(1)$ est continue en e.

Soit $\varepsilon > 0$ et $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$ une partition t.q. $e_x|_{[t_j, t_{j+1}]} \subset U_h$, $H \in \{1,2,3,4\}$. Soit y t.q. $\|e_x(t) - e_y(t)\| < \varepsilon$, $\forall t \in [0,1]$. Si ε est suffisent petit. $e_y|_{[t_j, t_{j+1})} \subset U_h$. Par example dans le cas $h = 4$ on aura

$$\nu_x(t) = \arctan\left(\frac{e_x^2(t)}{e_x^1(t)}\right) \nu_y(t) \qquad = \arctan\left(\frac{e_y^2(t)}{e_y^1(t)}\right) \tag{2}$$

$e = (e^1, e^2)$ $\square$

Démonstration. du théorème de Hopf Soit c une une paramétrisation de vitesse 1 de période L. Sait $x_0 := \max\{c^1(t); t \in [0,l]\}$. Soit $p = \{(z_1, z_2); z_1 = x_0\} \cap C(\mathbb{R})$ Soit la paramétrisation t.q. $c(0) = p$. $G = p + \mathbb{R}(1,0)$. $C(\mathbb{R}) \cap G$ est à gauche de p. Soit $X = \{(t_1, t_2) : 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq L\}$ X est étoilé par rapport à $(0,0)$. On considère $c : X \to S^1$ Formula after an image.

$$c(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{c(t_1) - c(t_1)}{||c(t_1) - c(t_1)||} & t_2 > t_1 \\ \dot{c}(t) & t_2 = t_1 = t \\ -\dot{c}(0) & (t_1, t_2) = (0, L) \end{cases}$$

Alors $e \in C^0(x, S^1)$, en effet $c \in C^\infty$. $c(t_2) = c(t_1) + \dot{c}(t_1)(t_2 - t_1) + o(|t_2 - t_1|)$

$$\frac{c(t_1)-c(t_1)}{||c(t_1)-c(t_1)||} = \frac{(t_2-t_1)(\dot{c}(t_1)-o(1))}{||(t_2-t_1)(\dot{c}(t_1)-o(1))||} \rightarrow \frac{\dot{c}(t_1)}{||\dot{c}(t_1)||} = \dot{c}(t_1)$$

$$t_2 \rightarrow t_1$$

$$\frac{c(L-\varepsilon)-c(0)}{||c(L-\varepsilon)-c(0)||} = \frac{c(-\varepsilon)-c(0)}{c(-\varepsilon)-c(0)} = \frac{-\varepsilon(\dot{c}(0)+o(1))}{||-\varepsilon(\dot{c}(0)+o(1))||} \rightarrow -\dot{c}(0)$$

$$\varepsilon \rightarrow (down)+0+$$

De plus X est étoilée par rapport à $(0,0)$. Donc il exist $\nu \in C^0(X)$ t.q. $e(t_1,t_2) = (\cos\nu(t_1,t_2), \sin\nu(t_1,t_2))$. Pour de nombre de rotation de (la tangente de) on a :

$$2\pi n_c = \nu(L,L) - \nu(0,0) = \nu(L,L) - \nu(0,L) + \nu(0,L) - \nu(0,0)$$

(droite $\perp$ à $\dot{c}(0)$) $x_0 = \max\{c^{(1)},\ t \in [0,L]\}$ $(1,0) \notin im([0,1] \ni t \mapsto e(0,t))$ car en $c(0), t \mapsto x(t)$ est maximal, donc $im([0,1] \ni t \mapsto \nu(0,t)) \subset (0,2\pi) + 2\pi k$ (car facile du lemme du recouvrement).

$e(0,L) = -\dot{c}(0) = (0,-1)$ donc $\nu(0,L) = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ de $\nu(0,0) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ donc $\nu(0,L) - \nu(0,0) = \pi$ de même : $(-1,0) \notin im(t \mapsto e(t,L)) \Rightarrow \nu(L,L) - \nu(0,L) = \pi$ donc $2\pi n_C = 2\pi$. □

> **Définition 14.** Une courbe plane est appelée CONVEXE si tout ses points sont sur un des cotés de sa tangente. $\Leftrightarrow$ pour chaque $t_C < c(t) - c(t_0) > \geq (\leq) 0,\ \forall t$ avec $n(t_0) \perp T_c(t_0)$.

Theorem 4. *Soit une courbe plane de vitesse 1. Alors :*

1. *Si c est convexe on a pour sa courbe κ on a :*

$$\kappa(t) \geq 0\ \forall t (\ ou\ \kappa(t) \leq 0 \forall t)$$

2. *Si c est fermé simple et si $\kappa(t) \geq 0,\ \forall t$ (ou $\kappa(t) \leq 0, \forall t$) alors c est convexe.*

