1 Espase Probabilisé

Soit Ω est Univers (est random ensemble).

Définition 1. *σ - algebra*
La famille des ensembles $\mathcal{A}$ s'appelle σ-Algebra si :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$ ($A^C = \bar{A}$)
3. Si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$: $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Définition 2. *Probabilité*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Si $\{A_k\}_k^{\infty}$ - disjoint (pour tout $i \neq j$: $A_i \cup A_j = \emptyset$) :

$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

Espasce probabilisable ($\underbrace{\Omega}_{\text{univers}}$, $\underbrace{\mathcal{A}}_{\text{tribu}}$).
Espase probabillisé $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbb{P})$.
Variable Aléatoire (random variable) est fonction measurable X :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "X"] \arrow[d, "\sigma\text{-algebre}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\sigma\text{-algebre}"] \\
\mathcal{A} & \mathcal{B}\ \text{(Borel)}
\end{tikzcd}$$

Soit Ω un ensemble. Soit $\mathcal{F}$ un famille d'ensembles de Ω, qui n'est pas forcément une σ-algebre.

Définition 3. On appelle σ-algebr engendrée par $\mathcal{F}$, denotée $\sigma(\mathcal{F})$ la plus petite σ-algebre que contient $\mathcal{F}$.

Définition 4. Borel $(\mathcal{B})$ est la σ-algebre engendrée par les intervalles ouvertes de $\mathbb{R}$ c'est-â-dire de la forme $(a,\ b),\ |a|,\ |b| < \infty$ (famile $\mathcal{F}_0$).

On dit Borel $(\mathcal{B})$ est aussi σ-algebre engendrée par des intervalles de la forme $(-\infty,\ |a|],\ |a| < \infty$ (famile $\mathcal{F}_{FN}$).

Remarque. $\sigma(\mathcal{F}_0) = \sigma(\mathcal{F}_{FN})$

Proposition 1. *Pour verifier la measurable il suffit de la tester sur une famile qui engendrée la σ-algebre de Borele.*

Exercice. (simple mais important)
Soit Ω un ensemble. $\mathcal{P} = \{P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_k\}$ est une partition finit de Ω, c'est-â-dire $\cup_{j=1}^{k} P_j = \Omega$ et $P_\alpha \cap P_\beta = \varnothing$.

1. Trouve $\sigma(\mathcal{P})$.
   Réponse :
   $\sigma(\mathcal{P})$ contient tout reunion d'elementes $\mathcal{P}$.
   (En partiqulier si $A \in \sigma(\mathcal{P})$: $A = \cup_{k=1}^{l} P_{i_k}$)
2. Trouve commont sont faites les v.a. par rapport â $\sigma\mathcal{P}$.
   Réponse :
   Consider $\Omega = \mathbb{R}$. $X(\omega) = \alpha$. α est l'image ω. Le point α est aussi un ensemble, qu'on denote $\{\alpha\}$: "singlitore" qui est un borelien. Car X est measurable par rapport â $\sigma(\mathcal{P})$, $X^{-1}(\{\alpha\}) = \cup P_{i_k}$.
   Une function measurable pour rapport à $\sigma(\mathcal{P})$ est constante par morceaux sr les éléments de la partition.
   On replace X avec autre object qui "approxime" X est measurable par rapport â $\sigma(\mathcal{P})$.

Espase probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathbb{P})$. $X : \Omega \to \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Borel}}$, X est v.a.

Loi de X on définir un mesure de probabilite sur $(\mathbb{R},\ \mathcal{B})$ de la maniere sivante si $B \in \mathcal{B}$: $P_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$.

On appelle P_X de La Loi de X.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ On pourra écrite X de la maniere suivante : $X(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega)$, $A_k = \{\omega \,|\, X(\omega) \in A_k\}$. Calculer P_X (la loi de X) :

Si $B \in \mathcal{F}$, $P_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$.

On appelle D l'ensemble valiur de X : $D = \{x_1,\ X_2,\ \dots x_k \dots\}$.

