Typesetting test

$\mathbb{R}\mathbb{P}\mathbb{1}\mathbb{P}\mathfrak{S}\mathbb{P}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\mathbb{P}\mathbb{P}$ $\mathrm{d}x$

$$\alpha(x) = \begin{cases} x \\ \frac{1}{1+e^{-kx}} \\ \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{cases}$$

$\langle x \rangle$

Table des matières

Résumé

Plan :

1. Courbes (plan + espace)
   — étude local
   — étude global
2. surfaces dans $\mathbb{R}^3$

0.1 Courbes

Lesson 1

Définition 1 (Courbe et Courbe Régulière)**.**

1. Une Courbe Paramètre dans $\mathbb{R}^3$ est une function $c : I \to \mathbb{R}^n$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et c est lisse (c est infiniment différentielle, $c \in C^\infty$).

$$I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^3,$$

   t – paramètre.

2. Une courbe paramètre est régulièrement si

$$\dot{c}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t) \neq 0,$$

   pour tout $t \in I$.

Si une courbe est régulière, $c(t) \neq \text{const}$. $\dot{c}(t)$ désigne la tangente à la courbe en $c(t)$. Chaque régulière courbe est tangente à la ligne.

Définition 2. La trace d'une courbe paramètre $I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$ est image :

$$\{c(t) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Une cure paramètre est plus que sa trace.

La courbe $\mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\text{trace} = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$. Et la courbe $R \ni t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ a la même trace!

$$\dot{c}_1(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix},\ mais\ \dot{c}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 3. Si $I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}$ est une courbe paramètre, $J \subset \mathbb{R}$ – une intervalle et $\varphi : J \to I$ une function lisse t.q. $\varphi^{-1} : J \to I$ est également lisse, on disque(?) :

$$J \ni t \mapsto c^2(t) = c \circ \varphi(t) \in \mathbb{R}^n,$$

est une reparamétrisation de c.

Remarque. $\dot{\tilde{c}}(t) = \dot{c} \circ \varphi(t) * \dot{\varphi}(t)$. *Donc,* $\tilde{c}$ *- régulière* $\iff$ c *est régulière.*

$$\frac{d}{ds}\varphi^{-1}(s) = \frac{1}{\dot{\varphi} \circ \varphi^{-1}(s)} \neq 0$$

$\varphi : J \to I$ *est un difféomorphisme comme* $\dot{\varphi} \neq 0$*, on a*

$$\begin{cases} \textit{soit } \dot{\varphi}(t) > 0, & \textit{pour tout } t \in J \\ \textit{soit } \dot{\varphi}(t) < 0, & \textit{pour tout } t \in J \end{cases},$$

$$\begin{cases} \varphi \textit{ est } \nearrow \\ \varphi \textit{ est } \searrow \end{cases}.$$

Si φ est $\nearrow$ on dit une la reparamétrisation conserve le sens de parcours (l'orientation). Si φ est $\searrow$, la reparam inverse le sens de parours.

Définition 4.

1. Une `courbe` est une Classe d'Equivalence de Courbes Paramètre pour la relation :
$$c \sim \tilde{c} \Longleftrightarrow \tilde{c} \text{ est une reparamétrisation de } c$$
2. Une `courbe orientée` est une classe d'equivalence des courbes paramètre pour :
$$c \sim \tilde{c} \Longleftrightarrow \tilde{c} \text{ est une reparamétrisation préservante la sens de parcours de } c$$

Définition 5. Si c est une courbe paramètre t.q. $|\dot{c}(t)| = 1$ pour tout $t \in I$. On dit que c'est paramètre pur sa longueur d'arc.

Proposition 1. *Si $I \ni t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^n$ est une courbe paramètre régulière il existe une reparamétrisation de c sa long d'arc :*

$$J \ni s \mapsto \tilde{c}(s) = c \circ \varphi(s) \in \mathbb{R}^n$$

$$|\dot{\tilde{c}}(s)| = 1 \textit{ pour tout } s \in J.$$

Lemme 1. *Si* $\begin{array}{ll} J_1 \ni s & \mapsto \tilde{c_1}(s) \\ J_2 \ni s & \mapsto \tilde{c_2}(s) \end{array}$ *sont 2 paramètre de par long d'arc de la meme courbe $|\dot{c_1}(s)| = 1 = |\dot{c_2}(s)|$. alors $c_2(s) = c_1(s_0 \pm s)$, pour un $s_0 \in \mathbb{R}$ et si c_1 et c_2 ont un pos le meme suis de parcours. Si $c : [a,\ b] \to \mathbb{R}^n$ est une courbe paramètre sa longueur est :*