Démonstration. 1. Soit c convexe et supposons que $\langle c(t) - c(t_0), n(t_0)\rangle \geq 0,\ \forall t$. On developpe $c(t) = c(t_0) + \dot{c}(t_0)(t-t_0) + \ddot{c}(t)\frac{(t-t_0)^2}{2} + o(|t-t_0|^2)$. $0 \leq \left\langle c(t) - c(t_2), \underbrace{\dot{c}^\perp(t_0)}_{n(t_0)} \right\rangle =$

$$\underbrace{\langle \ddot{c}(t_0, \dot{c}^\perp(t_0)) \rangle}_{\kappa(t_0)} \underbrace{\frac{(t-t_0)^2}{2}}_{\geq 0} + o(|t-t_0|^2). \Rightarrow \kappa(t_0) \geq 0 \text{ donc } \kappa(t) \geq 0 \forall t \in I$$

2. Supposons que $\kappa(t) \geq 0 \forall t$ et que c est fermée simple de période L. Si c n'était pas convexe alors il existerait un t_0 t.q. : $\varphi(t) := \langle c(t) - c(t_0), \dot{c}^\perp(t_0)\rangle$, a des valeurs positives et négatives. φ atteint un maximum eu point t_2 et un minimum au point t_1 donc $\varphi(t_2) \geq 0$ et $\varphi(t_1)$ et $\varphi(t_1) \leq 0 = \varphi(t_0) \leq \varphi(t_2)$ pour un t_0. $\dot{\varphi}(t_1) = 0 \langle \dot{c}(t_1), \dot{c}^\perp(t_0)\rangle$ donc $\dot{c}(t_1) = \pm\dot{c}(t_0)$, $\dot{c}(t_2) = \pm\dot{c}(t_0)$. Au moins deux des vecteurs $\dot{c}(t_0, \dot{c}(t_1), \dot{c}(t_2)$ sont donc les mêmes. Soit $s_1, s_2 \in \{t_0, t_1, t_2\}$ t.q. $s_1 < s_2$ $\dot{c}(s_1) = \dot{c}(s_2)$. On a $\nu(s_2) - \nu(s_1) = 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. $0 \leq \kappa(t) \leq \dot{\nu}(t)$ donc ν est croissant donc $k \in \mathbb{N}$ de même. $\nu(s_1 + L) - \nu(s_2) = 2\pi l$ avec $l \in \mathbb{N}$ donc $2\pi n_c = \nu(s_1+L) - \nu(s_1) = 2\pi(l+k) = 2\pi$ (Hopf) $\Rightarrow l = 0 ou k = 0$. Supposons que $k = 0$.

Donc $\nu(t) = cte \forall t \in [s_1, s_2]$ donc $c(s) = c(s_1) + \dot{c}(s_1)(s - s_1) = c(s_1) + \dot{c}(t_0)(s - s_1)$ pour $s \in [s_1, s_2]$. donc $\varphi(s) = \langle c(s) - c(t_0), \dot{c}^{\perp}(t_0) \rangle = \langle c(s_1) - c(t_0), \dot{c}^{\perp}(t_0) \rangle = cte$ ce qui n'est pas possible car au moins 2 des points t_0, t_1, t_2 sont dans $[s_1, s_2]$.

□

Définition 15. Une courbe plane de vitesse 1. On dit que c admet un sommet en t_0 si $\dot{\kappa}(t_0) = 0$. (sommet=vertex en anglais)

Exemple 0.1.1. On peut démontrer que l'ellipse à quatres sommets.

Remarque. *De manière générale on sait qu'one fonction périodique admet deux points critiques (un maximum et un minimum).*

Theorem 5. *des 4 sommet (four vertex theorem) Soit $c \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ périodique de période L de vitesse 1 et convexe c admet au moins quatre sommets.*

Pour la preuve on a besoin de 2 lemmes

Lemme 6. *Si l'intersection d'une courbe convexe plane fermée simple avec une droite G contient plus que deux points différents alors c contrent un segment de G.*

Remarque.

Démonstration. Supposons que c est orienté positive convexe $= 0$ $\kappa(t) \geq 0 \Rightarrow \dot{\nu}(t) \geq 0$ pour ν une angle $\dot{c}(t) = (\cos \nu(t), \sin \nu(t))$ par Hopf : $\nu(L) - \nu(0) = 2\pi$ donc $\nu : [0, L] \to [0, 2\pi] + \nu_0$ est croissante et surjective. □

Exercice 2

1. Démontrer qu'un segment de droite est la courbe la plus courte (de classe C^1) être deux points. S : $A, B \in \mathbb{R}^d$, $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^d$, $c(0) = A, c(1) = B$. $L(c) = \int_0^1 ||\dot{c}(t)||\mathrm{d}t$. $c(1) - c(0) = B - A = \int_0^1 \dot{c}(t)\mathrm{d}t$, $||B - A|| = ||\int_0^1 \dot{c}(t)\mathrm{d}t|| \leq \int_0^1 ||\dot{c}(t)||\mathrm{d}t$.
2. $f(t) = \cos h(t)$ $\gamma(t) = (t, \cos h(t))$. $s(t) = \int_0^t ||\dot{\gamma}(\tau)||\mathrm{d}\tau = \sin ht,\ t \in [0, 2]$. On doit trouves φ t.q pour $c := \gamma \circ \varphi$ on a $||\dot{c}|| = 1$. $t(s) = arcsinhs,\ s \in [0, \sin h2]$, $c : (0, \sin h2) \to \mathbb{R}^2$. $c(s) = \gamma(arcsinhs), s \in (o, sinh2)$. $c(s) = (arcsinhs, \sqrt[2]{1 + s^2}), s \in (0, sinh2)$.
3. $\forall t \neq 1 :\ \gamma$ est régulier.

