Typesetting test.
$\mathbb{RP}\mathbb{1}\mathbb{P}\mathfrak{S}\mathbb{P}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\mathbb{PP}$ $\mathrm{d}x$

$$\alpha(x) = \begin{cases} x \\ \frac{1}{1+e^{-kx}} \\ \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{cases}$$

$\langle x \rangle$

This is a long test Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Table des matières

Table des matières

Résumé

Plan :

1. Courbes (plan + espace)
   — étude local
   — étude global
2. surfaces dans $\mathbb{R}^3$

0.1 Courbes

Lesson 1

Définition 1. Courbe et Courbe Régulière

Une courbe paramètre dans $\mathbb{R}^3$ est une function $c : I \to \mathbb{R}^n$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et c est lisse (c est infiniment différentielle, $c \in C^\infty$).

$$I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^3,$$

t – paramètre.

2. Une courbe paramétrée est régulièrement si

$$\dot{c}(t) = \mathrm{dd}tc(t) \neq 0,$$

pour tout $t \in I$.

Si une courbe est régulière, $c(t) \neq const$. $\dot{c}(t)$ ¡diuge la tangente à la courbe en $c(t)$.

Chaque régulière courbe est tangente à la ligne.

Définition 2. La trace d'une courbe paramètre $I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$ est image :

$$\{c(t) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Une cure paramètre est plus une sa trace.

La courbe

$$R \ni t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$trace = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$. Et la courbe

$$R \ni t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

a la même trace !

$$\dot{c}_1(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ mais \ \dot{c}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 3. Si $I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}$ est une courbe paramètre, $J \subset \mathbb{R}$ – une intervalle et $\varphi : J \to I$ une function lisse t.q. $\varphi^{-1} : J \to I$ est également lisse, on disque(?) :

$$J \ni t \mapsto c^2(t) = c \circ \varphi(t) \in \mathbb{R}^n,$$

est une reparametrisation de c.

Remarque : $\dot{\tilde{c}}(t) = \dot{c} \circ \varphi(t) * \dot{\varphi}(t)$. Donc, $\tilde{c}$ - régulière $\Longleftrightarrow$ c est régulière.

$$\mathfrak{d} ds \varphi^{-1}(s) = \imath \dot{\varphi} \circ \varphi^{-1}(s) \neq 0$$

$\varphi : J \to I$ est un diffeomprphisme comme $\dot{\varphi} \neq 0$, on a

$$\begin{cases} \text{soit } \dot{\varphi}(t) > 0, & \text{pour tout } t \in J \\ \text{soit } \dot{\varphi}(t) < 0, & \text{pour tout } t \in J \end{cases},$$

$$\begin{cases} \varphi \text{ est } \nearrow \\ \varphi \text{ est } \searrow \end{cases}.$$

Si φ est $\nearrow$ on dit une la reparametrisation conserve le sens de parcours (l'orientation). Si φ est $\searrow$, la reparam inverse le sens de parours.

Définition 4. 1. Une courbe est une classe d'equivalence de courbes parametrie pour la selation :

$$c \sim \tilde{c} \Longleftrightarrow \tilde{c} \text{ est une reparemetrisation de } c$$

2. Une courbe on entee est une classe d'equivalence des courbes parametrie pour :

$$c \sim \tilde{c} \Longleftrightarrow \tilde{c} \text{ est une reparemetrisation puservantle sense le parours de } c$$

Définition 5. Si c est une courbe paramètre t.q. $|\dot{c}(t)| = 1$ pour tout $t \in I$. On dit que c'est paramitee pur sa louger d'arc.

Proposition 1. *Si $I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$ est une courbe param reguliere il existe une reparametrisation de c par ca long d'arc :*

$$J \ni s \mapsto \tilde{c}(s) = c \circ \varphi(s) \in \mathbb{R}^n$$

$$|\dot{\tilde{c}}(s)| = 1 \text{ pour tout } s \in J.$$

Lemme 1. *Si* $\begin{matrix} J_1 \ni s \mapsto \tilde{c_1}(s), \text{ et} \\ J_2 \ni s \mapsto \tilde{c_2}(s) \end{matrix}$ *sont 2 parametr de par long d'arc de la meme courbe $|\dot{c_1}(s)| = 1 = |\dot{c_2}(s)|$. alors $c_2(s) = c_1(s_0 \pm s)$, pour un $s_0 \in \mathbb{R}$ et si*

