0.1 Notation & Vocabulaire

On s'intéresse dans ce coure à la modélisation la résolution numérique le problèmes d'optimisation (P) la forme : $\min\{J(x) : x \in X\}$ où :

1. X est un sous-ensemble de E, où $(E, \|\cdot\|)$ espace vectoriel normé (Banach, sortant $E = \mathbb{R}^d$ muni de la norme Euclidienne).
2. $J : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est la fonction objectif (target) ou coût (cost).
3. la notation $\min$ suppose que J atteint effectivement son minimum sur X : il existe au moins une solution $\bar{x}$. Quand on ignore si solution existe, on écrit $\inf$.

Une solution $\bar{x}$ du problème (P) est aussi appelée solution optimale de (P), on dit aussi que $\bar{x}$ est un minimiser de J sur X, on que J atteint son minimum sur X en $\bar{x}$.

Un élément $x \in E$ est dit admissible pour (P) si $x \in X$. X est appelé contrainte du problème (P).

1. si $X = E$: on dit que X est une contrainte like (free constraint), on que (P) est sans contrainte (constraint free).
2. si $X = \{x \in E : h_1(x) = 0, ..., h_q(x) = 0\}$ on dit que X est formé de contraintes égalité.
3. si $X = \{x \in E : g_1(x) \leq 0, ..., g_m(x) \leq 0\}$ on dit que X est formé de contraintes inégalité.

Notation : soit $x, y \in \mathbb{R}^n$, on note $x \geq y$ si $\forall i \; x_i \geq y_i$, on peut alors écrire :

$$\{x \in E, g_1(x) \leq 0, ..., g_n(x) \leq 0\} = \{x \in E : g(x) \leq\}$$

où

$$\begin{aligned} g : E &\to \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque : les vecteurs seront souvent représentes en colonnes.

Exemple 1.

1. identification de paramètres : on reçoit un signal $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto ae^{lt}\cos(xt+d) \end{aligned}$ où a, b, c, d sont des réels à déterminer. On dispose d'un échantillon de valeurs $(t_i, y_i)_{1 \leq i \leq N}$. L'identification ou sans des moindre carres consiste à résoudre.

$$\min\{J(x) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - f(t_i))^2 : x = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\}$$

c'est-à-dire on minimise la somme des erreurs entre $f(t_i)$ et y_i, où la mesure de l'erreur set donnée par le caré de la distance entre y_i et

$$f(t_i) : |y_i - f(t_i)|^2 = (y_i - f(t_i))^2$$

.

Remarque. La choix de mettre au carré est arbitraire, mais rend le problème plus facile. On pourrait considérer $J(x) = \max_{1 \leq i \leq N} |y_i - f(t_i)|$, mais J n'est pas differentiable. La problème est à contrainte libre : $X = E = \mathbb{R}^4$.

2. Boite le conserve cylindrique : On cherche le rayon et la hauteur de la boite de conserve de plus grand volume ayant une surface fixée $S > 0$ (qui représente la quantité de métal nécessaire à la fabrication de la boité) :

   On veut résoudre :

$$\sup\{\pi r^2 h : 2x\pi r^2 + 2\pi rh = S, h \geq 0, r \geq 0\}$$

   Ici on maximise $J(r, h) = \pi r^2 h$ sous les contraintes :

$$X = \{(r, h) \in \mathbb{R}^2 : 2\pi r(r + h) = S, r \geq 0, h \geq 0\}$$

   Remarque. Cela revient à minimiser J.

3. Transport optimal (version discréte) (Monge 1781, Kantorovich 1941-42) aux points $x_i \in \mathbb{R}^2$ on dispose de la quantité ou masse (a. amount) M_i de marchandise (a. goods) aux points $y_j \in \mathbb{R}^2$ on a une demande N_j. Le transport d'une quantité ε de marchandise de x_i à y_j coûte $c(x_i, y_i)$. (par example : $c(x_i, y_j) = |y_j - x_i|$ ou $c(x_i, y_i) = \sqrt{|y_j - x_j|}$). On suppose que l'offre globale est égale à la demande.

$$\sum_{i=1}^{m} M_i = \sum_{j=1}^{n} N_j$$

   On cherche alors à résoudre :

$$\min\{J(l) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c(x_i, y_j) l_{ij} l \in \mathbb{R}^{m \times n}, l \geq 0 \ \forall i \ \sum_{j=1}^{n} l_{ij} = M_i, \ \forall j \ \sum_{i=1}^{n} l_{ij} = N_j\}$$

   où $l_{ij} =$ quantité transportée de x_i à y_j. Champs de recherche très actif depuis 20 ans. Le problème obtenu est un problème de programmation linéaire (a. linear programming) car toutes les contraintes (égalité et inégalité sont linéaires (en fait affines)).

0.2 Rappels de calcul différentiel

Définition 1. Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, on dit que f est Fréchet differentiable au point $\tilde{x}$ (ou differentiable en $\tilde{x}$) si il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ telle que :

$$\forall x \ f(x) = f(\tilde{x}) + L \cdot (x - \tilde{x}) + o(\|x - \tilde{x}\|)$$

où $\frac{o(\|x-\tilde{x}\|(}{\|x-\tilde{x}\|} \underset{x \to \tilde{x}}{\to} 0$.

Dans ce cas, L est notée $Df(\tilde{x})$ et est appelée différentielle de f en $\tilde{x}$.

On dit que f est de classe C^1 sur ouvert U de $\mathbb{R}^N$ si f est differentiable sur U et Df est continue sur U. On dit que f est C^k sur U si Df est C^{k-1} sur U.

Remarque. f est differentiable ou sens de Gateaux si il existe une application linéaire L telle que : $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t \to 0} \frac{f(\tilde{x}+tv)-f(\tilde{x})}{t} = L \cdot v$. Si f est Fréchet differentiable, alors $L = Df(\tilde{x}) \to$ ceci est un moyen d'identificer $Df(\tilde{x})$.

Si on note

$$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$$
$$x \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_M(x) \end{pmatrix}$$

alors on identifie $Df(\tilde{x})$ à la matrice $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\tilde{x})\right)_{\substack{1 \le i \le N \\ 1 \le j \le M}}$ et dans ce cas la notation $Df(\tilde{x}) \cdot v$ est le produit matriciel de $Df(\tilde{x})$ avec le vecteur colonne v.

Cas particulier :

— $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on note $Df(\tilde{t}) = f'(\tilde{t})$ et $f'(\tilde{t})$ est le coefficient directeur de la tangente au graphe de f.

— $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ on note $Df(\tilde{t}) = f'(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} f_1'(\tilde{t}) \\ \vdots \\ f_d'(\tilde{t}) \end{pmatrix}$ est le vecteur tangent au point $\rho(\tilde{t})$ à la courbe $(f(t))_{t \in \mathbb{R}}$.

— $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ on identifie $Df(\tilde{x})$ au gradient de f : $\nabla f(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d} \end{pmatrix}$ et on écrit $Df(\tilde{x}) \cdot v = \langle \nabla f(\tilde{x}), v \rangle$ où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel.
Dans ce cas, $\nabla f(\tilde{x})$ est le vecteur orthogonal à $\{x : f(x) = f(\tilde{x})\} = \{f = f(\tilde{x})\}$ qui indique ld direction de plus forte croissance de f.

En dimension $d = 1$ $\{f = f(\tilde{x})\}$ est en général réduit au point $\tilde{x}$, jointification de la propriété :

soit $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \{f = f(\tilde{x})\}$ $t \mapsto c(t)$ avec $c(0) = \tilde{x}$, alors $c'(0)$ est tangent à la courbe $(c(t))_{t \in]-\varepsilon,\varepsilon[} \subset \{f = f(\tilde{x})\}$ donc $c'(0)$ est tangent à l'ensemble $\{f = f(\tilde{x})\}$ On a aussi : $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $f(c(t)) = f(\tilde{x})$ donc $(f \circ c)'(0) = 0$. (remarque $f \circ c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$) donc $Df(c(0)) \cdot c'(0) = 0 \iff \langle \nabla f(\tilde{x}), c'(0) \rangle = 0$ donc $\nabla f(\tilde{x})$ est orthogonal au vecteur tangent $c'(0)$.

$$\{f = f(\tilde{x})\} = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = f(\tilde{x})\}$$

Exemple 2. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ $\{f = f(0,1)\}$ = cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Corrigé :

$$Df(\tilde{x}) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\tilde{x})\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1} & \frac{\partial f_M}{\partial x_N} & \end{pmatrix}$$

Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

$$Df(\tilde{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d}) = {}^t\nabla f(\tilde{x}).$$

Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ alors $\nabla f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et si f est deux fois differentiable

$$\begin{pmatrix} D^2 f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times d} \\ x \mapsto \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \le i,j \le d} \end{pmatrix}$$

et $D^2f(x)$ est une matrice symétrique (th. de Schwarz). On a alors la formule de Taylor-Youg :

$$f(x) = f(\tilde{x}) + \langle \nabla f(\tilde{x}), x - \tilde{x} \rangle + \frac{1}{2} \left\langle D^2 f(\tilde{x}), (x - \tilde{x}) \right\rangle$$

Chapitre 1

Conditions d'optimalité

1.1 Contraintes libres

Théorème 1. *Si $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ est une solution optimale de (P)*

$$\min\{J(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$$

alors :

— *si J est differentiable en $\bar{x}$:*
$$\nabla J(\bar{x}) = 0$$

— *si J est deux fois differentiable en $\bar{x}$ alors $D^2 J(\bar{x}) \succeq 0$ sur $\mathbb{R}^d$.*

Notation. Si $A \in M_d(\mathbb{R})$ symétrique et V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$, alors :

— $A \succeq 0$ sur V signifie $\forall v \in V$, $\langle Av, v\rangle \geq 0$ (on dit que A est semi-définie positive sur V)

— Caractérisation : $A \succeq 0$ sur $\mathbb{R}^d$ $\iff$ les valeurs propres de A sont positives $\iff$ les mineurs principaux de A sont positifs.

Rappel. Si $I \subset \{1, ..., d\}$ le mineur principal m_I de A est : $m_I(A) = \det((A_{ij})_{i,j\in I})$.

Exemple 1. $\underline{d = 2 :}$ si λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A, on calcule : $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$; $\det(A) = \lambda_1 \times \lambda_2$ alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{tr}(A) \geq 0 \\ \det(A) \geq 0 \end{cases}$$

et les mineurs principaux de A sont A_{11}, A_{22} et $\det(A)$

Remarque. La notation $A \geq \alpha I$ signifie $A - \alpha I \geq 0$ et en particulier :

$$\forall v, \langle Av, v\rangle \geq \alpha \|v\|^2$$

Preuve du théorème. Soit $v \in \mathbb{R}^d$, on pose $\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto J(\bar{x} + tv) \end{array}$ alors on calcule :

$$f'(t) = \langle \nabla J(\bar{x} + tv), v\rangle$$

et

$$f''(t) = \left\langle D^2 J(\bar{x} + tv)v, v \right\rangle.$$

Comme $\bar{x}$ est solution de (P), $\bar{t} = 0$ est solution optimale de

$$\min\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

donc $f'(0) = 0$ et $f''(0) \geq 0$ car $f'(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t} \geq 0$ et $f'(0) = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t} \leq 0$ donc $f'(0) = 0$.

