Typesetting test $\sum_i^n \neq 60 \pm \infty \pi \triangle \neg \approx \sqrt{j} \int h \leq \geq$
$\mathbb{RP}\mathbb{1}\mathbb{P}\mathfrak{S}\mathbb{P} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\mathbb{PP}$ $\mathrm{d}x$

$$\alpha(x) = \begin{cases} x \\ \frac{1}{1+e^{-kx}} \\ \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{cases}$$

$\langle x \rangle$
$\chi_\rho(ghg^{-1}) = \mathrm{Tr}\big(\rho_{ghg^{-1}}\big) = \mathrm{Tr}\big(\rho_g \circ \rho_h \circ \rho_g^{-1}\big) = \mathrm{Tr}(\rho_h) \overset{\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)}{=} \chi_\rho(h) \oplus_{x \in X}$
$\mathrm{Mat}(\rho_g) = (a_{ij}(g))_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq d}}$ et $\mathrm{Mat}(\rho'_g) = (a'_{ij}(g))_{\substack{1 \leq i' \leq d' \\ 1 \leq j' \leq d'}}$

$$\int_a^b \mathbb{R}^2 g(u,v) \, \mathrm{d}P_{XY}\,(u,v) = \iint g(u,v) f_{XY}(u,v) \mathrm{d}\lambda(u) \mathrm{d}\lambda(v)$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

$$\iiiint_V \mu(t,u,v,w) \, dt \, du \, dv \, dw$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$$

Définition 1. Si X et Y sont 2 v.a. ou definit la COVARIANCE entre X et Y comme $\mathrm{Cov}(X,Y) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Chapitre 1

Base de Probablite

1.1 Espase Probabilisé

Soit Ω est UNIVERS (est random ensemble).

Définition 2 (σ - algebra)**.** La famille des ensembles $\mathcal{A}$ s'appelle σ-ALGEBRA si :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$ ($A^C = \bar{A}$)
3. Si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{A}: \ \cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Définition 3 (Probabilité)**.**

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Si $\{A_k\}_k^{\infty}$ - disjoint (pour tout $i \neq j: \ A_i \cup A_j = \emptyset$) :

$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

Espasce probabilisable $(\underbrace{\Omega}_{\text{univers}}, \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{tribu}})$.
Espase probabillisé $(\Omega, \ \mathcal{A}, \ \mathbb{P})$.
VARIABLE ALÉATOIRE (random variable) est fonction measurable X :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "X"] \arrow[d, "\sigma\text{-algebre}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\sigma\text{-algebre}"] \\
\mathcal{A} & \mathcal{B} \text{ (Borel)}
\end{tikzcd}$$

Soit Ω un ensemble. Soit $\mathcal{F}$ un famille d'ensembles de Ω, qui n'est pas forcément une σ-algèbre.

> **Définition 4.** On appelle σ-algèbre engendrée par $\mathcal{F}$, dénotée $\sigma(\mathcal{F})$ la plus petite σ-algèbre que contient $\mathcal{F}$.

> **Définition 5.** Borel ($\mathcal{B}$) est la σ-algebre engendrée par les intervalles ouvertes de $\mathbb{R}$ c'est-à-dire de la forme $(a,\ b),\ |a|,\ |b| < \infty$ (famile $\mathcal{F}_0$).

On dit Borel ($\mathcal{B}$) est aussi σ-algebre engendrée par des intervalles de la forme $(-\infty,\ |a|],\ |a| < \infty$ (famile $\mathcal{F}_{FN}$).

Remarque. $\sigma(\mathcal{F}_0) = \sigma(\mathcal{F}_{FN})$

Proposition 1. *Pour verifier la measurable il suffit de la tester sur une famille qui engendrée la σ-algèbre de Borele.*

Exercice. (simple mais important)
Soit Ω un ensemble. $\mathcal{P} = \{P_1,\ P_2, \dots,\ P_k\}$ est une partition finit de Ω, c'est-à-dire $\cup_{j=1}^k P_j = \Omega$ et $P_\alpha \cap P_\beta = \varnothing$.

1. Trouve $\sigma(\mathcal{P})$.
   Réponse :
   $\sigma(\mathcal{P})$ contient tout reunion d'éléments $\mathcal{P}$.
   (En partiqulier si $A \in \sigma(\mathcal{P})$: $A = \cup_{k=1}^l P_{i_k}$)
2. Trouve comment sont faites les v.a. par rapport â $\sigma\mathcal{P}$.
   Réponse :
   Consider $\Omega = \mathbb{R}$. $X(\omega) = \alpha$. α est l'image ω. Le point α est aussi un ensemble, qu'on denote $\{\alpha\}$: "singlitore" qui est un borelien. Car X est measurable par rapport â $\sigma(\mathcal{P})$, $X^{-1}(\{\alpha\}) = \cup P_{i_k}$.
   Une function measurable pour rapport à $\sigma(\mathcal{P})$ est constante par morceaux sr les éléments de la partition.
   On replace X avec autre object qui "approxime" X est measurable par rapport â $\sigma(\mathcal{P})$.

Espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbb{P})$. $X : \Omega \to \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Borel}}$, X est v.a.

Loi de X on définir un mesure de probabilite sur $(\mathbb{R},\ \mathcal{B})$ de la manière suivante si $B \in \mathcal{B}$: $P_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$.

On appelle P_X de La Loi de X.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ On pourra écrite X de la maniere suivante : $X(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega)$, $A_k = \{\omega \,|\, X(\omega) \in A_k\}$. Calculer P_X (la loi de X) :

Si $B \in \mathcal{F}$, $P_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$.

On appelle D l'ensemble valeur de X : $D = \{x_1,\ X_2,\ \dots x_k \dots\}$.

$P_X(B) = P_X(B \cap D) = P_X(B \cap \cup_{k=1}^{\infty}\{x_k\}) = P_X(\cup_{k=1}^{\infty}(B \cap \{x_k\})) = \sum_{k=1}^{\infty} P_X(B \cap \{x_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = x_k)\delta_{\{x_k\}}(B) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{\{x_k\}}(B)$

$$\delta_a(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in B \\ 0 & \text{si } a \notin B \end{cases}$$

On introduit la measure de Dirrac :

$$\left.\begin{array}{rcl} X & = & \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{1}_{A_k} \\ P_x & = & \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{\{x_k\}} \\ P_x & = & \mathbb{P}(A_k) \end{array}\right\} \text{v.a. discrete}$$

Exemple. (v.a. discrete)

1. $B(n,\ p)$ binomiale
   Valeurs : $X = \{0,\ 1,\ \dots n\}$.

$$P_k = \mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ i \in \{0, \dots, n\}$$

2. Poisson $P(\lambda)$. Valeurs $X = \{0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$ - dénombrable.

$$P_X(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Rappel. *$X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une* `variable aléatoire`

$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$ — esperance, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[[X - \mathbb{E}(X)]^2]$ — variance.

Supposons $\mathbb{E}(X) = 0 \Rightarrow \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2)$.

$g(t) = t^2$, $g \circ X = X^2$. Si $g \circ X = X \circ g$, g — identité.

Rappel. `Variable aléatoire` *à valeurs réelle : $X : \Omega -> \mathbb{R}$.* `Loi de` *X : une measure de probabilité sur $\mathbb{R}$ $P_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)),\ B \in \mathcal{B}$.*

Theorem 1. *Soit $X : \Omega -> \mathbb{R}$ une v.a. sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $g : \mathbb{R} -> \mathbb{R}$ une fonction mesurable. si l'intégrale $\int_\Omega g \circ X\,\mathrm{d}\mathbb{P}$ existe on a*

$$\int_\Omega g(X(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} g(t)\,\mathrm{d}P_X(t)$$

Exemple 1.1.1. Supposons que X est discrète... P1/2

Définition 6. $X : \Omega -> \mathbb{R}$ v.a.

$$F(t) := \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\omega : \ X(\omega) \leq t) = P_X((-\infty, t])$$

Proposition 2. *Toute fonction de repartition F vérifie les propriétés suivantes :*

1. *F est non-negative et croissante.*
2. *F est continue à droite.*
3. *F est discontinue dans plus un nombre dénombrée de point.*
4. $\begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 1 \\ \lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 0 \end{cases}$.

1.1.1 Rappel de Th. de la measure

Soit F une fonction croissante réelle positive (en particulier F est la fonction de repartition d'une v.a.).

Ou définit une fonction d'ensemble sur $\mathbb{R}$:

$$\tilde{F}((a, b]) = F(b) - F(a) \qquad (*)$$

Il y a un théorème de théorie de la measure que dit que la fonction d'ensemble $\tilde{F}$ défini sur la famille $\{[a, b]\}$ peut s'étendre à une measure sur la σ-algebra engendrée par cette famille ($\mathcal{B}$ — Borel) et la restriction de cette mesure sur la famille $\{[a, b]\}$ vérifie l'égalité (**??**).

Cette measure est appelle la mesure le Lebésgue-Stiltyes. $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$.

1.2 Indépendances

A, B deux événements (c'est-à-dire $A, B \in \mathcal{A}$).

Définition 7. On dira que A et B sont Indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Définition 8. On appelle σ-algèbre engendrée par une variable aléatoire X, $\sigma(X)$ la plus petite σ-algèbre pour rapport à la quelle X est mesurable.

Proposition 3. $\sigma(X) = \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$

Définition 9. Deux v.a. X et Y définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont l'indépendantes si $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont indépendantes.

On appelle σ-algèbre engendrée par une variable aléatoire X, $\sigma(X)$ la plus petite σ-algèbre pour rapport à la quelle X est mesurable.

