Walter Aschbacher

Table des matières

cm 1 1' 2 2'... ; TD ; CC, CT Théorie du distributions. (12 * 2 + 1)h CM+TD

Chapitre 1

Espaces de fonctions tests

1.1 Espaces vectoriels topologiques localement convexes et séparés

Pas de profondes.

La topologie d'un espace vectoriel complexe V n'est pas toujours donnée par une norme comme dans le d'un cas espace de Banach ou d'un espace de Hilbert. En plus, dans une topologie quelconque, les opérations linéaires de V, c-à-d, l'addition et la multiplication par un scalaire complexe, respectivement notées

$$\begin{array}{cc} V \times V \to V & \mathbb{C} \times V \to V \\ (x, y) \mapsto x + y\text{'} & (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{array}$$

ne sont pas nécessairement continues.

Alors, nous commençons section par discuter un procédé général qui nous permettra d'in une topologie sur V t.q. ce opérations linéaires deviennent des applications continues p.r. à cette topologie.

Dans ce cours, sans que rien d'autre ne soit explicitement indique, V sera toujours un espace vectoriel complexe.

> **Définition 1.** Soit V un espace vectoriel. Une topologie sur V telle que les opérations linéaires sont continue par rapport est dite "compatible".
>
> Un espace vectoriel V muni d'une topologie compatible s'appelle un "espace vectoriel topologique (EVT)".

Rappelons-nous la définition d'une topologie.

> **Définition 2.** Un topologie sur une ensemble X est une famille que notée souvent T de parties de X ayant les propriétés suivantes :
> (T1) $\varnothing \in T$, $X \in T$ (T2) soit $A_i \in T$ pour tout $i \in I$ (où I est quelconque, I n'est pas nécessairement dénombrable). Alors $\cup_{i \in I} A_i \in T$. (T3) Soit $N \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ et $A_1, ..., A_N \in T$. Alors, $\cap_{i=1}^{N} A_i \in T$.

Le couple (X, T) s'appelle un espace topologique. En plus, les éléments de T s'appellent les ensembles "ouvert" et leurs complémentaires (dans X), les ensembles "fermes".

Exemple 1. [(a)]
- Soit X un ensemble et $T = \{\varnothing, X\}$. Alors, T est une topologie sur X qui s'appelle la "topologie triviale".
- Soit X un ensemble et $T = P(X)$ l'ensemble des parties de X. Alors, T est une topologie sur X qui s'appelle la "topologie discrète".
- L'ensemble $T = \{\text{unions d'intervalles ouverts de } \mathbb{R}\}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$ (la topologie usuelle).

Afin de pouvoir et introduire une topologie compatible T sur un espace vectoriel V pour que (V, T) devienne un espace vectoriel topologique nous utiliserons la notion fondamentale suivante.

Définition 3. Une "semi-norme" sur un espace vectoriel V est une application

$$p : V \to \mathbb{R}$$

ayant les propriétés suivantes (pour tout $x, y \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$) : (SN1) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ (inégalité triangulaire) (SN2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ (linéarité)

La propriété (SN1) s'appelle l'"inégalité triangulaire" et (SN2) l'"homogénéité positive". Si en plus, p a la propriété de "séparation", c-à-d (SN3) $p(x) = 0$, alors $x = 0$; la semi-norme p s'appelle une "norme" sur V.

Proposition 1. *Une semi-norme a les propriétés élémentaires suivantes. Soit p une semi-norme sur l'espace vectoriel V. Alors :*

(a) $p(0) = 0$

(b) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ *pour tout* $x, y \in V$

(c) $p(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in V$

Démonstration. cf Exr. 1 □

Exercice 1. (a) Soit $V = \mathbb{C}^d$. Alors, pour tout $i \in \{1, ..., d\}$, l'application

$$p_i : V \to \mathbb{R},$$

définie, pour tout $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{C}^d$, par

$$p_i(x) := |x_i|$$

est une semi-norme sur V.

