

# **PROYECTO FINAL ROBÓTICA I**

**Análisis cinemático de robot serie para  
soldadura por puntos en línea de  
ensamblaje**

## **Grupo 2**

Juan Francisco Huertas - 13653  
Renzo Scaglia - 11761  
Gabriel Mamaní - 13401  
Germán Ricco - 13653

2025



# Índice

<b>Resumen.....</b>	<b>1</b>
<b>Índice.....</b>	<b>1</b>
<b>Introducción.....</b>	<b>2</b>
IRB 6710-210/2.65.....	2
<b>Robot.....</b>	<b>4</b>
i. Estructura.....	4
ii. Cinemática Directa.....	5
iii. Cinemática Inversa.....	6
Desacople Cinemático.....	7
Cinemática Inversa de Posición por Método Geométrico.....	7
Cinemática Inversa de Orientación.....	8
iv. Relación de Velocidades.....	9
v. Planificación y Generación de Trayectorias.....	16
vi. Simulaciones.....	17
<b>Actuadores y sensores.....</b>	<b>17</b>
i. Actuadores.....	17
ii. Sensores.....	18
<b>Conclusión.....</b>	<b>18</b>
<b>Referencias.....</b>	<b>19</b>
<b>Anexos.....</b>	<b>19</b>

## Resumen

Este trabajo consistió en proponer una aplicación industrial que pueda ser realizada por un robot tipo serie, una vez determinada la aplicación, procedimos a elegir un robot adecuado para la tarea elegida. La aplicación propuesta por nuestro grupo de trabajo fue la soldadura por puntos en una línea de ensamblaje de carrocerías automotrices.

El robot seleccionado es el ABB IRB 6710-210/2.65 de 6 grados de libertad. En esta línea de ensamblaje trabajan dos robots enfrentados, realizando su trabajo de forma paralela.

A lo largo de este informe desarrollamos diversos temas aplicados al robot mencionado anteriormente. Entre ellos, cinemática directa, cinemática inversa, análisis de relación de velocidades, cálculo del Jacobiano y detección de singularidades, planificación y generación de trayectorias. Finalmente se hace un breve análisis de los sensores y actuadores que serían necesarios para nuestra aplicación.

## Introducción

La soldadura por puntos constituye una operación fundamental en las líneas de ensamblaje de carrocerías automotrices. La automatización de este proceso mediante robots industriales garantiza la consistencia de la calidad e incrementa la productividad.

Para esta aplicación, se ha seleccionado el robot industrial IRB 6710-210/2.65 del fabricante ABB. Este modelo está diseñado específicamente para aplicaciones de manipulación de cargas medianas y pesadas. Sus especificaciones técnicas incluyen una capacidad de carga de 210 kg y un alcance máximo de 2,65 metros, lo que lo posiciona como una solución viable para manejar pistolas de soldadura por puntos y acceder a todos los puntos de soldadura en una estación de trabajo típica de carrocerías.

Este informe documenta el análisis cinemático completo del robot IRB 6710-210/2.65, orientado a la aplicación descrita. Los objetivos específicos comprenden la parametrización de su estructura mediante la convención de Denavit-Hartenberg, el desarrollo y la validación de los modelos de cinemática directa e inversa, el análisis de su Jacobiano y singularidades, y finalmente la planificación de trayectorias.

## IRB 6710-210/2.65



Este robot de 6 grados de libertad (GDL), de tipo articular, tiene como función principal posicionar y orientar con precisión. Las características técnicas clave, obtenidas de la documentación del fabricante [1], se resumen en las siguientes tablas.

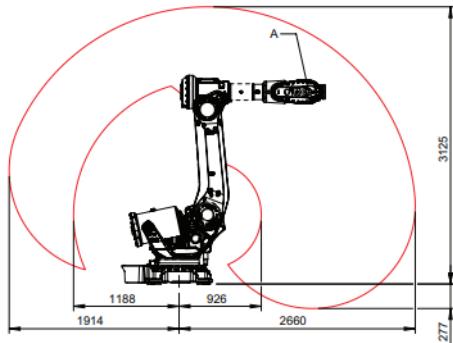
**Tabla 1.1:** Especificaciones técnicas y de rendimiento

Parámetro	Valor	Unidad
Alcance Máximo	2.65	m
Capacidad de Carga	210	kg
Alimentación Eléctrica	380	-
Repetibilidad de Posición (ISO 9283)	0.04	mm
Repetibilidad de Trayectoria (ISO 9283)	0.08	mm

**Tabla 1.2:** Rangos articulares y velocidades máximas

Articulación	Movimiento	Rango [°]	Velocidad Máxima [°/s]
J1	Base	+ - 170	110
J2	Hombro	-65/+85	110
J3	Codo	-180/+70	110
J4	Muñeca 1	+ - 300	200
J5	Muñeca 2	+ - 130	150
J6	Muñeca 3	+ - 360	210

Working range IRB 6710-210/2.65



## Robot

### i. Estructura

Para analizar y controlar la posición y la orientación del efecto final del robot respecto de su base fija, es necesario establecer una cadena de transformaciones geométricas que relacione todos los eslabones. La convención de Denavit-Hartenberg (DH) proporciona un método sistemático y estandarizado para lograrlo, asignando un sistema de coordenadas a cada eslabón y definiendo únicamente cuatro parámetros para describir la relación cinemática entre dos eslabones consecutivos.