Exercice 3

1. Démontrer que si $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une paramétrisation par longueur d'arc d'une courbe fermée, alors c est périodique.

   Exemple : $t \mapsto (\cos(e^t), \sin(e^t))R = f(t)$ $(t \in \mathbb{R})$. f n'est pas périodique, $f(\mathbb{R}) = S^1$.

   Dénoter : si c est une parametrisation t.q. $||\dot{c}(t)|| = 1$ alors c est périodique. Idée : $d(t + T) = d(t)$ T est période. On definit φ en ce fonction de passage. $s(t) = \int_0^t ||\dot{d}(\tau)||\,\mathrm{d}\tau = \int_0^T ||\dot{d}(\tau)||\,\mathrm{d}\tau = L + s(t)$. $\varphi(u + L) = \varphi(s(t) + L) - \varphi(s(t + T)) =$

$t+T = \varphi(u)+T$, $u = s(t)$, $s\circ\varphi(u) = u$, φ—function inverse function reciproque. $\bar{c} := d\circ\varphi$ est une parameter par long d'arc. $\bar{c}(u+L) = \varphi(s(t)+L) - \varphi(s(t+T)) = t+T = \varphi(u)+T$. ($\varphi$ la fonction reciproque de s).

Homework all the rest.

Lemme 7. *c une courbe plane fermée simple et convexe. c intersecté une droite un plus de trois points alors c contient un segment de droite.*

Démonstration. Soit $c; [0,1] \leftarrow \mathbb{R}$ la courbe. Supposons que pour la droite $G = p_0 + \mathbb{R}\nu$. $c([0,1]) \cap G = \{c(0), c(t_1), c(t_2)\}$. Supposons que $\kappa \geq 0$ donc pour l'angle ν t.q. $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t), \sin\nu(t))$ an a que $\dot{\nu} = \kappa \geq 0$ et $\nu(L) = \nu(0) = 2\pi$ donc $\nu : [0,L] \leftarrow [0,2\pi] + \nu_0$ est croissante et surjective. Soient $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ ($[0,t_1], [t_1,t_2], [t_2,L]$). Supposons que $c(I_j) \cap G \neq c(I_j)$. Soit $G_S = G + s\nu^{\perp}$. Soit $s_1 = sup\{s > 0;\ G_s \cap c(I_j) \neq 0\}$. Soit τ_j define par $c(I_j) \cap G_{s_1} = \{c(\tau_j)\}$ donc $\dot{c}(\tau_j) = \pm\nu$. Donc $\exists\tau_n$ t.q. $0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2 < \tau_3 < L$ t.q. $c(\tau_n) = \pm\nu\ \forall k$. Soit $\theta_1 \in \theta_0 + [0,2\pi)$ t.q. $(\cos\theta_n, \sin\theta_n) = \nu$. Supposons que $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ et $(\cos\nu_2, \sin\nu_2) = -\nu$ donc $c(\tau_k) \in \{\theta_1, \theta_2\}, \forall k \in \{1,2,3\}$. $t \mapsto \theta(t)$ est croissant donc $\exists j$ t.q. $\theta|_{[}t_j, t_{j+1}]$ est constant. ☐

Lemme 8. *Soit une courbe plane fermée et sample et convexe. G une droite t.q. $G \cap im(c) = \{p_1, p_2\}$ t.q. $T_{p_1}(c) = T_{p_2}(c)$ colinéaire G alors c contient un segment de G.*

Démonstration. $G = T_{p_1}(c)$ donc apr convexité la courbe est situé d'un seul coté de G donc supposons :

$$\left\langle c(t) - p_1, \dot{c}^{\perp}(t_1)\right\rangle > 0$$

Soit $G_\varepsilon = G + \varepsilon\dot{c}^{\perp}(t_1)$. Pout ε suffisent petit $G_\varepsilon \cap im(G) = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ avec $q_j \neq q_k,\ j \neq k,\ q_j \in im(c)$. le résultat suit du lemme précédent. ☐

Theorem 6 (des 4 sommets)**.** *soit c une courbe plane, convexe fermé simple alors c admet quatre sommet.*

Démonstration. Supposons que c est paramétrique par longueur d'arc et de période L. Pour sa courbure κ on sait que κ atteint son maximum et son minimum dans $[0,L]$ donc il existent $t_0, t_1 \in [0,L)$ t.q. $\dot{\kappa}(t_j) = 0\ j \in \{1,2\}$. Supposons que $t_0 = 0$. Soit $G = Aff(c(0), c(t_1))$ la droite affine passant parce points. S'il existerait un trois ème point d'intersection de G avec c alors la courbe contiendrait un segment de G (lemme précédant) donc on aurait fini car $\dot{\kappa} = 0$ sur ce segment. Si l'intersection éteint tangentielle en $c(0)$ et $c(t_1)$ alors c on tiendrait un segment de droite parle lemme précédant pour $G = p_0 + \mathbb{R}\nu$ on peut donc supposer que :

$$\left\langle c(t) - c(t_0), \mu^{\perp}\right\rangle > 0\ t \in (0, t_1) \tag{3}$$

$$\left\langle c(t) - c(t_0), \mu^{\perp}\right\rangle < 0\ t \in (t_1, L) \tag{4}$$