Donc par la formule de Taylor-Yougn :

$$f(t) = f(0) + f'(0)(t-0) + \frac{f''(0)}{2}(t-0)^2 + o(t^2).$$

Où $o(t^2) = \varepsilon(t)t^2, \varepsilon(t) \to 0$. donc $(\frac{f''(0)}{2} + o(1))t^2 = f(t) - f(0) \geq 0$ donc $\frac{f''(0)}{2} + o(1) \geq 0$ en faisant $t \to$: $\frac{f''(0)}{2} \geq 0$

Donc :

$$\forall v \in \mathbb{R}^d \quad \langle \nabla J(\bar{x}), v\rangle = 0 \text{ et } \left\langle D^2 J(\bar{x}), v\right\rangle \geq 0$$

$\square$

Remarque. Les conditions $\nabla J(\bar{x}) = 0$; $D^2 J(\bar{x}) \geq 0$ ne sont pas suffisantes.

Il suffit de considérer $\begin{matrix} J : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{matrix}$ alors $J'(0) = 0$ et $J''(0) = 0 \geq 0$ mais 0 ne minimise par J sur $\mathbb{R}$.

Mais sous les hypothèses : $\nabla J(\tilde{x}) = 0$; $D^2 J(\tilde{x}) \geq \alpha I$ avec $\alpha > 0$ on obtient que $\tilde{x}$ est un minimiser `local` de J : il existe $n > 0$ tel que $\tilde{x}$ est solution de

$$\min\{J(x) : x \in B(\tilde{x}, r)\}$$

1.2 Contraintes égalité

On suppose :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^d : \ \forall i \in \{1, ..., q\}, \ h_i(\bar{x}) = 0\}$$

Rappel. L'espace tangent à X au point $\tilde{x}$ est donné par :

$$T_X(\tilde{x}) = \{c'(0) : \ c \in C^1(]-\varepsilon, \varepsilon[, X), \ c(0) = \tilde{x}\}$$

> **Définition 1.** Les contraintes de X sont Régulières au point $\tilde{x}$ si la famille $(\nabla h_i(\tilde{x}))_i$ est libre.

Propriété 1.2.1. *Si les contraintes de X sont régulières en $\tilde{x}$ alors :*

$$T_X(\tilde{x}) = (\text{vect}(\nabla h_i(\tilde{x}))_{i\in\overline{1,n}})^{\perp}.$$

Remarque. h_i sont "hight levels".

Exemple 2. $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : h_1(0) = 0\}$ où $h_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ alors $\nabla h_1(x_1, x_2) = \binom{2x_1}{2x_2}$ donc les contraintes de X sont régulières pour tout point $\tilde{x}$ de X :

$$\forall \tilde{x} \in X \qquad \nabla h_1(\tilde{x}) \neq 0$$

Démonstration. $T_X(\tilde{x}) \subset (\text{vect}(\nabla h_i(\tilde{x}))_i)^\perp$

Soit $v \in T_X(\tilde{x})$, alors il existe $c \in \varphi^1(]-\varepsilon, \varepsilon[, X)$ tel que $c(0) = \tilde{x}$ et $c'(0) = v$.

Comme $\forall t, c(t) \in X$ on a $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\forall i$, $h_i(c(t)) = 0$ donc $\forall i$, $\langle \nabla h_i(c(0)), c'(0) \rangle = 0$ donc $\forall i$ $\langle \nabla h_i(\tilde{x}), v \rangle = 0$ donc $v \in (\text{vect}(\nabla h_i(\tilde{x})_i))^\perp$

$T_X(\tilde{x}) \supset (\text{vect}(\nabla h_i(\tilde{x}))_i)^\perp$ utilise le théorème des fonctions implicites. □

Théorème 1 (multiplicateurs de Lagrange, extrême liés conditions KKT, Karush Kuhn Tucker)**.** *Si $\bar{x}$ est une solution optimale de*

$$(P) \ \min\{J(x) : x \in X\}$$

et si les contraintes sont régulières en $\bar{x}$ alors : il existe $\lambda_1, ..., \lambda_q$ dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\nabla J(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0$$

$$D^2 J(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i D^2 h_i(\bar{x}) \geq 0 \ \textit{sur} \ T_X(\bar{x})$$

Remarque. Les nombres λ_1, ...,λ_2 sont les multiplicateurs de Lagrange associés à ls solution $\bar{x}$, et on définit le Lagrangien :

$$\begin{gathered}\mathcal{L} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R} \\ (x, \lambda) \mapsto \mathcal{L}(x, \lambda) = J(x) + \textstyle\sum_{i=1}^{q} \lambda_i h_i(x)\end{gathered}$$

alors les conditions KKT peuvent se réécrire :

$$\begin{gathered}\nabla_x \mathcal{L}(\bar{x}, \lambda) = 0 \\ D_x^2 \mathcal{L}(\bar{x}, \lambda) \geq 0 sur T_x(\bar{x})\end{gathered}$$

Démonstration. Soit $v \in T_x(\bar{x})$ alors il existe $c \in \varphi(]-\varepsilon, \varepsilon[, X)$ telle que $c(0) = \bar{x}$ et $c'(0) = v$. Si on pose $f(t) = J(c(t))$, alors 0 est une solution optimale de $\min\{f(t) : t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\}$

donc $f'(0) = 0$ (1) et $f''(0) \geq 0$ (2) donc :

(1) $\forall v \in T_X(\bar{x})$, $\langle \nabla J(\bar{x}), v \rangle = 0$ donc $\nabla J(\bar{x}) \in T_X(\bar{x})^\perp donc \nabla J(\bar{x}) \in \text{vect}((\nabla h_i(\bar{x}))_i)$ donc $\exists \lambda_1, ..., \lambda_q \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla J(\bar{x}) = -\sum \lambda_i \nabla h_i(\bar{x})$$

(2) $\forall v \in T_X(\bar{x}), \left\langle \nabla^2 J(\bar{x}) v, v \right\rangle \geq 0$ donc

$$\nabla^2 J(\bar{x}) \geq 0 \ \textit{sur} \ T_X(\bar{x})$$

□

Correction !!

$$\begin{cases} \nabla^2 J(\bar{x}) \geq 0 \ \textit{sur} \ T_X(\bar{x}) \\ \qquad \textit{dans KKT} \end{cases}$$

Exercice 1. À l'aide de ces conditions résoudre :

$$\min\{x_1 + x_2 : \ x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

1.3 Contraintes mixtes

On suppose que

$$X = \{x \in \mathbb{R}^d : \ \forall i \in \{1, ..., q\}, h_i(x) = 0 \ \forall j \in \{1, ..., m\}, g_j(x) \leq 0\}.$$

On définit le $\mathcal{L}$agrangien associé :

$$\begin{aligned} J : \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R} \\ (x, (\lambda, \gamma)) \mapsto \mathcal{L}(x, \lambda, \gamma) \end{aligned}$$

avec $\mathcal{L}(x, \lambda, \gamma) = J(x) + \sum_i \lambda_i h_i(x) + \sum_j \gamma_j g_j(x)$

Théorème 1 (Fritz-John)**.** *Soit $\bar{x}$ une solution optimale de $\min\{J(x) : x \in X\}$ alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$, $\lambda_1, ..., \lambda_q \in \mathbb{R}$ et $\gamma_1, ..., \gamma_m \in \mathbb{R}_+$ tels que :*

$$\lambda_0 \nabla J(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0$$

et

$$(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_q, \gamma_1, ..., \gamma_m) \neq 0,$$

$$\forall j, \gamma_j g_j(\bar{x}) = 0.$$

Remarque. Le cas le cas régulier non dégénéré est celui où $\lambda_0 \neq 0$, au quel cas on peut supposer $\lambda_0 = 1$. On a alors

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, (\lambda, \gamma)) = 0$$

Le cas $\lambda_0 = 0$ implique que la famille $((\nabla h_i(\bar{x}))_i, (\nabla g_i(\bar{x}))_j)$ est liée (lineary dependent).

Démonstration. 1er cas : on suppose J minorée sur $\mathbb{R}^d$:

$$\exists \beta \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^d \ J(x) \geq \beta$$

Schéma de preuve :

- on régularise le problème via une famille J_n
- $\bar{x}_n$ minimise J_n : on montre $\bar{x}_n \to \bar{x}$
- on utilise l'optimalité de $\bar{x}_n$ pour en déduire des informations sur $\bar{x}$.

On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que $\bar{x}$ est une solution de

$$\min\{J(x) : x \in X, x \in B(\bar{x}, r)\}$$

on choisit $\alpha > 0$ tel que :

$$\beta + \alpha \|x - \bar{x}\|^2 < J(\bar{x}) \iff \|x - \bar{x}\| < r$$

On définit alors :

$$J_n(x) = J(x) + \alpha \|x - \bar{x}\|^2 + \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{q} h_i(x)^2 + \frac{n}{2} \sum_{j=1}^{m} \max(0, g_j(x))^2$$

Propriétés.

- $\forall x \in X$, $J_n(x) = J(x) + \alpha \|x - \bar{x}\|^2$ (car $h_i(x) = 0$ et $\max(0, g_j(x)) = 0$)

— $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $J_n(x) \geq J(x) + \alpha\|x-\bar{x}\|^2 \geq \beta + \alpha\|x-\bar{x}\|^2$

donc $\lim_{\|x\|\to\infty} J_n(x) = +\infty$.

Soit $(x_k)_k$ une suite minimisante de J_n sur $\mathbb{R}^d$: $\lim_{k\to\infty} J_n(x_k) = \inf_{\mathbb{R}^d}(J_n)$.

Comme $\inf_{\mathbb{R}^d}(J_n) \leq J_n(\bar{x}) = J(\bar{x}) < +\infty$ on a $(x_k)_k$ est bornée.

Donc on peut extraire de $(x_k)_k$ une sous-suite convergente vers $\bar{x}_n \in \mathbb{R}^d$.

Si J, h_i, g_j sont continues, alors J_n est continue et $\bar{x}_n$ est une solution de $\min\{J_n(x)\ x \in \mathbb{R}^d\}$.

`On démontre que` $\bar{x}_n \to \bar{x}$, $n \to \infty$.

On a en effet les inégalités : $\beta + \alpha\|\bar{x}_n-\bar{x}\|^2 \leq J_n(\bar{x}_n) \leq J_n(\bar{x}) \leq J(\bar{x})$

donc $(\bar{x}_n)_n$ est bornée on peut en extraire une sous-suite qui converge dans $\mathbb{R}^d$ vers $\bar{x}_\infty$.

Or : pour tout n, $J(\bar{x}) \geq J_n(\bar{x}_n) \geq J(\bar{x}_n) + \alpha\|\bar{x}_n-\bar{x}\|^2$ donc

$$\boxed{J(\bar{x}) \geq J(\bar{x}_\infty) + \alpha\|\bar{x}_\infty-\bar{x}\|^2}$$

donc par définition de α on a : $\|\bar{x}_\infty-\bar{x}\| < r$.