La convención DH establece cuatro parámetros para transformar el sistema de coordenadas del eslabón  $i-1$  al eslabón  $i$ :

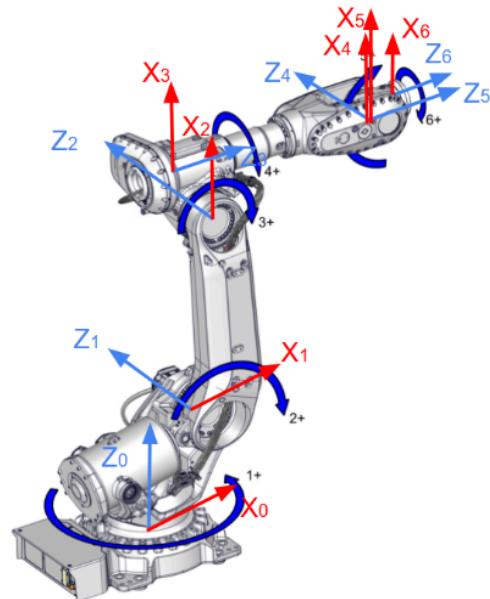
1.  $\theta_i$ : Ángulo alrededor del eje  $Z_{i-1}$ , desde el eje  $X_{i-1}$  hasta el eje  $X_i$
2.  $d_i$ : Distancia a lo largo del eje  $Z_{i-1}$  desde el origen del sistema  $i-1$  hasta el eje  $X_i$
3.  $a_i$ : Distancia a lo largo del eje  $X_i$ , desde el eje  $Z_{i-1}$  hasta el eje  $Z_i$
4.  $\alpha_i$ : Ángulo alrededor del eje  $X_i$ , desde el eje  $Z_{i-1}$  hasta el eje  $Z_i$

De esta manera, se construye la matriz de transformación homogénea desde el sistema ' $i-1$ ' hasta el sistema ' $i$ ' mediante el producto de cuatro transformaciones elementales:

$${}^{i-1}T_i = \text{Rot}(z_{i-1}, \theta_i) \cdot \text{Tras}(z_{i-1}, d_i) \cdot \text{Tras}(x_i, a_i) \cdot \text{Rot}(x_i, \alpha_i)$$

La matriz resultante es una matriz de  $4 \times 4$  que combina rotación y traslación, con una submatriz de rotación  $3 \times 3$  y un vector de traslación  $3 \times 1$ .

Siguiendo metódicamente los pasos de la convención estándar de DH, se asignan los sistemas de coordenadas a cada eslabón del robot, desde la base  $\{S_0\}$  hasta la muñeca  $\{S_6\}$ .



**Figura 1:** Diagrama cinemático del robot mostrando la ubicación de todos los sistemas de coordenadas según la convención DH asignada.

Los parámetros DH resultantes para el robot se resumen en la siguiente tabla:

Sistema	$\theta$ [rad]	$d$ [mm]	$a$ [mm]	$\alpha$ [rad]	$\sigma$
S1	$q_1$	780	320	$-\pi/2$	0
S2	$q_2$	0	1185	0	0
S3	$q_3$	0	200	$-\pi/2$	0
S4	$q_4$	1142,5	0	$\pi/2$	0
S5	$q_5$	0	0	$-\pi/2$	0
S6	$q_6$	180	0	0	0

**Tabla 2.1:** Parámetros de Denavit-Hartenberg para el robot IRB 6710-210/2.65

## ii. Cinemática Directa

El problema de la cinemática directa consiste en determinar la posición y orientación del efecto final, definido en el punto central del último eslabón (center-point) donde se acopla la herramienta, con respecto al sistema de coordenadas de la base, para un conjunto dado de valores de las variables articulares ( $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$ ).

En términos matemáticos, se busca encontrar la matriz de transformación homogénea  ${}^0T_6$  que describe el sistema del efector final respecto a la base. Esta matriz, de 4x4, encapsula toda la información necesaria: su submatriz de rotación y su vector de traslación definen la posición y orientación respectivamente del origen del sistema final (el CP)

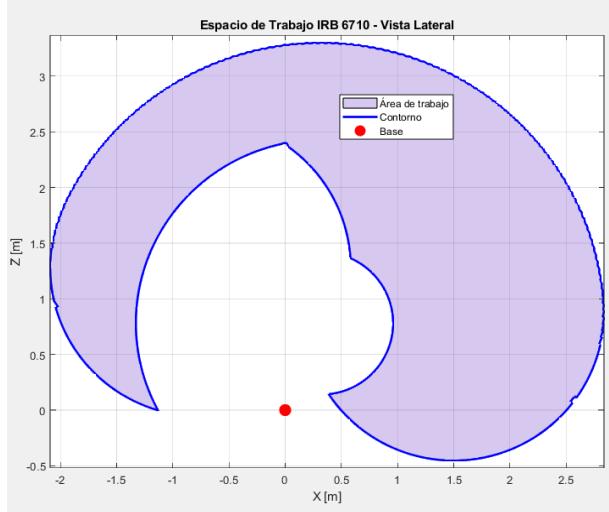
La parametrización DH realizada en la sección anterior proporciona la base para la solución. La cinemática directa del robot se calcula mediante la concatenación (producto) de todas las matrices de transformación individuales consecutivas, desde la base hasta el efector final.

$${}^0T_6(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = {}^0T_1(\theta_1) \cdot {}^1T_2(\theta_2) \cdot {}^2T_3(\theta_3) \cdot {}^3T_4(\theta_4) \cdot {}^4T_5(\theta_5) \cdot {}^5T_6(\theta_6)$$

Cada matriz  ${}^{i-1}T_i$  es función de su variable articular ( $\theta_i$ ) y de sus parámetros fijos ( $d$ ,  $a$ ,  $\alpha$ ). Por lo tanto, la solución es una matriz compleja, pero cerrada (tiene una única solución) y computable.

