Table des matières

Résumé

Plan :

1. Courbes (plan + espace)
   — étude local
   — étude global
2. surfaces dans R^3

1 Courbes

Lesson 1

Définition 1.1. Courbe et Courbe Régulière

1. Une courbe paramètre dans R^3 est une function $c : I \to R^n$ où I est un intervalle de R et c est lisse = infiniment différentielle (C^∞).
$$I \ni t \mapsto c(t) \in R^3,$$
t – paramètre.
2. Une courbe paramétrée est régulièrement si
$$\dot{c}(t) = \frac{d}{dt}c(t) \neq 0,$$
pour tout $t \in I$.

Si une courbe est régulière, $c(t) \neq const$. $\dot{c}(t)$ ¡diuge la tangente à la courbe en $c(t)$.

Chaque régulière courbe est tangente à la ligne.

Définition 1.2. La trace d'une courbe paramètre $I \ni t \mapsto c(t) \in R^n$ est image :
$$\{c(t) \mid t \in I\} \subset R^n.$$

Une cure paramètre est plus une sa trace.

La courbe
$$R \ni t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix} \in R^2,$$
$trace = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in R\}$. Et la courbe
$$R \ni t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \in R^2$$
a la même trace !
$$\dot{c}_1(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix},\ mais\ \dot{c}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.3. Si $I \ni t \mapsto c(t) \in R$ est une courbe paramètre, $J \subset R$ – une intervalle et $\varphi : J \to I$ une function lisse t.q. $\varphi^{-1} : J \to I$ est également lisse, on disque(?) :

$$J \ni t \mapsto c^2(t) = c \circ \varphi(t) \in R^n,$$

est une reparametrisation de c.

Remarque : $\dot{\tilde{c}}(t) = \dot{c} \circ \varphi(t) * \dot{\varphi}(t)$. Donc, $\tilde{c}$ - régulière $\Longleftrightarrow$ c est régulière.

$$\frac{d}{ds}\varphi^{-1}(s) = \frac{1}{\dot{\varphi} \circ \varphi^{-1}(s)} \neq 0$$

$\varphi : J \to I$ est un diffeomprphisme comme $\dot{\varphi} \neq 0$, on a

$$\begin{cases} \text{soit } \dot{\varphi}(t) > 0, & \text{pour tout } t \in J \\ \text{soit } \dot{\varphi}(t) < 0, & \text{pour tout } t \in J \end{cases},$$

$$\begin{cases} \varphi \text{ est } \nearrow \\ \varphi \text{ est } \searrow \end{cases}.$$

Si φ est $\nearrow$ on dit une la reparametrisation conserve le sens de parcours (l'orientation). Si φ est $\searrow$, la reparam inverse le sens de parours.

Définition 1.4.

1. Une courbe est une classe d'equivalence de courbes parametrie pour la selation :

$$c \sim \tilde{c} \Longleftrightarrow \tilde{c} \text{ est une reparemetrisation de } c$$

2. Une courbe on entee est une classe d'equivalence des courbes parametrie pour :

$$c \sim \tilde{c} \Longleftrightarrow \tilde{c} \text{ est une reparemetrisation puservantle sense le parours de } c$$

Définition 1.5. Si c est une courbe paramètre t.q. $|\dot{c}(t)| = 1$ pour tout $t \in I$. On dit que c'est paramitee pur sa louger d'arc.

Proposition 1.1. *Si $I \ni t \mapsto c(t) \in R^n$ est une courbe param reguliere il existe une reparametrisation de c par ca long d'arc :*

$$J \ni s \mapsto \tilde{c}(s) = c \circ \varphi(s) \in R^n$$

$$|\dot{\tilde{c}}(s)| = 1 \textit{ pour tout } s \in J.$$

Lemme 1.1. *Si* $\begin{matrix} J_1 \ni s \mapsto \tilde{c_1}(s), \textit{ et} \\ J_2 \ni s \mapsto \tilde{c_2}(s) \end{matrix}$ *sont 2 parametr de par long d'arc de la meme courbe $|\dot{c_1}(s)| = 1 = |\dot{c_2}(s)|$. alors $c_2(s) = c_1(s_0 \pm s)$, pour un $s_0 \in R$ et si c_1 et c_2 ont un pos le meme suis de parcours. Si $c : [a,\ b] \to R^n$ est une courbe parametre sa longen est :*

$$L[c] = \int_a^b |\dot{c}(t)|dt$$

$$l = \int_0^t |\dot{c}(u)|du = t$$