Typesetting test.

$\mathbb{RP}\mathbb{1}\mathbb{P}\mathfrak{S}\mathbb{P}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\mathbb{PP}$ $\mathrm{d}x$

$$\alpha(x) = \begin{cases} x \\ \frac{1}{1+e^{-kx}} \\ \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{cases}$$

$\langle x \rangle$

This is a long test Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Table des matières

0.1 Espase Probabilisé

Soit Ω est UNIVERS (est random ensemble).

Définition 1. *σ - algebra*
La famille des ensembles $\mathcal{A}$ s'appelle σ-ALGEBRA si :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$ $(A^C = \bar{A})$
3. Si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{A}: \; \cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Définition 2. *Probabilité*
$\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2. Si $\{A_k\}_k^{\infty}$ - disjoint (pour tout $i \neq j: \; A_i \cup A_j = \emptyset$) :

$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

Espasce probabilisable $(\underbrace{\Omega}_{\text{univers}}, \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{tribu}})$.
Espase probabillisé $(\Omega, \; \mathcal{A}, \; \mathbb{P})$.

Variable Aléatoire (random variable) est fonction measurable X :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[d, "\sigma\text{-algebre}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\sigma\text{-algebre}"] \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \text{ (Borel)} \end{tikzcd}$$

Soit Ω un ensemble. Soit $\mathcal{F}$ un famille d'ensembles de Ω, qui n'est pas forcément une σ-algebre.

> **Définition 3.** On appelle σ-algebr engendrée par $\mathcal{F}$, denotée $\sigma(\mathcal{F})$ la plus petite σ-algebre que contient $\mathcal{F}$.

> **Définition 4.** Borel ($\mathcal{B}$) est la σ-algebre engendrée par les intervalles ouvertes de $\mathbb{R}$ c'est-â-dire de la forme $(a,\ b),\ |a|,\ |b| < \infty$ (famile $\mathcal{F}_0$).

On dit Borel ($\mathcal{B}$) est aussi σ-algebre engendrée par des intervalles de la forme $(-\infty,\ |a|],\ |a| < \infty$ (famile $\mathcal{F}_{FN}$).

Remarque. $\sigma(\mathcal{F}_0) = \sigma(\mathcal{F}_{FN})$

Proposition 1. *Pour verifier la measurable il suffit de la tester sur une famile qui engendrée la σ-algebre de Borele.*

Exercice. (simple mais important)
Soit Ω un ensemble. $\mathcal{P} = \{P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_k\}$ est une partition finit de Ω, c'est-â-dire $\cup_{j=1}^{k} P_j = \Omega$ et $P_\alpha \cap P_\beta = \varnothing$.

1. Trouve $\sigma(\mathcal{P})$.
   Réponse :
   $\sigma(\mathcal{P})$ contient tout reunion d'elementes $\mathcal{P}$.
   (En partiqulier si $A \in \sigma(\mathcal{P})$: $A = \cup_{k=1}^{l} P_{i_k}$)
2. Trouve commont sont faites les v.a. par rapport â $\sigma\mathcal{P}$.
   Réponse :
   Consider $\Omega = \mathbb{R}$. $X(\omega) = \alpha$. α est l'image ω. Le point α est aussi un ensemble, qu'on denote $\{\alpha\}$: "singlitore" qui est un borelien. Car X est measurable par rapport â $\sigma(\mathcal{P})$, $X^{-1}(\{\alpha\}) = \cup P_{i_k}$.
   Une function measurable pour rapport â $\sigma(\mathcal{P})$ est constante par morceaux sr les éléments de la partition.
   On replace X avec autre object qui "approxime" X est measurable par rapport â $\sigma(\mathcal{P})$.

Espase probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbb{P})$. $X:\Omega\to\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Borel}}$, X est v.a.

Loi de X on définir un mesure de probabilite sur $(\mathbb{R},\ \mathcal{B})$ de la maniere sivante si $B\in\mathcal{B}$: $P_X(B)=\mathbb{P}(X^{-1}(B))$.

On appelle P_X de LA LOI DE X.

$X:\Omega\to\mathbb{R}$ On pourra écrite X de la maniere suivante : $X(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\mathbb{1}_{A_k}(\omega)$, $A_k=\{\omega\,|\,X(\omega)\in A_k\}$. Calculer P_X (la loi de X) :

Si $B\in\mathcal{F}$, $P_X(B)=\mathbb{P}(X^{-1}(B))$.

On appelle D l'ensemble valiur de X : $D=\{x_1,\ X_2,\ \ldots x_k\ldots\}$.