La validación del modelo de cinemática directa se realiza mediante un análisis del espacio de trabajo. Al muestrear configuraciones articulares dentro de sus límites mecánicos (Tabla 1.2) y plotear la posición resultante, se puede verificar la coincidencia del volumen geométrico obtenido con el espacio de trabajo declarado por el fabricante [1]. Esta concordancia valida los parámetros DH y la cadena cinemática implementada.

En la siguiente figura se puede observar el ploteo resultante del espacio de trabajo tomando como sistema de referencia el punto de la muñeca (wrist-point)



**Figura 2:** Validación de la cinemática directa mediante análisis del espacio de trabajo.

### iii. Cinemática Inversa

El problema de la cinemática inversa es el complemento de la cinemática directa. Consiste en determinar el conjunto de valores articulares ( $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$ ) necesarios para posicionar y orientar el efector final en una pose cartesiana (posición y orientación) específica, definida por una matriz de transformación homogénea con respecto a la base.

Mientras que la cinemática directa siempre tiene una solución única, la inversa presenta desafíos significativos:

- No linealidad
- Multiplicidad de Soluciones: Para una misma pose del efecto final, un robot de 6 GDL puede tener múltiples configuraciones articulares
- No existencia de Solución: Si la pose deseada está fuera del espacio de trabajo alcanzable del robot
- Singularidades: En ciertas configuraciones, el problema se vuelve matemáticamente indeterminado

### Desacople Cinemático

Para robots con muñeca esférica, donde los ejes de las articulaciones 4, 5 y 6 se intersectan en un punto (el centro de la muñeca), una estrategia eficaz es el desacoplamiento cinemático, separando los problemas de obtención del modelo cinemático inverso de posición y orientación.

En general, las primeras variables articulares del robot, son las que posicionan el centro de la muñeca (WP) en unas coordenadas ( $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$ ) y si bien la variación de los tres últimos grados de libertad origina un cambio en la posición final del extremo real del robot, su verdadero objetivo es poder orientar la herramienta del robot libremente en el espacio.

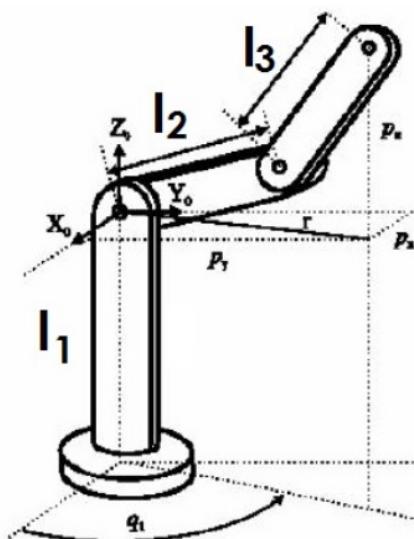
En primer lugar se obtiene el WP mediante la expresión:

$$P_m = P_r - l_4 * z_6$$

Siendo  $P_r$  las coordenadas del punto donde se pretende que se posicione el robot expresadas en  $\{S0\}$

### Cinemática Inversa de Posición por Método Geométrico

Dada la posición del centro de la muñeca  $P_m = (P_x, P_y, P_z)$  referida a  $\{S0\}$ , buscamos obtener el valor de las primeras 3 articulaciones ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ).



**Figura 3:** Modelo simplificado de robot considerando los primeros 3 GDL.

Como se observa en la Figura 3, el robot simplificado a los primeros 3 GDL posee una estructura planar, quedando este plano definido por el ángulo de la primera variable articular  $\theta_1$ . El valor de  $\theta_1$  se obtiene inmediatamente como:

$$\theta_1 = \arctg\left(\frac{P_y}{P_x}\right)$$

Se obtiene el segundo valor posible de  $\theta_1$  sumando o restando  $180^\circ$ , obteniendo así los valores correspondientes al robot de “frente” y de “espalda”. Considerando ahora únicamente los elementos 2 y 3 que están situados en un plano (Figura 4), conocidos  $\theta_1$  y  $l_1$  se toma el punto  $P_m$  referido a  $\{S1\}$  y se calcula:

$$r = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{P_y}{P_x}\right)$$

Utilizando el teorema del coseno obtenemos:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{l_2^2 + r^2 - l_3^2}{2rl_2}\right)$$

Finalmente:

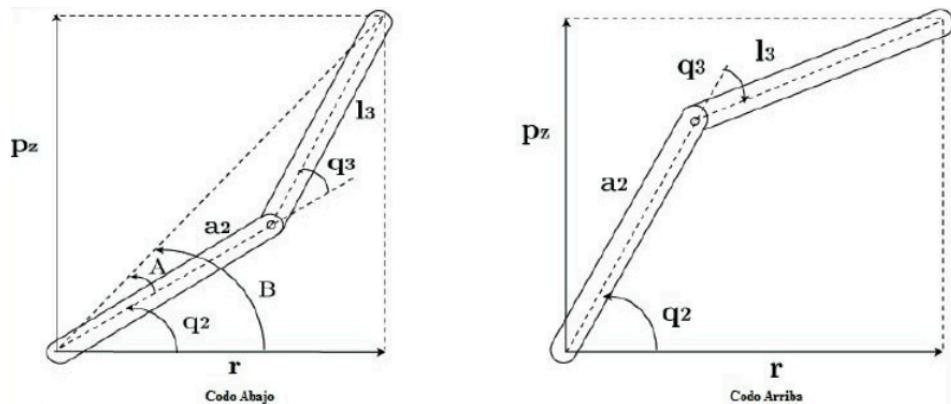
$$\theta_2 = \beta \pm \alpha$$

Como se ve, existen 2 posibles soluciones para  $\theta_2$ . Estas corresponden a las configuraciones codo arriba y codo abajo del robot.