De plus :

$$J_n(\bar{x}_n) = J(\bar{x}_n) + \alpha\|\bar{x}_n-\bar{x}\|^2 + \frac{n}{2}\sum_i h_i(\bar{x}_n)^2 + \frac{n}{2}\sum_j \max(0, g_j(\bar{x}_n))^2$$

or $J_n(\bar{x}_n) \leq J(\bar{x})$ et

$$\begin{array}{ll} J(\bar{x}_n) & \to J(\bar{x}_\infty) \\ \|\bar{x}_n-\bar{x}\|^2 & \to \|\bar{x}_\infty-\bar{x}\|^2 \end{array}$$

donc

$$\frac{n}{2}(\sum h_i(\bar{x}_n)^2 + \sum max(0, g_j(\bar{x}_n))^2)$$

est bornée donc :

$\forall i h_i(\bar{x}_n)^2 \to 0$

$\forall j \max(0, g_j(\bar{x}_n))^2 \to 0$

donc

$$\begin{array}{c} \forall i\ h_i(\bar{x}_\infty) = 0 \\ \forall j\ g_j(\bar{x}_\infty) \end{array} \leq 0$$

donc $\bar{x}_\infty \in X$ donc par optimalité de $\bar{x}$: $J(\bar{x}) \leq J(\bar{x}_\infty)$ or $J(\bar{x}) \geq J(\bar{x}_\infty) + \alpha\|\bar{x}_\infty-\bar{x}\|^2 donc \boxed{\bar{x}_\infty = \bar{x}}$

On écrit la condition d'optimalité par $\bar{x}_n$:

Remarque. La fonction $\begin{array}{c} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \max(0,t)^2 \end{array}$ est de classe C^1 et $f'(t) = 2\max(0,t)$.

Donc si J, h_1, h_2, ... ,h_q, g_1, ... ,g_m de classe C^1 alors J_n est de classe C^1 et on peut écrire $\nabla J_n(\bar{x}_n) = 0$ c'est-à-dire :

$$\nabla J(\bar{x}_n) + 2\alpha(\bar{x}_n - \bar{x}) + \sum_{i=1}^{q} n h_i(\bar{x}_n)\nabla h_i(\bar{x}_n) + \sum_{j=1}^{n} n\max(0, g_j(\bar{x}_n))\nabla g_j(\bar{x}_n) = 0.$$

• si on suppose que les suites $(\lambda_i^n)_{n\geq 0}$ et $(\gamma_j^n)_{n\geq 0}$ sont toutes bornées, on peut extraire des sous-suites convergentes :

$$\forall i\ \lambda_i^n \to \lambda_i \qquad \forall j\ \gamma_j^n \to \gamma_j$$

et comme $\bar{x}_n \to \bar{x}$ on a :

$$\boxed{\nabla J(\bar{x}) + 0 + \sum_i \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum \gamma_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0}$$

de plus :$\forall j \forall n\ \gamma_j^n = n \max(0, g_j(\bar{x}_n)) \geq 0$ donc $\boxed{\forall j\ \gamma_j \geq 0}$. Et enfin :

— si $g_j(\bar{x}) = 0$ alors $\gamma_j g_j(\bar{x}) = 0$
— si $g_j(\bar{x}) < 0$ alors pour n grand on a :

$$\gamma_j^n = n \times \max(0, \underbrace{g_j(\bar{x}_n)}_{\to g_j(\bar{x})<0}) = 0$$

Donc $\gamma_j = 0$ donc $\gamma_j g_j(\bar{x}) = 0$.
• si on suppose que au moins une des suites $(\lambda_i^n)_{n\geq 0}$ ou $(\gamma_j^n)_{n\geq 0}$ n'est pas bornée : on divise alors $\nabla J(\bar{x}_n)$ par $\max_{i,j}\{|\lambda_i^n|, \gamma_j^n\} = \kappa_n$ où on peut supposer que $\kappa_n \to +\infty$. On a alors :

$$\frac{1}{\kappa_n}\nabla J(\bar{x}_n) + \frac{2\alpha}{\kappa_n}(\bar{x}_n - \bar{x}) + \sum_i \frac{\lambda_i^n}{\kappa_n}\nabla h_i(\bar{x}_n) + \sum_j \frac{\gamma_j^n}{\kappa_n}\nabla g_j(\bar{x}_n) = 0$$

Par définition de κ_n, les suites $(\frac{\lambda_i^n}{\kappa_n})_{n\geq 0}$ et $(\frac{\gamma_j^n}{\kappa_n})_{n\geq 0}$ sont dans $[-1, 1]$ et on peut supposer (après extraction d'une sous-suite) que l'une d'elle tend vers 1 ou -1.

On note à nouveau λ_i et γ_j les limites de ces suites, alors : $0 \times \nabla J(\bar{x}) + \sum \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum \gamma_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0 avec \forall j_1\ \gamma_j \geq 0 et \gamma_j g_j(\bar{x}) = 0$

$$(\lambda_1, ..., \lambda_q, \gamma_1, ..., \gamma_m) \neq 0$$

car l'un vaut 1 ou -1.

2ème cas si J n'est pas minorée sur $\mathbb{R}^d$ on considère $\begin{array}{c} \tilde{J} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto J(x) + (J(x) - J(\bar{x}))^2 \end{array}$

alors

— $\bar{J}$ est minorée sur $\mathbb{R}^d$
— $\bar{x}$ est solution de $\min\{\tilde{J}(x) : x \in X\}$
— $\nabla \tilde{J}(\bar{x}) = \nabla J(\bar{x})$

on peut appliquer le premier cas à $\tilde{J}$.

Remarque. Est vraie car $\begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto y + (y - J(\bar{x}))^2 \end{array}$ est minorée sur $\mathbb{R}$ (atteint son minimum en $y = J(\bar{x}) - \frac{1}{2}$)

□

Exemple 3. Sut un problème de programmation linéaire :

$$\min\{x_2 - 2x_1 :\ x_1 \geq 0, x_2 - 4x_1 \leq 4, x_2 - x_1 \leq -1\}$$

ici :

$$\begin{aligned} J(x_1, x_2) &= x_2 - 2x_1 \\ g_1(x_1, x_2) &= -x_1 \\ g_2(x_1, x_2) &= x_2 - 4x_1 - 4 \\ g_3(x_1, x_2) &= x_1 - x_2 - 1 \end{aligned}$$

et ce problème au moins une solution car X est ferme et borné dans $\mathbb{R}^2$ et J est continue.

Soit $\bar{x}$ une solution, alors il existe $\lambda_0 \geq 0$, $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$ tels que :

$$\begin{cases} \lambda_0 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ \gamma_1(-\bar{x}_1) = 0 \\ \gamma_2(\bar{x}_2 + 4\bar{x}_1 - 4) = 0 \\ \gamma_3(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 1) = 0 \end{cases}$$

• si $\gamma_1 \neq 0$ alors $\bar{x}_1 = 0$ donc $\begin{cases} \gamma_2(\bar{x}_2 - 4) = 0 \\ \gamma_3(-\bar{x}_2 - 1) = 0 \end{cases}$

• si $\gamma_2 \neq 0$ alors $\bar{x}_2 = 4$ et $\gamma_3 = 0$ donc $\bar{x} = (0, 4)$ et on doit trouver $\lambda_0 \geq 0$ tel que

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

donc $\lambda_0 + \gamma_2 = 0$ impossible donc $\boxed{\gamma_2 = 0}$

• si $\gamma_3 \neq 0$ alors $\bar{x}_2 = -1$ et on cherche $\lambda_0 \geq 0$ tel que :

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$\iff \begin{cases} -2\lambda_0 - \gamma_1 + \gamma_3 = 0 \\ \lambda_0 - \gamma_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_0 = \gamma_3 \\ \gamma_1 = -\gamma_3 \end{cases} \implies \gamma_1 = \gamma_3 = 0$ car $\gamma_1, \gamma_3 \geq 0$impossible car $\gamma_1 \neq 0$ on a donc $\boxed{\gamma_1 = 0}$

• comme $\nabla g_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\nabla g_3(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants on a forcément $\lambda_0 \neq 0$ donc on peut supposer $\lambda_0 = 1$. On cherche alors $\gamma_2, \gamma_3 \geq 0$ tels que :

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$\iff \begin{cases} 4\gamma_2 + \gamma_3 = 2 \\ \gamma_2 - \gamma_3 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma_3 = \frac{6}{3} \\ \gamma_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$ $\gamma_2 > 0$ et $\gamma_3 > 0$ $g_2(\bar{x}) = 0$ et $g_3(\bar{x}) = 0$ c'est-à-dire $\bar{x} = (1, 0)$.

Vocabulaire.
- la condition $\forall j \in \{1, ..., m\}$, $\gamma_j g_j(\bar{x}) = 0$ s'appelle condition de complémentarité.
- on dit qu'on a complémentarité strict lorsque :

$$\forall j, \ \gamma_j \neq 0 \text{ ou } g_j(\bar{x}) \neq 0$$

  (on a toujours $\gamma_j g_j(\bar{x}) = 0$ mais par $\gamma_j = 0$ et $g_j(\bar{x}) = 0$)
- la contrainte g_j est active en $\bar{x}$ si $g_j(\bar{x}) = 0$ et inactive si $g_j(\bar{x}) < 0$
- en cas de complémentarité stricte, g_j est active en $\bar{x}$ si et seulement si $\gamma_j \neq 0$ en $\bar{x}$.

Remarque. dans la preuve du théorème, on a montre que $\min_{\mathbb{R}^d}\{J_n\}$ a au moins une solution en remarquant que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} J_n(x) = +\infty \ (C)$$

On dit que J_n est coursive quand (C) est vérifiée (dans $\mathbb{R}^d$). Si (Ω, T) est un espace topologique et $J : \Omega \to \mathbb{R}$ continue, on dit que J est coercive si pour tout$\alpha \in \mathbb{R}$ $\{\omega \in \Omega : J(\omega) \leq \alpha\}$ est compact dans Ω.

Chapitre 2

Les Méthodes

2.1 Méthode de la plus grande

(ou méthode du gradient) La méthode de la plus grande pente est la méthode numérique la plus simple et l'une des plus anciennes pour résoudre :

$$(P) \ \min\{J(x) : \ x \in \mathbb{R}^d\}$$

Cette méthode consiste à construire une suite récurrente $(x^n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{R}^d$ via la méthode interactive :

$$\begin{cases} x^\circ \text{ fixé} \\ \forall n \geq 0 \ x^{n+1} = x^n - \delta_n \nabla J(x^n) \end{cases}$$

avec $\delta_n > 0$ pour tout n.

Propriétés attendues :

• si $(x^n)_{n\geq 0}$ converge vers $\bar{x}$ et $\delta_n > \delta > 0$ alors : -$\nabla J(x_n) = \frac{x^{n+1}-x^n}{\delta_n} \to 0 \implies \nabla J(\bar{x}) = 0$ donc à la limite on obtient un point critique $\bar{x}$.

• par la formule de Taylor à l'ordre 1 :

$J(x^{n+1}) = J(x^n) + \langle \nabla J(x^n), x^{n+1} - x^n \rangle + \varepsilon(x^{n+1} - x^n)\|x^{n+1} - x^n\| = J(x^n) \underbrace{-\delta_n \|\nabla J(x^n)\|^2}_{\leq 0}$

$x^n)\|x^{n+1} - x^n\|$

donc on espère $J(x^{n+1}) \leq J(x^n)$ c'est-à-dire que la suite $(J(x^n))_{n\geq 0}$ des valeurs est décroisante.

Pour obtenir ces deux propriétés on suppose en général J convexe.