κ est périodique de période L donc $\int\limits_0^L \dot{\kappa} = 0$. Si $\dot{\kappa}(t) \neq 0\ \forall t \in \{0, t_1\}$. Alors on peut supposer que :

$$\dot{\kappa}(t) > 0\ t \in (t_1, L)$$

$$\dot{\kappa}(t) < 0\ t \in (0, t_1)$$

=> $\dot\kappa(t)\left\langle c(t)-c(0),\nu^{\perp}\right\rangle > 0,\ t\in(t_1,L)$ et $t\in(0,t_1)$ or $\int\dot\kappa(t)(c(t)-c(0))\,\mathrm{d}t = -\int\limits_0^L \kappa(t)\dot c(t)\mathrm{d}t$
or on sait que $\dot n(t)=\kappa(t)\dot c(t)$ équation de Frenet $n=\dot c^{\perp}$.

$$\dot T = \kappa n$$
$$\dot N = -\kappa T$$

$$\int_0^L \dot\kappa(t)\left\langle c(t)-c(0),\nu^{\perp}\right\rangle \mathrm{d}t = \left\langle 0,\nu^{\perp}\right\rangle = 0$$

C'est une contradiction donc il existe un $t_2\in\{0,t_1\}$ t.q. $\dot\kappa(t_2)=0$.

Supposons que $t_2\in(t_1,L)$. S'il n'y avait pas de quartier sommet. Il existe donc une droite qui sépare les regions $\dot\kappa>0$ et $\dot\kappa<0$. Par le même argument pour ces regions on conclut qu'il existe un 4ème sommet. □

Remarque. *Le théorème reste vrai sans l'hypothèse de la convexité.*

0.2 Inégalité isopérimetrique

l'aire du cerclée $\mathit{rayon}\ R = \pi\mathbb{R}^2 = A$—area
la $\mathit{longueur}\ 2\pi\mathbb{R} = L\ L^2 = 4\pi^2\mathbb{R} = 4\pi A$.

Theorem 7. *Soit $G\subset\mathbb{R}^2$ une region bornée par une courbe fermé simple de longueur L. Alors pour l'aire A de G on a :*

$$4\pi A \le L^2$$

et $4\pi A = L^2$ ⇔la courbe est un cercle.

Démonstration. Soit c une paramétrisation de la courbe de vitesse 1, de période L orientée positive. Pour déterminer A à partir de c on utilise le théorème de Stoks. Pour $F\in C'(G,\mathbb{R}^2)$ un champs de vecteurs on a :

$$\int_G \operatorname{rot} F(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_C \langle F,\mathrm{d}s\rangle := \int_0^L \langle F(c(t)),\dot c(t)\rangle\,\mathrm{d}t$$

Un F t.q. $\operatorname{rot} F = 1$
$F(x,y)=\frac{1}{2}(-y,x)$

$$\operatorname{rot} F(x,y) = \partial_x F2 - \partial_y F_1 = 1$$

donc $\int \operatorname{rot} F = \int_G 1 = A = \int\langle F,\cot c\rangle = \int_0^L (x\dot y - \dot x y)\mathrm{d}t$ avec $c(t)=(x(t),Y(t))$
On utilise un l'analyse de Fourier. Soit

$$z:\mathbb{R}\leftarrow\mathbb{C}^2$$
$$z(t) := x(\frac{L}{2\pi}t) + iy(\frac{L}{2\pi}t)$$

alors $x\in C^{\infty}$ et $z(t+2\pi)=z(t)$ par Fourier on sait $z(t)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}\ \forall t$.

$\dot x(t) = \frac{L}{2\pi}(\dot x(\frac{l}{2\pi}) + i\dot y(\frac{l}{2\pi}))$
$|\dot z(t)|^2 = \frac{L^2}{(2\pi)^2}(\dot x^2+\dot y^2)(\frac{L}{2\pi}t)$

$\int_0^{2\pi} |\dot{z}(t)|^2 = \frac{l^2}{2\pi}$

$\dot{z}(t) = \sum c_k(ik)e^{iht}$ $\forall t$ $|\dot{z}|^2(t) = \sum_{k,l}(inc_n)(-il\bar{c}_e)e^{i(k-l)t}$ $\int_0^{2\pi} |\dot{z}|^2(t) = \sum_{k,l} \int (...)e^{i(h-l)t}$

donc : $\int_0^{2\pi} |\dot{z}|^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_n|^2$ donc $\frac{L^2}{2\pi} = \sum k^2|c_n|^2$. $Im\dot{z}\bar{z}(t) = (\dot{y}x - x\dot{y})(\frac{L}{2\pi})\frac{L}{2\pi}$.

$$2A = \frac{L}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Im} \dot{z}\bar{z} = \sum k|c_k|^2 \cdot 2\pi$$

$$4\pi A = 4\pi^2 \sum k|c_k|^2$$

$$L^2 = 2\pi \cdot \sum k^2|c_k|^2$$

or $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k|c_k|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2$ avec égalité $\Leftrightarrow c_k = 0$ pour $k \notin \{0,1\}$ donc égalité $\Leftrightarrow z(t) = c_0 + c_1e^{it}$ $\Leftrightarrow t \mapsto (x(t), y(t))$ est un cercle.