Si X et Y sont indépendantes si

$$P_{XY}(X \in A, Y \in B) = P_X(A)P_Y(B)$$

Produit direct de deux mesure ? Considéré $S = S_1 \times S_2$. Di ou construit l'espace mesurable $(S_1 \times S_2,\ \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$. Il existe une seule mesure $\bar{\mu}$ telle que :

$$\bar{\mu}(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2 A_2$$

Cette mesure $\bar{\mu}$ est le produit direct de μ_1 et μ_1, dénote $\bar{\mu} = \mu_1 \times \mu_1$.

Theorem 2. *Deux variables aléatoire X et Y sont indépendantes ssi la loi conjointe coïncide avec le produit direct des lois marginales. C'est-â-dire :*

$$P_{XY} = P_X \times P_Y$$

Ex

$$\int_{\mathbb{R}} f(t,u)\, dP_{XY}(t,u)\mu$$

On a besoin d'une autre quantité ; fonction de répartition de deux variables.

Définition 10. Si X et Y sont 2 v.a. ou définit

$$F_{xy}(u,\ v) = \mathbb{P}(X \leq u, Y \leq v)$$

Proposition 4. *Si ou connait la fonction de répartition du couple (X,Y) on peut calculer les fonctions de répartition marginales*

$$F_X(u) = \lim_{v \to +\infty} F_{XY}(u,v)$$

$$F_Y(v) = \lim_{u \to +\infty} F_{XY}(u,v)$$

Démonstration. $F_X(u) = \mathbb{P}(X \leq u) = P_X((-\infty,u])$. Utilise $\mathbb{R} = \cup_{k=1}^{\infty}(-\infty,k]$ $(-\infty,k)$ est croissant. $\mathbb{P}(X \leq u) = \mathbb{P}(X \leq u, Y \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \leq u, Y \in \cup_{k=1}^{\infty}(-\infty,k])$. $F_X(u) = \mathbb{P}(X \leq u) = P_X((-\infty,u])$. □

Proposition 5. *Si X est Y sont indépendant v.a. donc $F_{XY}(u,v) = F_x(U)F_Y(V)$*

Démonstration. ... □

Proposition 6. *Si on a : $F_{XY} = (u,v) = F_X(u)F_Y(v)$ cest-a que X et Y sont indépendante ? Oui.*

Démonstration.

$$P_{XY}(X \leq u, Y \leq v) = P_X(X \leq u)P_Y(Y \leq u)$$

la borelien de la forme $\{(-\infty,u], |u| < \infty\}$ vérifier le propriété de l'intersection firme. □

Définition 11. La mesure de lebegue dans $\mathbb{R}^2$ est la mesure produit direct des mesure des lebesgue dans $\mathbb{R}$.

Convention $\int f\, d\lambda(x) = \int f\, dx$.

Définition 12. Un couple de v.a (X, Y) a une loi conjointe P_{XY} a density si pour toute borelie $B \in \mathcal{B}^{(2)}$ (σ-algèbre produite), on a

$$P_{XY}(B) = \iint\limits_{B} f_{XY}(u, v)\, d\lambda(u)\, d\lambda(v)$$

. En particulier s ou a $g(u, v) \in L^1(P_{XY})$ on a :

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(u, v)\, dP_{XY}(u, v) = \iint g(u, v) f_{XY}(u, v)\, d\lambda(u)\, d\lambda(v)$$

Questions

1. Donner les proprettes de f_{XY} quand X et Y sont indépendants.
2. Si on connait $F_{XY}(u, v)$ est-ce qu'on peut calculer les marginales $f_X(u),\ f_Y v$?

Proposition 7 (générale)**.** *Si on connait $f_{XY}(u, v)$ on a :* $\begin{array}{rcl} f_X(u) & = & \int_{\mathbb{R}} F_{XY}(u, v)\, dv \\ f_X(v) & = & \int_{\mathbb{R}} F_{XY}(u, v)\, du \end{array}$

Démonstration. $F_X(t) = \lim\limits_{r\to\infty} F_{XY}(t, r)| = |$

$$F_{XY}(t, r) = \mathbb{P}(X \leq t, Y \leq r) = P_{XY}((-\infty, t]\times(-\infty, r]) = \int\limits_{-\infty}^{t} \int\limits_{-\infty}^{r} d\lambda(u)\, d\lambda(v) = F_{XY}(t, r)$$

$| = | \lim\limits_{r\to\infty} \iint_{-\infty-\infty}^{t\ r} f_{XY}(u, v)\, d\lambda(u)\, d\lambda(v) = \lim\limits_{r\to\infty} \iint_{-\infty-\infty}^{t\ r} f_{XY}(u, v) \mathbb{1}(u) \mathbb{1}(v)\, d\lambda(u)\, d\lambda(v) =$ | Par Fubini ou sont étirer les intégrales : |
$= \lim\limits_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}} dv \mathbb{1}(u) \mathbb{1}(v) f_{XY}(u, v) = \lim\limits_{r\to\infty} \int_{-\infty}^{t} du \int_{-\infty}^{r} dv f_{XY}(u, v) =$ |B. Levi| $==$ $\int_{\mathbb{R}} du \lim\limits_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}} dv \mathbb{1}(u) \mathbb{1} f_{XY}(u, v)\ F_X(t) = \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}} dv \mathbb{1}(u) \mathbb{1} f_{XY}(u, v)$.

