Chapitre 1

Base de Probablite

1.1 Espase Probabilisé

Soit Ω est UNIVERS (est random ensemble).

Définition 1 (σ - algebra)**.** La famille des ensembles $\mathcal{A}$ s'appelle σ-ALGEBRA si :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$ ($A^C = \bar{A}$)
3. Si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{A}: \ \cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Définition 2 (Probabilité)**.**

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Si $\{A_k\}_k^{\infty}$ - disjoint (pour tout $i \neq j: \ A_i \cup A_j = \emptyset$) :

$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

Espasce probabilisable $(\underbrace{\Omega}_{\text{univers}}, \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{tribu}})$.
Espase probabillisé $(\Omega, \ \mathcal{A}, \ \mathbb{P})$.

Définition 3. VARIABLE ALÉATOIRE (random variable) est fonction measurable X :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "X"] \arrow[d, "\sigma\text{-algebre}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\sigma\text{-algebre}"] \\
\mathcal{A} & \mathcal{B}\ (\text{Borel})
\end{tikzcd}$$

Soit Ω un ensemble. Soit $\mathcal{F}$ un famille d'ensembles de Ω, qui n'est pas forcément une σ-algèbre.

> **Définition 4.** On appelle σ-algèbre engendrée par $\mathcal{F}$, dénotée $\sigma(\mathcal{F})$ la plus petite σ-algèbre que contient $\mathcal{F}$.

> **Définition 5.** Borel ($\mathcal{B}$) est la σ-algebre engendrée par les intervalles ouvertes de $\mathbb{R}$ c'est-â-dire de la forme $(a,\ b),\ |a|,\ |b| < \infty$ (famile $\mathcal{F}_0$).

Remarque. *On dit Borel ($\mathcal{B}$) est aussi σ-algebre engendrée par des intervalles de la forme $(-\infty,\ |a|],\ |a| < \infty$ (famile $\mathcal{F}_{FN}$). $\sigma(\mathcal{F}_0) = \sigma(\mathcal{F}_{FN})$*

Proposition 1. *Pour verifier la measurable il suffit de la tester sur une famille qui engendrée la σ-algèbre de Borele.*

Exercice. (simple mais important)
Soit Ω un ensemble. $\mathcal{P} = \{P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_k\}$ est une partition finit de Ω, c'est-â-dire $\cup_{j=1}^{k} P_j = \Omega$ et $P_\alpha \cap P_\beta = \varnothing$.

1. Trouve $\sigma(\mathcal{P})$. Réponse :
   $\sigma(\mathcal{P})$ contient tout reunion d'éléments $\mathcal{P}$.
   (En partiqulier si $A \in \sigma(\mathcal{P})$: $A = \cup_{k=1}^{l} P_{i_k}$)
2. Trouve comment sont faites les v.a. par rapport â $\sigma(\mathcal{P})$. Réponse :
   Consider $\Omega = \mathbb{R}$. $X(\omega) = \alpha$. α est l'image ω. Le point α est aussi un ensemble, qu'on denote $\{\alpha\}$: "singlitore" qui est un borelien. Car X est measurable par rapport â $\sigma(\mathcal{P})$, $X^{-1}(\{\alpha\}) = \cup P_{i_k}$.

   Une function measurable pour rapport à $\sigma(\mathcal{P})$ est constante par morceaux sr les éléments de la partition.

   On replace X avec autre object qui "approxime" X est measurable par rapport â $\sigma(\mathcal{P})$.

Espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbb{P})$. $X : \Omega \to \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Borel}}$, X est v.a.

Loi de X on définir un mesure de probabilite sur $(\mathbb{R},\ \mathcal{B})$ de la manière suivante si $B \in \mathcal{B}$: $P_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$.

On appelle P_X de La Loi de X.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ On pourra écrite X de la maniere suivante : $X(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega)$, $A_k = \{\omega \,|\, X(\omega) \in A_k\}$. Calculer P_X (la loi de X) :

Si $B \in \mathcal{F}$, $P_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$.
On appelle D l'ensemble valeur de X : $D = \{x_1,\ x_2,\ \dots x_k \dots\}$.
$P_X(B) = P_X(B \cap D) = P_X(B \cap \cup_{k=1}^{\infty}\{x_k\}) = P_X(\cup_{k=1}^{\infty}(B \cap \{x_k\})) = \sum_{k=1}^{\infty} P_X(B \cap \{x_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = x_k)\delta_{\{x_k\}}(B) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{\{x_k\}}(B)$

$$\delta_a(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in B \\ 0 & \text{si } a \notin B \end{cases}$$

On introduit la measure de Dirrac :

$$\left.\begin{array}{rcl} X & = & \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{1}_{A_k} \\ P_x & = & \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{\{x_k\}} \\ P_x & = & \mathbb{P}(A_k) \end{array}\right\} \text{v.a. discrete}$$

Exemple. (v.a. discrete)

1. $B(n,\ p)$ binomiale
   Valeurs : $X = \{0,\ 1,\ \dots n\}$.

$$P_k = \mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ i \in \{0, \dots, n\}$$

2. Poisson $P(\lambda)$. Valeurs $X = \{0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$ - dénombrable.

$$P_X(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Rappel. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *est une* ***variable aléatoire***
$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$ *— esperance,* $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[[X - \mathbb{E}(X)]^2]$ *— variance.*
Supposons $\mathbb{E}(X) = 0 \Rightarrow \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2)$.
$g(t) = t^2$, $g \circ X = X^2$. *Si* $g \circ X = X \circ g$, g *— identité.*

Rappel. ***Variable aléatoire*** *à valeurs réelle :* $X : \Omega \to \mathbb{R}$. ***Loi de*** X *: une measure de probabilité sur* $\mathbb{R}$ $P_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)),\ B \in \mathcal{B}$.

Théorème 1. *Soit* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *une v.a. sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et soit* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. si l'intégrale* $\int_\Omega g \circ X \, \mathrm{d}\mathbb{P}$ *existe on a*

$$\int_\Omega g(X(\omega))\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} g(t)\, \mathrm{d}P_X(t)$$

Exemple 1.1.1. Supposons que X est discrète... P1/2

Définition 6. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.

$$F(t) := \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\omega : \ X(\omega) \leq t) = P_X((-\infty, t])$$

Proposition 2. *Toute fonction de repartition* F *vérifie les propriétés suivantes :*

1. *F est non-negative et croissante.*
2. *F est continue à droite.*
3. *F est discontinue dans plus un nombre dénombrée de point.*
4. $\begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 1 \\ \lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 0 \end{cases}$.

1.1.1 Rappel de Th. de la measure

Soit F une fonction croissante réelle positive (en particulier F est la fonction de repartition d'une v.a.).

Ou définit une fonction d'ensemble sur $\mathbb{R}$:

$$\tilde{F}((a, b]) = F(b) - F(a) \tag{*}$$

Il y a un théorème de théorie de la measure que dit que la fonction d'ensemble $\tilde{F}$ défini sur la famille $\{[a, b]\}$ peut s'étendre à une measure sur la σ-algebra engendrée par cette famille ($\mathcal{B}$ — Borel) et la restriction de cette mesure sur la famille $\{[a, b]\}$ vérifie l'égalité (**??**).

Cette measure est appelle la mesure le Lebésgue-Stiltyes. $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$.

1.2 Indépendances

A, B deux événements (c'est-à-dire $A, B \in \mathcal{A}$).

Définition 7. On dira que A et B sont Indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Définition 8. On appelle σ-algèbre engendrée par une variable aléatoire X, $\sigma(X)$ la plus petite σ-algèbre pour rapport à la quelle X est mesurable.

Proposition 3. $\sigma(X) = \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$

Définition 9. Deux v.a. X et Y définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont l'indépendantes si $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont indépendantes.

On appelle σ-algèbre engendrée par une variable aléatoire X, $\sigma(X)$ la plus petite σ-algèbre pour rapport à la quelle X est mesurable.

Si X et Y sont indépendantes si

$$P_{XY}(X \in A, Y \in B) = P_X(A)P_Y(B)$$

Produit direct de deux mesure ? Considéré $S = S_1 \times S_2$. Di ou construit l'espace mesurable $(S_1 \times S_2,\ \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$. Il existe une seule mesure $\bar{\mu}$ telle que :

$$\bar{\mu}(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2 A_2$$

Cette mesure $\bar{\mu}$ est le produit direct de μ_1 et μ_1, dénote $\bar{\mu} = \mu_1 \times \mu_1$.

Théorème 2. *Deux variables aléatoire X et Y sont indépendantes ssi la loi conjointe coïncide avec le produit direct des lois marginales. C'est-â-dire :*

$$P_{XY} = P_X \times P_Y$$

Ex

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(t,u)\, dP_{XY}(t,u)\mu$$

On a besoin d'une autre quantité ; fonction de répartition de deux variables.