□

0.3 Courbes dans $\mathbb{R}^3$

Définition 16. Soit $c \in C^\infty(I;\mathbb{R}^3)$ une courbe paramétrie et réguliére.

1. $\nu \in C^\infty(I;\mathbb{R}^3)$

$$\nu(t) := \frac{\dot{c}(t)}{||\dot{c}(t)||}$$

est appelée Champs Tangent. c est appelé une courbe paramétrie Bi-reguliere si $\dot{v}(t) \wedge \ddot{c}(t) \neq 0, \ \forall t \in I$. (produit vectoriel). Dans ce cas on difinit :

$$b(t) := \frac{\dot{c}(t) \wedge \ddot{c}(t)}{||\dot{c}(t) \wedge \ddot{c}(t)||}$$

le Champs Binormalte et le plan Osculateur :

$$\mathbb{P}_c(t) = \{p \in \mathbb{R}^3 : \ \langle p - c(t), b(t)\rangle = 0\}$$

plan affine passant perpendiculaire avec vecteur normale $b(t)$. Le Champs Normale est définie par $n(t) := b(t) \wedge \nu(t)$.

2. Pour une courbe paramétrie biréguliére le `repére orthomal directe` $\{\nu(t), n(t), b(t)\}$ est appelé le Repére de Frenet de la courbe c au point $c(t)$.

$$\kappa(t) := \frac{1}{||\dot{c}(t)||}\langle\dot{\nu}(t), n(t)\rangle$$

est appelée Courbure de coube de c en t :

$$\tilde{c}(t) := \frac{1}{||\dot{c}(t)||}\langle\dot{n}(t), b(t)\rangle$$

est appelée la Torsion de c en t.

Remarque. *1. la biregular assure que le plan osculaleur est bien definie.*

$$\mathbb{P}_c(t) := c(t) + \mathrm{vect}\{\dot{c}(t), \ddot{c}(t)\}$$

2. *le vecteur* $b(t) \perp \mathbb{P}_c(t)$.
3. $n(t) \in \mathrm{vect}\{\dot{c}(t), \ddot{c}(t)\}$
4. $\mathrm{vect}\{\dot{c}(t), \ddot{c}(t)\} = \mathrm{vect}\{\nu(t), n(t)\}$
5. *Si* c *est de vitesse 1 alors* c *biréguliére* $\Leftrightarrow ||\ddot{c}(t)|| \neq 0, \ \forall t$ *car dans ce cas* $\langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle = 0$ *donc* $||\dot{c}() \wedge \ddot{c}(t)|| = ||\dot{c}(t)|| \cdot ||\ddot{c}(t)|| \neq 0$ *de plus* $\kappa(t) = ||\ddot{c}(t)||$ *(car* $\kappa(t) = \langle \dot{\nu}, n(t) \rangle = \left\langle \dot{c}(t), \frac{\ddot{c}(t)}{||\ddot{c}(t)||} \right\rangle = ||\ddot{c}(t)||$*).*
6. *En particulier pour une courbe dans l'espace* $\kappa(t) \geq 0 \ \forall$
7. *Si* $c(I) = imc \subset plan \subset \mathbb{R}^3$ *la courbure de* c *n'est pas même que la courbure definie pour la xstihon* $\hat{c}$ *au plan on a* $\kappa = |\hat{\kappa}|$.
8. *Ce plan osculateur est indipendant de la parametrisation.* $\check{c} = c \circ \varphi; \dot{\check{c}} = \dot{c} \circ \varphi \cdot \varphi; \ddot{\check{c}} = \ddot{c} \circ \varphi \dot{\varphi}^2 + \dot{c} \varphi \ddot{\varphi}$. *(*$\mathrm{vect}\{\dot{\check{c}}(t), \ddot{\check{c}}(t)\} = vect\{\dot{c}(\phi(t)), \ddot{c}(\phi(t))\}$*).*

Proposition 2. *Equations de Frenet pour une courbe biréguliére.*

$$\dot{\nu}(t) = \frac{1}{||\dot{c}(t)||}\kappa(t)n(t)$$
$$\dot{n}(t) = \frac{1}{||\dot{c}(t)||}(-\kappa(t)\nu(t) + \tau(t)b(t))$$
$$\dot{b}(t) = -\frac{1}{||\dot{c}(t)||}\tau(t)n(t)$$

Memo $\begin{array}{c} \nu \\ n \\ b \end{array} = \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$.