2.2 Rappels sur le fonctions convexes en dimension 1

f est convexe sur $\mathbb{R} \iff \forall x_0, x_1 \forall t \in [0,1] \ f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1)$ $\iff f'$ est croissante sur $\mathbb{R} \iff f'' \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

En dimension d f est convexe sur $\mathbb{R}^d \iff \forall x_0, x_1 \forall t \in [0,1] \ f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1) \iff \forall x, v \in \mathbb{R}^d$, $g_{x,v} : t \mapsto f(x+tv)$ est continue sur $\mathbb{R} \iff$ (m) ∇f est monotone au $\mathbb{R}^d$.

$$\boxed{\forall x_0, x_1 \ \langle \nabla f(x_1) - \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle \geq 0}$$

$\iff D^2 f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^d$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

Démonstration. Preuve de $\implies$ (m) soit x_0, x_1 dans $\mathbb{R}^d$, on pose $x = x_0$, $v = x_1 - x_0$comme $g_{x,v} : t \mapsto f(x_0 + t(x_1 - x_0))$ est convexe, on a $g'(1) \geq g'(0)$ or $g'(t) = \langle \nabla f(x_0 + tv), v\rangle = \langle \nabla f(x_0 + t(x_1 - x_0)), x_1 - x_0\rangle$ donc $\langle \nabla f(x_1), x_1 - x_0\rangle \geq \langle \nabla f(x_0), x_1 - x_0\rangle$. □

Propriété 2.2.1. *Le graphe d'une fonction convexe est au-dessous de ses espaces tangents :*

$$\forall x, z \ f(z) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), z - x\rangle$$

en particulier :

Lemme 1. *Soit $J : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ convexe. Alors $\bar{x}$ est solution de*

$$(P) \ \min\{J(x) : \ x \in \mathbb{R}^d\}$$

si et seulement si

$$\nabla J(\bar{x}) = 0$$

Démonstration. $\implies$ toujours vrai $\Leftarrow$ comme J convexe :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \qquad J(x) \geq J(\bar{x}) + \langle \nabla J(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle = J(\bar{x})$$

□

Démonstration. de propriété ; on pose $v = z - x$, alors $g_{x,v}(t) = f(x + t(z - x))$et on a :

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^1 g'(0)\,\mathrm{d}t = g'(0)$$

or $g(1) = f(z), g(0) = f(x)$
$g'(t) = \langle \nabla f(x + t(z - x)), z - x\rangle, g'(0) = \langle \nabla f(x), z - x\rangle$ □

Remarque. Comment démontrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est convexe sur U convexe ?

Méthode 1 on démontre que $D^2 f \geq 0$ sur U, on de manière équivalente on démontre que pour tout $u \in U$ et tout $v \in \mathbb{R}^d$ la fonction

$$\begin{gathered} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \rho(u + tu) \end{gathered}$$

est convexe au voisinage de 0.

Rappel.

$$g''(0) = \left\langle D^2\rho(u)v|v\right\rangle$$

Méthode 2 si $\rho = h \circ \varphi$ avec $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ convexe sur U et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et convexe au $\varphi(U)$ alors f est convexe.

Démonstration. Pour tous $x, y \in U$ et $t \in [0, 1]$ on a :

$$\varphi((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)\varphi(x) + t\varphi(y)$$

Donc

$$\begin{aligned} h(\varphi((1 - t)x + ty)) \leq & \text{ h croissante} \\ & \leq h((1 - t)\varphi(x) + t\varphi(y)) \leq \text{ h convexe} \\ & \leq (1 - t)h(\varphi(x)) + th(\varphi(y)) \end{aligned}$$

donc $f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + f(y)$. □

Exemple 1.

$$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \|x\|^2$$

où $\|\cdot\|$ est la norme Euclidienne.

Méthode 1. soit $u, v \in \mathbb{R}^d$ on pose $\begin{array}{rl} g : \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \|u + tv\|^2 \end{array}$ alors

$$g(t) = \|u + tv\|^2 = \|u\|^2 + 2t \langle u, v|+\rangle \, t^2\|v\|^2$$

donc $g''(t) = 2\|v\|^2 \geq 0$

donc f est convexe et $D^2f(u) = 2Id$ par tout u.

Méthode 2 $f = h \circ \varphi$ avec $\begin{array}{c} \varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\| \end{array}$ et $\begin{array}{rl} h : \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^2 \end{array}$ alors φ est convexe sur $\mathbb{R}^d$ (c'est la norme !) et h est convexe et croissante sur

$$\mathbb{R}_+ = \varphi(\mathbb{R}^d)$$

donc f est convexe.

b) version continue de la méthode de la plus grande pente On réécrit la formule itérative

$$x^{n+1} = x^n - \delta_n \nabla J(x^n)$$

par définition

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\delta_n} = -\nabla J(x^n)$$

On définit alors une courbe $\begin{array}{c} x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d \\ t \mapsto x(t) \end{array}$.

En posant $\begin{cases} t_0 = 0 \\ x(t_0) = x(0) = x^0 \\ \forall n \geq 0 \; t_{n+1} = t_n + \delta_n \\ \text{et } x(t_{n+1}) = x(t_n) - \delta_n \nabla J(x(t_n)) \end{cases}$

et on prolonge x de manière affine au les segments $[t_n, t_{n+1}]$.

Lorsque $\delta_n > 0$ est petit cette méthode est la méthode d'Euler par résoudre l'équation différentielle.

(SD) $\begin{cases} x(0) = x^0 \\ \forall t \geq 0, x'(t) = -\nabla J(x(t)) \end{cases}$.

Car $\frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{\delta_n} = -\nabla J(x(t_n)) \simeq x'(t_n)$ $(\delta_n \to 0)$

Quand δ_n est petit, on peut s'attendre à ce que le comportement asymptotique de la suite $(x^n)_{n\geq 0}$ et de "la" solution x de (SD) sont identiques : $\lim x^n \simeq \lim_{t\to\infty} x(t)$

Théorème 1. *Si J est convexe de classe C^2 sur $\mathbb{R}^d$ et si $\inf\{J : \mathbb{R}^d\}$ a au moins une solution, alors pour tout $x^0 \in \mathbb{R}^d$, le système dynamique (SD) admet une unique solution $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ et*

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = x^\infty$$

où x^∞ est un minimiser de J :

$$J(x^\infty) = \inf_{\mathbb{R}^d}\{J\}$$

Exemple 2. On définit $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$J(x) = \begin{cases} x^n six \leq 0 \\ 0six \in [0,1] \\ (x-1)^n six \geq 1 \end{cases}$$

Soit $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la solution de

$$\begin{cases} x(0) = x^0 \\ \forall t \geq 0, \ x'(t) = -J'(x(t)) \end{cases}$$

Si $x^0 \leq 0$ alors $x(t) \to 0$, $t \to +\infty$. Si $x^0 \in [0,1]$ alors $\forall t$, $x(t) = x^0$si $x^0 \geq 1$ alors $x(t) \to 1$, $t \to +\infty$. Sur cet exemple, $\lim_{t \to +\infty} x(t)$ est bien dune solution de $\min\{J(y), y \in \mathbb{R}\}$, et cette limite dépend de x^0.

On définit $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $t \mapsto \|\nabla J(x(t))\|^2$ alors ψ est décroisante sur $\mathbb{R}_+$. La dérivée de $t \mapsto \nabla J(x(t))$ est

$$\begin{aligned} t \mapsto & D^d J(x(t)) \cdot x'(t) \\ &= D^2 J(x(t)) x(-\nabla J(x(t))) \\ &= -D^2 J(x(t)) \nabla J(x(t)) \end{aligned}$$

et le gradient de $\xi \mapsto \|\xi\|^2$ est $\xi \mapsto 2\xi$.

donc $\psi'(t) = -\left\langle D^2 J(x(t)) \nabla J(x(t)) | \nabla J(x(t)) \right\rangle \leq 0$ car J convexe donc $D'J \geq 0$
donc $\psi'(t) \leq 0$.

• Bilan $\int^{+\infty} \|\nabla J(x(t))\|^2 \mathrm{d}t$ converge et $t \mapsto \|\nabla J(x(t))\|^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
donc $\|\nabla J(x(t))\|^2 \to 0, t \to +\infty$, donc $\lim_{t \to +\infty} \nabla J(x(t)) = 0$, donc $\lim_{t \to 0} \nabla J(x(t)) = 0$.

Exercice 1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \alpha(y - x^2) + (1-x)^2 \end{aligned}$$

1. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha x(x^2-y)+2(x-1) \\ 2\alpha(y-x^2) \end{pmatrix}$ et la Hessienne est :

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

2. Résolution de (P)
   1ère idée on résolu $\nabla f(x,y) = 0 \iff \left\{ \begin{smallmatrix} x=1 \\ y=1 \end{smallmatrix} \right.$.
   Donc le seul candidat pour être solution est $(1,1)$. Or $f(0,1)$ et $\forall (x,y)$ $f(x,y) = \alpha(\cdot)^2 + (\cdot)^2 \geq 0$ donc f atteint son minimum en $(1,1)$.

Remarque. f est coercive : soit $\beta \in \mathbb{R}$, on montre que $\{f(x,y) \leq \alpha\}$ est borné or $f(x,y) \leq \beta \iff \alpha(y-x^2)^2 + (x-1)^2 \leq \beta \implies (x-1)^2 \leq \beta \implies |x-1| \leq \sqrt{\beta} \implies \alpha(y-x^2) \leq \beta \implies |y-x^2| \leq \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \implies y \in B(0,r)$,$r$ fixe.

conditions `d'optimalité` : $\nabla f(1,1) = 0$
$D^f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -4\alpha \\ -4\alpha & 2\alpha \end{pmatrix}$ on vérifie que $D^2 f(1,1) \geq 0$:

$$tr(D^2 f(1,1)) = 2 + 10\alpha \geq 0 \quad \det\big(D^2 f(1,1)\big) = 4\alpha$$

f est-elle convexe ? on a

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -4\alpha y + 2 & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

si il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $-4\alpha y + 2 < 0$ alors f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$ comme $\alpha \leq \frac{1}{2}$, il suffit de possède $y > 1$. Par conséquent, la fonction n'est pas convexe. ($D^2 f$ doit être défini positivement)

Exercice 2. On résous (P)

$$\sup\{\pi r^2 h : \; r \geq 0, \; h \geq 0, \; 2\pi r^2 + 2\pi r h = S\}$$

1) méthode :
• on suppose que $(,)$ est une solution de ce problème, alors on applique le théorème de Fritz-John à : $(\bar{P})$:

$$-\inf\{-\pi r^2 h : -r \leq 0, -h \leq 0, 2\pi r(r+h) - S = 0\}$$

ici $J(r,h) = -\pi r^2 h$, $g_1(r,h) = -r$, $g_2(r,h) = -h$ et $H_1(r,h) = 2\pi r(r+h) - S$
il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \gamma_1, \gamma_2) \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2) \setminus \{(0,0,0,0)\}$
tels que :

$$\begin{cases} \lambda_0 \nabla J(\bar{r},\bar{h}) + \lambda_1 \nabla H_1(\bar{r},\bar{h}) + \gamma_1 \nabla g_1(\bar{r},\bar{h}) + \gamma_2 \nabla g_2(\bar{r},\bar{h}) = 0 \\ \lambda_0 \begin{pmatrix} -2\pi\bar{r}\bar{h} \\ -\pi\bar{r}^2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 4\pi\bar{r} + 2\pi\bar{h} \\ 2\pi\bar{r} \end{pmatrix} + \gamma_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{cases} \gamma_1(-\bar{r}) = 0 \\ \gamma_2(-\bar{h}) = 0 \end{cases} \text{(complémentarité)} \end{cases}$$