Définition 10. Si X et Y sont 2 v.a. ou définit

$$F_{xy}(u,\ v) = \mathbb{P}(X \leq u, Y \leq v)$$

Proposition 4. *Si ou connait la fonction de répartition du couple (X, Y) on peut calculer les fonctions de répartition marginales*

$$F_X(u) = \lim_{v \to +\infty} F_{XY}(u,v)$$

$$F_Y(v) = \lim_{u \to +\infty} F_{XY}(u,v)$$

Démonstration. $F_X(u) = \mathbb{P}(X \leq u) = P_X((-\infty, u])$. Utilise $\mathbb{R} = \cup_{k=1}^{\infty}(-\infty, k]$ $(-\infty, k)$ est croissant. $\mathbb{P}(X \leq u) = \mathbb{P}(X \leq u, Y \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \leq u, Y \in \cup_{k=1}^{\infty}(-\infty, k])$. $F_X(u) = \mathbb{P}(X \leq u) = P_X((-\infty, u])$. □

Proposition 5. *Si X est Y sont indépendant v.a. donc $F_{XY}(u,v) = F_x(U)F_Y(V)$*

Démonstration. ... □

Proposition 6. *Si on a : $F_{XY} = (u,v) = F_X(u)F_Y(v)$ cest-a que X et Y sont indépendante ? Oui.*

Démonstration.

$$P_{XY}(X \leq u, Y \leq v) = P_X(X \leq u)P_Y(Y \leq u)$$

la borelien de la forme $\{(-\infty, u], |u| < \infty\}$ vérifier le propriété de l'intersection firme. □

Définition 11. La mesure de lebegue dans $\mathbb{R}^2$ est la mesure produit direct des mesure des lebesgue dans $\mathbb{R}$.

Convention $\int f\, d\lambda(x) = \int f\, dx$.

Définition 12. Un couple de v.a (X,Y) a une loi conjointe P_{XY} a density si pour toute borelie $B \in \mathcal{B}^{(2)}$ (σ-algèbre produite), on a

$$P_{XY}(B) = \iint\limits_B f_{XY}(u,v)\,d\lambda(u)\,d\lambda(v)$$

. En particulier s ou a $g(u,v) \in L^1(P_{XY})$ on a :

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(u,v)\,dP_{XY}(u,v) = \iint g(u,v) f_{XY}(u,v)\,d\lambda(u)\,d\lambda(v)$$

Questions

1. Donner les proprettes de f_{XY} quand X et Y sont indépendants.
2. Si on connait $F_{XY}(u,v)$ est-ce qu'on peut calculer les marginales $f_X(u),\ f_Y v$?

Proposition 7 (générale)**.** *Si on connait $f_{XY}(u,v)$ on a :* $\begin{array}{rcl} f_X(u) & = & \int_{\mathbb{R}} F_{XY}(u,v)\,dv \\ f_X(v) & = & \int_{\mathbb{R}} F_{XY}(u,v)\,du \end{array}$

Démonstration. $F_X(t) = \lim\limits_{r\to\infty} F_{XY}(t,r)| = |$

$$F_{XY}(t,r) = \mathbb{P}(X \le t, Y \le r) = P_{XY}((-\infty,t]\times(-\infty,r]) = \int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{r} d\lambda(u)\,d\lambda(v) = F_{XY}(t,r)$$

$| = | \lim\limits_{r\to\infty} \iint_{-\infty-\infty}^{t\ r} f_{XY}(u,v)\,d\lambda(u)\,d\lambda(v) = \lim\limits_{r\to\infty} \iint_{-\infty-\infty}^{t\ r} f_{XY}(u,v)\mathbb{1}(u)\mathbb{1}(v)\,d\lambda(u)\,d\lambda(v) =$ | Par Fubini ou sont étirer les intégrales : | $= \lim\limits_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}} dv \mathbb{1}(u)\mathbb{1}(v) f_{XY}(u,v) = \lim\limits_{r\to\infty} \int_{-\infty}^{t} du \int_{-\infty}^{r} dv f_{XY}(u,v) =$ |B. Levi| $==$ $\int_{\mathbb{R}} du \lim\limits_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}} dv \mathbb{1}(u)\mathbb{1} f_{XY}(u,v)$ $F_X(t) = \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}} dv \mathbb{1}(u)\mathbb{1} f_{XY}(u,v)$.

Si X est à densité $F_X(T) = \int\limits_{-\infty}^{t} f_X(u)\,du$. ☐

Question (Indépendantes et densités)

Proposition 8. *Ou a deux parties.*

1. *Si 2 v.a. X et Y admettait, des densités f_X et f_Y admettent des densités f_X et f_y et X et Y sont indépendantes, alors le couple (X, Y) admet une loi conjointe a densité et $f_{XY} = f_X f_Y$.*
2. *Si le couple (X,Y) admet une densité f_{XY} produit de deux fonctions intégrable f_1 et f_2 alors f_1 et f_2 sont les dentistes (à une constant pvit) de X et Y et X et Y sont indépendantes.*

Exercice On a un couple de v.a. (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi conjointe :

$$P_{(XY)}(B) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+l}}\delta_{\{k,l\}}(B)$$

Determiner la loi de $Z = \sup\{X,Y\}$.

1. question. Déterminer $P_X,\ P_Y$ oui $P_X(X=k)$. Si X et Y sont discrète $\mathbb{P}(X=k)=\sum_j \mathbb{P}(X=k,\ Y=j)$.

$$P_X(\{x\})=\sum_j P_{XY}(\{k,j\})$$

$$\mathbb{P}(X=k)=P_X(\{k\})=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k+j}}$$

$\mathbb{P}(Z\le k)=\mathbb{P}(X\le k,Y\le k)=\int \mathbb{1}_{[0,k]^2}(X,Y)\,d\mathbb{P}=\iint \mathbb{1}_{[0,k]^2}\,dP_{XY}(u,v)=\sum_{i,l=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i+l}}\mathbb{1}_{[1,k]^2}(i,l)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{2^{i+l}}$

1.3 Leçon 4

Il fallait montrer que si les variables aléatoires (X_1,X_2) ont une densité $f_{X_1X_2}$ produit direct de deux fonctions f_1 et f_2 , alors à une constante près, f_1 et f_2 sont le densité de X_1 et X_2 et ces deux variables sont indépendantes.

L'autre partie (exercice). Si X_1 et X_2 sont indépendantes de densité respectives f_{X_1} et f_{X_2}, alors le vecteur $(X_1,\ X_2)$ a densité : $f_{X_1X_2}=f_{X_1}f_{X_2}$.

Démonstration. Par hypothèse, $f_{X_1X_2}(u,v)=f_{X_1}(u)f_{X_2}(v)$. D'autre coté on sait que en général :

$$f_{X_1}(u)=\int_{\mathbb{R}} f_{X_1X_2}(u,\ v)\,\mathrm{d}\lambda v$$

$$f_{X_2}(v)=\int_{\mathbb{R}} f_{X_1X_2}(u,\ v)\,\mathrm{d}\lambda u$$

Objectif : Montrer que, a une constante près $f_1=f_{X_1},\ f_2=f_{X_2}$. On observe que :

$$f_{X_1}(u)=\int_{\mathbb{R}} f_{X_1X_2}(u,\ v)\,\mathrm{d}v=f_1(u)\int_{\mathbb{R}} f_2(v)\,\mathrm{d}v$$

$$f_{X_2}(v)=\int_{\mathbb{R}} f_{X_1X_2}(u,\ v)\,\mathrm{d}u=f_1(v)\int_{\mathbb{R}} f_1(u)\,\mathrm{d}u$$

On multiple les deux expressions :

$$f_{X_1}(u)f_{X_2}(v)=f_1(u)f_2(v)\int_{\mathbb{R}} f_2(v)\,\mathrm{d}v\int_{\mathbb{R}} f_1(u)\,\mathrm{d}u=f_1(u)f_2(v)\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f_2(v)f_1(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}} f_2(v)\,\mathrm{d}v\int_{\mathbb{R}} f_1(u)\,\mathrm{d}u=\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f_2(v)f_1(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f_{X_1,X_2}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=1,$$

car f_{X_1,X_2} est une densité de probabilité. Donc on a montré que $f_1(u)f_2(v)=f_{X_1}(u)f_{X_2}(v)$.

Remarque. *À des constants prés on pourra identifier* f_{X_1} *avec* f_1 *et* f_{X_2} *avec* f_2*. Pour terminer : La loi du couple* (X_1,X_2) $P_{X_1X_2}$ *on sait que on peut l'écrire.*

$\square$

Notations 1. *Si on a une mesure P avec densité f on l'écrira comme ça : $P = f\,\mathrm{d}x$, $P(A) = \int_A f\,\mathrm{d}x$. $\int g\,\mathrm{d}f = \int gf\,\mathrm{d}x$.*

$$P_{X_1X_2} = f_{X_1X_2}(u,v)\,\mathrm{d}\lambda(u)\,\mathrm{d}\lambda(v) = f_1(u)f_2(v)\,\mathrm{d}\lambda(u)\,\mathrm{d}\lambda(v) = f_{X_1}(u)f_{X_2}(v)\,\mathrm{d}\lambda(u)\,\mathrm{d}\lambda(v) = P_{X_1}\otimes$$

(product direct des lois marginales).

$P_{X_1X_2} = P_{X_1} \otimes P_{X_2}$ produit directe de lois marginales. Et on sait que C.N.S ... !? what pour l'independence est que $P_{X_1X_2} = P_{X_1} \otimes P_{X_2}$.