c_1 *et* c_2 *ont un pos le meme suis de parcours. Si* $c : [a,\ b] \to \mathbb{R}^n$ *est une courbe parametre sa longen est :*

$$L[c] = \int_a^b |\dot{c}(t)| \, \mathrm{d}t$$

$$l = \int_0^t |\dot{c}(u)| \, du = t$$

0.2 Lesson 2

Définition 6. Une courbe paramétrie $c : R \to R^d$ est appelie PERIODIQUE de periode p, si $c(t+p) = c(t),\ \forall t \in R$.

Définition 7. Une courbe fermee et appeler une COURBE FERMEE SIMPLE s'il existe une parametrisation reguliere, periodique de periode p et si : $c_{[0,p)}$ est injectif.

Définition 8. $c \in C^\infty(I,\ R^2)$ est applee COURBE PLANE.

Définition 9. Soit c une courbe parametree par longueur d'arc (donc une courbe de vitess 1) (donc $||\dot{c}(t)|| = 1$). Son hamps normale est definie par :

$$N(T) := \dot{c}^\perp(t),\ t \in I$$

Remarque. $N(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{c}(t)$. *$N$ depend de l'orientation de la courbe.*

Pour chaquet lestome $\dot{c},\ N(t)$ est un base otrthonormee direct de R^2.

Lemme 2. *Soite une courbe vitesse 1, N son alors $\ddot{c}(t)$ est parallier a $N(t)$.*

Démonstration. Idee $||\dot{c}(t)|| = 1,\ \forall t \iff \ddot{c}(t) \perp \dot{c}(t)$. □

Définition 10. Soit $c \in C^\infty(I,\ R^2)$ une courbe plane de vitesse 1, alors $\ddot{c}(t) = \varkappa(t)N(t)$, avec $\varkappa(t) :=< \ddot{c}(t),\ N(t) >$. $\varkappa(t)$ - scalar.

Alors $\varkappa \in C^\infty(I,\ R)$ et $\varkappa$ est appele la courbe dec ? ? ($\varkappa(t)$ la courbe du point $c(t)$)

Theorem 1. *Formulles de Fenet Soit* $c \in C^\infty(I,\ R^2)$ *une courbe de vitesse 1.*

Soit $\begin{array}{c} T(t) := \dot{c}(t), \\ N(t) := T^\perp(t) \end{array}$, $\{T(t),\ N(t)\}$ *- le systeme ortogonale vecteur. Est appeli le* REPPERE DE FRENET, *ou* BASE DE FRENET. FORMULES DE FRENET *:*

$$\begin{array}{c} \dot{T}(t) = \varkappa(t)N(t) \\ \dot{N}(t) = -\varkappa(t)T(T) \end{array}$$

Remarque.

$$\mathrm{dd}\,t \begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varkappa \\ -\varkappa & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix}$$

Lemme 3. *Soit* $c : C^\infty([a,\ b],\ R^2)$ *une courbe plane devitesse, alors il existe* $\nu \in C^\infty([a,\ b],\ R)$ *t.q.* $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t),\ \sin\nu(t))$

Définition 11. Soit $c \in C^\infty(R,\ R^2)$ une courbe plane, periodique comenode L et de vitesse 1. (en partiquliere reguliere). Soit $\nu \in C^\infty(R,\ R)$. Telque $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t),\ \sin\nu(t))$ (an dit : une angle de la tangente).

On define le nobn de rotation de la tangente de c : $n_c = \imath 2\pi(\nu(c) - \nu(o))$

Rappel $c \in C^\infty(I; \mathbb{R}^2)$ reguliere. Alors $\exists\nu \in C^\infty(I;)$ t.q. $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t), \sin\nu(t))$. On definie le NOMBRE DE ROTATION DE LA TANGENTE pour une courbe periodique de periode L :

$$n_c := \imath 2\pi(\nu(L) - \nu(0))$$

Lemme 4. *Soient* $c_1, c_2 \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ *deux courbes périodiques de periode* L, *paramétrie par longueur d'arc* S *:* $c_1 = c_2 \circ \varphi$ *avec* $\varphi > 0$ *alors :*

$$n_{c_1} = n_{c_2}$$

Si $\dot{\phi} < 0$ *alors*

$$n_{c_1} = -n_{c_2}$$

Remarque. *Le nombre de rotation de la tangente est donc invariant par rapport à une reparatrrisation que preserve l'orientation.*