(b) Soit V un espace vectoriel et $T : V \to \mathbb{C}$ une forme linéaire sur V. Alors, l'application

$$p : V \to \mathbb{R},$$

définie pour tout $X \in V$, par

$$p(x) := |T(x)|,$$

est une semi-norme sur V.

Démonstration. cf. Exr. 2 □

Remarque. Pour décrire la topologie usuelle sur $\mathbb{C}^d$, il ne suffit pas d'utiliser un soul p_i de Ex. 1.6(a), mais toutes les semi-normes de la famille. $P := \{p_1, ..., p_d\}$ sont nécessaires.

A présent, nous allons introduire la notation utilisée dans ce cours.

Définition 4. Dans ce cours, si rien d'autre n'est explicitement indiquée, le sous ensemble $\Omega \in \mathbb{R}$ est toujours un *ouvert* non-vide de $\mathbb{R}^T$. Pour $a = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ appelé un "multi-indice", et $x = (x_1, ..., x_d) \in \Omega$ on écrira :

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$$

$$D^{\alpha=0} := 1$$

$$D^{\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... x_d^{\alpha_d}}$$

Exemple 2. Pour $d = 3$ et $\alpha = (1, 0, 2)$, on a $D^{\alpha} = D^{(1,0,2)} = \frac{\partial^{23}}{\partial x_1 \partial^2 x_3}$

Soit $m \in \mathbb{N}$. L'espace vectoriel complexe des fonctions de Ω dans $\mathbb{C}$ qui sont m fois continûment dérivables est noté $C^m(\Omega) = \{\phi : \Omega \to \mathbb{C} | D^{\alpha}\varphi \in C(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^d avec |\alpha| \leq m\}$, et $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ sont les foncions continues sur Ω. Si $K \subset \Omega$ est un sous-ensemble compact (c-à-d, borné et fermé) de Ω, on écrira $K \Subset \Omega$.

Les semi-normes suivantes seront d'une grande importance par la suite.

Proposition 2. *Soit $V = C^m(\Omega)$ pour un $m \in \mathbb{N}$, soit $K \Subset \Omega$ et $l \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq l \leq m$. Alors :*

(a) L'application

$$P_{K,l} : V \to \mathbb{R}$$

définie, pour tout $\varphi \in V$ par

$$P_{K,l}(\varphi) := \sup_{\substack{X \in K \\ |\alpha| \leq l}} |(D^{\alpha}\varphi)(x)|,$$

est une semi-norme sur V.

(b) L'application $q_{K,l} : V \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $\varphi \in V$, par

$$q_{K,l}(\varphi) := \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq l} \int_K \mathrm{d}x \, |(D^{\alpha}\varphi)(x)|^2},$$

est une semi-norme sur V. (n'est pas une norme)

Démonstration. Nous avons vérifier les propriétés d'une semi-norme dans Déf. 1.4.

(a) (SN1) Pour tout $\varphi, \psi \in C^m(\Omega)$, on a :

$$
\begin{aligned}
P_{K,l}(\varphi+\psi) &= \sup_{\substack{x\in K\\|\alpha|\le l}} |D^\alpha(\varphi+\psi)(x)| \\
&= \sup_{\substack{x\in K\\|\alpha|\le l}} |D^\alpha(\varphi)(x) + \underbrace{D^\alpha(\psi)(x)}_{\in\mathbb{C}}| \\
&\le \sup_{\substack{x\in K\\|\alpha|\le l}} (|D^\alpha(\varphi)(x)| + |D^\alpha(\psi)(x)|) \\
&\le \sup_{\substack{x\in K\\|\alpha|\le l}} |D^\alpha(\varphi)(x)| + \sup_{\substack{x\in K\\|\alpha|\le l}} |D^\alpha(\psi)(x)| \\
&= P_{K,l}(\varphi) + P_{K,l}(\psi)
\end{aligned}
$$