Démonstration. $\kappa = \frac{1}{||\dot{c}||} \langle \dot{\nu}, n \rangle = 0$ (1)
$\langle \dot{\nu}, b \rangle = 0$ car $\dot{\nu} \in \mathrm{vect}\{\dot{c}, \ddot{c}\}$. $\langle \nu, b \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{\nu}, b \rangle + \left\langle \nu, \dot{b} \right\rangle = 0$ donc $\dot{b} \perp \nu$. $\tau = \frac{1}{||\dot{c}||} \langle \dot{n}, b \rangle$
$\langle n, b \rangle = 0$ $\langle \dot{n}, b \rangle + \left\langle n, \dot{b} \right\rangle = 0 \Rightarrow$(3). (2) découle donc de $\langle \dot{n}, \nu \rangle = -\langle n, \dot{\nu} \rangle$ car $\langle \nu, n \rangle = 0$
$\langle \dot{n}, b \rangle$ definition de τ. □

Theorem 8 (foundammentale de la théorie de Frenet)**.** *Soit* I *un intervalle et* $\kappa, \tau \in C^\infty(I, \mathbb{R})$, $\kappa(t) \geq 0$. *Alors il existe une courbe paramétrie de vitesse 1* $c \in C^\infty(I; \mathbb{R}^3)$ *tq. sa courbure et sa torsion sont* τ *et* κ. *Toute autre courbe qui ales mémes propriétés est de la forme :* $\hat{c} = F \circ c$ *avec* $F(x) = Ax + b$ *avec* $A \in SO(3)$.

Démonstration. Ce systéme d'équations differentielles :

$$\dot{\nu} = \kappa n$$
$$\dot{n} = -\kappa\nu + \tau b$$
$$\dot{b} = -\tau n$$

est lineaire et d'ordre 1. Pour tout systeme orthonue diuct et $\forall t_0 \in I$: $\{e_1, e_2, e_3\}$ il existe une solution t.q.

$$\nu(t_0) = e_1$$
$$n(t_0) = e_2$$
$$b(t_0) = e_3$$

on define $c(t_0) + \int_{t_0}^{t} \nu$ pour un $c(t_0) \in \mathbb{R}^3$ □

Exemple 0.3.1 (Pour courbure et $\bar{c}$osion)**.** $\kappa = \frac{1}{||\dot{c}||}\langle \dot{\nu}, n\rangle$; $\tau = \frac{1}{||\dot{c}||}\langle \dot{n}, b\rangle$. Soit

$$c(t) := (\cos t, \sin t, t),\ \ t \in \mathbb{R}$$
$$\dot{c}(t) = (-\sin t, \cos t, 1);\ \ ||\dot{c}(t)||^2 = 2$$
$$\ddot{c}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$
$$\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, q)$$
$$b(t) = \frac{\dot{c} \wedge \ddot{c}}{||\dot{c} \wedge \ddot{c}||}(t) = \frac{(\sin t, -\cos t, 1)}{\sqrt{2}}$$
$$n(t) = -(\cos t, \sin t, 0)$$
$$\dot{\nu}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t, -\sin t, 0)$$
$$\langle \dot{\nu}, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \kappa = 1$$
$$\dot{n}(t) = -(-\sin t, \cos t, 0)$$
$$\langle \dot{n}, b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \tau = 1$$

Image

Remarque (Theoreme foundamentalle dans le plan)**.** *Soit* $\kappa \in C^\infty(I;\mathbb{R})$ *pour un intervalle* I*. Alors il existe une courbe paramétrie par lagueur d'arc* c *t.q. sa courbure est* κ*. Toute autre courbe set un* $\hat{c}$ *avec les mêmes proprietes est de forme :*

$$\hat{c}(t) = F \circ c(t + t_0),$$

pour $t_0 \in \mathbb{R}$ *et* F *une isometrie directe* $\Leftrightarrow$*deplacement.*

Deux résultats sur la géométrie globale des courbes dans l'espace.

Définition 17 (courbure totale)**.** Soit $c \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^3)$ une courbe paramétrie par longueur d'arc et périodique de période L, $\kappa \in C^\infty(I;\mathbb{R})$ est sc courbure. Alors $\kappa(c) := \int_0^L \kappa(t)\,dt$ est appelé COURBURE TOTALE de c.

Remarque. *Dans le p'au on sait (Hopf) que* $\kappa(c) = \pm 1$ *si* c *est simple.*

On peut dénoutrer

Theorem 9 (Fenchel)**.** *Soit* $c \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$ *une courbe fermée simple. Alors pour sa courbure totale :*

$$\kappa(c) \geq 2\pi.$$

De plus on a $\kappa(c) = 2\pi \Leftrightarrow c$ *est un courbe plane et convexe.*

Démonstration. Sans. □

On peut dénouter

Theorem 10 (Fary-Tlilnor)**.** *Soit* $c \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^3)$ *une courbe fermée simple. Si* c *admet un* `noeud` *alors pour la courbure totale on a*

$$\kappa(c) \geq 4\pi.$$

Remarque. *Si* c *admet un* `noeud`*, c'est à dire on ne peut définir* c *d'une manière continue en une courbe plane fermée simple.*

Définition 18. Une ISOTOPIE de $\mathbb{R}^3$ est une application.

$$\varphi \in C^0([0,1] \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$$

t.q. $\forall t \in [0,1]$ $\varphi(t, \cdot)$ est un `homeomorphism`.