Proposition 9. *Si X_1 et X_2 sont deux v.a., le trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *X_1 et X_2 sont indépendantes*
2. *$\forall$ fonctions g_1 et g_2 réels et positive on a :*
$$\int g_1 \circ X_1 \cdot g_2 \circ X_2\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int g_1 \circ X_1\,\mathrm{d}\mathbb{P} \cdot \int g_2 \circ X_2\,\mathrm{d}\mathbb{P}$$
3. *Pur tout fonctions réels bornées, g_1 et g_2 on a :*
$$\int g_1 \circ X_1 \cdot g_2 \circ X_2\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int g_1 \circ X_1\,\mathrm{d}\mathbb{P} \cdot \int g_2 \circ X_2\,\mathrm{d}\mathbb{P}$$

Applications. Supposons que g_1 et g_2 sont l'identité et que X_1 et X_2 sont indépendantes :
$$\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(X_2)$$
$$\int 1 \circ X_1 \cdot 1 \circ X_2\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int 1 \circ X_1\,\mathrm{d}\mathbb{P} \cdot \int 1 \circ X_2\,\mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Exemple 1.3.1. X_1 et X_2 indépendant
$\int X_1^2 \sin X_2\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int X_1^2\,\mathrm{d}\mathbb{P} \int \sin X_2\,\mathrm{d}\mathbb{P}$.

Remarque. *Si X_1 et X_2 sont indépendants : $\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2)$.*

$\mathbb{E}([(X_1 = X_2) - (X_1 + X_2)]^2)$.On développe le carré on découvera des termes de type $\mathbb{E}(X_1X_2)$, on utilisera l'égalité $\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(X_2)$ ... !? pour définis le fait que 2 variables sont de corrélées

Exemple 1.3.2. Sur l'espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ on considère le couple (X, Y) ave loi conjomte- P_{XY} à densité
$$f_{XY}(u,v) = \alpha(1-u^2)\mathbb{1}_{[0,1)}(u)ve^{-3v}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}$$

1. déterminer le valeur de α
2. déterminer la lois marginales.

Exemple 1.3.3. Sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ on a à nouveau le vecteur aléatoire (X, Y) de loi

$$P_{XY} = \alpha(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$$

où α est un paramètre et
μ est une mesure à densité avec densité : $f_1(u, v) = \frac{1}{u^2} e^{-v} \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(u) \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(v)$
μ_2 : mesure uniformément distribuée sur $[0, 1] \times [0, 1]$.
$\mu_3 = \delta_{\{1,1\}} + \delta_{\{-1,2\}}$.
Déterminer α et le lois marginales de X et de Y. Est que X et Y sont indépendantes ?

Exercice 1. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

(i) suppose que le loi du couple (X, Y) est connue :

$$d_{XY}(u, v) = \lambda \rho e^{-\lambda u - \rho v} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2_+}(u, v) \, du \, dv$$

Déterminer la loi de la v.a. $W = \min\{X, Y\}$
Deux méthodes (équivalentes).
1ère méthode : $F_W(t) = \mathbb{P}(W \leq t) = 1 - \mathbb{P}(W > t) = 1 - \mathbb{P}(X > t, Y > t) = 1 - \int_\Omega \mathbb{1}_{(t,+\infty)} X \cdot \mathbb{1}_{(t,+\infty)} Y \, d\mathbb{P} = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(t,+\infty)\times(t,+\infty)} \, dP_{XY}(u, v) = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(t,+\infty)\times(t,+\infty)} \lambda \rho e^{-\lambda u} e^{-\rho v} \, du \, dv$, $t \geq 0 = 1 - \int_t^\infty du \int_t^\infty dv \, \lambda \rho e^{-\lambda u} e^{-\rho v} = 1 - \lambda \int_t^\infty e^{-\lambda} \, du \, \rho \int_t^\infty e^{-\rho v} \, dv = [1 - e^{-(\lambda - \rho)t}] \mathbb{1}_{[0,\infty]}(t)$.
On sait que :

$$F_W(t) = \int_{-\infty}^t f_W(s) \, ds \, .$$

Si on connait f_X, ou peut calculer F_W ?
F—distribution function (fonction de repartition).
f—probability density function (fonction de densité).
$F'_W(t) = (\lambda + \rho) e^{-(\lambda + \rho)t}$ Mais $F'_W = (\lambda + \rho)$ from +, but 0 from -0.
Il y a 2 cas :
(i) $t \in (-\infty, 0)$ $F_W(t) = 0 \Rightarrow f_W(t) = 0$
(ii) $t \geq 0$ $[1 - e^{(\lambda+\rho)t}] = \int_\infty^t f_W(s) \, ds$
Est-ce que X et Y sont indépendantes ? Yes. $f_X \cdot f_Y$.
Méthode tris générale pour construire des variables aléatoires.
On construit une nouvelle v.a. $g \circ X = Y$. Question Si on connaît la loi de X, peut on calculer la loi de Y ? Ex X a nue loi exp : $f_X(u) = \lambda e^{-\lambda u}$; calcules la loi de $\sqrt[2]{X} = Y$.
Chourinevousm- une fonction test non-négative $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ et ou eousitere- :

$$\mathbb{E}(h \circ Y) = \int_\Omega h \circ Y \, d\mathbb{P} = \int_\Omega h \circ g \circ X \, dP$$

$$\int_\Omega h \circ Y \, d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} h(v) f_Y(v) \, dv$$

$$== \int_\mathbb{R} h(g(u)) \, dP_X(u) = \int_\mathbb{R} h(g(u)) f_x(u) \, du$$

On a : $\int_\mathbb{R} h(g(u)) f_X(u) \, d(u) = \text{(Particular case)} = \lambda \int_\mathbb{R} h(\sqrt{u}) e^{-\lambda u} \, du$
On pose $\sqrt{u} = v$ $dv = \frac{1}{2v} du$
$== 2\lambda \int_0^\infty h(v) e^{-\lambda v^2} v \, dv$.

Loi de $Y=\sqrt{X}$ est : $f_Y(v)=2\lambda v e^{-\lambda v^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(v)$.

Deux méthode

$\mathbb{E}(h(W)) \overset{\text{si on l'est, comme ca}}{=} = \int_{\mathbb{R}} h(y) f_W(y)\,\mathrm{d}y$, f_W la densité de W. h -fonction test.

$\mathbb{E}(h(W)) = \int_\Omega h\circ W\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega h\circ \min(X,Y)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} h(\min(u,v))\lambda e^{-\lambda u}\rho e^{-\rho v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint\limits_{\{(u,v),u<v\}} h(u)\lambda e^{-\lambda u}\rho e^{-\rho v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \iint\limits_{\{(u,v),u>v\}} h(u)\lambda e^{-\lambda u}\rho e^{-\rho v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^{+\infty} h(u)e^{-(\lambda+\rho)u}(\lambda+\rho)\,\mathrm{d}u$

(ii)

On a un vecteur aléatoire (X,Y) a valeurs dans $\mathbb{R}^2$, avec loi :

$$f_{XY}(u,v)=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{u}{2}}\mathbb{1}_{\{u\geq 0\}}\mathbb{1}_{[0,2\pi]}$$

Déterminer loi du vecteur aléatoire $(\sqrt{X}\cos Y, \sqrt{X}\sin Y)$.

$\omega \to (X(\omega),Y(\omega))$

$$g:\begin{cases} u &= g_1(x,y)\\ v &= g_2(x,y)\end{cases}$$

$g=(g_1,g_2)$

$$v(\omega)=g_1(X(\omega),Y(\omega))$$
$$u(\omega)=g_2(X(\omega),Y(\omega))$$

U vecteur : $(g_1\circ(X,Y), g_2\circ(X,Y))$.

Test fonction h, $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h\circ(X,Y)) &= \int h\circ(X,Y)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \iint h(g(u,v))f_{XY}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &= \iint h(g_1(u,v),g_2(u,v))f_{XY}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \overset{?}{=} \int h(\alpha,\beta)f(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta \qquad (1.1)\end{aligned}$$

(X,Y) 2 v.a. et exulte ou avait une fonction vectorielle $g=(g_1,g_2)$ $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ et on définit 2 nouvelle v.a. U et V de cette façon : $U=g_1\circ(X,Y)$, $V=g_2\circ(X,Y)$ et

$$\begin{cases} U(\omega) &= g_1(X(\omega),Y(\omega))\\ V(\omega) &= g_2(X(\omega),Y(\omega))\end{cases}, \ \omega\in\Omega \text{ (espace des éléments)}$$

Cas particulier (Exercice) (X,Y) une couple de v.a. de loi cougointe-

$$f_{XY}=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{u}{2}}\mathbb{1}_{u\geq 0}(u)\mathbb{1}_{[0,2\pi]}(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Question. Trouvons la loi du couple :

$$(\sqrt{X}\cos Y, \sqrt{X}\sin Y)=(U,V)$$

Soit $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction `test` non-négative. $\mathbb{E}(h\circ g(X,Y)) = \int_\Omega h\circ g(X,Y)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} h(g_1(x,y),g_2(x,y))f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{?}{=} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} h(u,v)f_{UV}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

$$\begin{cases} u = \sqrt{x}\cos y \\ v = \sqrt{x}\sin y \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} u & = & g_1(x,y) \\ v & = & g_2(x,y) \end{cases}$$

$g = (g_1, g_2)$. Pour pouvoir effectuer un changement de variable, il faut que g soit un difféomorphisme entre 2 ouverts.

$g : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ difféomorphisme entre deux ouverts. Condition équivalents pour avoir un difféomorphisme :

(i) g est injective sur $\mathcal{O}_1$ à valeurs dans $\mathcal{O}_2$.