$$L[c] = \int_a^b |\dot{c}(t)| \,\mathrm{d}\, t$$

$$l = \int_0^t |\dot{c}(u)| \,\mathrm{d}u = t$$

Définition 6. Une courbe paramétrique $c : R \to R^d$ est appelée PÉRIODIQUE de période p, si $c(t+p) = c(t),\ \forall t \in R$.

Définition 7. Une courbe fermée et appeler une COURBE FERMÉE SIMPLE s'il existe une parametrisation régulière, périodique de période p et si : $c_{[0,p)}$ est injectif.

Définition 8. $c \in C^\infty(I,\ R^2)$ est appelée COURBE PLANE.

Définition 9. Soit c une courbe paramètre par longueur d'arc (donc une courbe de vitesse 1) (donc $||\dot{c}(t)|| = 1$). Son champs normale est définie par :

$$N(T) := \dot{c}^\perp(t),\ t \in I$$

Remarque. $N(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{c}(t)$. N *depend de l'orientation de la courbe.*

Pour chaque t le système $\dot{c},\ N(t)$ est un base orthonormée direct de R^2.

Lemme 2. *Soit une courbe vitesse 1,* N *son champs normals alors* $\ddot{c}(t)$ *est parallèle a* $N(t)$.

Démonstration. Idee $||\dot{c}(t)|| = 1,\ \forall t \iff \ddot{c}(t) \perp \dot{c}(t)$. □

Définition 10. Soit $c \in C^\infty(I,\ R^2)$ une courbe plane de vitesse 1, alors $\ddot{c}(t) = \varkappa(t)N(t)$, avec $\varkappa(t) :=< \ddot{c}(t),\ N(t) >$. $\varkappa(t)$ - scalar.

Alors $\varkappa \in C^\infty(I,\ R)$ et $\varkappa$ est appelé la courbure de c ($\varkappa(t)$ la courbure du point $c(t)$)

Theorem 1. *Formulas de Frenet Soit* $c \in C^\infty(I,\ R^2)$ *une courbe de vitesse 1.*

Soit $\begin{array}{c} T(t) := \dot{c}(t), \\ N(t) := T^\perp(t) \end{array}$, $\{T(t),\ N(t)\}$ *- le systeme ortogonale vecteur. Est appellé le* REPÉRE DE FRENET, *ou* BASE DE FRENET.

FORMULES DE FRENET *:*

$$\begin{array}{rcl} \dot{T}(t) & = & \varkappa(t)N(t) \\ \dot{N}(t) & = & -\varkappa(t)T(T) \end{array}$$

Remarque.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varkappa \\ -\varkappa & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix}$$

Lemme 3. *Soit* $c : C^\infty([a,\ b],\ R^2)$ *une courbe plane de vitesse, alors il existe* $\nu \in C^\infty([a,\ b],\ R)$ *t.q.* $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t),\ \sin\nu(t))$

> **Définition 11.** Soit $c \in C^\infty(R,\ R^2)$ une courbe plane, périodique de période L et de vitesse 1. En particulier régulière. Soit $\nu \in C^\infty(R,\ R)$. Talque $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t),\ \sin\nu(t))$ (an dit : une angle de la tangente).
>
> On define Le Nobre de rotation de la tangente de c : $n_c := \frac{1}{2\pi}(\nu(c) - \nu(o))$

Rappel. $c \in C^\infty(I;\mathbb{R}^2)$ *reguliere. Alors* $\exists\nu \in C^\infty(I;)$ *t.q.* $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t), \sin\nu(t))$. *On définie le* Nombre de Rotation de la Tangente *pour une courbe periodique de période* L *:*

$$n_c := \frac{1}{2\pi}(\nu(L) - \nu(0))$$

Lemme 4. *Soient* $c_1, c_2 \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ *deux courbes périodiques de période* L*, paramètre par longueur d'arc* S *:* $c_1 = c_2 \circ \varphi$ *avec* $\varphi > 0$ *alors :*

$$n_{c_1} = n_{c_2}$$

Si $\dot{\varphi} < 0$ *alors*

$$n_{c_1} = -n_{c_2}$$

Remarque. *Le nombre de rotation de la tangente est donc invariant par rapport à une reparamétrisation que preserve l'orientation.*