(b) (SN2) Pour tout $\varphi \in C^m(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$
P_{K,l}(\lambda\varphi) = \sup_{\substack{x\in K\\|\alpha|\le l}} |D^\alpha(\lambda\varphi)(x)| = \sup_{\substack{x\in K\\|\alpha|\le l}} |\lambda(D^\alpha\varphi)(x)| = |\lambda| \sup_{\substack{x\in K\\|\alpha|\le l}} |(D^\alpha\varphi)(x)| = |\lambda| P_{K,l}(\varphi)
$$

(c) cf. Exr. 3

□

Définition 5. Soient p_1 et p_2 deux semi-normes sur V. La semi-norme p_1 est dite "plus petite" que p_2, noté $p_1 < p_2$, si, pour tout $x \in V$, on a que

$$
p_1(x) \le p_2(x)
$$

Les semi-normes p_1 et p_2 s'appellent "comparables" si $p_1 < p_2$ ou $p_2 < p_1$.

Deux semi-normes ne sont pas nécessairement comparables comme on peut constater dans la partie (a) de l'exemple suivant.

Exemple 3. (a) Les semi-normes p_i et p_j de Ex. 1.6(a) ne sont pas comparables si $i \neq j$. ($d = 2$: $p_1(x) = |x_1|$, $p_2(x) = |x_2|$. $x = \binom{0}{1}$, $y = \binom{1}{0}$)

(b) Soient $K_1, K_2 \Subset \Omega$ et $K_1 \subseteq K_2$, et soient $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ avec $0 \le l_1 \le l_2 \le m$. Alors, les semi-normes de Prop. 1.9 sont comparables, c-à-d, on a

$$
\begin{gathered}
P_{K_1,l_1} < P_{K_2,l_2} \\
q_{K_1,l_1} < q_{K_2,l_2}
\end{gathered}
$$

Démonstration. cf. Exr. 4 □

Pour tout $r > 0$ et toute semi-norme p sur V, on définit la semi-norme rp sur V par $(rp)(x) := rp(x)$ pour tout $x \in V$. La notion suivante sera utilisé dans la condition de la topologie compatible d'EVT.

Définition 6. Une famille P de semi-norme sur un espace vectoriel V s'appelle "filtrante" si, pour tout $p_1, p_2 \in P$, il existe $p \in P$ et $r_1, r_2 > 0$ t.q.

$$r_1 p_1 < p, \quad r_2 p_2 < p$$

Nous retenons les faits suivants.

Proposition 3. *(a) Soit $P = \{p_1, ..., p_N\}$ avec $N \in \mathbb{N}^*$ une famille finie de semi-normes sur l'espace vectoriel V. Alors, l'application :*

$$\bigvee_{i=1}^{N} p_i : V \to \mathbb{R}$$

définie, pour tout $x \in V$, par

$$(\bigvee_{i=1}^{N} p_i)(x) := \max\{p_1(x), ...p_N(x)\}$$

est semi-norme sur V.

(b) Soit P une famille de semi-normes sur V et soit la famille P' par :

$$q \in P' :\Leftrightarrow \textit{il existe} :$$

$p_1, ..., p_N \in P et r_1, ..., r_N > 0$ pour $N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $q = \bigvee_{i=1}^{N} r_i p_i$.
Alors, P' est une famille filtrante de semi-normes qui contient P. Elle s'appelle al "complétion filtrante" de P.