(ii) g est de classe $b^{(1)}(\mathcal{O}_1)$, c'est-à dire les dérivés partielles de g existe et sont continuous.

(iii) Le déterminant de $\det\left(g^{-1}\right)' \neq 0$ sur $\mathcal{O}_2$

Nous avons défini

$$g : \begin{cases} u & = & g_1(x,y) \\ v & = & g_2(x,y) \end{cases} \quad \text{il faut } \underrightarrow{\text{inverser}}$$

$$g^{-1} : \begin{cases} x & = & \Phi_1(u,v) \\ y & = & \Phi_2(u,v) \end{cases}$$

$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$

On construit la invariante Jacobienne (dérives) de $g^{-1} = \Phi$:

$$J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$|\det J_\Phi(u,v)|$$

$$= \iint\limits_{g(O_1)=O_2} h(u,v) f_{XY}(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v)) |\det J_\Phi(u,v)| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

Trouve le nouvelle domaine d'intégration. $\iint\limits_{O_1} h(g_1(x,y), g_2(x,y)) f_{XY}(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint\limits_{g(O_1)=O_2} h(u,v) f_{XY}(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v)) |\det J_\Phi(u,v)| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$

La densité de (U,V) est donc :

$$\boxed{f_{UV}(u,v) = f_{XY}(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v)) \cdot |\det J_\Phi(u,v)| \cdot \mathbb{1}_{g(\mathcal{O}_1)}(u,v)}$$

Continuer avec l'exercice. :

$\iint_0^\infty{}_0^{2\pi} h(\sqrt{x}\cos y, \sqrt{x}\sin y) \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{x}{2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y =$

$$g : \begin{cases} u = \sqrt{x}\cos y \\ v = \sqrt{x}\sin y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Phi : \begin{cases} x & = & u^2 + v^2 \\ y & = & \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \end{cases}$$

$= \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\, h(u,v)\frac{1}{4\pi}e^{\frac{-(u^2+v^2)}{2}} \cdot |\det J_\Phi(u,v)|$

$$J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ \frac{-v}{u^2+v^2} & \frac{u}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$$

$\det J_\Phi(u,v) = \frac{2u^2}{u^2+v^2} + \frac{2v^2}{u^2+v^2} = 2$

Question :

— U et V sont indépendant ? Oui car $f = f_1 \cdot f_2$

— Lui de U et V : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(u^2+v^2)}{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(u^2+v^2)}{2}}$

Exercice Soit (X,Y) une vecteur aléatoire de loi $f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. Calculer la loi de $(X+Y,Y)$. Objectif calcul la lui de la somme.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(x+y,y)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$g : \left\{ \begin{array}{ccccc} u & = & g_1(x,y) & = & x+y \\ v & = & g_2(x,y) & = & y \end{array} \right.$$

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & u-v \\ y & = & v \end{array} \right.$$

$$|\det J_\Phi(u,v)| = 1$$

$$= \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} h(u,v)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(u-v)^2+v^2}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Densité de $(X+Y,Y)$ est $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2-2uv+2v^2}{2}}$. Densité de $(X+Y)$:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{UV}(u,v)\mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2-2uv+2v^2)}\mathrm{d}v$$

—produit de convolution.

Théorème 3. *Si X et Y sont indépendant de loi marginal f_X et f_Y alors la v.a. $X+Y$ est à densité est $f_{X+Y}(u) = \int_{\mathbb{R}} f_Y(u)\cdot f_X(u-v)\mathrm{d}v \overset{def}{=} f_Y * f_X$—produit de convolution.*

Soit (U,V) un couple de variables aléatoires de densité conjointe :

$$f_{UV}(u,v) = \left\{ \begin{array}{l} \gamma(2u^2v+1), (v,v) \in D \\ 0, \text{ ailleurs} \end{array} \right.$$

où $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid |u| < 1, |u-1| < 1\}$.

Exercice 2. Questions.

1. déterminer la valeur de γ
2. déterminer si (U,V) sont *indépendantes*
3. déterminer si (U,V) sont *corrélées*
4. déterminer la loi du couple (A,B) : où $A = U\cdot V,\ B = V$

h : fonction test : $\int h(A,B)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int h(U{\cdot}V,V)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \iint_D h(uv,v)f_{UV}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_{D'} h(a,b)f(\ldots)\mathrm{d}$

$$J_{g^{-1}}(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & -\frac{a}{b^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g : \left\{ \begin{array}{l} a = uv \\ b = v \end{array} \right. \quad g^{-1} : \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{a}{b} \\ v = b \end{array} \right.$$

$|\det J_{g^{-1}}| = \frac{1}{b} = \frac{3}{20}\iint_{D'=g(D)} h(a,b)(2\frac{a^2}{b}+1)\frac{1}{b}\mathrm{d}a\mathrm{d}b \Rightarrow f_{AB}(a,b) = \frac{3}{20}(2\frac{a^2}{b}+1)\frac{1}{b}\mathbb{1}_{D'}(a,b)$ Draw $D' = g(D) = \{(a,b), b \in [0,2] \quad -b < a < b\}$ Is it difféomorphisme ? Yes, car ...

Définition 13. Si X et Y sont 2 v.a. on définit la COVARIANCE entre X et Y comme $\mathrm{Cov}(X,Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 3. Soit X une v.a. de loi $N(0,1)$ et Y une v.a. discrète de loi $\frac{1}{2}\{\delta_{(-1)}+\delta_1\}$ indépendante de X.

— Montrer que la loi de $Z = X \cdot Y$ est $N(0,1)$
— Montrer que (X,Z) ne sont pas corrélées
— Calculer $\mathbb{E}(X^2Z^2)$
— Déterminer si (X,Z) sont indépendantes

Loi de Z.

$F(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x\cdot y \leq t\}}(x\cdot y)\,\mathrm{d}P_{XY}(x,y) \stackrel{indpendantes}{=} \int\int \mathbb{1}_{\{x\cdot y\leq t\}}(x\cdot y)\,\mathrm{d}P_Y\,\mathrm{d}P_X = \int \mathrm{d}P_X\,(\frac{1}{2}\mathbb{1}_{-x\leq t}(-x)+\frac{1}{2}\mathbb{1}_{+x\leq t}(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \mathrm{d}x\,e^{-\frac{x^2}{2}}(\frac{1}{2}\mathbb{1}_{-x\leq t}(-x)+\frac{1}{2}\mathbb{1}_{+x\leq t}(x)) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}xe^{-x^2/2}$ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}\int_{-t}^{\infty}\mathrm{d}xe^{-x^2/2} = \frac{1}{2}\int_{\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \simeq N(0,1)$

Exercice 4. Soient X et Y deux va indépendantes dont X est un variable de Bernoulli $B(1/2)$ et Y suivra deux lois i Y est une variable normale $N(0,1)$ ii Y a fonction de répartition $F_y(t) = tt \in [0,1]$. Dans les deux cas calculer la fonction de répartition $Z = X \cdot Y$.

1.4 Fonction génératrice

X set une v.a. discrète a valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{0\}$

Ex Bernoulli $(0,1)$ $B(p)$ $P_X = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$ Binomiale $B(n,l)$ valeurs $1,\ldots,N$ $\mathbb{P}(x=k) = C_n^k p^k(1-p)^{N-k}$ Géométrique Valeurs de $G = \{0,1,2,\ldots\}$ $\mathbb{P}(G=k)(1-p)^{k-1}p$ Poisson valeurs $0,1,2,\ldots$ $\mathbb{P}(p=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

Résultat très intéressant Binomiale N très grand p très petite $N\cdot p = O(1)$ $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k(1-p)^{N-k}$ $G(N\cdot p)$

Définition 14. FONCTION GÉNÉRATRICE de X :

$$g_x(s) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i s^i$$

(série entière, "power" séries), où la loi de X est $P_X = \sum_{i=0}^{\infty} p_i\delta_{\{i\}}$.

Proposition 10. *Si on connait $g_X(s)$ on connaît la loi, c-a-d les $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$. D'abord la série converge pour $s\in[-1,1]$ et uniformément pour $s\in]-1,1[$.*

Démonstration. La série peut être dérivée terme-à-terme pour $s \in (-1, 1)$.

$$g'_X(s) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i i s^{t-1}$$
$$g''_X(s) = \sum_{i=2}^{\infty} p_i i(i-1) s^{t-1}$$
$$\cdots g_X^{(k)}(s) = \sum_{i=k}^{\infty} p_i i(i-1)...(i-k+1) s^{i-k}$$

On calcul $g^{(k)}(0)$.

$$p_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$$

□

Attention. $g_X(s) - \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i$. On dérive $g'_X(s) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i i s^{i-1}$. Supposons qu'on puisse étendre la dérivée dans $s = 1$ $g'_X(1) = \sum^{\infty} p_i i = \mathbb{E}(X)$

Application.