Si X est à densité $F_X(T) = \int\limits_{-\infty}^{t} f_X(u)\, du$. □

Question (Indépendantes et densités)

Proposition 8. *Ou a deux parties.*

1. *Si 2 v.a. X et Y admettait, des densités f_X et f_Y admettent des densités f_X et f_y et X et Y sont indépendantes, alors le couple (X, Y) admet une loi conjointe a densité et $f_{XY} = f_X f_Y$.*
2. *Si le couple (X, Y) admet une densité f_{XY} produit de deux fonctions intégrable f_1 et f_2 alors f_1 et f_2 sont les dentistes (à une constant pvit) de X et Y et X et Y sont indépendantes.*

Exercice On a un couple de v.a. (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi conjointe :

$$P_{(XY)}(B)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k+l}}\delta_{\{k,l\}}(B)$$

Determiner la loi de $Z=\sup\{X,Y\}$.

1. question. Déterminer $P_X,\ P_Y$ oui $P_X(X=k)$. Si X et Y sont discrète $\mathbb{P}(X=k)=\sum_j \mathbb{P}(X=k,\ Y=j)$.

$$P_X(\{x\}=\sum_j P_{XY}(\{k,j\})$$

$$\mathbb{P}(X=k)=P_X(\{k\})=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k+j}}$$

$\mathbb{P}(Z\le k)=\mathbb{P}(X\le k, Y\le k)=\int \mathbb{1}_{[0,k]^2}(X,Y)\,d\mathbb{P}=\iint \mathbb{1}_{[0,k]^2}\,dP_{XY}(u,v)=\sum_{i,l=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i+l}}\mathbb{1}_{[1,k]^2}(i,l)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{2^{i+l}}$

1.3 Leçon 4

Il fallait montrer que si les variables aléatoires (X_1,X_2) ont une densité $f_{X_1X_2}$ produit direct de deux fonctions f_1 et f_2 , alors a une constante près, f_1 et f_2 sont le densité de X_1 et X_2 et ces deux variables sont indépendantes.

L'autre partie (exercice),

Si X_1 et X_2 sont indépendant de densités respectives f_{X_1} et f_{X_2}, alors le vecteur $(X_1,\ X_2)$ a densité : $f_{X_1X_2}=f_{X_1}f_{X_2}$.

Démonstration. Par Hyp : $f_{X_1X_2}(u,v)=f_{X_1}(u)f_{X_2}(v)$. D'art- cette on sait que en général :

$$f_{X_1}(u)=\int_{\mathbb{R}}f_{X_1X_2}(u,\ v)\,\mathrm{d}\lambda v$$

$$f_{X_2}(v)=\int_{\mathbb{R}}f_{X_1X_2}(u,\ v)\,\mathrm{d}\lambda u$$

Objectif : Montrer que, a une constante près $f_1=f_{X_1}$, $f_2=f_{X_2}$. On observe que :

$$f_{X_1}(u)=\int_{\mathbb{R}}f_{X_1X_2}(u,\ v)\,\mathrm{d}v=f_1(u)\int_{\mathbb{R}}f_2(v)\,\mathrm{d}v$$

$$f_{X_2}(v)=\int_{\mathbb{R}}f_{X_1X_2}(u,\ v)\,\mathrm{d}u=f_1(v)\int_{\mathbb{R}}f_1(u)\,\mathrm{d}u$$

On multiple les deux expressions :

$$f_{X_1}(u)f_{X_2}(v)=f_1(u)f_2(v)\int_{\mathbb{R}}f_2(v)\,\mathrm{d}v\int_{\mathbb{R}}f_1(u)\,\mathrm{d}u=f_1(u)f_2(v)\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}f_2(v)f_1(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Donc on a montré que $f_1(u)f_2(v)=f_{X_1}(u)f_{X_2}(v)$. $\square$

Remarque. *À des constants prés on pourra identifier f_{X_1} avec f_1 et f_{X_2} avec f_2. Pour terminer : La loi du couple (X_1, X_2) $P_{X_1X_2}$ on soit que peut l'écrire.*

Notation, *Si on a une mesure P avec densité f on l'écrira comme ça : $P = f\,\mathrm{d}x$, $P(A) = \int_A f\,\mathrm{d}x$. $\int g\,\mathrm{d}f = \int gf\,\mathrm{d}x$.*

$$P_{X_1X_2} = f_{X_1X_2}(u,v)\,\mathrm{d}\lambda u\,\mathrm{d}\lambda v = f_1(u)f_2(v)\,\mathrm{d}\lambda u\,\mathrm{d}\lambda v = f_{X_1}(u)f_{X_2}(v)\,\mathrm{d}\lambda u\,\mathrm{d}\lambda v = P_{X_1}\otimes P_{X_2}$$

(product direct des lois marginales)