Démonstration. (a) D'abord pour $q := \bigvee_{i=1}^{N} p_i$, on a en effet que $q : V \to \mathbb{R}$. Ensuite, nous allons vérifier les propriétés d'une semi-norme spécifiés dans Déf. 1.4 : (SN1) pour tout $x, y \in V$, on a

$$q(x+y) = \max\{\underbrace{p_1(x+y)}_{q(x)+q(y)}, ..., p_N(x+y)\} \leq q(x) + q(y)$$

(SN2) Pour tout $x \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$q(\lambda x) = \max\{\underbrace{p_1(\lambda x)}_{|\lambda| p_1(x)}, ..., p_N(\lambda x)\} = |\lambda| \max\{p_1(x), ..., p_N(x)\} = q(x)$$

(b) ef. notes

□

Remarque. Grâce à Prop. 1.13(b), nous supposerons dorénavant qu'une famille de semi-normes est filtrante.

Les familles de semi-normes suivantes joueront également un rôle important plus tard.

Exemple 4. Soient $P_{K,l}$ et $q_{K,l}$ les semi-normes de Prop. 1.9. Alors, les familles de semi-normes sont filtrantes :

(a) $P_m(\Omega) := \{P_{K,l} | K \Subset \Omega, 0 \leq l \leq m\}$

(b) $Q_m(\Omega) := \{q_{K,l} | K \Subset \Omega, 0 \leq l \leq m\}$

Démonstration. cf. Exr. 5 □

Après cette courte discussion sur les familles de semi-normes, nous revenons a présent à la question de la définition d'une topologie compatible sur un espace vectoriel.

Définition 7. Soit p une semi-norme sur l'espace vectoriel V. Pour tout $x \in V$ et tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$B_{p,\varepsilon}(x) = \{y \in V | p(x-y) < \varepsilon\}$$

s'appelle la "p-boule (ouverte)" de centre x et de "rayon" ε.

Ces boules ont les propriétés élémentaires suivantes.

Proposition 4. *Soit p une semi-norme sur l'espace vectoriel V. Alors :*

(a) La p-boule est "invariante par translation", c-à-d, pour tout $x \in V$, on a $B_{p,\varepsilon}(x) = x + \overbrace{B_{p,\varepsilon}}^{B_{p,\varepsilon}(0)}$ où nous avons utilisé la notation $x + B_{p,\varepsilon} := \{x + y | y \in B_{p,\varepsilon}$.

(b) La p-boule est "sphérique", c-à-d, pour tout $x \in B_{p,\varepsilon}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| \leq 1$, on a $\lambda x \in B_{p,\varepsilon}$.

(c) La p-boule est "convexe", c-à-d, pour tout $x, y \in B_{p,\varepsilon}$ et tout $0 \leq \lambda \leq 1$, on a

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in B_{p,\varepsilon}.$$

(d) La p-boule est "absorbante", c-à-d, pour tout $x \in V$, il existe $\lambda > 0$ t.q.

$$\lambda x \in B_{p,\varepsilon}.$$

(e) Soient p_1 et p_2 des semi-normes sur V et soient $x_1, x_2 \in V$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Alors, si $B_{p,\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{p,\varepsilon_2}(x_2) \neq \varnothing$, il existe $x \in V$, une semi-norme p sur V et $\varepsilon > 0$ t.q.

$$B_{p,\varepsilon}(x) \subseteq B_{p_1,\varepsilon_2}(x_1) \cap B_{p_2,\varepsilon_2}(x_2).$$

Démonstration. (a)-(d) cf.Exr.6
(e) Soit $x \in B_{p_1,\varepsilon_1}(x_1) \cap B_{p_2,\varepsilon_2}(x_2)$ et $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - p_1(x-x_1), \varepsilon_2 - p_1(x-x_2)\}$, et soit $p := \bigvee_{i=1}^{2} p_i$. Alors, pour tout $y \in B_{p,\varepsilon}(x)$, on trouve : $p_1(y-x_1) = p_1((y-x) + (x-x_1)) \leq \underbrace{p_1(y-x)}_{\leq p(y-x) < \varepsilon \leq \varepsilon_1 - p_1(x_1-x)} + p_1(x-x_1) < \varepsilon_1$, et de manière analogue, on obtient $p_2(y-x_2) < \varepsilon_2$. □