$P_X(B) = P_X(B \cap D) = P_X(B \cap \cup_{k=1}^{\infty}\{x_k\}) = P_X(\cup_{k=1}^{\infty}(B \cap \{x_k\})) = \sum_{k=1}^{\infty} P_X(B \cap \{x_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = x_k)\delta_{\{x_k\}}(B) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{\{x_k\}}(B)$

$$\delta_a(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in B \\ 0 & \text{si } a \notin B \end{cases}$$

On introduit la measure de Dirrac :

$$\left.\begin{array}{rcl} X & = & \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{1}_{A_k} \\ P_x & = & \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{\{x_k\}} \\ P_x & = & \mathbb{P}(A_k) \end{array}\right\} \text{v.a. discrete}$$

Exemple. (v.a. discrete)

1. $B(n,\ p)$ dinomiale
   Valeurs : $X = \{0,\ 1,\ \dots n\}$.

$$P_k = \mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ i \in \{0,\ \dots,\ n\}$$

2. Poisson $P(\lambda)$. Valeurs $X = \{0,\ 1,\ 2,\ ...\}$ - dénombrable.

$$P_X(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Independances
Si X et Y sond independantes

$$P_{XY}(x \in A, Y \in B) = P_X(A)P_X(B)$$

Produit direct de deux measure ?
Considere $S = S_1 \times S_2$.
Defiltat
Di ou construit l'espase measurable $(S_1 \times S_2,\ \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$
Il existe une seule measure $\bar{\nu}$ telle que :

$$\bar{\mu}(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2 A_2$$

Cette measure $\bar{\mu}$ est le produit direct de μ_1 et μ_1, denote $\bar{\mu}\mu_1 \times \mu_1$.
C'est-â-dire :

$$P_{XY} = P_X \times P_Y$$

Ex

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(t, u)\, dP_{XY}(t, u)\mu$$

On a besoin d'une autre quantiti ; fouction de repartition de deux variables.

Définition 5. Si X et Y sont 2 v.a. ou definit

$$F_{xy}(u,\ v) = \mathbb{P}(X \leq u, Y \leq v)$$

Proposition 2. *Si ou connait la founction de repartition du couple (X, Y) on peut calculer les fouctions de repartition marginales*

$$F_X(u) = \lim_{v \to +\infty} F_{XY}(u, v)$$

$$F_Y(v) = \lim_{u \to +\infty} F_{XY}(u, v)$$

Démonstration. $F_X(u) = \mathbb{P}(X \leq u) = P_X((-\infty, u])$. Utilize $\mathbb{R} = \cup_{k=1}^{\infty}(-\infty, k]$ $(-\infty, k)$ est croissant. $\mathbb{P}(X \leq u) = \mathbb{P}(X \leq u, Y \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \leq u, Y \in \cup_{k=1}^{\infty}(-\infty, k])$. $F_X(u) = \mathbb{P}(X \leq u) = P_X((-\infty, u])$. □

Proposition 3. *Si X est Y sont independant v.a. donc $F_{XY}(u, v) = F_x(U)F_Y(V)$*

Démonstration. ... □

Proposition 4. *Si on a : $F_{XY} = (u, v) = F_X(u)F_Y(v)$ cest-a que X et Y sont independante ? Oui.*

Démonstration.

$$P_{XY}(X \leq u, Y \leq v) = P_X(X \leq u) P_Y(Y \leq u)$$

la borelien de la forme $\{(-\infty, u], |u| < \infty\}$ verifiet le properte de l'intersection firme. □

Définition 6. La measure de lebegue dans $\mathbb{R}^2$ est la measure droduit direct des measure des lebesgue dans $\mathbb{R}$.

Convention $\int f \, d\lambda(x) = \int f \, dx$.

Définition 7. Un couple de v.a (X, Y) a une loi conjointe P_{XY} a density si pour toute borelie $B \in \mathcal{B}^{(2)}$ (σ-algebre produite), on a

$$P_{XY}(B) = \iint\limits_B f_{XY}(u, v) \, d\lambda(u) \, d\lambda(v)$$

. En particulier s ou a $g(u, v) \in L^1(P_{XY})$ on a :

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(u, v) \, dP_{XY}(u, v) = \iint g(u, v) f_{XY}(u, v) \, d\lambda(u) \, d\lambda(v)$$

Questions

1. Donnet les proprieties de f_{XY} quand X et Y sont independents.
2. Si on connait $F_{XY}(u, v)$ est-ce qu'on peut calculer les marginales $f_X(u)$, $f_Y v$?