Proposition 9. *Si X_1 et X_2 sont deux v.a., le trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *X_1 et X_2 sont indépendantes*
2. *$\forall$ fonctions g_1 et g_2 réels et positive on a :*
$$\int g_1 \circ X_1 \cdot g_2 \circ X_2\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int g_1 \circ X_1\,\mathrm{d}\mathbb{P} \int g_2 \circ X_2\,\mathrm{d}\mathbb{P}$$
3. *Pur tout fonctions réels bornées, g_1 et g_2 on a :*
$$\int g_1 \circ X_1 \cdot g_2 \circ X_2\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int g_1 \circ X_1 d\mathbb{P} \int g_2 \circ X_2\,\mathrm{d}\mathbb{P}$$

Applications. Supposons que g_1 et g_2 sont l'identité et que X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2) = \mathbb{E}(X_1) \times \mathbb{E}(X_2)$$
$$\int 1 \circ X_1 \cdot 2 \circ X_2\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int 1 \circ X_1 d\mathbb{P} \int 1 \circ X_2\,\mathrm{d}\mathbb{P}$$

!?

Exemple 1.3.1. X_1 et X_2 indépendant
$\int X_1^2 \sin X_2\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int X_1^2\,\mathrm{d}\mathbb{P} \int \sin X_2\,\mathrm{d}\mathbb{P}$.

Démonstration. (Idée) □

Remarque. *Si x_1 et X_2 sont indépendants : $\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2)$. $\mathbb{E}([(X_1 = X_2) - (X_1 + X_2)]^2)$ On développe ce carré.*

Exemple 1.3.2. Sur l'espace probabilité $(\omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ on considère le couple (X, Y) ave loi conjomte- P_{XY} à densité

$$f_{XY}(u,v) = \alpha(1-u^2)\mathbb{1}_{[0,1)}(u)ve^{-3v}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}$$

1. déterminer le valeur de α
2. déterminer la lois marginales.

Exemple 1.3.3. Sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ou le vecteur aléatoire (X, Y) de loi

$$P_{XY} = \alpha(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$$

où α est un paramètre et μ est une mesure à densité avec densité :

$$f_1(u, v) = \frac{1}{u^2} e^{-v} \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(u) \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(v)$$

μ_2 : mesure uniformément distribuée sur $[0, 1] \times [0, 1]$. $\mu_3 = \delta_{\{1,1\}} + \delta_{\{-1,2\}}$. Déterminer α et le lois marginales de X et de Y. Est que X et Y sont indépendantes ?

Exercice 1. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

1. suppose que le loi du couple (X, Y) est connue :

$$d_{XY}(u, v) = \lambda\rho e^{-\lambda u - \rho v} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2_+}(u, v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

Déterminer la loi de la v.a. $W = \min\{X, Y\}$

Deux méthodes (équivalentes). 1ère méthode : $F_W(t) = \mathbb{P}(W \le t) = 1 - \mathbb{P}(W > t) = 1 - \mathbb{P}(X > t, Y > t) = 1 - \int\limits_{\Omega} \mathbb{1}_{(t,+\infty)} X \cdot \mathbb{1}_{(t,+\infty)} Y \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(t,+\infty)\times(t,+\infty)} \, \mathrm{d}P_{XY}(u, v)$ $\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(t,+\infty)\times(t,+\infty)} \lambda\rho e^{-\lambda u} e^{-\rho v} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, , \ t \ge 0 \ = 1 - \int_t^\infty \mathrm{d}u \int_t^\infty \mathrm{d}v \, \lambda\rho e^{-\lambda u} e^{-\rho v} = 1 - \lambda \int_t^\infty e^{-\lambda} \, \mathrm{d}u \, \rho \int_t^\infty e^{-\rho v} \, \mathrm{d}v = [1 - e^{-(\lambda - \rho)t}] \mathbb{1}_{[0,\infty]}(t)$.

On sait que :

$$F_W(t) = \int_{-\infty}^t f_W(s) \, \mathrm{d}s \, .$$

Si on connait f_X, ou peut calculer F_W ?

F—distribution function (fonction de repartition).

f—probability density function (fonction de densité).

$F'_W(t) = (\lambda + \rho) e^{-(\lambda+\rho)t}$ Mais $F'_W = (\lambda + \rho)$ from +, but 0 from -0.

Il y a 2 cas :

(i) $t \in (-\infty, 0)$ $F_W(t) = 0 \Rightarrow f_W(t) = 0$

(ii) $t \ge 0$ $[1 - e^{(\lambda+\rho)t}] = \int_\infty^t f_W(s) \, \mathrm{d}s$

Est-ce que X et Y sont indépendantes ? Yes. $f_X \cdot f_Y$.

Méthode tris générale pour construire des variables aléatoires.

On construit une nouvelle v.a. $g \circ X = Y$. Question Si on connaît la loi de X, peut on calculer la loi de Y ? Ex X a nue loi exp : $f_X(u) = \lambda e^{-\lambda u}$; calcules la loi de $\sqrt[2]{X} = Y$.