El cálculo de  $\theta_3$  se hace, tomando el punto  $P_m$  referido a  $\{S2\}$  y calculando:

$$\theta_3 = \arctg\left(\frac{P_y}{P_x}\right)$$

Una vez más obtendremos 2 posibles valores de  $\theta_3$ , correspondientes a las configuraciones codo arriba y codo abajo respectivamente en función del ángulo  $\theta_2$  considerado.



**Figura 4:** Modelo simplificado del segundo y tercer grado de libertad.

### Cinemática Inversa de Orientación

Para obtener la orientación en primer lugar se toman las coordenadas del punto deseado  $P_r$  en base al sistema  $\{S3\}$  utilizando la transformación total desde la base hasta la articulación 3. La orientación relativa de la muñeca se obtiene entonces como:

$${}^3T_6 = ({}^0T_3)^{-1} \cdot {}^0T_{6 \text{ deseada}}$$

Luego se verifica si el robot se encuentra en la configuración singular donde los ejes Z3 y Z6 están alineados. Esto ocurre cuando la componente z del eje Z<sub>6</sub> en el sistema {3} es muy cercana a 1.

En este caso los ángulos θ<sub>4</sub> y θ<sub>6</sub> se vuelven dependientes, por lo que se prioriza la continuidad utilizando el valor previo de θ<sub>4</sub> y fijando el valor de θ<sub>5</sub>=0 para calcular θ<sub>6</sub> y cumplir con la orientación final deseada.

Cuando no hay singularidad el ángulo θ<sub>4</sub> se calcula directamente a partir de los componentes X e Y del vector X<sub>6</sub> como:

$$\theta_4 = \text{atan}\left(\frac{T_{36}(2,3)}{T_{36}(1,3)}\right)$$

La segunda solución de θ<sub>4</sub> se obtiene sumando o restando 180°

Finalmente para cada una de las soluciones de θ<sub>4</sub> se calcula la matriz T<sub>46</sub>, el ángulo θ<sub>5</sub> se obtiene de la orientación relativa en T<sub>46</sub> y luego, calculando T<sub>56</sub> se resuelve θ<sub>6</sub> a partir de sus componentes

Este enfoque geométrico generalmente arroja 8 soluciones, aunque la cantidad de soluciones posibles depende directamente de la pose deseada. Por este motivo es necesario implementar un criterio de selección.

#### iv. Relación de Velocidades

Con respecto al estudio cinemático del robot IRB 6710-210/2.65, ya se abordaron los problemas de cinemática directa e inversa, donde se busca obtener las relaciones correspondientes entre los valores articulares del robot y la posición-orientación del efecto final. Por lo tanto, a partir de la descripción de estos problemas, también puede establecerse el análisis de la relación de velocidades. En este sentido podremos analizar los efectos de las velocidades articulares del robot en los cambios instantáneos de velocidad y orientación del extremo operativo.

Desde un análisis geométrico, el punto de partida es el estudio de las expresiones espaciales que existen entre las coordenadas del extremo y las variables articulares del robot. A partir del modelo cinemático directo, se expresan las posiciones y orientaciones del efecto final como funciones de las coordenadas articulares q<sub>i</sub>. Estas ecuaciones describen la configuración del extremo del robot en el espacio cartesiano en función de los ángulos o desplazamientos de las articulaciones.

De esta manera, derivando estas expresiones respecto a las variables articulares, se obtienen ecuaciones que permiten establecer una correspondencia entre los cambios diferenciales en el espacio articular y los cambios instantáneos en el espacio cartesiano.

Matemáticamente:

$$x = f_x(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \dot{x} = \sum_1^n \frac{\partial f_x}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$y = f_y(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \dot{y} = \sum_1^n \frac{\partial f_y}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$z = f_z(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \dot{z} = \sum_1^n \frac{\partial f_z}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\alpha = f_\alpha(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \dot{\alpha} = \sum_1^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\beta = f_\beta(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \dot{\beta} = \sum_1^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\gamma = f_\gamma(q_1, \dots, q_n) \rightarrow \dot{\gamma} = \sum_1^n \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Organizando estas expresiones en forma de matriz, se obtiene que la velocidad articular y la velocidad del efecto final están relacionadas mediante la “matriz Jacobiana del manipulador”, que es la herramienta fundamental para estudiar el comportamiento dinámico del efecto, junto con su capacidad de movimiento dentro del espacio de trabajo y la detección de puntos o configuraciones singulares. Entonces escribimos:

$$\nu = J(q)\dot{q}$$

$$\nu = (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z) \in \mathbb{R}^6$$

donde la matriz  $J(q) \in \mathbb{R}^{6 \times N}$  es el **Jacobiano o Jacobiano geométrico del robot**; y es una velocidad espacial, que comprende componentes de velocidad traslacional y rotacional.