— $X \sim B(N, p)$ v.a.
$\mathbb{E}(x) = \sum_{k=0}^{N} k C_N^k p^k (1-p)^{N-k} =? Np$ On utilise la fonction génératrice : $g_X(s) = \sum_{k=0}^{N} C_N^k p^k (1-p)^{N-k} s^k = \sum C_n^k (ps)^k (1-p)^{N-k} = [ps + (1-p)]^N$ $g'_X(s)|_{s=1} = N[p + (1-p)]^{N-1} \cdot p|_{s=1} = Np$

— X v.a. Poisson $\mathbb{E}(P) = \lambda$ $\mathbb{E}(P) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $g_P = \sum_{k=0}^{\infty} ... = e^- \lambda e^\lambda s$

Lemme 1. *(Abel)*

1. *Si la série* $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \alpha$ *alors* $\lim_{s \to 1^-} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i s^i = \alpha$
2. *Si les* α_i *sont positifs et si* $\lim_{s \to 1^-} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i s^i = \alpha < +\infty$, *alors* $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \alpha$.

Démonstration. $g_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i$ (1) Supposons que $\mathbb{E}(X) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} i p_i = \mathbb{E}(X)$ donc on est dans la partie 1 du Lemme Donc

$$\lim_{s \to 1^-} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} i p_i s^i}_{g'_X(s)} = \mathbb{E}(X)$$

□

Proposition 11. *On a* $\mathbb{E}(X(X-1)...(X-r+1)) = \lim_{s \to 1^-} g_X^{(r)}(s) := g_X^{(r)}(1)$. *Cas particulier* $\mathbb{V}(X) = g''_X(1) + g'(1) - [g'_X(1)]^2$

1.4.1 Fonction génératrice des moments

une v.a. quelconque $u \in \mathbb{R}$; $G_X(u) = \mathbb{E}(e^{uX}) = \int_\Omega e^{uX}\, d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} e^{uX}\, dP_X x$

Fonction génératrice pour de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Si X est une telle v.q. sa loi $P_X = \sum_i p_i \delta_{\{i\}}$ avec fonction génératrice

$$G_X(s) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i s^i,$$

$|s| \leq 1$ avec convergence uniforme pour $|s| < 1$.

Exercice 5. Soit X et Y deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{0\}$ et indépendantes. Calculer la fonction génératrice de la v.a. $Z = X + Y$.

> **Définition 15.** Si X est une v.a. quelconque, on définit, pour $v \in \mathbb{R}$ $g_X(u) = \mathbb{E}(e^{uX})$ la fonction génératrice des moments.

Remarque. *Si X est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{0\}$ et si on pose $e^u = s$, on retrouve la fonction génératrice.*

Propriétés de $g_X(u) = \mathbb{E}(e^{uX})$

1. $g_x(u)$ est toujours défini pour $u = 0$
2. Si X est borne alors g_X est bien défini et continue pour $u \in \mathbb{R}$ (borne est limite)

$$g_X(u) = \int_\Omega e^{uX(\omega)}\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$

   $\lim_{u \to u_0} g_X(u) = \lim_{u \to u_0} \int_\Omega e^{uX(\omega)}\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$
   Rappel. $\lim_{\rho \to \bar{\rho}} \int f(x, \rho)\, \mathrm{d}\mu(x)$ ⊜
   Si :
   (i) $\lim_{\rho \to \bar{\rho}} f(x, \rho)$ *existe*
   (ii) $|f(x, \rho)| \leq h(x)$ $h \geq 0$ *indépendante de* ρ *et* $\int h(x) < \infty$
   alors ⊜ $\int \lim_{\rho \to \bar{\rho}} f(x, \rho)\, \mathrm{d}\mu(x)$.

3. Si $a, b \in \mathbb{R}$,$g_{aX+b}(u) = e^{ub} g_X(au)$
4. $g_X(-u)$ est la fonction génératrice des moments de la v.a. $Y = -X$
5. g_X est convexe.
6. Si X et Y sont indépendantes et chacune admet une fonction génératrice, alors $g_{X+Y}(u) = g_X(u) g_Y(u)$

Exercice 6. Soit $Y = N(0, 1)$ montrons que $X = e^Y$ a une fonction génératrice des moments qui ne pas définie pour $u > 0$.

Remarque (important)**.** *La fonction génératrice des moments est* `importante et utile` *si elle existe pour u dans un voisinage de 0.*

Théorème 4. *Soit X une v.a. et $g_X(u)$ sa fonction génératrice des moments en définie pour $-u_0 < u < +u_0$ (intervalle ouvert), alors :*

1. $\mathbb{E}(|X|^k) < \infty$, $\forall k \geq 0$
2. $\forall u \in]-u_0, u_0[$:

$$g(u) = 1 + \mathbb{E}(X)u + \frac{u^2}{2!}\mathbb{E}(X^2) + ... + \frac{u^n}{n!}\mathbb{E}(X^n) + ...$$

   (série convergente)

3. $\forall k \geq 1 g_X^{(k)}(u = 0) = \mathbb{E}(X^k)$—*moment d'ordre k de X.*

Exercice 7. $X = N(0,1)$ $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. $\mathbb{E}(X) = 0$ $\mathbb{V}(X) = 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$. $g_X(u) = \mathbb{E}(e^{uX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,\mathrm{d}y = e^{\frac{1}{2}u^2}$. $g''_X(u) = e^{\frac{1}{2}u^2} + u^2 e^{\frac{1}{2}u^2}|_{u=0} = 1 = \mathbb{V}(X)$.

Exercice 8. Trouver $g_X(u)$ pour $X = \mathcal{E}(\lambda)$, où $\mathcal{E}$ est la v.a. exponentielle de paramètre λ.

Exercice 9. Loi de Cauchy : $f_X(x) = \frac{1}{\pi\gamma[1+(\frac{x-x_0}{\gamma})^2]}$ Pour $x_0 = 0$, $\gamma = 1$ $f_X(x) = \frac{1}{\pi[1+x^2]}$. $\mathbb{E}(X) = \infty$. $g_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ux}}{\pi[1+x^2]}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ux}}{\pi[1+x^2]}\,\mathrm{d}x}_{<+\infty} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{e^{ux}}{\pi[1+x^2]}\,\mathrm{d}x}_{+\infty}$.

$u = 0$ bon, toujours
$u < 0$

Démonstration. Le preuve sera faite pour des v.a. à densité. On appelle $f_X(x)$ la densité. Donc : $\mathbb{E}(|X^k|) = \int_{\mathbb{R}} |x^k| f_X(x)\,\mathrm{d}x$ On sait que : $e^{s|x|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k|x|^k}{k!}$ $(\Rightarrow |x|^k \leq \frac{e^{s|x|}k!}{s^k})$. On sait par hypothèse que $\mathbb{E}(e^{uX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} f_X(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ pour tout $u : -u_0 < u < u_0$. $\mathbb{E}(|X^k|) = \int_{\mathbb{R}} |x^k| f_X(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{k!}{s^k} \int_{\mathbb{R}} e^{-s|x|} f_X(x)\,\mathrm{d}x$ Si on choisit $-u_0 < s < u_0$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{sx} f_X(x)}_{g_X(s)}\,\mathrm{d}x < \infty$ car et de la même manière $\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x)\,\mathrm{d}x = g_{-x}(s) < +\infty$
$\leq \frac{k!}{s^k}[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f_X(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x)\,\mathrm{d}x]$ (voir une des proposition affichée)

$\mathbb{E}(g(x)) = \int g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x$, $\mathbb{E}(-x) = \int -x f_X(x)\,\mathrm{d}x$. □

Preuve de (2). On sait que $-u_0 < u < u'_0 < u_0$ $g_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{ux} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0} \infty \frac{(ux)^k}{k!} f_X($ $(justifier!) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} x^k f_X(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \mathbb{E}(x^k)$.

Question interchangeable la limite avec l'intégrale. $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(ux)^k}{k!} f_X(x)\,\mathrm{d}x$ (1)cette limite doit exister mais ça c'est vrai : $f_X(x)e^{ux}$. (2)$|\sum_{k=0}^{n} \frac{(ux)^k}{k!} f_X(x)| \leq f_X(x) \sum_{k=0} n$ $f_X(x) \sum_{k=0} \infty \frac{u_0^k |x|^k}{k!} \leq f_X(x) e^{u'_0(x)}$

Nous reste à montrer que $\int_{\mathbb{R}} e^{u'_0|x|} f_X(x) < \infty$. □

— Fonction génératrices
— Fonction génératrices des moments.
— Fonction caractéristique (on pourra démontrer Hiremeieme centrale limite)
— (caractérisation la convergence en distribution en loi)

Définition 16. Soit X une v.a. (vectorielle) ; on pose :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}),\ i = \sqrt{-1}$$

On appelle $\varphi_X(t)$ LA FONCTION CARACTÉRISTIQUE de X.

Remarque. *Si X est vectorielle $tX = \sum_{i=1}^{d} t_i x_i$, $t = (t_1, ..., t_d)$. Pour un moment on considère $X : \Omega \to \mathbb{R}$ (salaire, pas vectorielle).*

Remarque. *Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ a densité $f_X(x)$ alors $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)\,\mathrm{d}x$ transformée de Fourrier de f_X.*

Remarque. *En général si X a loi P_X, on a $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, \mathrm{d}P_X(x)$. On avait dit que la loi P_X est la mesure de Lebegue-Stilties engendres par la fonction de répartition F_X de X. $P_X((a,b]) = F_X(b) - F(a)$.*

Proposition 12.