Démonstration. On avaait vu que $\phi(t) = \pm t + t_0$ donc $\dot{\phi} > 0 => \phi(t) = t + t_0$. Soit ν_2 t.q. $\dot{c}_2(t) = (\cos\nu_2(t), \sin\nu_2(t))$ alors pour $\nu_1 := \nu_2 \circ \phi$ on a que $\dot{c}_1(t) = (\cos\nu_1(t), \sin\nu(_1 t))$. Soit $\bar{\nu}_1(t) := \nu_1(t + L)$ on a que $\dot{c}(t) = (\cos\bar{\nu}_1(t), \sin\bar{\nu}(_1 t))$ car $c_1(t) = c_1(t + L)$.

$$2\pi(n_{c_2} - n_{c_1}) = (\nu_2(L) - \nu_2(0)) - (\nu_1(L) - \nu_1(0)) \quad = (\nu_2(L - t_0) - \nu_2(-t_0)) - (\nu_1(L) - \nu_1(0)) = ... = 0 \tag{1}$$

□

Theorem 2. *Sait c une courbe plane périodique de période L et paramétrie par longueur d ;arc. Soit κ la courbure de c alors*

$$n_c = \imath 2\pi \int_0^L \kappa(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. *En particulier* $\int\limits_0^L \kappa(t)\,\mathrm{d}t \in 2\pi\mathbb{Z}$

Démonstration. Soit $\nu \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction angle pour la tangente, c.à.d.$\dot{c}(t) = (\cos\nu(t), \sin\nu(t))$. $\ddot{c}(t) = \kappa(t)\dot{c}^\perp(t)$ donc $\kappa(t) =< \ddot{c}(t), \dot{c}^\perp(t) >$ ou $\ddot{c}(t) = \dot{\nu}(t)(-\sin\nu(t), \cos\nu(t))$ et $\dot{c}^\perp(t) = (-\sin\nu(t), \cos\nu(t))$ donc $< \ddot{c}(t), \dot{c}^\perp(t) >= \dot{\nu}(t) = \kappa(t)$ ou

$$n_c = \imath 2\pi(\nu(L) - \nu(0)) = \imath 2\pi \int_0^L \dot{\nu}(t)\,\mathrm{d}t = \imath 2\pi \int_0^L \kappa(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

□

Theorem 3. *Hopf. Turning tangent theorem Une courbe plane fermée simple a un nombre de rotation (de la tangente) 1 ou* -1.

Nombre de rotation $n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^L \kappa(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}(\nu(L) - \nu(0))$. $c(t + l) = c(t)$ $c(t) = (\cos\nu(t), \sin\nu(t)),\ \dot{\nu} = \kappa$

Remarque. *On avait includans la definli de fermée simple qu'il n'ya pas de point singulier.*

Pour la preuve on auia besoin du lemme de recouriement.

> **Définition 12.** Sait $X \subset \mathbb{R}^d$ et $x_0 \in X$ On dit que X est ÉTOILE par rapport à x_0, (X is star shaped). Si pour chaque $x \in X$ le segnent de droite entre x_0 et x est coutenu dans X. C'est dire $\forall x\ \{x_0 1 - t + xt, t \in [0,1]\} \subset X$

Lemme 5. *De Recouvrement Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ éteilé par rapport à x_0 et soit*

$$e : X \to S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\} \text{ – une applicationcontinne}$$

Alors in existe une appliation <u>continue</u> $\nu : X \to \mathbb{R}$ t.q. $e(x) = (\cos\nu(x), \sin\nu(x))$. ν est unique sous la condition $\nu(x_0) = \nu_0$.

Démonstration. <u>Cas</u> ou $e : X \to S^1$ n'est pas surjective. Supposons qu'il existe $\phi_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $(\cos\phi_0, \sin\phi_0) \notin e(X)$. $e(X) = \{z; z = e(x), x \in X\}$. La fonction $\psi : (\phi_0, \phi_0 + 2\pi) \to S^1$
$\{(\cos\phi_0, \sin\phi_2\}$ est un homeomorphisme. On $\nu = \psi^{-1} \circ e$ donc ν est continne.