Démonstration. On avait vu que $\varphi(t) = \pm t + t_0$ donc $\dot{\varphi} > 0 => \varphi(t) = t + t_0$. Soit ν_2 t.q. $\dot{c}_2(t) = (\cos\nu_2(t), \sin\nu_2(t))$ alors pour $\nu_1 := \nu_2 \circ \varphi$ on a que $\dot{c}_1(t) = (\cos\nu_1(t), \sin\nu(_1 t))$. Soit $\bar{\nu}_1(t) := \nu_1(t + L)$ on a que $\dot{c}(t) = (\cos\bar{\nu}_1(t), \sin\bar{\nu}(_1 t))$ car $c_1(t) = c_1(t + L)$.

$$2\pi(n_{c_2} - n_{c_1}) = (\nu_2(L) - \nu_2(0)) - (\nu_1(L) - \nu_1(0)) \quad = (\nu_2(L - t_0) - \nu_2(-t_0)) - (\nu_1(L) - \nu_1(0)) \tag{1}$$

□

Theorem 2. *Sait* c *une courbe plane périodique de période* L *et paramètre par longueur d'arc. Soit* κ *la courbure de* c *alors*

$$n_c = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. *En particulier* $\int\limits_0^L \kappa(t)\,\mathrm{d}t \in 2\pi\mathbb{Z}$

Démonstration. Soit $\nu \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction angle pour la tangente, c.à.d.$\dot{c}(t) = (\cos\nu(t), \sin\nu(t))$. $\ddot{c}(t) = \kappa(t)\dot{c}^\perp(t)$ donc $\kappa(t) =< \ddot{c}(t), \dot{c}^\perp(t) >$ ou $\ddot{c}(t) = \dot{\nu}(t)(-\sin\nu(t), \cos\nu(t))$ et $\dot{c}^\perp(t) = (-\sin\nu(t), \cos\nu(t))$ donc $< \ddot{c}(t), \dot{c}^\perp(t) >= \dot{\nu}(t) = \kappa(t)$ ou

$$n_c = \frac{1}{2\pi}(\nu(L) - \nu(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \dot{\nu}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

□

Theorem 3. *Hopf. Turning tangent theorem Une courbe plane fermée simple a un nombre de rotation (de la tangente) 1 ou* -1.

Nombre de rotation $n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^L \kappa(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}(\nu(L)-\nu(0))$. $c(t+l) = c(t)$ $c(t) = (\cos\nu(t), \sin\nu(t))$, $\dot{\nu} = \kappa$

Remarque. *On avait inclu dans la défini de fermée simple qu'il n'ya pas de point singulier.*

Pour la preuve on aura besoin du lemme de recouvrement.

> **Définition 12.** Sait $X \subset \mathbb{R}^d$ et $x_0 \in X$ On dit que X est ÉTOILE par rapport à x_0, (X is star shaped). Si pour chaque $x \in X$ le segment de droite entre x_0 et x est contenu dans X. C'est dire $\forall x$ $\{x_0 1 - t + xt, t \in [0,1]\} \subset X$

Lemme 5. *De Recouvrement Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ étoilé par rapport à x_0 et soit*

$$e : X \to S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 = 1\} \text{—une application continue}$$

Alors in existe une application continue $\nu : X \to \mathbb{R}$ t.q. $e(x) = (\cos\nu(x), \sin\nu(x))$. ν est unique sous la condition $\nu(x_0) = \nu_0$.

Démonstration. Cas ou $e : X \to S^1$ n'est pas surjective. Supposons qu'il existe $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0) \notin e(X)$. $e(X) = \{z; z = e(x), x \in X\}$. La fonction $\psi : (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi) \to S^1$ $\{(\cos\varphi_0, \sin\varphi_2\}$ est un homéomorphisme. On $\nu = \psi^{-1} \circ e$ donc ν est continue.