Chourinevousm- une fonction test non-négative $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ et ou eousitere- :

$$\mathbb{E}(h \circ Y) = \int_\Omega h \circ Y \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega h \circ g \circ X \, \mathrm{d}P$$

$$\int_\Omega h \circ Y \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} h(v) f_Y(v) \, \mathrm{d}v$$

$$== \int_{\mathbb{R}} h(g(u))\,\mathrm{d}P_X(u) = \int_{\mathbb{R}} h(g(u)) f_x(u)\,\mathrm{d}u$$

On a : $\int_{\mathbb{R}} h(g(u)) f_X(u)\,\mathrm{d}(u) = (\text{Particular case}) = \lambda \int_{\mathbb{R}} h(\sqrt{u}) e^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u$

On pose $\sqrt{u} = v$ $\mathrm{d}v = \frac{1}{2v}\,\mathrm{d}u$

$== 2\lambda \int_0^{\infty} h(v) e^{-\lambda v^2} v\,\mathrm{d}v.$

Loi de $Y = \sqrt{X}$ est : $f_Y(v) = 2\lambda v e^{-\lambda v^2} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(v)$.

Deux méthode

$\mathbb{E}(h(W)) \overset{\text{si on l'est, comme ca}}{=} = \int_{\mathbb{R}} h(y) f_W(y)\,\mathrm{d}y$, f_W la densité de W. h -fonction test.

$\mathbb{E}(h(W)) = \int_{\Omega} h \circ W\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\Omega} h \circ \min(X,Y)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} h(\min(u,v)) \lambda e^{-\lambda u} \rho e^{-\rho v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$ $\iint\limits_{\{(u,v),u<v\}} h(u) \lambda e^{-\lambda u} \rho e^{-\rho v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \iint\limits_{\{(u,v),u>v\}} h(u) \lambda e^{-\lambda u} \rho e^{-\rho v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^{+\infty} h(u) e^{-(\lambda+\rho)u}($ $\rho)\,\mathrm{d}u$

2.

On a un vecteur aléatoire (X,Y) a valeurs dans $\mathbb{R}^2$, avec loi :

$$f_{XY}(u,v) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{u}{2}} \mathbb{1}_{\{u\geq 0\}} \mathbb{1}_{[0,2\pi]}$$

Déterminer loi du vecteur aléatoire $(\sqrt{X}\cos Y, \sqrt{X}\sin Y)$.

$\omega \to (X(\omega), Y(\omega))$

$$g : \begin{cases} u &= g_1(x,y) \\ v &= g_2(x,y) \end{cases}$$

$g = (g_1, g_2)$

$$v(\omega) = g_1(X(\omega), Y(\omega))$$
$$u(\omega) = g_2(X(\omega), Y(\omega))$$

U vecteur : $(g_1 \circ (X,Y), g_2 \circ (X,Y))$.

Test fonction h, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$\mathbb{E}(h \circ (X,Y)) = \int h \circ (X,Y)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \iint h(g(u,v)) f_{XY}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint h(g_1(u,v), g_2(u,v)) f_{XY}($
$\int h(\alpha,\beta) f(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta$

1.4 leçon

(X,Y) 2 v.a. et exulte ou avait une fonction vectorielle $g = (g_1, g_2)$ $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et on définit 2 nouvelle v.a. U et V de cette façon : $U = g_1 \circ (X,Y)$, $V = g_2 \circ (X,Y)$ et

$$\begin{cases} U(\omega) &= g_1(X(\omega), Y(\omega)) \\ V(\omega) &= g_2(X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}, \ \omega \in \Omega \text{ (espace des éléments)}$$

Cas particulier (Exercice) (X,Y) une couple de v.a. de loi cougointe-

$$f_{XY} = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{u}{2}} \mathbb{1}_{u\geq 0}(u) \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Question : Trouver la loi du couple :

$$(\sqrt{X}\cos Y, \sqrt{X}\sin Y) = (U, V)$$

Sait $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction test non-négative.

$\mathbb{E}(h\circ g(X,Y)) = \int_\Omega h\circ g(X,Y)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} h(g_1(x,y), g_2(x,y)) f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \stackrel{?}{=} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} h(u,v) f_{UV}($

$$\begin{cases} u = \sqrt{x}\cos y \\ v = \sqrt{x}\sin y \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} u &= & g_1(x,y) \\ v &= & g_2(x,y) \end{cases}$$

$g = (g_1, g_2)$. Pour pouvoir effectuer un changement de variable, il faut que g soit un difféomorphisme entre 2 ouverts.