<u>Cas</u> $e(X) = S^1$. Dans le cas $d = 1$, $X = [0,1]$, $x_0 = 0$ on a demontré le théoréme ($e = \dot{c}$ denvee d'une courbe)

Cas $d > 1$. Soit $x \in X$. On defini $e_x : [0,1] \to S^1$, $e(x)(t) = e(tx + (1-t)x_0)$. On sait qu'il existe $\nu_x : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue t.q. $e_x(t) = (\cos \nu_x(t), \sin \nu_x(t))$ de $\nu_x(t) = \nu(tx+(1-t)x_0)$ donc $\nu(x) = \nu_x(1)$ donc $e(x) = e_x(1) = (\cos \nu_x(1), \sin \nu_x(1))$ is est e a de monte que $\nu_x(1)$ est continue en e.

Soit $\varepsilon > 0$ et $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = 1$ une partition t.q. $e_x|_{[t_j, t_{j+1}]} \subset U_h,\ H \in \{1,2,3,4\}$. Soit y t.q. $\|e_x(t) - e_y(t)\| < \varepsilon,\ \forall t \in [0,1]$. Si ε est sufficient petit. $e_y|_{[t_j, t_{j+1})} \subset U_h$. Par example dans le cas $h = 4$ on aura

$$\nu_x(t) = \arctan\left(\mathfrak{e}^2_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{t}) e^1_x(t)\right) \nu_y(t) \qquad = \arctan\left(\mathfrak{e}^2_{\mathfrak{y}}(\mathfrak{t}) e^1_y(t)\right) \tag{2}$$

$e = (e^1, e^2)$ $\square$

Démonstration. du théoréme de Hopf Soit c une une paramétrisation de vitesse 1 de periode L. Sait $x_0 := \max\{c^1(t); t \in [0,l]\}$. Soit $p = \{(z_1, z_2); z_1 = x_0\} \cap C(\mathbb{R})$ Soit la parametrisation t.q. $c(0) = p$. $G = p + \mathbb{R}(1,0)$. $C(\mathbb{R}) \cap G$ est à gauche de p. Soit $X = \{(t_1,t_2) : 0 \le t_1 \le t_2 \le L\}$ X est éteilé par rapport à $(0,0)$. On considere $c : X \to S^1$ Formula after an image.

$$c(t_1,t_2) = \begin{cases} \frac{c(t_1)-c(t_1)}{||c(t_1)-c(t_1)||} & t_2 > t_1 \\ \dot{c}(t) & t_2 = t_1 = t \\ -\dot{c}(0) & (t_1,t_2) = (0,L) \end{cases}$$

Alors $e \in C^0(x, S^1)$, en effet $c \in C^\infty$. $c(t_2) = c(t_1) + \dot{c}(t_1)(t_2 - t_1) + o(|t_2 - t_1|)$

$$\frac{c(t_1) - c(t_1)}{||c(t_1) - c(t_1)||} = \frac{(t_2 - t_1)(\dot{c}(t_1) - o(1))}{||(t_2 - t_1)(\dot{c}(t_1) - o(1))||} \to \frac{\dot{c}(t_1)}{||\dot{c}(t_1)||} = \dot{c}(t_1)$$
$$t_2 \to t_1$$
$$\frac{c(L-\varepsilon) - c(0)}{||c(L-\varepsilon) - c(0)||} = \frac{c(-\varepsilon) - c(0)}{c(-\varepsilon) - c(0)} = \frac{-\varepsilon(\dot{c}(0) + o(1))}{|| - \varepsilon(\dot{c}(0) + o(1))||} \to -\dot{c}(0)$$
$$\varepsilon \to (down) + 0+$$

De plus X est estèoilèe par rapport à $(0,0)$. Donc il exist $\nu \in C^0(X)$ t.q. $e(t_1,t_2) = (\cos \nu(t_1,t_2), \sin \nu(t_1,t_2))$. Pour de nombre de rotation de (la tangente de) on a :

$$2\pi n_c = \nu(L,L) - \nu(0,0) = \nu(L,L) - \nu(0,L) + \nu(0,L) - \nu(0,0)$$

(droite $\perp$ à $\dot{c}(0)$) $x_0 = \max\{c^{(1)},\ t \in [0,L]\}$ $(1,0) \notin im([0,1] \ni t \mapsto e(0,t))$ car en $c(0), t \mapsto x(t)$ est maximal, donc $im([0,1] \ni t \mapsto \nu(0,t)) \subset (0, 2\pi) + 2\pi k$ (car facile du lemme du recouvrement).