1. *$\varphi_X(t)$ est définie et continue pour $t \in \mathbb{R}$ est aussi bornée.*
2. *$\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$*
3. *(Importante !) Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ une suite de v.a. toutes définies sur la même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et indépendantes.*

On définit $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n : \Omega \to \mathbb{R}$. $\varphi_{S_n}(t) = \mathbb{E}(e^{itS_n}) = \mathbb{E}(e^{it(X_1+...+X_n)}) = \mathbb{E}(e^{itX_1}...e^{itX_n}) = \prod_{j=1}\mathbb{E}(e^{itX_j})$

Exemple 1. $X = N(0,1)$. On a : $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ (très important pour le Th. central limite) $e^{itx} = \cos tx + i \sin tx$ $\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos txe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sin txe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x}_{0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos txe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ On sait que : $\varphi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos txe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

On dérive par rapport à t. $\varphi'(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}d/dt\int_{-\infty}^{\infty}\cos txe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x == \exists d/dt \cos txe^{-\frac{x^2}{2}} = -\sin txe^{-\frac{x^2}{2}}x == \frac{t}{\sqrt{2\pi}}\varphi_X(t)$ Donc $\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\varphi_X(t) = \varphi'(\tau)\varphi(0) = 1 : \int_{\varphi(0)}\frac{1}{\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^t \frac{t}{(}\sqrt{2\pi})\,\mathrm{d}t$ $\varphi(t) = e^{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{t^2}{2}}$

$(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} C_n^k a^k b^{N-k}$

1. binomiale $B(N,p)$ $q = 1-p$ $\varphi_X(t) = (q+pe^{it})^N$ $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{N} e^{itk}C_n^k p^k q^{N-k}$ $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{N} C_n^k (e^{it}p)^k q^{N-k}$
2. Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$ $\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$
3. Poisson (discrète) loi $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ Exercice : Calculer loi fonction caractéristique pour Exponentielle et Poisson.

Théorème 5. *Soit $X : \Omega \to \mathbb{R} et \varphi_X(t)$ sa fonction caractéristique. On a :*

1. *φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}$*
2. *Si $\mathbb{E}(|X|^2) < \infty, \forall n \geq 1$ alors $\varphi_X^{(r)}(t)$ existe pour $r \leq n$ et $\varphi^{(r)}(t) = \int_{\mathbb{R}}(ix)^2 e^{itx}\,\mathrm{d}F_X(t)$ et $\mathbb{E}(X^r) = \frac{\varphi^{(r)}(0)}{i^r}$ $\Phi_X(t) = \sum_{i=0} n\frac{(it)^2}{r!}\mathbb{E}(X^2) + \frac{(it)^r}{n!}E_n(t)$ avec $|E_n| \leq 3\mathbb{E}(|X|^n) \to 0$, $t \to 0$.*
3. *Si $\Phi_X^{(n)}(0) < +\infty$ alors $\mathbb{E}(X^{2n}) < \infty$*
4. *Si $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty, \forall n \geq 0$ et $\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}(|X|^n)^{\frac{1}{r}}}{n} = \frac{1}{eR} < +\infty$ alors $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}(X^n)$, $|t| < R$*

Rappel. *Critère de Cauchy, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ le rayon de convergence R est donne par $\lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$.*

Démonstration. (ii) on sait que pour un certain n $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$, alors $\forall r \leq n$, $\mathbb{E}(|X|^2) < \infty$ car $L^n(\mathbb{P}) \subset L^r(\mathbb{P})$ si $\mathbb{P}$ est une mesure de probababilité. On va montrer la formule pour $r = 1$, pour $r1$ la preuve est singulière. On applique la définition de dérivée. $\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} = \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{i(t-h)}-e^{it}h}{\mathrm{d}}F(x) = \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{itx}(e^{ihx}-1)}{h}\,\mathrm{d}F(x)$. Considérons cette partie

$\frac{e^{ihx}-1}{h} = \frac{1+ihx+O(|x|^2)-1}{h}$. On développe e^{ixh} en X autour de 0 : $e^{ihx} = 1 + ihx + O(|x|^2)$
$\frac{|e^{ihx}-1|}{h} = \frac{|e^{ihx}-e^{ih0}|}{h} = \frac{|e^{ih\eta}hx|}{h} = |x|$

$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} \stackrel{?}{=} \lim_{h\to 0} \int \frac{e^{i(t-h)}-e^{it}}{h}\, \mathrm{d}F(x)$

Peut-on ramener la limite dans l'intégrale ?

— la limite dans l'intégrale doit exister

— la valeur absolue de (Fonction à l'intérieur de l'intégrale) doit être borne par une fonction sommable et indépendante de h

$\varphi_X^{(r)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^2 e^{itx}\, \mathrm{d}F_X(t)$.

$\lim_{h\to 0} \frac{e^{i(t-h)}-e^{it}}{h} = ixe^{itx}$

□

Théorème 6. *Soit F et G deux fonctions de répartition (on deux lois) avec la même fonction caractéristique*

$$\int e^{itx}\, \mathrm{d}F(x) = \int e^{itx}\, \mathrm{d}G(x)\,, \forall t \in \mathbb{R}$$

alors $F = G$.

On a besoin d'une résultat technique. Toute fonction réelle continue sur l'intervalle $[-n, n]$ avec les mêmes valeurs sur les bords, peut être uniformément approximée par des polynômes trigonométriques.

$f_{\varepsilon,\eta}(x) = \sum_{k=1}^{N<\infty} a_k \exp\left(i\pi x \frac{k}{\eta}\right),\ a_k \in \mathbb{R}$

$\sup_{-n\leq X<n} |f_{\varepsilon,\eta} - f_\varepsilon(x)| < \delta_n \to 0 n \to \infty$

Exercice 10. Soient X et Y deux v.a. indépendantes ses lois exponentielles respectivement $\lambda e^{-\lambda x}$, $\mu e^{-\mu x}$. Posons :
$U = \min(X, Y)$
$V = \max(X, Y)$ $W = V - U$

1. Calculer $\mathbb{P}(U = X)$
2. Montrer que U et W sont indépendantes. (Idée estimer d'abord $\mathbb{P}(U \leq u, W > w)$ en décomposant l'élément $(U \leq u, W > w)$ sur le système complet d'éléments $\{X \leq Y, X > Y\}$.
3. Calculer la loi de V.

Théorème 7. *Si $\int e^{itx}\, \mathrm{d}F(x) = \int e^{itx}\, \mathrm{d}G(x)$ alors $F(x) = G(x)$.*

Tout caractéristique égale $\Rightarrow$ Lois égale.

Démonstration. On a besoin de considérer la fonction suivante.

$$f_{\varepsilon,n}(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \exp\left(i\pi x \frac{k}{n}\right)$$

$\sup_{-n\leq x\leq n} |f_{\varepsilon,n}(x) - f_\varepsilon(x) \leq \delta \to 0\ n \to +\infty$ On fait la preuve (pour la simplicité) avec des densité $f(x),\ g(x)$. $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_{\varepsilon,n}(x)| = \sup_{x\in(-n,n)} |f_{\varepsilon,n}(x)| = \sup_{x\in(-n,n)} |f_{e,\nu} - \varphi_e(\chi)| + \sup_{x\in(-n,n)} |f_\varepsilon(x)| \leq \delta_n + 1 \leq 2$.

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon,n}(x)h(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{N} a_k \int \exp\left(i\pi x\frac{k}{n}\right)h(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{N} a_k \int \exp\left(i\pi x\frac{k}{n}\right)g(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon,n}g(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon,n}(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon,n}(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$|\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,| = |\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon h\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon g\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon n} h\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f_{\varepsilon n} h\,\mathrm{d}x + \int f_{\varepsilon n} g\,\mathrm{d}x$$

$|\int_{\mathbb{R}}(f_\varepsilon - f_{\varepsilon n})h\,\mathrm{d}x\,| + |\int(f_\varepsilon - f_{\varepsilon n})g\,\mathrm{d}x\,| + |\int f_{\varepsilon n}g\,\mathrm{d}x\,| + |\int f_{\varepsilon n}h\,\mathrm{d}x\,| \leq \delta_n + 2F_h(-n) + 2(1-F_h(n)) + \delta_n + 2F_g(-n) + 2(1-F_g(n)) \to 0$

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} f\varepsilon(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to}\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)g(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow a, barbitraire \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int)a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

□

SSi deux v.a. ont la même fonction caractéristique, elles $\underline{\underline{\text{ont}}}$ la même loi.

Si C est une v.a. $\varphi_X(t) = \int_\Omega e^{itX}\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} e^{itX}\,\mathrm{d}P_X(x)\, densit \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)\,\mathrm{d}x$

Objectif. Si on connaît $\varphi_X(t)$, peut-on calculer la loi $P_X(x)$? Ou la densité ? Si $\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x$—transformée de Fourier. Comment peut-on calculer $f_X(x)$?