On justifie que (P) a au moins une solution, et que toute solution verifie $\bar{r} > 0$ et $\bar{h} > 0$.
• au moins une solution : soit $((r_n, h_n))_{n \geq 0}$ une suite maximisante :

$$\pi r_n^2 h_n \to \sup(P)$$

alors (r_n, h_n) est bornée dans $\mathbb{R}^2$: en effet, on a : $\forall n$, $r_n \geq 0$, $h_n \geq 0$:

$$2\pi r_n^2 + 2\pi r_n h_n = S > 0$$

donc $2\pi r_n^2 \leq S$ donc $(r_n)_{n \geq 0}$ est bornée on en déduit que $(h_n)_{n \geq 0}$ est borne. Comme $S > 0$ il existe $\tilde{r} > 0$ et $\tilde{h} > 0$ tels que $2\pi\tilde{r}^2 + 2\pi\tilde{r}\tilde{h} = S$ et donc $\sup(P) \geq \pi\tilde{r}^2\tilde{h} > 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \pi \underbrace{r_n}_{born \geq 0} \underbrace{r_n h_n}_{born \geq 0} \geq \pi\tilde{r}^2\tilde{h} > 0$ donc $\liminf_{n\to+\infty} r_n > 0 et \liminf_{n\to\infty} r_n h_n > 0$
Comme $(r_n h_n)_{n \geq 0}$ bornée et $\liminf_{n\to+\infty} r_n > 0$ on en définit que $(h_n)_{n \geq 0}$ est bornée.
Bilan : $((r_n, h_n))_{n \geq 0}$ est bornée donc on peut extraire une sous-suite convergente vers $(r_\infty, h_\infty) \in \mathbb{R}_+^2$ et comme $(r,h) \mapsto \pi r^2 h$ est continue, (r_∞, h_∞) est une solution.
$\lim_{n\to+\infty} \pi r_n^2 h_n = \pi r_\infty^2 h_\infty = \sup(P) et \forall n \; r_n \geq 0 \implies r_\infty \geq 0$
$h_n \geq 0 \implies h_\infty \geq 0$
$2\pi r_n^2 + 2\pi r_n h_n = S \implies 2\pi r_\infty^2 + 2\pi r_\infty h_\infty = S$
De plus pour tout solution on a : $\pi\bar{r}^2\bar{h} = \sup(P) > 0$ donc $\bar{r} > 0$ et $\bar{h} > 0$.
Comme $\bar{r} > 0$ et $\bar{h} > 0$ on obtient $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ (les contraintes $-r \leq 0$ et $-h \leq 0$ sont inactives en $(\bar{r}, \bar{h})$) donc

$$\lambda_0 \underbrace{\begin{pmatrix} -2\pi\bar{r}\bar{h} \\ -\pi\bar{r}^2 \end{pmatrix}}_{\neq 0} + \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 4\pi\bar{r} + 2\pi\bar{h} \\ 2\pi\bar{r} \end{pmatrix}}_{\neq 0} = 0$$

comme $(\lambda_0, \lambda_1) \neq (0,0)$, on en conclut $\lambda_0 \neq 0$ et $\lambda_1 \neq 0$ donc on peut supposer $\lambda_0 = 1$ (on divisant par λ_0) et on résout :

$$\begin{cases} -\pi\bar{r}\bar{h} + \lambda_1(4\pi\bar{r} + 2\pi\bar{h}) = 0 \\ -\pi\bar{r}^2 + \lambda_1 2\pi\bar{r} = 0 \end{cases}$$

$\iff \boxed{\bar{h} = 2\bar{r}}$
donc la boite de conserve cylindrique de plus grand volume à surface fixe est celle qui vérifie : hauteur=diamètre.

Methode 2 $\sup\{\pi r^2 h : r \geq 0, h \geq 0, 2\pi r^2 + 2\pi r h = S\}$

$h = tr$ $\sup\{\pi r^2 tr : r \geq 0, tr \geq 0, 2\pi r^2 + 2\pi r tr = S\} = \sup\{\pi r^3 t : r \geq 0, t \geq 0, 2\pi r^2(1+t) = S\} = \sup\{\pi (\frac{S}{2\pi(1+t)})^{\frac{3}{2}} t : r \geq 0, r = \sqrt{\frac{S}{2\pi(1+t)}}\}$

Exercice 3. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \end{pmatrix}$

$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} \end{pmatrix} \geq 0$

$a = 2$, $b = 1$, équation de la tangente à $\{f = \frac{5}{4}\}$ en $(1,1)$

$\rho(1,1) = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{1})^2 = \frac{5}{4}$

et $\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ est le vecteur normal à $\{f = f(1,1) = \frac{5}{4}\}$au point $(1,1)$.

$\langle \nabla(1,1), (x,y) - (1,1)| =\rangle\, 0$

c'est-à-dire : $\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{x-1 y-1}{|} = \right\rangle 0 \iff \frac{1}{2}(x-1) + 2(y-1) = 0 \iff \boxed{y = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}}$

c) discrétisation de la méthode de la plus grande pente :

On a vu que si J convexe C^2 et $\operatorname{argmin}_{\mathbb{R}+}(J) \neq \varnothing$, alors pour tout $x^\circ \in \mathbb{R}^d$, la trajectoire $t \mapsto x(t)$ solution de

(SD)$\left\{ \substack{x(0)=x^\circ \\ \forall t\geq 0 \;\; x'(t) = -\nabla J(x(t))} \right.$

converge vers un élément $x^\infty \in \operatorname{argmin}(J)$

Notation. On note $\operatorname{argmin}_A(J)$ l'ensemble des solutions $\inf\{J(a), a \in A\}$.

Par approcher numériquement $t \mapsto x(t)$ et surtout x^∞, on peut utiliser plusieurs schémas numériques : • méthode explicite à pas constant on méthode de la plus grande pente à par constant. (Steepest Desent)

on fixe un pas $h > 0$ et considéré la suite $\left\{ \substack{x^\circ fix \\ \forall n \geq 0, x^{n+1} = x^n - h\nabla J(x^n)} \right.$

(ce qui correspond à $x'(t) \simeq \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$) • méthode explicite à pas "optimal". à l'itération (on a calculé x^n et on cherche x^{n+1}), on sait que la dérivée de $g : t \mapsto J(x^n - t\nabla J(x^n))$ est négative en $t = 0$: $g'(0) = -\|\nabla J(x^n)\|^2$. L'idée est de choisir $h_n > 0$ solution de :

(P_n) $\inf\{J(x^n - t\nabla J(x^n)) : t \geq 0\}$

On obtient alors la méthode : $\left\{ \begin{array}{c} x^\circ \;\; fix \\ \forall n \geq 0 \left\{ \substack{h_n \in \operatorname{argmin}_{\mathbb{R}_+} J(x^n - t\nabla J(x^n)) \\ x^{n+1} = x^n - h_n \nabla J(x^n)} \right. \end{array} \right.$

Sauf cas particulier, on n'a pas de formule pour calculer h_n, mais on emploie une méthode de recherche linéaire (line search), comme la méthode de Wolfe on celle d'Armijo qui permet d'obtenir une valeur utilisante pour h_n.

discretisation (schéma) implicite : méthode proximale.

Cette méthode consiste à définir la suite $(x^n)_n$ par :

$$\left\{ \substack{x^\circ \text{fixé} \\ \forall n \geq 0, \;\; x^{n+1} = x^n - h\nabla J(x^{n+1})} \right.$$

donc à chaque étape, il faut résoudre l'équation non linéaire

$$\nabla J(x^{n+1}) + \frac{x^{n+1} - x^n}{h} = 0.$$

Si J est convexe, cela revient à résoudre le problème

$$(P_{n+1}) \;\; \min\{J(x) + \frac{1}{2h}\|x - x^n\|^2$$

En effet, pour $J_n(x) = J(x) + \frac{1}{2h}\|x - x^n\|^2$ on a $\nabla J_n(x) = \nabla J(x) + \frac{x-x^2}{h}$
(et J_n est convexe si J convexe)

A chaque étape, on résout numériquement (de manière approchée) le problème pour trouver x^{n+1}.

Dans tous les cas, ces méthodes se programment de la manière suivante : MATH x° fixé, pas h : $\forall n x^{n+1} = fonction(x_n, h) \implies \lim_{n\to\infty} x^n$ est solution de (P) ALGORITHME • x° fixe, pas h, précision $p > 0$ • $x < -x^\circ$ • tout que erreur ≥ 0 calcul de h_n ? $x < -x^{n+1} = fonction(x, h_{n+1})$ • renvoyer x

L'enem est évaluation de la qualité de la valeur x obtienne. • si on connait la solution $\bar{x}$ vers laquelle converge $(x^n)_n$

$enem = \|x - \bar{x}\|$ • si on connait la valeur du problème $\inf(J)$:

$$enem = J(x^n) - \inf(J)$$

• quand on n'a pas d'information

$$\begin{aligned} enem &= \left\|x^{n+1} - x^n\right\| \\ \text{ou } enem &= J(x^{n+1}) - J(x^n) \\ \text{ou } enem &= \|\nabla J(x^n)\| \end{aligned}$$

d) vitesse de convergence

Définition 1. Soit $(y^n)_n$ convergent dans $\mathbb{R}^d$ vers $\bar{y}$:

— la convergence de (y^n) est linéaire de taux α si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left\|y^{n+1} - \bar{y}\right\|}{\|y^n - \bar{y}\|} \text{ et } \alpha \in]0,1[$$

• la convergence de $(y^n)_n$ est `superlinèaire` si $\alpha = 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left\|y^{n+1} - \bar{y}\right\|}{\|y^n - \bar{y}\|} = 0.$$

• $(y^n)_n$ converge à l'ordre β si :

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\left\|y^{n+1} - \bar{y}\right\|}{\|y^n - \bar{y}\|} < +\infty \text{ avec } \beta > 1$$

pour $\beta = 2$, on parle de convergence `quadratique`.