Définition 19. Deux courbes fermeies simples c_1, c_2 sontnt appelé ISOTOPE. S'il existe une isotopie φ t.q.

$$\varphi(0, X) = X \ \forall x \in \mathbb{R}^3; \ \varphi(1, \mathrm{img}(c_0)) = \mathrm{img}(c_1).$$

Définition 20.
- Un noeud est une class l'equivalence d'une isotopie.
- Une courbe fermé simple est SANS NOEUD, si elle est isotope à une courbe plane fermée simple.

0.4 surfaces

Définition 21 (Surface régulière)**.** Soit $S \subset \mathbb{R}^3$. S est appelé SURFACE RÉGULIÈRE. Si pour chaque $p \in S$ il existe un ouvert $V \subset \mathbb{R}^3$ t.q. $p \in V$ et s'il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et un $F : \underbrace{U}_{\subset \mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}^3$ C^∞ t.q.

1. $F(U) = S \cap V$ et $F : U \to S \cap V$ est un homéomorphisme (c.a.d. $F|_U$ continue et son inverse $F^{-1}|_U$ est continue)
2. Le Jacobien DuF a $\text{rank}\,2\ \forall u \in U$

Remarque. *La matrice jacobienne dans U repère standard :*

$$F(X_1, X_2) = (F_1(X_1, X_2), F_2(X_1, X_2), F_3(X_1, X_2))$$

$$DuJ = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} F_1 & \partial_{x_2} F_1 \\ \partial_{x_1} F_2 & \partial_{x_2} F_2 \\ \partial_{x_1} F_3 & \partial_{x_2} F_3 \end{pmatrix}$$

$U = (x_1, X_2)\ \partial_{x_j} F = \begin{pmatrix} \partial_{x_j} F_1 \\ \partial_{x_j} F_2 \\ \partial_{x_j} F_3 \end{pmatrix}$

donc rang $DuF = 2 \Leftrightarrow \partial_{x_1} F, \partial_{x_2} F$ sont indépendants $\dim \text{vect}\{\partial_{x_1} F, \partial_{x_2} F\} = 2$ $\Leftrightarrow$ deux vecteurs tangents à S au point $F(u)$ qui sont indépendant c'est a dire : on peut définir l'espace tangent $\Leftrightarrow ||\, \partial_{x_1} F \wedge \partial_{x_2} F|| \neq 0$.

$u_1 = (x_1, x_2)$ la ligne $x_2 = \text{const}$ qui passe par U. $\mathbb{R} \ni t \mapsto (x_1, x_2 + t) =: c(t)$, $c(0) = u$. $t \mapsto F(c(t))$ est la courbe correspondante sur S.

$\frac{\partial}{\partial F}(c(t))|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial F}(x_1, x_2 + t)|_t = 0 = \partial_{x_2} F(x_1, x_2)$

Définition 22. Pour une surface régulière l'application $F : U \to S \cap V$ (on encore (U, F, V)) Paramétrisation Locale de Sau point p. $S \cap V$ est appelé un Voisinage de Coordonnées et les composantes (u_1, u_2) de u t.q. $F(u) = p$ les Coordonnées de p par Rapport à F.

Exemple 1. Pour $p \in \mathbb{R}3$ et X_1, $X_2 \in \mathbb{R}^3$ le plan affine $S := \{X, X = p + u_1 X_1 + u_2 X_2\}$ est une surface régulière. Car : On peut prendre (pour tout $p \in S$) $V := \mathbb{R}^3; U := \mathbb{R}^2$ $F(u_1, u_2) = p + u_1 X_1 + u_2 X_2$

F es une fonction affine donc F est différentiable. (en tout que fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$) $F(U) = S = S \cap \mathbb{R}^3 F : U \to S$ est un homéomorphisme.

Exemple 2. graphe d'une fonction (Une seule paramétrisation !) Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ ouvert $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable. $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in U, x_3 = f(x_1, x_2)\}$

On peut prendre de nouveau $V = \mathbb{R}^3$ U (est U) $F(u_1, u_2) := (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$ $F : U \to \mathbb{R}^3$ est différentiable. $F : U \to F(U) = S$ est continue $F|_n^{-1}$ est la projection orthogonale donc continue. La surface est régulière car $\partial_{u_1} F = (1, 0, \partial_{u_1} f(u_1, u_2))$ $\partial_{u_2} F = (0, 1, \partial_{u_2} f(u_1, u_2))$ $\partial_{u_1} \wedge \partial_{u_1} = (., ., 1) \neq 0$

Addendum : le plan affine est régulier $X = p + u_1 X_1 + u_2 X_2$ $\partial_{u_1} F = X_1$, $\partial_{u_2} F = X_2$ $\partial_{u_1} F \wedge \partial_{u_2} F = X_1 \wedge X_2 \neq Si X_1, X_2$ sont indépendantes $\Leftrightarrow \dim \text{vect}\{X_1, X_2\} = 2$.