Rappel. *Si $\varphi_X \in L^1(\mathbb{R}, Lebesgue) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)\,\mathrm{d}t$.*

Théorème 8 (formule d'inversion). *Soit $\varphi(t)$ la fonction caractéristique de la fonction de répartition $F(x)$. C'est-à-dire $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mathrm{d}F(x)$. On a :*

— *Pour deux points a<b où F est continue*

$$F(b) - F(a) = \lim_{c\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Si $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|\mathrm{d}t < \infty$, et F à une densité f alors $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ (transformée de Fourier inverse)

$F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_a^b(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)(\frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{it})\,\mathrm{d}t$

Démonstration. Introduisons la quantité $\Phi_c = \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}[\int_{-c}^{\infty}$ Supposons de pouvoir interchanger les intégrales $= \frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}F(x)\,[\int_{-c}^{c} e^{itx}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\,\mathrm{d}t]$, [] - $\Phi_c(x)$ Si $\Phi_c(x)$ vérifie $\int|\Phi_c(x)|\,\mathrm{d}F(x) < \infty$ on peut interchanger les intégrales. $\Phi_c(x) = \int_{-c}^{c} e^{itx}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\,\mathrm{d}t$, -inside int Montrer que (t) est sommable par rapport à t. C'est vrai !$e^{-ita} = 1 - ita + o(t^2)e^{-itb} = 1 - itb + o(t^2)$ Si on fait le calcul explicite on trouve. $\Phi_c(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{\sin t(x-a) - \sin t(x-b)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-c(x-a)}^{c(x-a)}\frac{\sin v}{v}\,\mathrm{d}v - \frac{1}{2\pi}\int_{-c(x-b)}^{c(x-b)}\frac{\sin v}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}F(x)\,[\int_{-c}^{c} e^{itx}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}]$ La fonction $f(s,t) = \int_s^t\frac{\sin v}{v}\,\mathrm{d}v$ On peut montrer que $g(s,t) \to \pi$ quand $t \to +\infty, s \to -\infty$. Passons à la limite $c \to +\infty$ dans $\Phi_c(x)$ $(C > 0)$ La fonction $\Phi_c(x)$ converge vers $\Phi(x)$ donnée par : $\Phi(x) = 0$ si $x \notin (a,b)$, $1/2$ si $x = a$ ou $x = b$, 1 si $x \in (a,b)$ et donc Φ est bornée.

$= \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}F(x)\,\Phi_c(x)\,\mathrm{d}x \overbrace{c\to\infty} \to \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}F(x)\,\Phi(x)$. $\lim_{c\to\infty}\Phi_c = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi($
$\frac{1}{2\pi}\int \varphi(x)\,\mathrm{d}F(x)$

C'est quoi $\frac{1}{2\pi}\int \varphi(x)\,\mathrm{d}F(x)$ avec F une fonction de répartition ?

La mesure de Lebesgue-Stiltjes $\mathrm{d}F$ engendre par F vérifie $\mathrm{d}F([a,b]) = F(b)-F(a)$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{a}\varphi(x)\,\mathrm{d}F(x) = 0$ $\frac{1}{2\pi}\int_{\{a\}}\varphi(x)\,\mathrm{d}F(x) = 0$

$\frac{1}{2\pi}\int_{\{a\}}\varphi(x)\,\mathrm{d}F(x) = \frac{1}{2\pi}\varphi(a)[F(a)-F(a-0)]$

$\mathrm{d}F(\{a\}) = F(a)-F(a-0)$

$== \frac{1}{2\pi}\varphi(a)[F(a)-F(a-0)] + F(b-0)-F(a) + \frac{1}{2\pi}\varphi(b)[F(b)-F(b-0)] = F(b)-F(a)$.

Dernière partie On suppose $\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$. On applique le th président : $F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{2\pi}$ □

1.5 Espérances conditionnelles

1 (as discret) On a 2 v.a. discrètes : $X = \sum_i x_i \mathbb{1}_{A_i}, Y = \sum_j y_h \mathbb{1}_{B_j}$ $P_X = \sum_i p_i\delta_{\{x_i\}}$ $P_Y = \sum_j q_j\delta_{\{y_j\}}$

Définition 17. On appelle loi de probabilité de Y conditionnelle à $X = x_j$ la quantité suivante : $\sum_j b_i(j)\delta_{\{y_j\}}, ob_i(j) = \frac{\mathbb{P}(Y=Y_j, X=X_i)}{\mathbb{P}(X=X_i)} = \frac{Y=Y_j|X=X_1}{=}\frac{p_{ij}}{p_i}$?

Supposons que Y a une espérance finie, c-a-d $\mathbb{E}(|Y|) = \sum_j |y_j|q_j < +\infty$. Si cette Hypothèse est vraie on a aussi que :

$$\sum_j Y_j b_{ij} = \sum_j y_j\mathbb{P}(Y=Y_j|X=X_i) < \infty$$

$\mathbb{E}(Y) = \sum_j y_h q_j = \sum_j y_j\mathbb{P}(Y=Y_j)$

Notations 2. $\mathbb{E}(Y)(Y|X=x_0) = \sum_j y_j\mathbb{P}(Y|X=x_i)$ *Cette quantité dépend de* $\{x_i\}$. *Donc cela nous suggère d'introduire une nouvelle v.a. à valeurs* $\mathbb{E}(Y|X=x_i)$ *et poids* $p_i = \mathbb{P}(X=x_i)$

Définition 18. Cette v.a. qu'on vient de construire et dénotée $\mathbb{E}(Y|X)$ et on l'appelle L'ESPÉRANCE.

$$\mathbb{E}_X(\mathbb{E}(Y|X)) = \sum_i \mathbb{E}(Y|X=x_i)p_i = \sum_i\sum_j y_j p_{ij}p_i = \sum_j Y_j(\sum_i p_{ij}p_i) = \sum_j y_j q_j = \mathbb{E}(Y)$$

Cas contenu $X \mapsto f_x(x)$ densité, $Y \mapsto f_Y(y)$ aussi densité. Rappels : $f_X(x) = \int f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}y$.

Définition 19. On définit LA DENSITÉ conditionnel de Y et sachant la valeur $\{X=x\}$ la fonction de y : L'espérance conditionnelle de X en sachant $\{Y=y\}$

Si $f_X(x) \neq 0$ on a : $f_{XY}(x,y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$ Cet égalité vraie aussi si $f_X(x) = 0$! Pourquoi ? Supposons que $f_X(x) = 0$. donc $f_{XY}(x,y) = 0$ $\forall$ presque toute y.

Définition 20. On appelle L'ESPÉRANCE conditionnelle de Y en sachant X, dénotée $\mathbb{E}(Y|X)$ la variable aléatoire à valeurs $\mathbb{E}(Y|X=x)$ et densité $f_X(x)$ et $\mathbb{E}(Y|X=x) = \int y \underbrace{f_{Y|X}(y|x)}_{\text{espérance conditionnelle de } Y \text{ en sachant } X=x} \mathrm{d}y$.

Proposition 13. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) \overset{?}{=} \mathbb{E}(Y)$. *Ce vraie.*

Démonstration. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(Y|X=x) f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} (\int y f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y) f_X(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{change ?}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, y (\int f_{Y|X}(y|x) f_X(x)\,\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, y f_Y(y) = \mathbb{E}(y)$ $\int |y| f_{Y|X}(y)\,\mathrm{d}y < +\infty$ Suffit de découvrir que $\int |y| f_Y(y) < \infty$? Fubini : $\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ * si $\int\int |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty$ * on peut iterer les intégrales * *si* $\int |f(x,y)|\,\mathrm{d}x < \infty$ et $\int \mathrm{d}y \int |f(x,y)|\,\mathrm{d}x < \infty$ alors on peut inter-changer les intégrales. $\int\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, |y f_{Y|X}(y|x) f_X(x)| = \int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, |y| f_{XY}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} |y|\,\mathrm{d}y \int \mathrm{d}x\, f_{XY} f_{XY}(x,y) Y \in L^1(\mathbb{P})$. □

Définition 21 (Règle de calcul)**.** Soient X et Y a densité. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mesurable et on définit $g(X,Y)$. On définît : $\mathbb{E}(g(X,Y)|X)$ de cette manière : $\mathbb{E}(g(X,Y)|X=x) \overbrace{\text{def}} = \int g(x,y) f_{X|Y}(x,y)\,\mathrm{d}y$.

Définition 22. Soit $A \subset \Omega$ une ensemble mesurable dans l'univers Ω, et soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. à densité $\P(A|X=x) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|X=x) = \int \mathbb{1}_A(x,y) f_{X|Y} f_{Y|X}(x|y)\,\mathrm{d}y$.

Exemple 1. Calculer la probabilité que $\mathbb{P}(X<Y)$ $A = \{X<Y\}$ $\mathbb{P}(X<Y) = \mathbb{P}(A)$.

Proposition 14. *On a :*

1. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(g(X,Y)|X)) = \mathbb{E}(g(X,Y))$
   $\mathbb{1}_A(X,Y) = g(X,Y) = g \circ (X,Y)$ $g(x,y) = \mathbb{1}_{\{x<y\}}(x,y)$ $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|X))$
2. *Si X et Y sont indépendantes* $\mathbb{E}(g \circ Y|X) = \mathbb{E}(g \circ Y)$
3. $\mathbb{E}(g \circ X|X) = g \circ X$
4. $\mathbb{E}[(g_1 \circ X)(g_2 \circ Y)|X] = g_1 \circ X \mathbb{E}(g_2 \circ Y|Y)$

Démonstration. $\int (\mathbb{E}(g(X,Y)|X=x)) f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int (\int g(x,y) f_{Y|X})\,\mathrm{d}y) f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}y\, (\int g(x,y$
$\mathbb{E}(g(X,Y))$. Hyp $\int\int |g(x,y)| f_{X,Y}(x,y) < \infty$. □

1.6 Convergence de variables aléatoires

Idée On a une suite de v.a. $\{X_n\}_{n\geq 1}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Est-ce que X_n *converge* pour $n \to +\infty$? Il y a plusieurs façon de converger.