Remarque. Toutes les normes sur $\mathbb{R}^d$ sont équivalentes, mais pas les vitesses de convergence : on considère $y^n = (\frac{3}{4})^n(1, \frac{1+(-1)^n}{2})$ c'est-à-dire $y^0 = (1,1)$, $y^1 = (\frac{3}{4}, 0)$, $y^2 = (\frac{9}{16}, \frac{9}{16})$, alors $y^n \to (0,0)$

On considère les deux normes sur $\mathbb{R}^2$: $\|(x_1,x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$ et $\|(x_1,x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ alors $\|y^n\|_1 = \begin{cases} (\frac{3}{4})^n sinimpair \\ (\frac{3}{4})^n \times 2 sinpair \end{cases}$ et $\|y^n\|_\infty = (\frac{3}{4})^n$

donc

$\limsup \frac{\left\|y^{n+1} - \bar{y}\right\|_1}{\|y^n - \bar{y}\|_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left\|y^{2n+2}\right\|_1}{y_1^{2n+1}} = \lim_{n\to+\infty} = \frac{3}{2} > 1$

et
$\lim \frac{\|y^{n+1}-\bar{y}\|_\infty}{\|y^n-\bar{y}\|_\infty} = \frac{3}{4} \in]0,1[\to$ convergence de taux $\frac{3}{4}$

• si (y^n) converge vers $\bar{y}$ au taux $\alpha \in]0,1[$ on a : $\forall n$ assez grand, $\left\|y^{n+1}-\bar{y}\right\| \leq {\alpha'}^{n+1}\|y^\circ-\bar{y}\|$ pour tout $\alpha' > \alpha$.
$(\left\|y^{n+1}-\bar{y}\right\| \leq \alpha'\|y^n-\bar{y}\| \leq {\alpha'}^2\left\|y^{n-1}-\bar{y}\right\|)$

• si (y^n) converge à l'ordre β et$\forall n$ $\frac{\left\|y^{n+1}-\bar{y}\right\|}{\|y^n-\bar{y}\|^\beta} \leq M$
alors : $\forall n$ $\|y^n-\bar{y}\| \leq M^{1+\ldots+\beta^{n-1}}\|y^\circ-\bar{y}\|^{\beta^n} \simeq M^{\beta^n}$
si $\|y_0-\bar{y}\| \times M < 0$ alors $\|y^n-\bar{y}\| \to 0$.
donc la convergence d'ordre $\beta > 1$ est très important.
e) méthode de la plus grande pente à pas constant

Définition 2. Soit U un convexe de $\mathbb{R}^d$ • $J : U \to \mathbb{R}$ est α-fortement convexe $(\alpha > 0)$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

$$\begin{aligned} &\forall x,y \in U \quad J(y) \geq J(x) + \langle \nabla J(x), y-x|+\rangle \frac{a}{2}\|y-x\|^2 \\ \iff &\forall x,y \in U \quad \langle \nabla J(x) - \nabla J(y), x-y| \geq\rangle\, a\|y-x\|^2 \\ \iff &\forall x \in U \quad D^2J \geq \alpha I \end{aligned}$$

• $J : U \to \mathbb{R}$ a un gradient L-Lipschitz si : $\forall x,y \in U$, $J(y) \leq J(x) + \langle \nabla J(x), y-x|+\rangle \frac{L}{2}\|y-x\|^2$
$\iff \forall x,y \quad \|\nabla J(x) - \nabla J(y)\| \leq L\|x-y\| \iff \forall x \in U \quad \left\|D^2J(x)\right\| \leq L$

Propriété 2.2.2. *si J convexe :*

$$\left\|D^2J(x) \leq L \iff D^2J \leq LI\right\|.$$

Proposition 1. *Si J convexe et C^2 sur U alors : •a=inf valeur propre de $D^2J(x)$, $x \in U$ si $a > 0$, J est a-fortement convexe sur U •L=sup valeur propre de $D^2J(x)$, $x \in U$, si $L < +\infty$, alors J a un gradient L-Lipschitz sur U.*

Démonstration. $\forall x \in U$ (min valeur propre $D^J(x)$)$\times I \leq D^2J(x) \leq$ (max valeur propre de$D^2J(x)$)$\times I$ □

Exemple 3. Soit $J : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x|+\rangle \langle l, x|+\rangle\, C$

Où A est une matrice symétrique définie positive ayant pour valeurs propres :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_d$$

alors $D^2J(x) = A$ pour tout x. Donc J est λ_1-fortement convexe et a un gradient λ_d-Lipschitz.

Par exemple : $\begin{aligned} J : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\rangle \end{aligned}$ ici $A = \begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} = D^2J(x,y)$ pour tout (x,y)

donc J est $\frac{1}{2}$ fortement convexe et à gradient 2-Lipschitz en particulier : pour tout (x,y) :

$$J(x,y) \geq J(0,0) + \langle \nabla J(0,0)|(x,y)-(0,0)\rangle + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\|(x,y)-(0,0)\|^2 = \frac{1}{4}(x^2+y^2)$$

et
$$J(x,y) \leq J(0,0) + \langle \nabla J(0,0) | (x,y) \rangle + \frac{1}{2} \times 2 \|(x,y) - (0,0)\|^2 = x^2 + y^2$$

Proposition 2. *Si J est a-fortement convexe sur un convexe fermé U, alors U atteint son minimum sur U en un unique $\bar{x} \in U$.*

$$\mathrm{argmin}_U(J) = \{\bar{x}\}.$$

Théorème 2. *Soit $J : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a fortement convexe $(a > 0)$ et à gradient L-Lipschitz alors la suite $(x^n)_{n \geq 0}$ définie par*

$$\begin{cases} x^\circ \ fix \\ \forall n \geq 0, \ x^{n+1} = x^n - h \nabla J(x^n) \end{cases}$$

converge linéairement vers l'unique solution $\bar{x}$ de $\inf_{\mathbb{R}^d}(J)$ avec le taux $\sqrt{1 - 2ah + h^2 L^2}$ si $h \in]0, \frac{2a}{L^2}[$.

La meilleur taux est $\sqrt{1 - (\frac{a}{L})^2}$, obtenu par $h = \frac{a}{L^2}$

4)

2.3 4 la méthode de Newton

Présentation. pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, l'idée de Newton est de linéaire autour d'un point x^0.

$f(x) \simeq f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0)$

et de résoudre :
$$0 = f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0)$$
on trouve alors : $x^1 = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)}$ De manière récursive, on construit la suite $(x^n)_{n \geq 0}$

$$\begin{cases} x^0 \ fix \\ \forall n \geq 0 x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)} \end{cases}$$

Pour cette suite soit bien définie il faut $f'(x^n) \neq 0$ pour tout n. Sous certaines hypothèses, $x^n \to x^\infty$ de me manière quadratique et $f(x^\infty) = 0$.

Lien avec l'optimisation Si $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe, alors résoudre $\min\{J(x) : x \in \mathbb{R}\}$ est équivalent à résoudre $J'(x) = 0$. Si on applique la méthode de Newton pour résoudre $J'(x) = 0$ on construit la suite (x^n) :

$$\begin{cases} x^0 \ fix \\ \forall n \geq 0, \ x^{n+1} = x^n - \frac{J'(x^n)}{J''(x^n)} \end{cases}$$

Pour que cette suite soit bien définie, il faut $J''(x^n) \neq 0$ c'est-à-dire $J''(x^n) > 0$ (car $J'' \geq 0$), donc cette méthode est bien définie des que J est strictement convexe.

Dans le cas général : si $J : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est convexe differentiable, résoudre

$$\min\{J(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$$

est équivalent à résoudre :
$$\nabla J(x) = 0$$

Si J est deux fois differentiable, on linéaires :

$$\nabla J(x) \simeq \nabla J(x^0) + D^2 J(x^0)(x - x^0)$$

et on résout

$$0 = \nabla J(x^0) + D^2 J(x^0)(x - x^0)$$

ce qui donne :

$$x^1 = x^0 - D^2 J(x^0)^{-1} \cdot \nabla J(x^0)$$

De manière récursive, on construit la site $(x^n)_{n\geq 0}$:

$$\begin{cases} x^0 \ fix \\ \forall n\geq 0, x^{n+1} = x^n - D^2 J(x^n)^{-1} \cdot \nabla J(x^n) \end{cases}$$

A nouveur une hypothèse nécessaire est que $D^2 J$ soit inversible donc $D^J > 0$.

Théorème 1. *On suppose J de classe C^2 et D^J L-Lipschitz au voisinage d'un minimiser local $\bar{x}$:*

$$\nabla J(\bar{x}) = 0 \text{ et } D^2 J(\bar{x}) > 0$$

Alors si x^0 est suffisamment proche de $\bar{x}$, alors la suite $(x^n)_{n\geq 0}$ vérifie :
- *$x^n \to \bar{x}$ de manière quadratique*
- *$\nabla J(x^n) \to 0$*

Remarque. Ce résultat est un résultat local : si J est de plus convexe sur $\mathbb{R}^d$, $\bar{x}$ est un minimum global.

Démonstration. soit $r_0 > 0$ tel que $D^2 J$ et L-Lipschitz sur $B(\bar{x}, r_0)$.

Comme $D^J(\bar{x}) > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $D^2 J(x) \geq 2\alpha I$

Soit $r_1 > 0$ tel que $D^2 J(x) \geq \alpha I$ pour tout x dans $B(\bar{x}, r_1)$

Soit $r = \min\{r_0, r_1, \frac{\alpha}{L}\}$ on montre le résultat pour $x^0 \in B(\bar{x}, r)$. Convergence quadratique de (x^n).

$$\begin{aligned} x^{n+1} - \bar{x} &= x^n - \bar{x} - D^2 J(x^n)^{-1} \nabla J(x^n) \\ &= D^2 J(x^n)^{-1} [D^2 J(x^n)(x^n - \bar{x}) - \nabla J(x^n) \end{aligned}$$

or $D^2 J(x^n) \cdot (x^n - \bar{x}) = \int_0^1 D^2 J(x^n)(x^n - \bar{x}) \, \mathrm{d}t$

$$\begin{aligned} \nabla J(x^n) = \nabla J(x^n) - \nabla J(\bar{x}) &= \\ &= \int_0^1 (\nabla J(\bar{x} + t(x^n - \bar{x})))' \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 D^2 J(\bar{x} + t(x^n - \bar{x})) \cdot (x^n - \bar{x}) \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

donc : $x^{n+1} - \bar{x} = \int_0^1 [D^2 J(x^n) - D^2 J(\bar{x} + t(x^n - \bar{x}))] \cdot (x^n - \bar{x}) \, \mathrm{d}t$

$\|x^{n+1} - \bar{x}\| \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^1 L(1-t) \|x^n - \bar{x}\|^2 \, \mathrm{d}t = \frac{L}{2\alpha} \|x^n - \bar{x}\|$

donc si $x^n \in B(\bar{x}, r)$, on a

$$\|x^{n+1} - \bar{x}\| \leq \frac{L}{2\alpha} \times r^2 \leq \frac{r}{2}$$

Donc : $x^n \in B(\bar{x}, r) \implies x^{n+1} \in B(\bar{x}, r)$
Donc si $x^0 \in B(\bar{x}, r)$, la suite $(x^n)_{n\geq 0}$ est dans cette boule et :
$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\|x^{n+1}-\bar{x}\|}{\|x^n-\bar{x}\|^2} \leq \frac{L}{2\alpha}$
donc la convergence de $(x^n)_n$ vers $\bar{x}$ quadratique.
Même type d'argument pour

$$\nabla J(x^n) \to \nabla J(\bar{x}) = 0$$

Commentaire : retour sur la résolution de $f(x) = 0$: si x^0 est proche de $\bar{x}$, converge quadratique, sinon divergence possible. □

Remarque. La méthode de Neuton est une méthode de descente par la formule de Taylor-Young on a : $J(x^{n+1}) = J(x^n) + \left\langle \nabla J(x^n) | x^{n+1} - x^n \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle D^2 J(x^n)(x^{n+1} - x^n) | x^{n+1} - x^n \right\rangle + \varepsilon_n |x^{n+1} - x^n|^2$
avec $\varepsilon_n \to 0$

Exercice 4. feuille 1 ex 3 $f : x \mapsto \langle Ax|x\rangle + \langle b|x\rangle + c$

1. calcul du gradient et de la Hessienne : on a $\nabla f(x) = (A + A^T)x + b$ et $D^2 f(x) = A + A^T$
   méthode $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x + tu)$ alors $h'(0) = \nabla g(x)u$
   (et $h''(0) = \left\langle D^2 f(x) \cdot u | u \right\rangle$) or $h(t) = \langle A(x + tu)|x + tu\rangle + \langle b|x + tu\rangle + c = t^2 \langle Au|u\rangle + t\langle Ax|u\rangle + t\langle Au|x\rangle + t\langle b|u\rangle + f(x)$ donc $h'(0) = \langle Ax|u\rangle + \langle Au|x\rangle + \langle b|u\rangle = \left\langle Ax + A^T x + b|u\right\rangle$ $ps\nabla fx$
   Remarque. on a bien $D^2 d(x)$ symétrique. $\langle Au|x\rangle = (Au)^T x = u^T A^T x = \left\langle u|A^T x\right\rangle$.