Exemple 3. $S(= S^2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ S est une surface régulière ? Soit $p = (p_1, p_2, p_3) \in S$ t.q. $p_3 > 0$ $F(X, Y) = (X, Y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ $(x^2 + y^2 < 1)$ $U := \{(X, Y);\ x^2 + y^2 < 1\}; V := \{(x, y, z); z > 0\}$

$S \cup V_3$ est le graphe de $(X, Y) \mapsto \sqrt{1 - x^1 - y^2}$ qui est C^∞ par l'exemple du graphe on a que F est une paramétrisation en $p$pour chaque $p \in S \cap V_+$

Soit $p \in S$; $p_3 < 0$ on choisi $U := \{(x,y); x^2+y^2 < 1\}$ $V_- = \{(x,y,z); z < 0\}$ $F_-(x,y) := (x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2})$ $(x,y) \in U$ $V_- = \{(x,y,z); z < 0\}$ parce que $S \cap V_-$ est le graphe de $U \ni (x,y) \mapsto -\sqrt{1-x^2-y^2}$ qui est différentiel. Par le précédent (U, F_-, V_-) est un voisinage de coordonnées pour chaque point $p \in S$ t.q. $p_3 < 0$.

$\{p \in S$ t.q. $p_2 > 0\}$ est le graphe $U \in (x,y) \mapsto \sqrt{1-y^2-z^2}$ donc par le précédent $(U, F_{1_\pm}, V_{1_\pm})$ avec $V_{1_\pm} = (x,y,z), x >_< 0$ et $F_{1_\pm} = (y,z,\pm\sqrt{1-y^2-x^2})$ De même : $(U, F_{2_\pm}, V_{2_\pm})$ avec $V_{2_\pm} = \{x,y,zx > 0\ y < 0\}$ $F_{2_\pm}(X,z) = (x,z,\pm\sqrt{1-x^2-z^2})$ est un voisinage de coordonnées pour $\{p \in S; p_2 >_< 0\}$

En résumé : S^2 est une surface régulière.

Remarque. *Il nous a falloir 6 paramétrisations pour monter que S est la une surface régulière. On peut faire avec 2 paramétrisations mais pas avec 1.*

Proposition 3. *Soit $V_0 \subset \mathbb{R}^3$ ouvert $f \in C^\infty(V_0;\mathbb{R})$ $S := \{(x,y,z) \in V_0; f(x,y,z) = 0\}$ Si $\boldsymbol{\nabla} f(p) \neq 0 \forall p \in S$ alors S est une surface régulière.*

Remarque. — *$S^2 = f^{-1}(0)$ pour $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$*
— *S — le plan affine $= f^{-1}(0)$ de $f(X) = \langle X-P, n\rangle$ pour un $p \in S$ et n un vecteur normale à S.*

Démonstration. Soit $p = (X_0, Y_0, Z_0)$ $gradf(p) = (\partial_x f(p), \partial_y f(p), \partial_z f(p)) \neq (0,0,0)$

Supposons que $\partial_z f(p) \neq 0$. Par le théorème des fonctions implicites il existe un voisinage $V \subset V_b$ de p un voisinage $U \subset \mathbb{R}^2$ de (X_0, Y_0) et une fonction $g \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ t.q. $S \cap V = \{(x,y,g(x,y)); x,y \in U\}$ donc on conclure en utilisant l'exemple du graphe d'une fonction (cad $f(x,y,g(x,y)) = 0$). □

Attention : la condition $\boldsymbol{\nabla} f(p) \neq 0 (p \in S)$ est suffisante mais pas nécessaire. Par exemple $S^2 = \tilde{f}^{-1}(0)$ pour $\tilde{f}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-1)^2$ $\boldsymbol{\nabla}\tilde{f}(x,y,z) = 2(x^2+y^2+z^2-1)2(x,y,z) = 0$ si $x^2+y^2+z^2 = 1$

Exemple 4. $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2 (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ $S = f^{-1}(0)$ $\boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) = 2(x,y,-z) = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)(0,0,0) \in S$

In faut donc examine S autour (=dans un voisinage) de $(0,0,0)$ $S = \{(x,y,z); |z| = \sqrt{x^2+y^2}\}$

S est un double-cône

Remarque. *rotation de la courbe $X \mapsto (X,Z)$ avec $|x| = |y|$ autour de l'axe des z*

Il ne eut exister de voisinage $V \subset \mathbb{R}^3$ de $(0,0,0)$ et $U \subset \mathbb{R}$ ouvert t.q. $F|_U : U \to S \cap V$ soit homeomorphe avec $F : U \to \mathbb{R}^2$ t.q. DuF est de $rang2$ car pour $p \in S \cup V$ avec $p_3 > 0$ et $q \in S \cap V$ avec $q_3 < 0$ et toute courbe $c : [0,1] \to S \cap V$avec $c(0) = p$, $c(1) = q$. $\exists t_0$ t.q. $c(t_0) = (0,0,0)$ or dans U il existent des courbes qui évitent l'origine. C'est à dire $\gamma \in C^0([0,1], U)$ $\gamma(0) = F^{-1}(q)$ $\gamma(1) = F^{-1}(p)$ $\gamma(t) \neq F^{-1}(0) \forall t \in [0,1]$.