Cas $e(X) = S^1$. Dans le cas $d = 1$, $X = [0,1]$, $x_0 = 0$ on a démontré le théorème ($e = \dot{c}$ dériver d'une courbe)

Cas $d > 1$. Soit $x \in X$. On defini $e_x : [0,1] \to S^1$, $e(x)(t) = e(tx + (1-t)x_0)$. On sait qu'il existe $\nu_x : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue t.q. $e_x(t) = (\cos\nu_x(t), \sin\nu_x(t))$ de $\nu_x(t) = \nu(tx + (1-t)x_0)$ donc $\nu(x) = \nu_x(1)$ donc $e(x) = e_x(1) = (\cos\nu_x(1), \sin\nu_x(1))$ is est e a de monte que $\nu_x(1)$ est continue en e.

Soit $\varepsilon > 0$ et $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$ une partition t.q. $e_x|_{[t_j, t_{j+1}]} \subset U_h$, $H \in \{1,2,3,4\}$. Soit y t.q. $\|e_x(t) - e_y(t)\| < \varepsilon$, $\forall t \in [0,1]$. Si ε est suffisent petit. $e_y|_{[t_j, t_{j+1})} \subset U_h$. Par example dans le cas $h = 4$ on aura

$$\nu_x(t) = \arctan\left(\frac{e_x^2(t)}{e_x^1(t)}\right) \nu_y(t) \qquad = \arctan\left(\frac{e_y^2(t)}{e_y^1(t)}\right) \tag{2}$$

$e = (e^1, e^2)$ □

Démonstration. du théorème de Hopf Soit c une une paramétrisation de vitesse 1 de période L. Sait $x_0 := \max\{c^1(t); t \in [0,l]\}$. Soit $p = \{(z_1, z_2); z_1 = x_0\} \cap C(\mathbb{R})$ Soit la paramétrisation t.q. $c(0) = p$. $G = p + \mathbb{R}(1,0)$. $C(\mathbb{R}) \cap G$ est à gauche de p. Soit $X = \{(t_1, t_2) : 0 \le t_1 \le t_2 \le L\}$ X est étoilé par rapport à $(0,0)$. On considère $c : X \to S^1$ Formula after an image.

$$c(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{c(t_1) - c(t_1)}{\|c(t_1) - c(t_1)\|} & t_2 > t_1 \\ \dot{c}(t) & t_2 = t_1 = t \\ -\dot{c}(0) & (t_1, t_2) = (0, L) \end{cases}$$

Alors $e \in C^0(x, S^1)$, en effet $c \in C^\infty$. $c(t_2) = c(t_1) + \dot{c}(t_1)(t_2 - t_1) + o(|t_2 - t_1|)$

$$\frac{c(t_1)-c(t_1)}{||c(t_1)-c(t_1)||}=\frac{(t_2-t_1)(\dot{c}(t_1)-o(1))}{||(t_2-t_1)(\dot{c}(t_1)-o(1))||}\to\frac{\dot{c}(t_1)}{||\dot{c}(t_1)||}=\dot{c}(t_1)$$
$$t_2\to t_1$$
$$\frac{c(L-\varepsilon)-c(0)}{||c(L-\varepsilon)-c(0)||}=\frac{c(-\varepsilon)-c(0)}{c(-\varepsilon)-c(0)}=\frac{-\varepsilon(\dot{c}(0)+o(1))}{||-\varepsilon(\dot{c}(0)+o(1))||}\to-\dot{c}(0)$$
$$\varepsilon\to(down)+0+$$

De plus X est étoilée par rapport à $(0,0)$. Donc il exist $\nu\in C^0(X)$ t.q. $e(t_1,t_2)=(\cos\nu(t_1,t_2),\sin\nu(t_1,t_2))$. Pour de nombre de rotation de (la tangente de) on a :

$$2\pi n_c=\nu(L,L)-\nu(0,0)=\nu(L,L)-\nu(0,L)+\nu(0,L)-\nu(0,0)$$

(droite $\perp$ à $\dot{c}(0)$) $x_0=\max\{c^{(1)},\ t\in[0,L]\}$ $(1,0)\notin im([0,1]\ni t\mapsto e(0,t))$ car en $c(0),t\mapsto x(t)$ est maximal, donc $im([0,1]\ni t\mapsto\nu(0,t))\subset(0,2\pi)+2\pi k$ (car facile du lemme du recouvrement).