Proposition 5. *generale Si on connait $f_{XY}(u, v)$ on a :* $\begin{array}{lcl} f_X(u) & = & \int_{\mathbb{R}} F_{XY}(u, v) \, dv \\ f_X(v) & = & \int_{\mathbb{R}} F_{XY}(u, v) \, du \end{array}$

Démonstration. $F_X(t) = \lim\limits_{r \to \infty} F_{XY}(t, r)| = |$

$$F_{XY}(t, r) = \mathbb{P}(X \leq t, Y \leq r) = P_{XY}((-\infty, t] \times (-\infty, r]) = \iint_{-\infty -\infty}^{t \;\; r} d\lambda(u) \, d\lambda(v) = F_{XY}(t, r)$$

$| = | \lim\limits_{r \to \infty} \iint_{-\infty -\infty}^{t \; r} f_{XY}(u, v) \, d\lambda(u) \, d\lambda(v) = \lim\limits_{r \to \infty} \iint_{-\infty -\infty}^{t \; r} f_{XY}(u, v) \mathbb{1}(u) \mathbb{1}(v) \, d\lambda(u) \, d\lambda(v) =$
| Par Fubini ou sont itirer les integrales : |
$= \lim\limits_{r \to \infty} \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}} dv \mathbb{1}(u) \mathbb{1}(v) f_{XY}(u, v) = \lim\limits_{r \to \infty} \int_{-\infty}^{t} du \int_{-\infty}^{r} dv f_{XY}(u, v) =$ |B. Levi| $==$
$\int_{\mathbb{R}} du \lim\limits_{r \to \infty} \int_{\mathbb{R}} dv \mathbb{1}(u) \mathbb{1} f_{XY}(u, v) \;\; F_X(t) = \int_{\mathbb{R}} du \int_{\mathbb{R}} dv \mathbb{1}(u) \mathbb{1} f_{XY}(u, v)$.

Si X est à densite $F_X(T) = \int\limits_{-\infty}^{t} f_X(u) \, du$. □

<u>Question</u> (Independantes et densités)

Proposition 6. *Ou a deux parties.*

1. *Si 2 v.a. X et Y admetteit, des densitis f_X et f_Y admetteut des densitis f_X et f_y et X et Y sont independantes, alors le couple (X, Y) ament une loi conjointe a densité et $f_{XY} = f_X f_Y$.*

2. Si le couple (X, Y) adment une densite f_{XY} produit de deux fouctions integrable f_1 et f_2 alors f_1 et f_2 sont les densities (à une constant pvit) de X et Y et X et Y sont indipendantes.

<u>Exercise</u> On a un couple de v.a. (X, Y) à valuers dans $\mathbb{R}^2$ de loi conjointe :

$$P_{(XY)}(B) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+l}} \delta_{\{k,l\}}(B)$$

Determiner la loi de $Z = \sup\{X, Y\}$.

1. question. Determiner $P_X,\ P_Y$ oui $P_X(X = k)$. Si X et Y sont discrette $\mathbb{P}(X = k) = \sum\limits_j \mathbb{P}(X = k,\ Y = j)$.

$$P_X(\{x\} = \sum_j P_{XY}(\{k, j\})$$

$$\mathbb{P}(X = k) = P_X(\{k\}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+j}}$$

$\mathbb{P}(Z \leq k) = \mathbb{P}(X \leq k, Y \leq k) = \int \mathbb{1}_{[0,k]^2}(X, Y)\, d\mathbb{P} = \iint \mathbb{1}_{[0,k]^2}\, dP_{XY}(u, v) = \sum\limits_{i,l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+l}} \mathbb{1}_{[1,k]^2}(i, l) = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{l=1}^{k} \frac{1}{2^{i+l}}$