$P_X(B)=P_X(B\cap D)=P_X(B\cap\cup_{k=1}^{\infty}\{x_k\})=P_X(\cup_{k=1}^{\infty}(B\cap\{x_k\}))=\sum_{k=1}^{\infty}P_X(B\cap\{x_k\})=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=x_k)\delta_{\{x_k\}}(B)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\delta_{\{x_k\}}(B)$

$$\delta_a(B)=\begin{cases}1 & \text{si } a\in B\\ 0 & \text{si } a\notin B\end{cases}$$

On introduit la measure de Dirrac :

$$\left.\begin{array}{rcl}X&=&\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k\mathbb{1}_{A_k}\\ P_x&=&\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k\delta_{\{x_k\}}\\ P_x&=&\mathbb{P}(A_k)\end{array}\right\}\text{v.a. discrete}$$

Exemple. (v.a. discrete)

1. $B(n,\ p)$ dinomiale
   Valeurs : $X=\{0,\ 1,\ \ldots n\}$.

$$P_k=\mathbb{P}(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k},\ i\in\{0,\ \ldots,n\}$$

2. Poisson $P(\lambda)$. Valeurs $X=\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ - dénombrable.

$$P_X(\{k\})=\mathbb{P}(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Independances

Si X et Y sond independantes

$$P_{XY}(x\in A,Y\in B)=P_X(A)P_X(B)$$

Produit direct de deux measure ?

Considere $S=S_1\times S_2$.

Defiltat

Di ou construit l'espase measurable $(S_1\times S_2,\ \mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2)$

Il existe une seule measure $\bar{\nu}$ telle que :

$$\bar{\mu}(A_1\times A_2)=\mu_1(A_1)\mu_2A_2$$

Cette measure $\bar{\mu}$ est le produit direct de μ_1 et μ_1, denote $\bar{\mu}\mu_1\times\mu_1$.

C'est-â-dire :

$$P_{XY} = P_X \times P_Y$$

Ex

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(t,u)\, dP_{XY}(t,u)\mu$$

On a besoin d'une autre quantiti ; fouction de repartition de deux variables.

Définition 5. Si X et Y sont 2 v.a. ou definit

$$F_{xy}(u,\ v) = \mathbb{P}(X \leq u, Y \leq v)$$

Proposition 2. *Si ou connait la founction de repartition du couple (X, Y) on peut calculer les fouctions de repartition marginales*

$$F_X(u) = \lim_{v \to +\infty} F_{XY}(u, v)$$

$$F_Y(v) = \lim_{u \to +\infty} F_{XY}(u, v)$$

Démonstration. $F_X(u) = \mathbb{P}(X \leq u) = P_X((-\infty, u])$. Utilize $\mathbb{R} = \cup_{k=1}^{\infty}(-\infty, k]$ $(-\infty, k)$ est croissant. $\mathbb{P}(X \leq u) = \mathbb{P}(X \leq u, Y \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \leq u, Y \in \cup_{k=1}^{\infty}(-\infty, k])$. $F_X(u) = \mathbb{P}(X \leq u) = P_X((-\infty, u])$. □

Proposition 3. *Si X est Y sont independant v.a. donc $F_{XY}(u, v) = F_x(U)F_Y(V)$*

Démonstration. ... □

Proposition 4. *Si on a : $F_{XY} = (u, v) = F_X(u)F_Y(v)$ cest-a que X et Y sont independante ? Oui.*

Démonstration.

$$P_{XY}(X \leq u, Y \leq v) = P_X(X \leq u)P_Y(Y \leq u)$$

la borelien de la forme $\{(-\infty, u], |u| < \infty\}$ verifiet le properte de l'intersection firme. □

Définition 6. La measure de lebegue dans $\mathbb{R}^2$ est la measure droduit direct des measure des lebesgue dans $\mathbb{R}$.

Convention $\int f\, d\lambda(x) = \int f\, dx$.

Définition 7. Un couple de v.a (X, Y) a une loi conjointe P_{XY} a density si pour toute borelie $B \in \mathcal{B}^{(2)}$ (σ-algebre produite), on a

$$P_{XY}(B) = \iint\limits_{B} f_{XY}(u,v)\, d\lambda(u)\, d\lambda(v)$$

. En particulier s ou a $g(u,v) \in L^1(P_{XY})$ on a :

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(u,v)\, dP_{XY}(u,v) = \iint g(u,v) f_{XY}(u,v)\, d\lambda(u)\, d\lambda(v)$$

Questions

1. Donnet les proprieties de f_{XY} quand X et Y sont independents.
2. Si on connait $F_{XY}(u,v)$ est-ce qu'on peut calculer les marginales $f_X(u),\ f_Y v$?