$e(0,L)=-\dot{c}(0)=(0,-1)$ donc $\nu(0,L)=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$ de $\nu(0,0)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ donc $\nu(0,L)-\nu(0,0)=\pi$ de même : $(-1,0)\notin im(t\mapsto e(t,L))\Rightarrow\nu(L,L)-\nu(0,L)=\pi$ donc $2\pi n_C=2\pi$. □

Définition 13. Une courbe plane est appelée CONVEXE si tout ses points sont sur un des cotés de sa tangente. $\Leftrightarrow$ pour chaque $t_C<c(t)-c(t_0)>\geq(\leq)0,\ \forall t$ avec $n(t_0)\perp T_c(t_0)$.

Theorem 4. *Soit une courbe plane de vitesse 1. Alors :*

1. *Si c est convexe on a pour sa courbe κ on a :*

$$\kappa(t)\geq0\ \forall t(\ ou\ \kappa(t)\leq0\forall t)$$

2. *Si c est fermé simple et si $\kappa(t)\geq0,\ \forall t$ (ou $\kappa(t)\leq0,\forall t$) alors c est convexe.*

Démonstration. 1. Soit c convexe et supposons que $\langle c(t)-c(t_0),n(t_0)\rangle\geq0,\ \forall t$. On developpe $c(t)=c(t_0)+\dot{c}(t_0)(t-t_0)+\ddot{c}(t)\frac{(t-t_0)^2}{2}+o(|t-t_0|^2)$. $0\leq\left\langle c(t)-c(t_2),\underbrace{\dot{c}^{\perp}(t_0)}_{n(t_0)}\right\rangle=$

$\underbrace{\langle\ddot{c}(t_0,\dot{c}^{\perp}(t_0))\rangle}_{\kappa(t_0)}\underbrace{\frac{(t-t_0)^2}{2}}_{\geq0}+o(|t-t_0|^2)$. $\Rightarrow\kappa(t_0)\geq0$ donc $\kappa(t)\geq0\forall t\in I$

2. Supposons que $\kappa(t)\geq0\forall t$ et que c est fermée simple de période L. Si c n'était pas convexe alors il existerait un t_0 t.q. : $\varphi(t):=\langle c(t)-c(t_0),\dot{c}^{\perp}(t_0)\rangle$, a des valeurs positives et négatives. φ atteint un maximum eu point t_2 et un minimum au point t_1 donc $\varphi(t_2)\geq0$ et $\varphi(t_1)$ et $\varphi(t_1)\leq0=\varphi(t_0)\leq\varphi(t_2)$ pour un t_0. $\dot{\varphi}(t_1)=0\,\langle\dot{c}(t_1),\dot{c}^{\perp}(t_0)\rangle$ donc $\dot{c}(t_1)=\pm\dot{c}(t_0)$, $\dot{c}(t_2)=\pm\dot{c}(t_0)$. Au moins deux des vecteurs $\dot{c}(t_0,\dot{c}(t_1),\dot{c}(t_2)$ sont donc les mêmes. Soit $s_1,s_2\in\{t_0,t_1,t_2\}$ t.q. $s_1<s_2$ $\dot{c}(s_1)=\dot{c}(s_2)$. On a $\nu(s_2)-\nu(s_1)=2\pi k$ avec $k\in\mathbb{Z}$. $0\leq\kappa(t)\leq\dot{\nu}(t)$ donc ν est croissant donc $k\in\mathbb{N}$ de même. $\nu(s_1+L)-\nu(s_2)=2\pi l$ avec $l\in\mathbb{N}$ donc $2\pi n_c=\nu(s_1+L)-\nu(s_1)=2\pi(l+k)=2\pi$ (Hopf) $\Rightarrow l=0ouk=0$. Supposons que $k=0$.

Donc $\nu(t) = cte \forall t \in [s_1, s_2]$ donc $c(s) = c(s_1) + \dot{c}(s_1)(s - s_1) = c(s_1) + \dot{c}(t_0)(s - s_1)$ pour $s \in [s_1, s_2]$. donc $\varphi(s) = \langle c(s) - c(t_0), \dot{c}^{\perp}(t_0) \rangle = \langle c(s_1) - c(t_0), \dot{c}^{\perp}(t_0) \rangle = cte$ ce qui n'est pas possible car au moins 2 des points t_0, t_1, t_2 sont dans $[s_1, s_2]$. □

Définition 14. Une courbe plane de vitesse 1. On dit que c admet un sommet en t_0 si $\dot{\kappa}(t_0) = 0$. (sommet=vertex en anglais)

Exemple 0.1.1. On peut démontrer que l'ellipse à quatres sommets.