Nuestro robot IRB 6710 presenta una estructura de 6 grados de libertad con los tres primeros ejes (1–3) destinados al posicionamiento del centro de la muñeca, y los tres últimos (4–6) dedicados a la orientación del efecto final. Por lo tanto el jacobiano de este robot será una matriz de  $J(q)$  de  $6 \times 6$ , donde cada fila representa una componente específica de velocidad y las columnas son la cantidad de articulaciones.

Esta configuración de muñeca esférica hace que las rotaciones de los tres últimos ejes no generen traslación del punto de interés (centro de la muñeca), sino únicamente cambios en la orientación del efecto final. Como resultado de esto, al derivar las ecuaciones de posición con respecto a las variables articulares  $q_4, q_5, q_6$ , las derivadas parciales se anulan, generando un bloque superior derecho de  $3 \times 3$  con valores nulos en la matriz Jacobiana.

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_v & 0 \\ J_{\omega v} & J_{\omega} \end{bmatrix}$$

De este modo, el Jacobiano total  $J(q)$  puede desacoplarse en dos sub-matrices independientes,  $J_v$  (movimiento translacional), y  $J_{\omega}$  (velocidad angular del efecto).

Hasta ahora se describió la situación de cómo el Jacobino expresa la relación directa entre velocidades. El problema inverso implica determinar, a partir de una específica velocidad cartesiana en el extremo operativo, qué valor de velocidad necesitamos en cada articulación para lograr esa consigna. Entonces:

$$\dot{q} = J(q)^{-1} \nu$$

Aquí se debe tener especial cuidado en que la matriz jacobiana, como en el caso de nuestro robot, sea cuadrada. Es importante tener en cuenta que la matriz jacobiana no es constante, sino que depende de los valores articulares. Una configuración articular  $q_i$  para la cual  $\det(J(q))=0$  se describe como singular o degenerada, y no es posible calcular su inversa. Las singularidades ocurren cuando uno o más ejes se alinean, resultando en la pérdida de grados de libertad.

Para encontrar los valores articulares que producen singularidades, primero se debe obtener la expresión del determinante y luego encontrar los valores de  $q_i$  para los cuales se anula. Es importante tener en cuenta que pueden existir infinitos valores que verifican esa condición, pero en este caso solo tendremos en cuenta los valores que se encuentran dentro de los límites articulares del robot.

Entonces para evaluar su determinante usamos la siguiente expresión:

$$\det(J) = \det(J_v) \cdot \det(J_w)$$

Calculando primeramente el Jacobiano completo con el software Matlab a través del uso de la función Jacob0 obtenemos la matriz correspondiente. Se debe verificar que el bloque superior derecho sea nulo. Luego extraemos la sub-matriz  $J_w$  de 3x3 correspondiente a la muñeca, luego si calculamos su determinante y simplificamos la expresión tendremos:

$$\det(J_w) = - \sin(q_5)$$

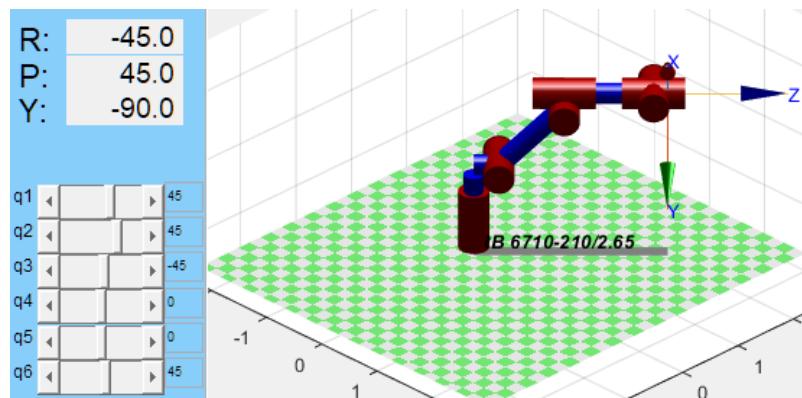
Esto nos indica que para un valor:

$$q_5 = k\pi; \quad k=0,1,2,\dots,n$$

el determinante del Jacobiano es cero. Esta caso se conoce como “singularidad de la muñeca” y nos indica lo siguiente:

- Posición del robot donde los ejes de la articulación 4 y 6 son colineales
- Se pierde un grado de libertad, ya que una rotación producida por q4 o q6 sería la misma o indistinguible entre ellas.
- El efecto puede seguir moviéndose en orientación “como conjunto”, pero no puede producir rotación independiente alrededor de cierta dirección fija en el espacio.
- Para lograr pequeñas rotaciones deseadas, las velocidades de q4,q6 son muy elevadas

La posición del robot para q5=0 se muestra a continuación:



La singularidad que acabamos de describir está relacionada completamente con la orientación de robot. Si luego analizamos la sub-matriz  $J_v$  obtendremos las singularidades relacionadas con la posición de la muñeca en el espacio. Para verlo de manera más clara representamos el robot en un plano determinado por algún valor de q1.

Aquí tendremos tendremos las coordenadas z-u, donde u es:

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Entonces en este plano representamos el robot con los parámetros de Denavit-Hartenberg hasta la muñeca. Luego se plantean las ecuaciones para intentar determinar la posición de la muñeca en función de q2 y q3.