$g : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ difféomorphisme cute deux ouverts. Condition équivalents pour avoir un difféomorphisme :

1. g est injective sur $\mathcal{O}_1$ à valeurs dans $\mathcal{O}_2$.
2. g est de classe $b^{(1)}(\mathcal{O}_1)$, c'est-à dire les deciver- peut eller- de g existe tout caitunes-.
3. Le déterminant de $(g^{-1})' \neq 0$ sur$\mathcal{O}_2$

Nous son défini

$$g : \begin{cases} u &= & g_1(x,y) \\ v &= & g_2(x,y) \end{cases} \quad \text{il faut inverser} \rightarrow$$

$$g^{-1} : \begin{cases} x &= & \Phi_1(u,v) \\ y &= & \Phi_2(u,v) \end{cases}$$

$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$

On construit la invariante Jacobienne (dérives) de $g^{-1} = \Phi$:

$$J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$|\det J_\Phi(u,v)|$$

$$= \iint\limits_{g(O_1)=O_2} h(u,v) f_{XY}(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v)) |\det J_\Phi(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Trouve le nouvelle domaine d'intégration.

La densité de (U,V) est donc :

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v)) \cdot |\det J_\Phi(u,v)| \cdot \mathbb{1}_{g(\mathcal{O}_1)}(u,v)$$

Continue with exercice :

$\iint_0^\infty {}_0^{2\pi} h(\sqrt{x}\cos y, \sqrt{x}\sin y) \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$

$$g : \begin{cases} u = \sqrt{x}\cos y \\ v = \sqrt{x}\sin y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Phi : \begin{cases} x &= & u^2 + v^2 \\ y &= & \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \end{cases}$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\, h(u,v) \tfrac{1}{4\pi} e^{\frac{-(u^2+v^2)}{2}} \cdot |\det J_\Phi(u,v)|$$

$$J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ \frac{-v}{u^2+v^2} & \frac{u}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$$

$\det J_\Phi(u,v) = \frac{2u^2}{u^2+v^2} + \frac{2v^2}{u^2+v^2} = 2$

Question :

— U et V sont indépendant ? Oui car $f = f_1 \cdot f_2$

— Lui de U et V : $\frac{1}{\sqrt{2}\pi} e^{\frac{-(u^2+v^2)}{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}\pi} e^{\frac{-(u^2+v^2)}{2}}$

Exercice Soit (X,Y) une vecteur aléatoire de loi $f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. Calculer la loi de $(X+Y,Y)$. Objectif calcul la lui de la somme.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(x+y,y) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$g : \left\{ \begin{array}{ccccc} u & = & g_1(x,y) & = & x+y \\ v & = & g_2(x,y) & = & y \end{array} \right.$$

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & u-v \\ y & = & v \end{array} \right.$$

$$|\det J_\Phi(u,v)| = 1$$

$$= \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} h(u,v) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(u-v)^2+v^2}{2}} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Densité de $(X+Y,Y)$ est $\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2-2uv+2v^2}{2}}$. Densité de $(X+Y)$:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{UV}(u,v)\mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2-2uv+2v^2)}\mathrm{d}v$$

—produit de convolution.

Si X et Y sont indépendant de loi marginal f_X et f_Y alors la v.a. X+Y est à densité est $f_{X+Y}(u) = \int_{\mathbb{R}} f_Y(u) \cdot f_X(u-v)\mathrm{d}v \overset{\text{def}}{=} f_Y * f_X$—produit de convolution.

Exercice 2. Soit (U,V) un couple de variables aléatoires de densité conjointe :

$$f_{UV}(u,v) = \left\{ \begin{array}{l} \gamma(2u^2v+1), (v,v) \in D \\ 0, \text{ ailleurs} \end{array} \right.$$

où $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid |u| < 1, |u-1| < 1\}$.

Questions.

1. déterminer la valeur de γ
2. déterminer si (U,V) sont *indépendantes*
3. déterminer si (U,V) sont *corrélées*
4. déterminer la loi du couple (A,B) : où $A = U \cdot V,\ B = V$

h : fonction test : $\int h(A,B)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int h(U\cdot V, V)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \iint_D h(uv,v) f_{UV}(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_{D'} h(a,b) f(...)\mathrm{d}a\mathrm{d}b$

$$J_{g^{-1}}(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & -\frac{a}{b^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g : \begin{cases} a = uv \\ b = v \end{cases} \quad g^{-1} : \begin{cases} u = \frac{a}{b} \\ v = b \end{cases}$$

$|\det J_{g^{-1}}| = \frac{1}{b} = \frac{3}{20} \iint_{D'=g(D)} h(a,b)(2\frac{a^2}{b}+1)\frac{1}{b}\mathrm{d}a\mathrm{d}b => f_{AB}(a,b) = \frac{3}{20}(2\frac{a^2}{b}+1)\frac{1}{b}\mathbb{1}_{D'}(a,b)$
Draw $D' = g(D) = \{(a,b), b \in [0,2] \quad -b < a < b\}$ Is it difféomorphisme ? Yes, car ...

> **Définition 13.** Si X et Y sont 2 v.a. ou définit la COVARIANCE entre X et Y comme $\mathrm{Cov}(X,Y) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 3. Soit X une v.a. de loi $N(0,1)$ et Y une v.a. discrète de loi $\frac{1}{2}\{\delta_{(-1)} + \delta_1\}$ indépendante de X.