Proposition 5. *generale Si on connait $f_{XY}(u,v)$ on a :* $\begin{array}{lcl} f_X(u) & = & \int_{\mathbb{R}} F_{XY}(u,v)\, dv \\ f_X(v) & = & \int_{\mathbb{R}} F_{XY}(u,v)\, du \end{array}$

Démonstration. $F_X(t) = \lim\limits_{r\to\infty} F_{XY}(t,r)| = |$

$F_{XY}(t,r) = \mathbb{P}(X \le t, Y \le r) = P_{XY}((-\infty,t]\times(-\infty,r]) = \iint_{-\infty-\infty}^{t\ r} d\lambda(u)\, d\lambda(v) = F_{XY}(t,r)$

$| = | \lim\limits_{r\to\infty} \iint_{-\infty-\infty}^{t\ r} f_{XY}(u,v)\, d\lambda(u)\, d\lambda(v) = \lim\limits_{r\to\infty} \iint_{-\infty-\infty}^{t\ r} f_{XY}(u,v) \mathbb{1}(u)\mathbb{1}(v)\, d\lambda(u)\, d\lambda(v) =$
| Par Fubini ou sont itirer les integrales : |
$= \lim\limits_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}} dv \mathbb{1}(u)\mathbb{1}(v) f_{XY}(u,v) = \lim\limits_{r\to\infty} \int_{-\infty}^{t} du \int_{-\infty}^{r} dv f_{XY}(u,v) = |\text{B. Levi}| ==$
$\int_{\mathbb{R}} du \lim\limits_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}} dv \mathbb{1}(u)\mathbb{1} f_{XY}(u,v)\ F_X(t) = \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}} dv \mathbb{1}(u)\mathbb{1} f_{XY}(u,v)$.

Si X est à densite $F_X(T) = \int\limits_{-\infty}^{t} f_X(u)\, du$. □

<u>Question</u> (Independantes et densités)

Proposition 6. *Ou a deux parties.*

1. *Si 2 v.a. X et Y admetteit, des densitis f_X et f_Y admetteut des densitis f_X et f_y et X et Y sont independantes, alors le couple (X, Y) ament une loi conjointe a densité et $f_{XY} = f_X f_Y$.*
2. *Si le couple (X,Y) adment une densite f_{XY} produit de deux fouctions integrable f_1 et f_2 alors f_1 et f_2 sont les densities (à une constant pvit) de X et Y et X et Y sont indipendantes.*

<u>Exercise</u> On a un couple de v.a. (X,Y) à valuers dans $\mathbb{R}^2$ de loi conjointe :

$$P_{(XY)}(B) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+l}} \delta_{\{k,l\}}(B)$$

Determiner la loi de $Z = \sup\{X,Y\}$.

1. question. Determiner $P_X,\ P_Y$ oui $P_X(X=k)$. Si X et Y sont discrette $\mathbb{P}(X=k)=\sum_j \mathbb{P}(X=k,\ Y=j)$.

$$P_X(\{x\}=\sum_j P_{XY}(\{k,j\})$$

$$\mathbb{P}(X=k)=P_X(\{k\})=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k+j}}$$

$\mathbb{P}(Z\le k)=\mathbb{P}(X\le k,Y\le k)=\int \mathbb{1}_{[0,k]^2}(X,Y)\,d\mathbb{P}=\iint \mathbb{1}_{[0,k]^2}\,dP_{XY}(u,v)=\sum_{i,l=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i+l}}\mathbb{1}_{[1,k]^2}(i,l)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{2^{i+l}}$

0.2 Lesson 4

il fallait moutrer que si les variables aliatories $(X_1,\ X_2)$ ont une densiti $f_{X_1X_2}$ produit direct de deux fonctions f_1 et f_2 , alors a une courtant près, f_1 et f_2 sont le deuxtè de X_1 et X_2 et ces deux variables sont independantés.

L'aut partie (ex.)

Si X_1 et X2 sont indipendant de deuxites respectives f_{X_1} et f_{X_2}, alors le vecteur $(X_1,\ X_2)$ a densité : $f_{X_1X_2}=f_{X_1}f_{X_2}$.