2) on a : $\forall x \left\langle \frac{A+A^T}{2} x | x \right\rangle = \langle Ax|x\rangle$ 3) on pose $g(x) = f(Bx)$ avec B inversible

(a) $\bar{x}$ solution de $\inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}^d\} \iff BB^{-1}\bar{x}$ solution de $\inf\{g(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$

(b) calcul de $\nabla g(x)$:

$$\begin{aligned}
\nabla g(x) \cdot u &= Dg(x)u \\
&= Df(Bx) \cdot (Bu) \\
&= \langle \nabla g(Bx)|Bu\rangle \\
&= \left\langle B^T \nabla f(Bx)|u\right\rangle
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\nabla g(x) &= B^T \nabla f(Bx) \\
&= B^T((A + A^T)Bx + b) \\
&= B^T(A + A^T)Bx + B^T b
\end{aligned}$$

autre méthode :

$$\begin{aligned}
g(x) &= f(Bx) \\
&= \langle ABx|Bx\rangle + \langle b|Bx\rangle + c \\
&= \left\langle B^T ABx|x\right\rangle + \left\langle B^T b|x\right\rangle + c
\end{aligned}$$

d'après la question 1) :

$$\begin{aligned}\nabla g(x) &= (B^TAB + (B^TAB)^T)x + B^Tb \\ &= (B^TAB + B^TA^TB)x + B^Tb \\ &= B^T(A+A^T)Bx + B^Tb\end{aligned}$$

Exercice 1 J est a-fortement convexe Exercice 2 on considère $J : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\ x \mapsto \frac{1}{2}\|Bx-b\|^2$ où $B \in M_{l_2 d}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^l_2)$

Condition sur B pour que $\inf\{J(x) = \frac{1}{2}\|Bx-b\|^2 : x \in \mathbb{R}^d\}$ a au plus une solution ? Si $\bar{x}$ est une solution on a

$$\begin{aligned}J(x) &= \frac{1}{2}\langle Bx-b|Bx-b\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle Bx|Bx\rangle - \langle Bx|b\rangle + \frac{\|b\|^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left\langle B^TBx|x\right\rangle - \left\langle B^Tb|x\right\rangle + \frac{\|b\|^2}{2}\end{aligned}$$

donc : $\nabla J(x) = B^TBx - B^Tb$ donc $\bar{x}$ solution implique $B^TB\bar{x} = B^Tb$

Une condition suffisante pour qu'il y ait ou plus une solution est B^TB injective.

autre méthode pour décrire : $J(x) = f \circ g(x)$ avec $g(x) = Bx - b$ et $g(y) = \frac{1}{2}\|y\|^2$ alors $Df(y)\cdot u = y \cdot u$ $(\nabla f(y) = y)$ et $Dy(x)\cdot u = Bu(Dy(x) = B \in M_{l_2 d})$ alors$DT(x)\cdot u = Df(g(x))\cdot(Dg(x)\cdot u) = \langle Bx-b|Bu\rangle = \left\langle B^T(Bx-b)|u\right\rangle$ donc $\nabla J(x) = B^TBx - B^Tb$ Méthode de Newton

$$\begin{cases} x^0\ fix \\ x^{n+1} = x^n - D^2J(x^n)^{-1}\nabla J(x^n)\end{cases}$$

Exemple 4. Soit $\begin{array}{c} J : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\|Bx-b\|^2\end{array}$ par simplifier : $B \in M_d(\mathbb{R})$, B symétrique, $B > 0$. Dans ce cas : $J(x) = \frac{1}{2}\left\langle B^2x|x\right\rangle - \langle Bb|x\rangle + \frac{1}{2}\|b^2\|$ donc $\nabla J(x) = B^2x - Bb$ et $\nabla J(\bar{x}) = 0 \iff \bar{x} = B^{-1}b$ or J est convexe : comme compacté de la fonction convexe $x \mapsto \|Bx-b\|$ et $t \mapsto t^2$ convexe croisante sur $\mathbb{R}_+$. $D^2J(x) = B^2 > 0$ pour tout x! Donc $\min\{J(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ a pour unique solution $\bar{x} = B^{-1}b$. Si on applique la méthode de Newton : calcul de x^1 à partir de x^0 :

$$\begin{aligned}x^1 &= x^0 - D^2J(x^0)^{-1}\cdot\nabla J(x^0) \\ &= x^0 - (B^2)^{-1}\cdot(B^2x^0 - Bb) \\ &= x^0 - x^0 - (-B^{-1}b) = B^{-1}b = \bar{x}\end{aligned}$$

donc on trouve $\bar{x}$ en une itération ! Mais pour faire ce calcul on doit calculer $(B^2)^{-1}$, ce qui est aussi compliqué que de calculer B^{-1} : faire la première est du mème ordre de difficulté que de résoudre le problème !

Remarque. en fait il s'agit à chaque itération de résoudre le système $D^2J(x^n)\cdot y = \nabla J(x^n)$ (on n'a pas besoin de calculer $D^2J(x^n)^{-1}$).

Dans le pratique, on remplace la matrice $D^2J(x^n)^{-1}$ (dont le calcul est coûteux) par une matrice W_n définie de manière récursive à partir de la suite $(x^n)_{n\geq 0}$. On obtient ainsi une méthode de quasi-Newton, pour laquelle $(x^n)_{n\geq 0}$ est définie par :

$$\begin{cases} x^0\ fix, W_0\ fix \\ \forall n \geq 0, x^{n+1} = x^n - h_nW_n\nabla J(x^n),\ h_n > 0 \\ W_{n+1} = f(W_n, x^n, x^{n+1})\end{cases}$$

Puisque W_n remplace $D^2J(x^n)^{-1}$, elle doit vérifier certaines propriétés. Classiquement, on demande :

— W_n symétrique, $W_n > 0$

— équation de quasi-Newton : $x^{n+1} - x^n = W_{n+1}(\nabla J(x^{n+1}) - \nabla J(x^n))$

cette équation se déduit du calcul approché suivant : $\nabla J(x^{n+1}) - \nabla J(x^n) = \int_0^1 (\nabla J(x^n + t(x^{n+1} - x^n)))' \, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 D^2J(x^n + t(x^{n+1} - x^n))(x^{n+1} - x^n) \, \mathrm{d}t \simeq D^2J(x^{n+1})(x^{n+1} - x^n)$

donc $x^{n+1} - x^n \simeq D^2J(x^{n+1})^{-1}(\nabla J(x^{n+1}) - \nabla J(x^n))$

Ces deux conditions laissent un large choix pour W_{n+1}. L'une des formules les plus utilisées est la formule BFGS. (Broyden, Fletcher, Goldfarl, Shanno) :

$$W_{n+1} = W_n - \frac{y_n S_n^T W_n + W_n S_n y_n^T}{\delta_n^T y_n} + \frac{S_n^T W_n S_n + S_n^T y_n}{(S_n^T y_n)^2} y_n y_n^T$$

où $S_n = \nabla J(x^{n+1}) - \nabla J(x^n)$ et $y_n = x^{n+1} - x^n$.

Propriétés :

— Si W_n symétrique alors W_{n+1} est symétrique

— Si $S_n^T y_n > 0$ et $W_n > 0$ alors $W_{n+1} > 0$ or $S_n^T y_n = \left\langle \nabla J(x^{n+1}) - \nabla J(x^n) | x^{n+1} - x^n \right\rangle > 0$ si J strictement convexe sur $[x^n, x^{n+1}]$, ce qui est la cas quand $D^2J > 0$ et $x^{n+1} \neq x^n$.

— on vérifie facilement l'équation de quasi-Newton $W_{n+1} S_n = y_n$.

Sous les hypothèses du théorème précédant, et si de plus :

— W_0 symétrique, $W_n > 0$

— h_n obtenu par recherche linéaire de Wolfe avec $0 < c_1 < \frac{1}{2}$

alors la méthode quasi-Newton BFGS converge super-linéairement vers la solution locale $\bar{x}$ (si x^0 suffisamment proche de $\bar{x}$) Dans la pratique : on pose $W_0 = id$ et on réinitialise "régulièrement" W_n à id.

En effet, W_n contient des informations sur les y_k et s_k pour $h \in \{1, ..., n\}$, or quand x est grand, ces informations ne sont plus forcément pertinentes.

Exercice 1

— soit J a fortement convexe continue sur $\mathbb{R}^d$, alors J est coehrcive :

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} J(x) = +\infty.$$

en effet : comme J est a-fortement convexe, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \qquad J(x) \geq J(0) + \langle \nabla J(0) | x - 0 \rangle + \frac{a}{2} \|x\|^2$$

donc

$$J(x) \geq \underbrace{\|x\|}_{\to \infty} (\underbrace{\frac{J(0)}{\|x\|}}_{\to 0} + \underbrace{\left\langle \nabla J(0) | \frac{x}{\|x\|} \right\rangle}_{\leq \|\nabla J(0)\|} + \underbrace{\frac{a}{2} \|x\|)}_{\to +\infty}.$$

donc $\lim_{\|x\| \to \infty} J(x) = +\infty$

— deux méthodes pour l'existence d'une solution :

— soit $(x^n)_n$ une suite minimisante : $\lim_{x \to +\infty} J(x^n) = \inf\{T\}$

alors $\lim_{n \to +\infty} J(x^n) \leq J(0)$.

donc $(J(x^n))_{n \geq 0}$ est majorée donc $(x^n)_n$ est bornée (car J est coursive), donc on peut extraire de $(x^n)_n$ une sous-suite $(x^{n_k})_k$ convergente vers x^∞ et :

$$J(x^\infty) = \lim_{k \to +\infty} J(x^{n_k}) = \lim_{n \to +\infty} J(x^n) = \inf(J)$$

donc x^∞ est solution (J continue)

Remarque. Il suffit que J soit semi-continue inferiorment : $J(x^\infty) \leq \liminf_{k\to+\infty} J(x^{n_k}) = \lim_{n\to+\infty} J(x^n) = \inf(J)$ or $J(x^\infty) \geq \inf(J)$ donc $J(x^\infty) = \inf(J)$

2ème méthode $\inf\{J(x) : x \in \mathbb{R}^d\} = \inf\{J(x) : J(x) \leq J(0)\}$

et l'ensemble $\{x : J(x) \leq J(0)\}$ est borné (car J est coercive) est fermé (car J continue si s.c.i.)

donc c'est un compact de $\mathbb{R}^d$. Une fonction continue (ou s.c.i.) atteint son minium sur un compact.

Remarque. J coercive $\implies$ (x^n) minimisante est bornée

Exercice 5 (2).

$$J(x) = \frac{1}{2}\|Bx - b\|^2$$

Remarque. si $B = 0$ tous les $x \in \mathbb{R}^d$ sont solution, et J n'esp pas coercive...