— Montrer que la loi de $Z = X \cdot Y$ est $N(0,1)$
— Montrer que (X, Z) ne sont pas corrélées
— Calculer $\mathbb{E}(X^2 Z^2)$
— Déterminer si (X, Z) sont indépendantes

Loi de Z.

$F(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x \cdot y \leq t\}}(x \cdot y)\, \mathrm{d}P_{XY}(x,y) \overset{indpendantes}{=} \int\int \mathbb{1}_{\{x \cdot y \leq t\}}(x \cdot y)\, \mathrm{d}P_Y\, \mathrm{d}P_X$
$= \int \mathrm{d}P_X\, (\frac{1}{2}\mathbb{1}_{-x \leq t}(-x) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{+x \leq t}(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}x\, e^{-\frac{x^2}{2}} (\frac{1}{2}\mathbb{1}_{-x \leq t}(-x) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{+x \leq t}(x)) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}\int_{-t}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-x^2/2} = \frac{1}{2}\int_{\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x \simeq N(0,1)$

Exercice 4. Soient X et Y deux va indépendantes dont X est un variable de Bernoulli $B(1/2)$ et Y suivra deux lois i Y est une variable normale $N(0,1)$ ii Y a fonction de répartition $F_y(t) = tt \in [0,1]$. Dans les deux cas calculer la fonction de répartition $Z = X \cdot Y$.

1.5 Fonction génératrice

X set une v.a. discrète a valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{0\}$

Ex Bernoulli $(0,1)$ $B(p)$ $P_X = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$ Binomiale $B(n,l)$ valeurs $1, \ldots, N$ $\mathbb{P}(x = k) = C_n^k p^k (1-p)^{N-k}$ Géométrique Valeurs de $G = \{0, 1, 2, \ldots\}$ $\mathbb{P}(G = k)(1-p)^{k-1}p$ Poisson valeurs $0, 1, 2, \ldots$ $\mathbb{P}(p = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

Résultat très intéressant Binomiale N très grand p très petite $N \cdot p = O(1)$ $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{N-k}$ $G(N \cdot p)$

> **Définition 14.** FONCTION GÉNÉRATRICE de X :
>
> $$g_x(s) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i s^i$$
>
> (série entière, "power" séries), où la loi de X est $P_X = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \delta_{\{i\}}$.

Proposition 10. *Si on connait $g_X(s)$ on connaît la loi, c-a-d les $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$.*

Démonstration. D'abord la série converge pour $s \in [-1,1]$ et uniformément pour $s \in (-1,1)$. La série peut être dérivée terme-à-terme pour $s \in (-1,1)$. $g'_X(s) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i i s^{t-1}$ $g''_X(s) = \sum_{i=2}^{\infty} p_i i(i-1)s^{t-1}$ $g_X^{(k)}(s) = \sum_{i=k}^{\infty} p_i i(i-1)...(i-k+1)s^{i-k}$ On calcul $g^{(k)}(0)$.

$$p_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$$

□

Attention. $g_X(s) - \sum^{\infty})i - 0 p_i s^i$

On dérive $g'_X(s) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i i s^{i-1}$ Supposons qu'on puisse étendre la denrée dans $s = 1$ $g'_X(1) = \sum^{\infty} p_i i = \mathbb{E}(X)$ Application.

X v.a. $B(N,p)$ $\mathbb{E}(x) = \sum_{k=0}^{N} k C_N^k p^k (1-p)^{N-k} = ?Np$ On utilise la fonction génératrice : $g_X(s) == \sum_{k=0}^{N} C_N^k p^k (1-p)^{N-k} s^k = \sum C_n^k (ps)^k (1-p)^{N-k} = [ps + (1-p)]^N$

$g'_X(s)|_{s=1} = N[p + (1-p)]^{N-1} \cdot p|_{s=1} = Np$

X v.a. Poisson $\mathbb{E}(P) = \lambda$ $\mathbb{E}(P) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $g_P = \sum_{k=0}^{\infty} ... = e^- \lambda e^{\lambda} s$

Lemme 1. *(Abel)*

1. *Si la série* $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \alpha$ *alors* $lim_{s \to 1^-} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i s^i = \alpha$
2. *Si les* α_i *sont positifs et si* $\lim_{s \to 1^-} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i s^i = \alpha < +\infty$, *alors* $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \alpha$.

Démonstration. $g_X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i$ (1) Supposons que $\mathbb{E}(X) < +\infty <=> \sum_{i=0}^{\infty} i p_i = \mathbb{E}(X)$ donc on est dans la partie 1 du Lemme Donc

$$\lim_s \to 1^- \sum_{i=0}^{\infty} i p_i s^i = \mathbb{E}(X) = lims \to 1^- g;_x(s)$$

□

Proposition 11. *On a* $\mathbb{E}(X(X-1)...(X-r+1)) = \lim_{s \to 1^-} g_X^{(r)}(s) := g_X^{(r)}(1)$. *Cas particulier* $\mathbb{V}(X) = g''_X(1) + g'(1) - [g'_X(1)]^2$

1.5.1 Fonction génératrice des moments