Planteamos la ecuación de u, para obtener la proyección de la muñeca en el plano xy:

siendo:  $\varphi = q_2 + q_3 - \beta = q_2 + \alpha$

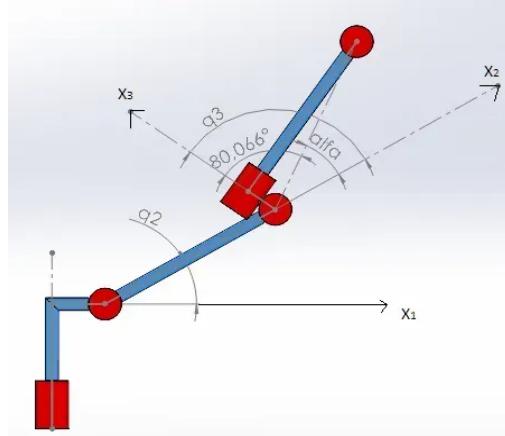
Tenemos:  $u = a_1 + a_2 * \cos(q_2) + r * \cos(\varphi)$

donde:

$$\beta = \tan\left(\frac{d_4}{a_3}\right) = 80.066^\circ = 1.3974 \text{ rad}$$

$$r = \sqrt{a_3^2 + d_4^2}$$

Siendo  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  y  $d_4$  parte de los parámetros de Denavit-Hartenberg correspondientes a nuestro robot.



Para evaluar las singularidades, las posiciones articulares de  $q_2$  y  $q_3$  que producen una configuración del robot donde la muñeca está justamente por encima del eje  $z_0$  producen una proyección nula de la muñeca sobre el plano  $x-y$ . Por lo tanto, para encontrar los valores correspondientes realizamos los siguientes cálculos:

$$u = a_1 + a_2 * \cos(q_2) + r * \cos(\varphi)$$

Proyección sobre el plano  $x-y$ :

$$u = 0$$

$$\Rightarrow u = a_1 + a_2 * \cos(q_2) + r * \cos(\varphi) = 0$$

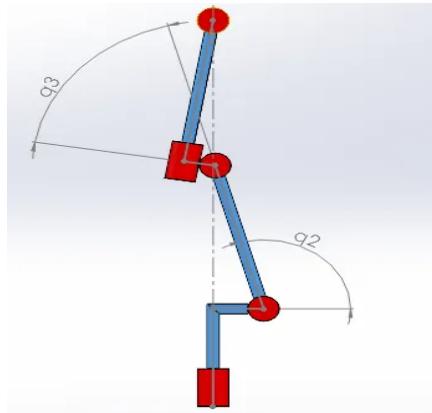
$$\cos(\varphi) = \frac{-a_1 + a_2 * \cos(q_2)}{r}$$

$$q_2 + q_3 - \beta = \varphi = \arccos\left(\frac{-a_1 - a_2 * \cos(q_2)}{r}\right)$$

$$\Rightarrow q_3 = \arccos\left(\frac{-a_1 - a_2 * \cos(q_2)}{r}\right) - q_2 + \beta$$

Como la expresión de  $q_3$  está en función de  $q_2$ , obtendremos infinitos pares que verifican la singularidad (siempre que estén dentro de los límites articulares) y producen la misma posición de la muñeca.

Para el par  $q_2 = -\pi/12$  rad y  $q_3 = -1.147095$  rad obtenemos:



Este caso se conoce como singularidad de hombro, y en esta configuración ocurre lo siguiente:

- El centro de la muñeca queda sobre el eje de la articulación 1 (el eje de la base).
- En esa situación, girar  $q_1$  no traslada el centro de muñeca; su efecto se vuelve indistinguible de combinaciones de otras articulaciones
- Aquí  $\det(J_V)=0$ , que implica la pérdida de 1 gdl de posición, cualquier movimiento de  $q_1$  no mueve la posición cartesiana de la muñeca.
- El brazo está alineado al eje de base; no se puede producir un cierto desplazamiento transversal del centro de muñeca mediante velocidades finitas.

Otro método aplicado para encontrar puntos singulares fue hacerlo con un análisis en el programa matlab. Para ello primero se buscaron las expresiones de las coordenadas ( $x_w, y_w, z_w$ ) del punto que representa la muñeca( $p_W$ ).

Estas expresiones se obtuvieron a partir de las matrices de transformación homogénea desde la base del robot hasta el origen del sistema de referencia 3, sumando la longitud de eslabón  $d_4$ , en la dirección del eje  $z_3$ :

$$p_W = p_3 + d_4 \hat{z}_3, \quad d_4 = 1.142 \text{ m.}$$

Las expresiones para  $x_w, y_w, z_w$  que se obtuvieron son:

$x_m =$

$$(\cos(q_1) * (1142 * \cos(q_2 + q_3) + 200 * \sin(q_2 + q_3) + 1185 * \sin(q_2 + 320)) / 1000$$

$y_m =$

$$(\sin(q_1) * (1142 * \cos(q_2 + q_3) + 200 * \sin(q_2 + q_3) + 1185 * \sin(q_2 + 320)) / 1000$$

$z_m =$

$$(237 * \cos(q_2)) / 200 + (336041^{(1/2)} * \cos(q_2 + q_3 + \text{atan}(571/100))) / 500 + 39/50$$

Usando nuevamente la expresión:

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$u =$

$$\text{abs}(1142*\cos(q2 + q3) + 200*\sin(q2 + q3) + 1185*\sin(q2) + 320)/1000$$

Si ahora calculamos el Jacobiano, luego su determinante y simplificamos, obtenemos:

$\det J =$

$$-(237*\text{sign}(1185*\sin(q2) + 2*336041^{(1/2)}*\cos(q2 + q3 - \text{atan}(100/571)) + 320)*(571*\cos(q3) + 100*\sin(q3)))/100000$$

Donde se puede ver que el último factor es el que anula el determinante, como está en función de  $q_3$  buscamos el valor que lleva a la singularidad:

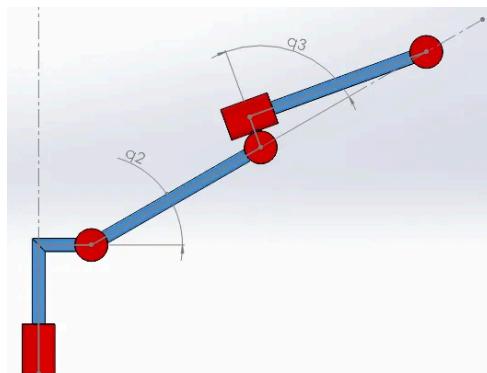
$$571 * \cos(q3) + 100 * \sin(q3)$$

$$\Rightarrow q3 = \text{atan}(-\frac{571}{100}) = -80.066^\circ = -1.3974 \text{ rad}$$

Evaluamos ese valor en la expresión del determinante y vemos que da un número muy cercano a cero:

$$\text{Determinante en } q3 = -1.397 \text{ rad: } -1.309e-16$$

La configuración de robot para ese valor de  $q_3$  es la siguiente (para  $q_2$  se colocó un valor arbitrario):



En esta configuración el determinante del Jacobiano no es exactamente 0, sino que es un valor muy cercano a cero, de igual forma es conveniente tenerlo en cuenta ya que ocurre lo siguiente:

- No es singular matemáticamente, pero aún así el Jacobiano está mal condicionado, para el caso práctico se comporta como singular.
- Seguir algunas trayectorias en posiciones cercanas a esta configuración resulta complejo, ya que estamos con el brazo completamente estirado (o replegado si los límites articulares lo permiten).
- Para un pequeño desplazamiento en el espacio cartesiano se requiere de velocidades de  $q_3$  y  $q_2$  muy grandes.
- La herramienta puede seguir moviéndose, pero se pierde control en esa dirección.

## v. Planificación y Generación de Trayectorias

En planificación y generación de trayectorias determinamos qué trayectoria realizará el robot y qué valores tomarán las variables articulares durante su recorrido.

Como ambos robots se mueven en paralelo coordinadamente, solamente analizamos uno de ellos ya que las trayectorias serán iguales para los dos.

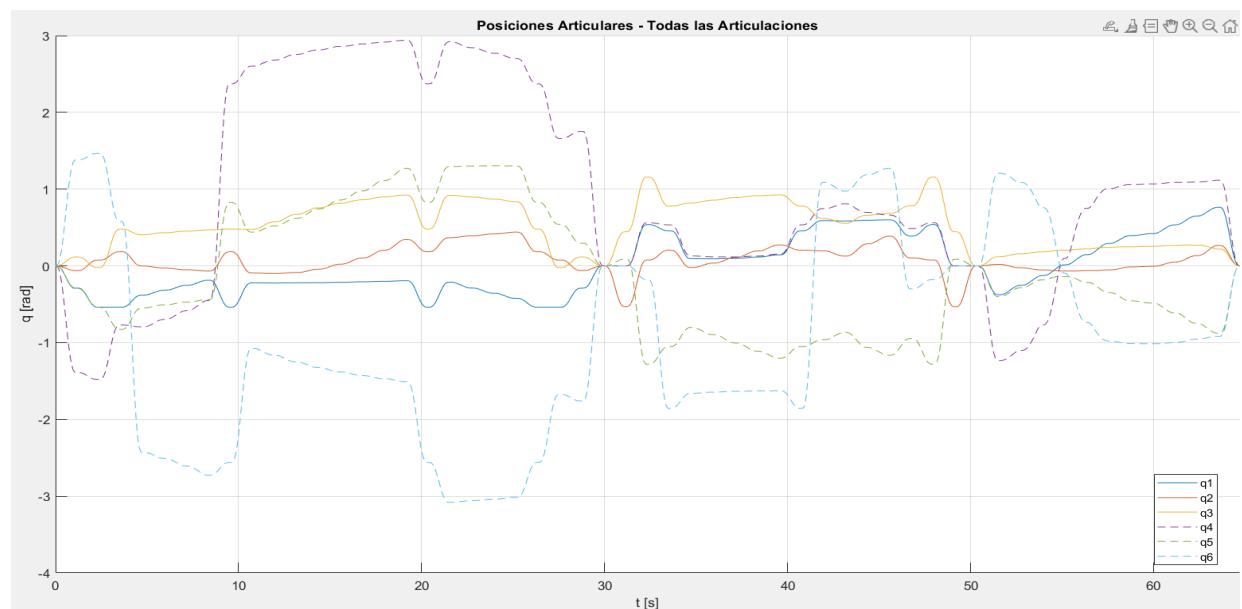
Para nuestra aplicación particular, la eficiencia temporal y la precisión en el punto final son factores muy importantes. El movimiento entre un punto de soldadura y el siguiente no requiere de una trayectoria geométrica precisa, sino que sea un movimiento rápido y suave. Para realizar todo el recorrido del robot, lo más conveniente sería combinar los movimientos articulares (con jtraj) y los movimientos cartesianos (con ctraj).