$e(0,L) = -\dot{c}(0) = (0,-1)$ donc $\nu(0,L) = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ de $\nu(0,0) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ donc $\nu(0,L) - \nu(0,0) = \pi$ de même : $(-1,0) \notin im(t \mapsto e(t,L)) \Rightarrow \nu(L,L) - \nu(0,L) = \pi$ donc $2\pi n_C = 2\pi$. $\square$

Définition 13. Une courbe plane est appelée CONVEXE si tout ses points sont sur un des cotés de sa tangeente. $\Leftrightarrow$ pour chaque t_C $< c(t) - c(t_0) > \geq (\leq) 0,\ \forall t$ avec $n(t_0) \perp T_c(t_0)$.

Theorem 4. *Soit une courbe plane de vitesse 1. Alors :*

1. *Si c est convexe on a pour sa courbe κ on a :*

$$\kappa(t) \geq 0\ \forall t(\text{ ou } \kappa(t) \leq 0 \forall t)$$

2. *Si c est fermé simple et si $\kappa(t) \geq 0,\ \forall t$ (ou $\kappa(t) \leq 0, \forall t$) alors c est convexe.*

Démonstration. 1. Soit c convexe et supposons que $\langle c(t) - c(t_0), n(t_0)\rangle \geq 0,\ \forall t$. On developpe $c(t) = c(t_0) + \dot{c}(t_0)(t - t_0) + \ddot{c}(t)\frac{(t-t_0)^2}{2} + o(|t - t_0|^2)$. $0 \leq \left\langle c(t) - c(t_2), \underbrace{\dot{c}^{\perp}(t_0)}_{n(t_0)} \right\rangle = \underbrace{\langle \ddot{c}(t_0, \dot{c}^{\perp}(t_0))\rangle}_{\kappa(t_0)} \underbrace{\frac{(t-t_0)^2}{2}}_{\geq 0} + o(|t - t_0|^2)$. $\Rightarrow$ $\kappa(t_0) \geq 0$ donc $\kappa(t) \geq 0 \forall t \in I$

2. Supposons que $\kappa(t) \geq 0 \forall t$ et que c est fermée simple de période L. Si c n'était pas convexe alors il existerait un t_0 t.q. : $\phi(t) := \langle c(t) - c(t_0), \dot{c}^{\perp}(t_0)\rangle$, a des valeurs positives et négatives. ϕ atteint un maximum eu point t_2 et un minimum au point t_1 donc $\phi(t_2) \geq 0$ et $\phi(t_1)$ et $\phi(t_1) \leq 0 = \phi(t_0) \leq \phi(t_2)$ pour un t_0. $\dot{\phi}(t_1) = 0 \langle \dot{c}(t_1), \dot{c}^{\perp}(t_0)\rangle$ donc $\dot{c}(t_1) = \pm\dot{c}(t_0)$, $\dot{c}(t_2) = \pm\dot{c}(t_0)$. Au moins deux des vecteurs $\dot{c}(t_0, \dot{c}(t_1), \dot{c}(t_2)$ sont donc les mêmes. Soit $s_1, s_2 \in \{t_0, t_1, t_2\}$ t.q. $s_1 < s_2$ $\dot{c}(s_1) = \dot{c}(s_2)$. On a $\nu(s_2) - \nu(s_1) = 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. $0 \leq \kappa(t) \leq \dot{\nu}(t)$ donc ν est croissant donc $k \in \mathbb{N}$ de même. $\nu(s_1 + L) - \nu(s_2) = 2\pi l$ avec $l \in \mathbb{N}$ donc $2\pi n_c = \nu(s_1 + L) - \nu(s_1) = 2\pi(l + k) = 2\pi$ (Hopf) $\Rightarrow l = 0 ou k = 0$. Supposons que $k = 0$. Donc $\nu(t) = cte \forall t \in [s_1, s_2]$ donc $c(s) = c(s_1) + \dot{c}(s_1)(s - s_1) = c(s_1) + \dot{c}(t_0)(s - s_1)$ pour $s \in [s_1, s_2]$. donc $\phi(s) = \langle c(s) - c(t_0), \dot{c}^{\perp}(t_0)\rangle = \langle c(s_1) - c(t_0), \dot{c}^{\perp}(t_0)\rangle = cte$ ce qui n'est pas possible car au moins 2 des points t_0, t_1, t_2 sont dans $[s_1, s_2]$.