Remarque. *De manière générale on sait qu'one fonction périodique admet deux points critiques (un maximum et un minimum).*

Theorem 5. *des 4 sommet (four vertex theorem) Soit $c \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ périodique de période L de vitesse 1 et convexe c admet au moins quatre sommets.*

Pour la preuve on a besoin de 2 lemmes

Lemme 6. *Si l'intersection d'une courbe convexe plane fermée simple avec une droite G contient plus que deux points différents alors c contrent un segment de G.*

Remarque.

Démonstration. Supposons que c est orienté positive convexe $= 0$ $\kappa(t) \geq 0 \Rightarrow \dot{\nu}(t) \geq 0$ pour ν une angle $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t), \sin\nu(t))$ par Hopf : $\nu(L) - \nu(0) = 2\pi$ donc $\nu : [0, L] \to [0, 2\pi] + \nu_0$ est croissante et surjective. □

Exercice 2

1. Démontrer qu'un segment de droite est la courbe la plus courte (de classe C^1) être deux points. S : $A, B \in \mathbb{R}^d$, $c : [0,1] \to \mathbb{R}^d$, $c(0) = A, c(1) = B$. $L(c) = \int_0^1 ||\dot{c}(t)||\mathrm{d}t$. $c(1) - c(0) = B - A = \int_0^1 \dot{c}(t)\mathrm{d}t$, $||B - A|| = || \int_0^1 \dot{c}(t)\mathrm{d}t|| \leq \int_0^1 ||\dot{c}(t)||\mathrm{d}t$.
2. $f(t) = \cos h(t)$ $\gamma(t) = (t, \cos h(t))$. $s(t) = \int_0^t ||\dot{\gamma}(\tau)||\mathrm{d}\tau = \sin ht,\ t \in [0,2]$. On doit trouves φ t.q pour $c := \gamma \circ \varphi$ on a $||\dot{c}|| = 1$. $t(s) = arcsinhs,\ s \in [0, \sin h2]$, $c : (0, \sin h2) \to \mathbb{R}^2$. $c(s) = \gamma(arcsinhs)$, $s \in (o, sinh2)$. $c(s) = (arcsinhs, \sqrt[2]{1+s^2})$, $s \in (0, sinh2)$.
3. $\forall t \neq 1 :\ \gamma$ est régulier.

Exercice 3

1. Démontrer que si $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une paramétrisation par longueur d'arc d'une courbe fermée, alors c est périodique.

   Exemple : $t \mapsto (\cos(e^t), \sin(e^t))R = f(t)$ $(t \in \mathbb{R})$. f n'est pas périodique, $f(\mathbb{R}) = S^1$.

   Dénoter : si c est une parametrisation t.q. $||\dot{c}(t)|| = 1$ alors c est périodique. Idée : $d(t + T) = d(t)$ T est période. On definit φ en ce fonction de passage. $s(t) = \int_0^t ||\dot{d}(\tau)||\,\mathrm{d}\tau = \int_0^T ||\dot{d}(\tau)||\,\mathrm{d}\tau = L + s(t)$. $\varphi(u + L) = \varphi(s(t) + L) - \varphi(s(t + T)) = t + T = \varphi(u) + T$, $u = s(t)$, $s \circ \varphi(u) = u$, φ—function inverse function reciproque. $\bar{c} := d \circ \varphi$ est une parameter par long d'arc. $\bar{c}(u + L) = \varphi(s(t) + L) - \varphi(s(t + T)) = t + T = \varphi(u) + T$. ($\varphi$ la fonction reciproque de s).

Homework all the rest.