1.6.1 Convergence en probabilité

Définition 23. On dira que la suite X_n CONVERGE EN PROBABILITÉ vers la v.a. X aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et on écrit $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, si $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0 \; n \to \infty.$$

Remarque. $\mathbb{P}(\omega \in \Omega : \; |X_n(\omega) - (\omega)| > \varepsilon)$

1.6.2 Convergence en norme L^p

Définition 24. On dira que X_n CONVERGE EN NORME L^p vers X et on écrira $X_n \to^{L^p} X$ si

$$\|X - X_n\|_p \to 0, \; n \to \infty.$$

Remarque. $\|X\|_p = (\int |x|^p \, \mathrm{d}\mathbb{P})^{\frac{1}{p}}$.

Proposition 15. *Si X_n converge en norme L^p vers X pour un certain p alors X_n converge en probabilité vers X.*

Démonstration. Est base sur l'inégalité de Chebyshev. $\mathbb{P}(X > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}(X)$ $\mathbb{E}(X) = \int_\Omega \mathbb{P} = \int_{\{X>\varepsilon\}} X \, \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{\{X \leq \varepsilon\}} X \, \mathrm{d}\mathbb{P} \geq \varepsilon \mathbb{P}(X > \varepsilon)$ On a : $\|X_n - X\|_p \to 0$ $\mathbb{P}(|X_n - X|^p > \varepsilon^p) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int |X_n - X|^p \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \frac{1}{\varepsilon^p} \|X_n - X\|_p^p \to 0$. □

1.6.3 Convergence presque partout

Définition 25. On dira que la suite $\{X_n\}_{n \geq 1}$ converge PRESQUE PARTOUT vers X et on écrira : $X_n \xrightarrow{\mathrm{PP}} X$ s'il existe un ensemble $N \in \mathcal{A}$, N—négligeable ($\mathbb{P}(N) = 0$) tel que, $\forall \omega \in N \diagdown C$ on a $\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$.

Théorème 9. *Si $X_n \xrightarrow{PP} X$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \tilde{\Omega}_\varepsilon$ mesurable et tel que $\mathbb{P}(\Omega | \tilde{\Omega}_\varepsilon) < \varepsilon$ et $\forall \omega \in \Omega_\varepsilon$ $\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ uniformément.*

1.6.4 subsection name

Remarque. *Pour signifier des notations on supposera que la v.a. limite $X = 0$.*

Introduisons la quantité, $\forall \varepsilon > 0$, $E_n(\varepsilon) = \{|X_n| > \varepsilon\} = \{\omega \in \Omega, |X_n(\omega)| > \varepsilon\}$, $E_n(\varepsilon) = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$. $E_n(\varepsilon) = \{|X_n| > \varepsilon\}$.

Définition 26 ($\limsup$ d'une suite d'ensembles)**.** $\limsup_{n \to \infty} E_n(\varepsilon) \cup_{k \geq n} E_k(\varepsilon)$

Si $X \in \limsup_{n \to \infty} E_n(\varepsilon)$ $<=>$ $x \in \cup E_k(\varepsilon)$, $\forall n$ $<=>$ $x \in E_j j \geq n \mid x \in$ une infinité d'ensembles E_n.

A l'aide du $\limsup_{n\to\infty} E_n(\varepsilon)$ nous allons caractériser l'ensemble de divergence D de la suite $\{N_n\}_{n\geq 1}$ vers. 0, c-a-d. la suite où X_n ne converge pas vers $X = 0$.

$D = \cup_{\varepsilon>0} \cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} E_k(\varepsilon)$. Si $\omega \in D \subset \Omega$ la suite $X_n(\omega) \not\to 0$. Si $\omega \in D$ <=> $\omega \in \cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} E_n(\varepsilon)$ pour un $\varepsilon > 0$.

Remarque. *L'ensemble des points (ω) de convergence C ver $X = 0$, et donc le complémentaire de D.*

$$C = D^C = \cap_{\varepsilon>0} \cup_{n\geq 1} \cap_{k\geq n} \{|X_n| \leq \varepsilon\}.$$

Il faut montrer que D est mesurable (c-s-d il est dans la σ-algèbre). Grace à la monotonie (dans le sens de l'inclusion) des ensembles $E(\varepsilon)$, on a :

$$D = \cup_{l=1}^{\infty} E(\frac{1}{l}).$$

Donc D est mesurable.

> **Définition 27** (équivalente de convergence PP)**.** On dira que la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ converge ver $X = 0$ Presque Partout si $\forall \varepsilon > 0$ $\mathbb{P}(E(\varepsilon)) = 0$.

Cette définition s'appuie sur ce résultat.

Proposition 16. *On a équivalence entre*

(i) $\mathbb{P}(D) = 0$ *et*

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \mathbb{P}(E(\varepsilon)) = 0$.

Démonstration. (i) => (ii) et après (ii) => (i).

$0 = \mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(\cup_{l=1}^{\infty} E(\frac{1}{l})) = \mathbb{P}(E(\frac{1}{l}))$ => $D \supset E(\frac{1}{l}), \forall l \geq 1$ => $\mathbb{P}(E(\frac{1}{l})) = 0 \forall l$.

$\forall \varepsilon > 0$ $\mathbb{P}(E(s)) = 0$ Hypothèse $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(\cup_{l=1}^{\infty} E(\frac{1}{l})) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{P}(E(\frac{1}{l})) = 0$. □

$E(\varepsilon) = \limsup_{n\to\infty} E_n(\varepsilon) = \cup_{n\geq 1} \cap_{k\geq n} E_k(\varepsilon)$.

Lemme 2 (Borel-Cantelle)**.** *Soit $\{A_n\}_{n\geq 1}$ une suite qq d'événements.* $\limsup_{n\to\infty} \cap_{n>1} \cup_{k\geq n} A_k = \hat{A}$

$\hat{A}$, *ensemble des points qui sont dans une infinité de $\{A_n\}$ supposons que $\mathbb{P}(\hat{A}) = 0$ <=> presque tous les points seront dans un nombrable* $\lim$ *des $\{A_n\}$.*

Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ alors $\mathbb{P}(\hat{A}) = 0$.

Démonstration. $\mathbb{P}(\hat{A}) = \mathbb{P}(\cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq m} A_k) \leq \mathbb{P}(\cup_{k\geq n} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$ Reste d'une série convergente. $= 0$ □

Théorème 10. *La convergence PP-entière la convergence en probabilité. En effet nous allons montrer que si $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est une suite des v.a. qui converge ver 0 PP alors on a : la suite $Y_n = \sup_{k\geq n} |X_k|$ converge vers 0 en probabilité.*

Démonstration. $\cup_{k\geq m} E_n(\varepsilon) \overset{?}{=} \{\sup_{k\geq n} |X_k| > \varepsilon\}$. Pourquoi ? $\cup_{k\geq n} E_k(\varepsilon) = \cup_{k\geq n} \{|X_k| > \varepsilon\}$.

— ere partie. $\cup_{k\geq n} E_k(\varepsilon) \subset \{\sup_{k\geq n} |X_k| > \varepsilon\}$? Car $\cup_{k\geq n} E_k(\varepsilon) \supset \{|X_k| > \varepsilon\} \forall k$ donc pour le $\sup$ d'où le resutate.

— ere partie.$\cup_{k\geq n}E_n(\varepsilon) \supset \{\sup|X_k| > \varepsilon\}$ => si $\omega \in \cup_{k\geq n}E_k(\varepsilon)$ <=> $|X_l(\varepsilon)| > \varepsilon \forall l \geq n$ aussi $\sup_{l\geq m}|X_l(\omega)| > \varepsilon$. $\mathbb{P}(\cap_{n\geq 1}\cup_{k\geq n}E_k(\varepsilon))$. D'un coté cette probabilité est zéro. Car $\mathbb{P}(E(\varepsilon)) = 0$. D'autre coté cette quantité est égale à $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\cup_{k\geq n}E_k(\varepsilon)) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\sup_{k>n}|X_k| > \varepsilon)$.

Donc $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\sup_{k>n}|X_k| > 1) = 0$. □

Proposition 17. *Soit* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ *; alors il existe une sous suite* $\{n_k\}_{k\geq 1}$ *telle que* $X_{n_k} \xrightarrow{PP} X$.

Démonstration. Fixons $s > 0$ et $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ une suite de nombres positifs tq :

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k < \infty$
2. $\mathbb{P}(|X_{\eta_k}| > \varepsilon) < \eta_k$

$\sup_{k\geq n}\{|X_k| > \varepsilon\} = \cup_{k\geq n}E_k(\varepsilon)$ $\mathbb{P}(\sup|X_{n_k}| > \varepsilon) = \mathbb{P}(\cup_{k\geq l}\{|X_{n_k}| > \varepsilon\} \xrightarrow{?} 0,\ k \to \infty$.
Oui. $\mathbb{P}(\sup|X_{n_k}| > \varepsilon) = \mathbb{P}(\cup_{k\geq l}\{|X_{n_k}| > \varepsilon\} \leq \sum_{k\geq l}\mathbb{P}(\{|X_{n_k}| > \varepsilon\}) \leq \sum_{k\geq l}\eta_k \to 0$. □