□

Définition 14. Une courbe plane de vitesse 1. On dit que c admet un sommmet en t_0 si $\dot{\kappa}(t_0) = 0$. (sommet=vertex en anglais)

Exemple 0.2.1. On peut demontrer que l'ellipse à quatres sommets.

Remarque. *De manière genérale on sait qu'one fouction périodique admet deux points critiques (un maximum et un minimum).*

Theorem 5. *des 4 sommet (four vertex theorem) Soit $c \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ periodique de période L de vitesse 1 et convexe c admet au moins quatre sommets.*

Pour la preuve on a besoin de 2 lemmes

Lemme 6. *Si l'intersection d'une courbe convexe plane fermée simple avec une droite G contient plus que deux points différents alors c contrent un segment de G.*

Remarque.

Démonstration. Supposons que c est orienté positive convexe $= 0$ $\kappa(t) \geq 0 \Rightarrow \dot{\nu}(t) \geq 0$ pour ν une angle $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t), \sin\nu(t))$ par Hopf : $\nu(L) - \nu(0) = 2\pi$ donc $\nu : [0, L] \to [0, 2\pi] + \nu_0$ est croissante et surjective. □

Exercice 2

1. Démonrer qu'un segment de droite est la courbe la plus courte (de classe C^1) etre deux points. S : $A, B \in \mathbb{R}^d$, $c : [0,1] \to \mathbb{R}^d$, $c(0) = A, c(1) = B$. $L(c) = \int_0^1 ||\dot{c}(t)||\mathrm{d}t$.
   $c(1) - c(0) = B - A = \int_0^1 \dot{c}(t)\mathrm{d}t$, $||B - A|| = ||\int_0^1 \dot{c}(t)\mathrm{d}t|| \leq \int_0^1 ||\dot{c}(t)||\mathrm{d}t$.
2. $f(t) = \cos h(t)$ $\gamma(t) = (t, \cos h(t))$. $s(t) = \int_0^t ||\dot{\gamma}(\tau)||\mathrm{d}\tau = \sin ht$, $t \in [0, 2]$. On doit trouves ϕ t.q pour $c := \gamma \circ \phi$ on a $||\dot{c}|| = 1$. $t(s) = arcsinhs$, $s \in [0, \sin h2]$, $c : (0, \sin h2) \to \mathbb{R}^2$. $c(s) = \gamma(arcsinhs)$, $s \in (o, sinh2)$. $c(s) = (arcsinhs, \sqrt[2]{1 + s^2})$, $s \in (0, sinh2)$.
3. $\forall t \neq 1 :$ γ est régulier.

Exercice 3

1. Deemontrer que si $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une paramétrisation par longueur d'arc d'une courbe fermée, alors c est périodique.
   Exemple : $t \mapsto (\cos(e^t), \sin(e^t))R = f(t)$ $(t \in \mathbb{R})$. f n'est pas périodique, $f(\mathbb{R}) = S^1$.
   Dénouter : si c est une parametrisation t.q. $||\dot{c}(t)|| = 1$ alors c est périodique. Idée : $d(t + T) = d(t)$ T est période. On definit ϕ en ce fouction de passage. $s(t) = \int_0^t ||\dot{d}(\tau)||\,\mathrm{d}\tau = \int_0^T ||\dot{d}(\tau)||\,\mathrm{d}\tau = L + s(t)$. $\phi(u + L) = \phi(s(t) + L) - \phi(s(t + T)) = t + T = \phi(u) + T$, $u = s(t)$, $s \circ \phi(u) = u$, ϕ—function inverse function reciproque. $\bar{c} := d \circ \phi$ est une parametr. par longu d'arc. $\bar{c}(u + L) = \phi(s(t) + L) - \phi(s(t + T)) = t + T = \phi(u) + T$. ($\phi$ la fonction reciproque de s).

Homework all the rest.