Lemme 7. *c une courbe plane fermée simple et convexe. c intersecté une droite un plus de trois points alors c contient un segment de droite.*

Démonstration. Soit $c; [0,1] \leftarrow \mathbb{R}$ la courbe. Supposons que pour la droite $G = p_0 + \mathbb{R}\nu$. $c([0,1]) \cap G = \{c(0), c(t_1), c(t_2)\}$. Supposons que $\kappa \geq 0$ donc pour l'angle ν t.q. $\dot{c}(t) = (\cos\nu(t), \sin\nu(t))$ an a que $\dot{\nu} = \kappa \geq 0$ et $\nu(L) = \nu(0) = 2\pi$ donc $\nu : [0,L] \leftarrow [0,2\pi] + \nu_0$ est croissante et surjective. Soient $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ $([0,t_1],[t_1,t_2],[t_2,L])$. Supposons que $c(I_j) \cap G \neq c(I_j)$. Soit $G_S = G + s\nu^\perp$. Soit $s_1 = sup\{s > 0;\ G_s \cap c(I_j) \neq 0\}$. Soit τ_j define par $c(I_j) \cap G_{s_1} = \{c(\tau_j)\}$ donc $\dot{c}(\tau_j) = \pm\nu$. Donc $\exists \tau_n$ t.q. $0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2 < \tau_3 < L$ t.q. $c(\tau_n) = \pm\nu\ \forall k$. Soit $\theta_1 \in \theta_0 + [0, 2\pi)$ t.q. $(\cos\theta_n, \sin\theta_n) = \nu$. Supposons que $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ et $(\cos\nu_2, \sin\nu_2) = -\nu$ donc $c(\tau_k) \in \{\theta_1, \theta_2\}, \forall k \in \{1,2,3\}$. $t \mapsto \theta(t)$ est croissant donc $\exists j$ t.q. $\theta|_{[}t_j, t_{j+1}]$ est constant. ☐

Lemme 8. *Soit une courbe plane fermée et sample et convexe. G une droite t.q. $G \cap im(c) = \{p_1, p_2\}$ t.q. $T_{p_1}(c) = T_{p_2}(c)$ colinéaire G alors c contient un segment de G.*

Démonstration. $G = T_{p_1}(c)$ donc apr convexité la courbe est situé d'un seul coté de G donc supposons :

$$\left\langle c(t) - p_1, \dot{c}^\perp(t_1) \right\rangle > 0$$

Soit $G_\varepsilon = G + \varepsilon\dot{c}^\perp(t_1)$. Pout ε suffisent petit $G_\varepsilon \cap im(G) = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ avec $q_j \neq q_k,\ j \neq k,\ q_j \in im(c)$. le résultat suit du lemme précédent. ☐

Theorem 6 (des 4 sommets)**.** *soit c une courbe plane, convexe fermé simple alors c admet quatre sommet.*

Démonstration. Supposons que c est paramétrique par longueur d'arc et de période L. Pour sa courbure κ on sait que κ atteint son maximum et son minimum dans $[0,L]$ donc il existent $t_0, t_1 \in [0, L)$ t.q. $\dot{\kappa}(t_j) = 0\ j \in \{1,2\}$. Supposons que $t_0 = 0$. Soit $G = Aff(c(0), c(t_1))$ la droite affine passant parce points. S'il existerait un trois ème point d'intersection de G avec c alors la courbe contiendrait un segment de G (lemme précédant) donc on aurait fini car $\dot{\kappa} = 0$ sur ce segment. Si l'intersection éteint tangentielle en $c(0)$ et $c(t_1)$ alors c on tiendrait un segment de droite parle lemme précédant pour $G = p_0 + \mathbb{R}\nu$ on peut donc supposer que :

$$\left\langle c(t) - c(t_0), \mu^\perp \right\rangle > 0\ t \in (0, t_1) \tag{3}$$
$$\left\langle c(t) - c(t_0), \mu^\perp \right\rangle < 0\ t \in (t_1, L) \tag{4}$$

κ est périodique de période L donc $\int\limits_0^L \dot{\kappa} = 0$. Si $\dot{\kappa}(t) \neq 0\ \forall t \in \{0, t_1\}$. Alors on peut supposer que :

$$\dot{\kappa}(t) > 0\ t \in (t_1, L)$$
$$\dot{\kappa}(t) < 0\ t \in (0, t_1)$$

$=> \dot{\kappa}(t) \left\langle c(t) - c(0), \nu^\perp \right\rangle > 0,\ t \in (t_1, L)$ et $t \in (0, t_1)$ or $\int \dot{\kappa}(t)(c(t) - c(0))\,\mathrm{d}t = -\int\limits_0^L \kappa(t)\dot{c}(t)\mathrm{d}t$ or on sait que $\dot{n}(t) = \kappa(t)\dot{c}(t)$ équation de Frenet $n = \dot{c}^\perp$.

$$\dot{T} = \kappa n$$
$$\dot{N} = -\kappa T$$

$$\int_0^L \dot{\kappa}(t)\left\langle c(t)-c(0),\nu^\perp\right\rangle \mathrm{d}t = \left\langle 0,\nu^\perp\right\rangle = 0$$

C'est une contradiction donc il existe un $t_2 \in \{0, t_1\}$ t.q. $\dot{\kappa}(t_2) = 0$.