Démonstration. Par Hyp : $f_{X_1X_2}(u,v)=f_{X_1}(u)f_{X_2}(v)$. D'aurt cete on sait que en general :

$$f_{X_1}(u)=\int_{\mathbb{R}} f_{X_1X_2}(u,\ v)\,\mathrm{d}\lambda v$$

$$f_{X_2}(v)=\int_{\mathbb{R}} f_{X_1X_2}(u,\ v)\,\mathrm{d}\lambda u$$

Objectif : Montrer que, a une costante pres $f_1=f_{X_1},\ f_2=f_{X_2}$. On observe que :

$$f_{X_1}(u)=\int_{\mathbb{R}} f_{X_1X_2}(u,\ v)\,\mathrm{d}v=f_1(u)\int_{\mathbb{R}} f_2(v)\,\mathrm{d}v$$

$$f_{X_2}(v)=\int_{\mathbb{R}} f_{X_1X_2}(u,\ v)\,\mathrm{d}u=f_1(v)\int_{\mathbb{R}} f_1(u)\,\mathrm{d}u$$

On pultiple les deux expressions :

$$f_{X_1}(u)f_{X_2}(v)=f_1(u)f_2(v)\int_{\mathbb{R}} f_2(v)\,\mathrm{d}v\int_{\mathbb{R}} f_1(u)\,\mathrm{d}u=f_1(u)f_2(v)\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f_2(v)f_1(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Donc on a montré que $f_1(u)f_2(v)=f_{X_1}(u)f_{X_2}(v)$.

Remarque. *à des constants prés on pourra idéntifier f_{X_1} avec f_1 et f_{X_2} avec f_2. Pourtémniner : La loi du couple (X_1,X_2) $P_{X_1X_2}$ ou sait que pent l'écriré. Notation Si on a ne mesure P avec densite f ou l'écrira coniue sa $P=f\,\mathrm{d}x$, $P(A)=\int_A f\,\mathrm{d}x$. $\int g\,\mathrm{d}f=\int gf\,\mathrm{d}x$.*

$$P_{X_1X_2} = f_{X_1X_2}(u,v)\,\mathrm{d}\lambda u\,\mathrm{d}\lambda v = f_1(u)f_2(v)\,\mathrm{d}\lambda u\,\mathrm{d}\lambda v = f_{X_1}(u)f_{X_2}(v)\,\mathrm{d}\lambda u\,\mathrm{d}\lambda v = P_{X_1} \times \circ P_{X_2}$$

(product direct des lois marginales)

□

Proposition 7. *si X_1 et X_2 sond deux v.a., cessertious suirvantes sont equivalentes :*

1. *X_1 et X_2 sond independantes*
2. *$\forall$ fonctions g_1 et g_2 réellact positiones on a :*

$$\int g_1 \circ X_1 \dot{g}_2 \circ X_2 \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int g_1 \circ X_1 d\mathbb{P} \int g_2 \circ X_2 \,\mathrm{d}\mathbb{P}$$

3. *Pur tout fouctions réles bornés, g_1 et g_2 on a :*

$$\int g_1 \circ X_1 \dot{g}_2 \circ X_2 \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int g_1 \circ X_1 d\mathbb{P} \int g_2 \circ X_2 \,\mathrm{d}\mathbb{P}$$

Applications Supposons que g_1 et g_2 sont l'identité et que X_1 et X_2 sont independantes :

$$\mathbb{E}(X_1 \dot{X}_2) = \mathbb{E}(X_1) \times \mathbb{E}(X_2)$$

$$\int 1 \circ X_1 \dot{2} \circ X_2 \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int 1 \circ X_1 d\mathbb{P} \int 2 \circ X_2 \,\mathrm{d}\mathbb{P}$$

Exemple 0.2.1. X_1 et X_2 indipendent $\int X_1^2 \sin X_2 \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int X_1^2 \,\mathrm{d}\mathbb{P} \int \sin X_2 \,\mathrm{d}\mathbb{P}$.

Démonstration. (Idée) □

Si x_1 et X_2 sont indepts : $\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2)$. $\mathbb{E}([(X_1 = X_2) - (X_1 + X_2)]^2)$ On developpe ce carré Ondécoucre des ceme du type $\mathbb{E}(X_1X_2)$ On utilisere cete égalité pour définir le fait que 2 variables sont dicopllies.

Exemple 0.2.2. Sur l'espase probabilite $(\omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ on considere le xouple (X,Y) ave loi conjomte P_{XY} à densite

$$f_{XY}(u,v) = \alpha(1-u^2)\mathbb{1}_{[0,1)}(u)ve^{-3v}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}$$

1. déterminer le valur de α
2. déterminer la lois marginales.

Exemple 0.2.3. Sur l'espase $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ou le vecteru aléatoire (X, Y) de loi

$$P_{XY} = \alpha(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$$

où α est un parametu ree et μ est une mesure à densité avec densité :

$$f_1(u, v) = \frac{1}{u^2} e^{-v} \mathbb{1}_{[1,+\infty)}(u) \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(v)$$

μ_2 : mesure uniforment distribuée sur $[0, 1] \times [0, 1]$. $\mu_3 = \delta_{\{1,1\}} + \delta\{-1, 2\}$. Determiner α et le lois marginales de X et de Y. Est que X et Y sont independantes ?