Ici J n'est pas coercive : si $y \in \ker B \setminus \{0\}$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} J(ny) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|B(x,y) - b\|^2 = J(0)$$

or $B_y = 0$ mais $\|xy\| \to \infty$, $n \to \infty$. Existence d'une solution : Soit $(x^n)_n$ une suite minimisante, $\lim_{n\to\infty} J(x^n) = \inf J$.

- $x^n = y^n + z^n$ avec $y^n \in \ker(B)$ et $z^n \in (\ker B)^\perp$ alors $J(x^n) = J(z^n)$.
- $(z^n)_n$ est bornée : on raisonne par l'absurde, si $(z^n)_n$ pas bornée on considère $(\frac{z^n}{\|z^n\|})_n$ et on extrait une sous suite qui tent vers y tel que $\|y\| = 1$. Contradiction
  - $y \in (\ker B)^\perp$
  - en considèrent $\frac{J(z^n)}{\|z^n\|^2}$, montrer que $y \in \ker B$

2. montrer que J_ε est coercive et strictement convexe il suffit de calculer $D^2 J_\varepsilon$ 3. pour $\varepsilon > 0$, x^ε est solution de $\inf\{J(x) + \varepsilon\|x\|^2 : x \in \mathbb{R}^d\}$

Soit $\bar{x}$ une solution de $\inf\{J\}$, alors

$$J(x^\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}\|x^\varepsilon\|^2 \leq J(\bar{x}) + \frac{\varepsilon}{2}\|\bar{x}\|^2$$

et

$$J(\bar{x}) \leq J(x^\varepsilon)$$

donc $\|x^\varepsilon\| \leq \|\bar{x}\|$ donc $(x^\varepsilon)_\varepsilon$ bornée, si $x^{\varepsilon_k} \to x^0$ avec $\varepsilon_l \to 0$.

On a : $J(x^0) + \frac{0}{2}\|n^0\|^2 = \lim_{h\to+\infty}(J(x^{\varepsilon_k}) + \frac{\varepsilon_k}{2}\|x^{\varepsilon_l}\|^2) \leq \lim_{k\to\infty} J(\bar{x}) + \frac{\varepsilon_k}{2}\|\bar{x}\|^2 = J(\bar{x})$ donc x^0 est solution de $\inf(J)$. or : $\forall\varepsilon > 0$, $\|x^\varepsilon\| \leq \|\bar{x}\|$ donc $\|x^0\| \leq \|\bar{x}\|$ ceci est vraie pour toute solution $\bar{x} de \inf(J)$

donc x^0 minimise $\inf\{\|x\| : x \in argmin(J)\}$. Comme J est convexe et continue, $argmin(J)$ est un convexe fermé (non vide par 1), donc x^0 est le projeté de 0 sur $argmin(J)$.

Contrôle continue 2017 Exercice $f : (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - x_2^2 + x_2^4$ 1) f convexe ? Non car $D^2 f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas ≥ 0 ! 2) $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$ donc si (x_n) suite minimisante $f(x_n) \to \inf_{\mathbb{R}^2} f$ alors $(x_n)_n$ fermée

$\inf(f) \leq f(0,0)$ donc $f(x_n) \not\to +\infty$ donc $\|x_n\| \not\to +\infty$

Toute suite minimisante est bornée. Soit $\bar{x}$ une valeur d'adhérence, alors $\bar{x}$ est solution (car f semi-continue inferiore)

donc $\exists\bar{x}$ solution de $\inf_{\mathbb{R}^2}\{f\}$ 3) $\bullet\, \bar{x}$ solution de $\inf_{\mathbb{R}^2}\{f\} \implies \nabla f(\bar{x}) = 0$
$\bullet$ on résoud $\nabla f(\bar{x}) = 0$, on trouve $\bar{x}_1 = (0,0)$ ou $\bar{x}_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ou $\bar{x}_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

$f(\bar{x}_1) = 0$ $f(\bar{x}_2) = -\frac{1}{4}$ $f(\bar{x}_3) = -\frac{1}{4}$
donc $\bar{x}_2$ et $\bar{x}_3$ sont les solutions. Exercice 2 $g'(0) < 0$ $\inf\{g(t), t \geq 0\} > -\infty$
Dans le cas $q(t) = J(x^n - t\nabla J(x^n))$ $q'(0) = -|\nabla J(x^n)|^2$
et $\inf_{\mathbb{R}_+}\{q\} \geq \inf_{\mathbb{R}^d} J$

2.4 Optimisation sans contrainte

On 'intéresse maintenant à des méthodes numériques pour résoudre des problèmes du type : (P) $\inf\{J(x) : x \in X\}$ où la contrainte X est de la forme $X = \{x \in E : h(x) = 0etg(x) \leq 0\}$ avec E de dimension finie.
$h(x) = (h_1(x), ..., h_q(x))$
$g(x) = (g_1(x), ..., g_m(x))$ $h : E \to \mathbb{R}^q, g : E \to \mathbb{R}^m$

Remarque. On pourrait ne considérer que des problèmes avec contraintes inégalités car $h(x) = 0 \iff \begin{cases} h(x) \leq 0 \\ -h(x) \leq 0 \end{cases} \iff h^2(x) \leq 0$

a) Méthode du gradient projeté On suppose que (P) est de la forme

$$(P) \qquad \inf\{J(x) : x \in K\}$$

où K est un convexe fermé de E.

Remarque. la contrainte X définie précédemment est en particulier convexe quand :
• les fonctions h sont affines
• les fonctions g_i sont convexes.

Proposition 1. *Si J est convexe et differentiable sur E et si$K$ convexe. Alors $\bar{u}$ solution de (P) ssi $\forall y \in K$ $\langle \nabla J(\bar{x}) | y - \bar{x} \rangle \geq 0$.*

On rappelle le résultat :

Proposition 2. *Soit V un espace de Hilbert et K un convexe formé de V alors pour tout x de V il existe un unique élément $p = Proj_K(x)$ de K tel que :*

$$\|x - p\| = \min\{\|x - y\| : y \in K\}$$

et on a :

1. *$\bar{y} = Proj_K(x) \iff \forall y \in K, \ \langle x - \bar{y} | y - \bar{y} \rangle \leq 0$*
2. *$Proj_K$ est 1-Lipchitz : $\forall x, x' \in V, \ \|Proj_K(x) - Proj_K(x')\| \leq \|x - x'\|$.*

La méthode de gradient projete consiste à construire la suite $(x^n)_{n\geq 0}$ par la méthode itérative :

$$\begin{cases} x^0 \ fix \\ \forall n \geq 0, x^{n+1} = Proj_K(x^n - h\nabla J(x^n)) \end{cases}$$

où $h > 0$ est un pas fixé.

Dans la pratique, un test d'arrêt est $\left\|x^{n+1} - x^n\right\| < \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$. Une précision fixée (ne pas prendre $\|\nabla J(x^n)\| \leq \varepsilon$ car a priori on ne sait pas que $\nabla J(\bar{x}) = 0$ pour $\bar{x}$ solution du problème sans contraintes !)

On a alors le même résultat que pour la méthode du gradient à pas constant :

Théorème 1. *Si J est a-fortement convexe sur K avec $a > 0$ et si ∇J est L-Lipschitz sur K.*

Alors la suite $(x^n)_{n\geq 0}$ converge vers l'unique solution $\bar{x}$ le (P). Pour $h \in]0, \frac{2a}{L^2}[$ et la convergence est linéaire de taux $\sqrt{h^2L^2 - 2ha + 1}$.

• existence d'une solution pour (P)

• J est a-fortement convexe sur K donc pour tout x dans K on peut écrire : $\forall y \in K,\ J(y) \geq J(x) + \langle \nabla J(x) | y - x\rangle + \frac{a}{2}\|y-x\|^2$ donc $\lim_{\substack{\|y\| \to +\infty \\ y \in K}} J(y) = +\infty$ donc si $(x^n)_{n\geq 0}$ est une suite minimisante de J sur K, alors $(y^k)_{k\geq 0}$ est borné donc on peut en extraire une sous-suite convergente $y^{k_l} \to y^\infty$ et $y^\infty \in K$ car K fermé, alors $J(y^\infty) = \lim_{l\to+\infty} J(y^{k_l}) = \inf_K\{J\}$ car J continue (car differentiable au K)

• unicité de $\bar{x}$:

Comme J est a-fortement convexe, en particulier J est strictement convexe : comme $D^2J \geq aI > 0$ en $a > 0$, on a $D^2J > 0$ donc J strictement convexe, donc si $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ deux solutions distinctes alors :

$$J(\frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2}) < \frac{J(\bar{x}_1) + J(\bar{x}_2)}{2} = \inf_K\{J\}$$

Contradiction.

• on a l'inégalité :

$$\forall y \in K\ \ J(y) \geq J(\bar{x}) + \langle \nabla J(\bar{x}), y - \bar{x}| + \rangle\, \frac{a}{2}\|y-\bar{x}\|^2$$

si $\bar{x}$ solution alors $\forall y \in K,\ \langle \nabla J(\bar{x}) | y - \bar{x}\rangle \geq 0$. Donc $\forall y \in K \quad J(y) \geq J(\bar{x}) + \frac{a}{2}\|y-\bar{x}\|^2$ donc $\forall y \in K,\ y \neq \bar{x} \implies J(y) > J(\bar{x})$ donc $\bar{x}$ unique.

• on pose $f(x) := Proj_k(x - h\nabla J(x))$. Alors : $\forall n,\ x^{n+1} = f(x^n)$ et f est $\sqrt{h^2L^2 - 2ah + 1}$ contractante sur K : soit x, y dans K, alors on a :

$$\begin{aligned}
\|f(y) - f(x)\|^2 &= \|Proj_K(y - h\nabla J(y)) - Proj_K(x - h\nabla J(x))\|^2 \\
&\leq \|(y - h\nabla J(y)) - (x - h\nabla J(x))\|^2 \\
&= \|(y - x) - h(\nabla J(y) - \nabla J(x))\|^2 \qquad = \|y-x\|^2 - 2h\langle \nabla J(y) - \nabla \\
&\leq (1 - 2ah + h^2L^2)\|y-x\|^2
\end{aligned}$$

or $\sqrt{1 - 2ah + h^2L^2} < 1 \iff h \in]0, \frac{2a}{L^2}[$ Dans ce cas, le théorème de point fixe de Banach implique que $(x^n)_n$ converge vers $\hat{x}$ l'unique point finx de f dans K.

$\hat{x} = \bar{x}$ est solution du problème : comme $\hat{x} = f(\hat{x}) = Proj_K(\hat{x} - h\nabla J(\hat{x}))$. On a : $\forall y \in K$

$$\langle (\hat{x} - h\nabla J(\hat{x})) - \hat{x} | y - \hat{x}\rangle \leq 0$$

comme $h > 0$, on a donc : $\forall y \in K,\ \langle \nabla J(\hat{x}) | y - \hat{x}\rangle \geq 0$ donc $\hat{x}$ est solution de $\inf_K\{J\}$.

Remarque. Cette preuve implique la convergence linéaire de $(x^n)_{n\geq 0}$ car :

$$\left\|x^{n+1} - \bar{x}\right\| = \|f(x^n) - f(\bar{x})\| \leq \sqrt{1 - 2ah + h^2L^2}\|x^n - \bar{x}\|.$$