Supposons que $t_2 \in (t_1, L)$. S'il n'y avait pas de quartier sommet. Il existe donc une droite qui sépare les regions $\dot{\kappa} > 0$ et $\dot{\kappa} < 0$. Par le même argument pour ces regions on conclut qu'il existe un 4ème sommet. □

Remarque. *Le théorème reste vrai sans l'hypothèse de la convexité.*

0.2 Inégalité isopérimetrique

l'aire du cerclée $rayon\ R = \pi\mathbb{R}^2 = A$—area
la $longueur\ 2\pi\mathbb{R} = L\ L^2 = 4\pi^2\mathbb{R} = 4\pi A$.

Theorem 7. *Soit $G \subset \mathbb{R}^2$ une region bornée par une courbe fermé simple de longueur L. Alors pour l'aire A de G on a :*

$$4\pi A \leq L^2$$

et $4\pi A = L^2$ <=> la courbe est un cercle.

Démonstration. Soit c une paramétrisation de la courbe de vitesse 1, de période L orientée positive. Pour déterminer A à partir de c on utilise le théorème de Stoks. Pour $F \in C'(G, \mathbb{R}^2)$ un champs de vecteurs on a :

$$\int_G \operatorname{rot} F(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_C \langle F, \mathrm{d}s\rangle := \int_0^L \langle F(c(t)), \dot{c}(t)\rangle\,\mathrm{d}t$$

Un F t.q. $\operatorname{rot} F = 1$
$F(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x)$

$$\operatorname{rot} F(x,y) = \partial_x F2 - \partial_y F_1 = 1$$

donc $\int \operatorname{rot} F = \int_G 1 = A = \int \langle F, \cot c\rangle = \int_0^L (x\dot{y} - \dot{x}y)\mathrm{d}t$ avec $c(t) = (x(t), Y(t))$
On utilise un l'analyse de Fourier. Soit

$$z : \mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}^2$$

$$z(t) := x(\frac{L}{2\pi}t) + iy(\frac{L}{2\pi}t)$$

alors $x \in C^\infty$ et $z(t+2\pi) = z(t)$ par Fourier on sait $z(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}\ \forall t$.

$\dot{x}(t) = \frac{L}{2\pi}(\dot{x}(\frac{l}{2\pi}) + i\dot{y}(\frac{l}{2\pi}))$
$|\dot{z}(t)|^2 = \frac{L^2}{(2\pi)^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(\frac{L}{2\pi}t)$
$\int_0^{2\pi} |\dot{z}(t)|^2 = \frac{l^2}{2\pi}$
$\dot{z}(t) = \sum c_k(ik)e^{iht}\ \forall t\ |\dot{z}|^2(t) = \sum_{k,l}(inc_n)(-il\bar{c}_e)e^{i(k-l)t}\ \int_0^{2\pi} |\dot{z}|^2(t) = \sum_{k,l}\int(\ldots)e^{i(h-l)t}$
donc : $\int_0^{2\pi} |\dot{z}|^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_n|^2$ donc $\frac{L^2}{2\pi} = \sum k^2|c_n|^2$. $Im\dot{z}\bar{z}(t) = (\dot{y}x - x\dot{y})(\frac{L}{2\pi})\frac{L}{2\pi}$.

$$2A = \frac{L}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Im} \dot{z}\bar{z} = \sum k|c_k|^2 \cdot 2\pi$$

$$4\pi A = 4\pi^2 \sum k|c_k|^2$$

$$L^2 = 2\pi \cdot \sum k^2|c_k|^2$$

or $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k|c_k|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2$ avec égalité $<=>$ $c_k = 0$ pour $k \notin \{0,1\}$ donc égalité $<=>$ $z(t) = c_0 + c_1 e^{it}$ $<=>$ $t \mapsto (x(t), y(t))$ est un cercle.

$\square$