Trayectoria simple (Punto a punto - Articular)

- Movimiento de reposicionamiento: los movimientos generados mediante interpolación articular resultan más suaves y eficientes para los desplazamientos entre los distintos puntos de trabajo del robot. Este tipo de trayectorias permiten minimizar el tiempo de ciclo de soldadura, así también como evitar aceleraciones bruscas en las articulaciones, evitando esfuerzos no deseados en motores y mantener estabilidad.

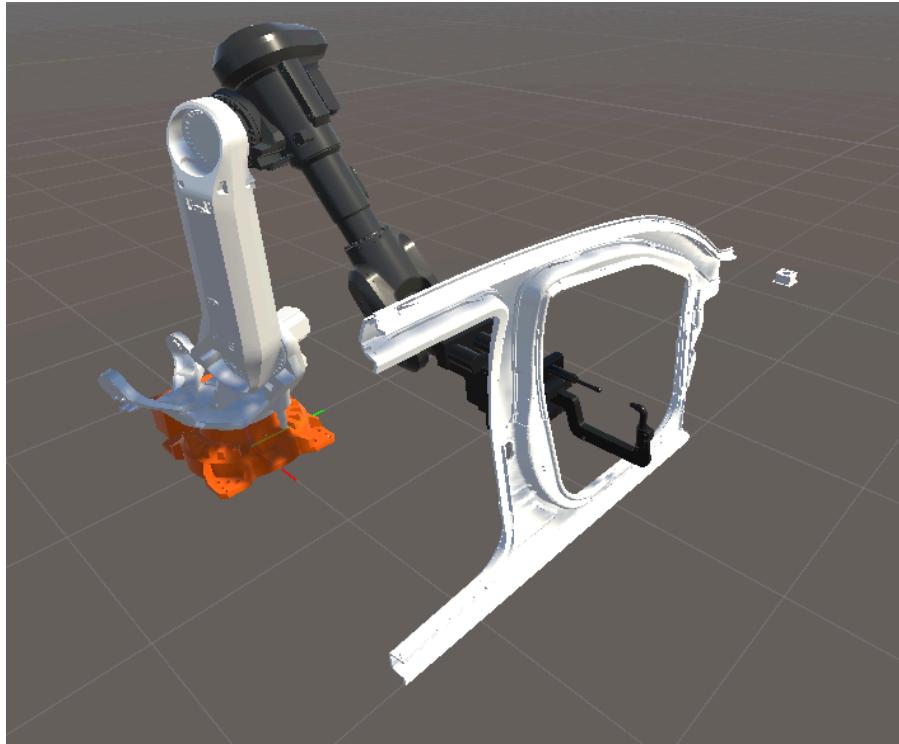
Trayectoria compleja (Lineal - Cartesiana).

- Cuando el robot debe efectuar la soldadura, desde el punto próximo hasta el punto exacto de soldadura y aplicar la herramienta sobre la superficie del chasis, la interpolación cartesiana con ctraj es la opción más precisa. De esta forma es posible que el efecto final se desplace siguiendo una trayectoria específica sobre la pieza. De esta forma se logaría una correcta ejecución de la soldadura evitando desviaciones angulares que podrían afectar el punto de contacto y el acabado de la soldadura.



**Figura 5:** Evolución temporal de las variables articulares del robot a lo largo de la trayectoria.

## vi. Simulaciones



**Figura 6:**Captura del Robot en Unity realizando la soldadura de la parte lateral izquierda de un chasis.

## Actuadores y sensores

Los actuadores y sensores desempeñan un papel importante en la capacidad de un robot para operar de manera eficaz y segura. Debido a que el datasheet del fabricante no incorpora información sobre sensores internos o actuadores internos del robot, realizamos un análisis de los actuadores y sensores que podrían ser incorporados.

### i. Actuadores

La mayoría de los robots industriales utilizan servomotores como sus principales actuadores. Los servomotores ofrecen varias ventajas que los hacen ideales para aplicaciones de robótica; proporcionan un control preciso de la posición, velocidad y torque, lo cuál es de gran importancia para nuestra aplicación.

Dado el efecto final propuesto, por su gran peso, los motores utilizados en los tres primeros ejes deben ser servomotores industriales de alta potencia. Para transformar el bajo torque y la alta velocidad del servomotor en alto torque y baja velocidad, cada articulación incorpora un sistema de reducción.

Para esta aplicación es muy importante la precisión y orientación exacta de la herramienta para que la pinza impacte al chasis de manera perpendicular. Para ello, cada servomotor debe estar acompañado con un encoder. Los encoders absolutos son preferibles en el ámbito de la robótica industrial porque permiten al controlador la posición angular exacta de cada articulación inmediatamente al encender el robot, sin necesidad de un ciclo homing.

## ii. Sensores

El rendimiento cinemático del robot se sustenta en sus sensores internos, principalmente encoders absolutos de alta resolución instalados en cada articulación. Estos encoders son cruciales ya que proveen un feedback continuo en la posición angular exacta al controlador, permitiendo la implementación precisa de cinemática directa e inversa. Además sensores de tipo termistores son necesarios para monitorear la temperatura de cada motor y evitar sobrecargas.

Para la seguridad de la aplicación se emplean sensores externos. Los sensores inductivos de proximidad son esenciales para la definición del layout de la celda y la detección de límites o la presencia de la carrocería en la estación de trabajo, así evitaríamos colisiones. También la instalación de un sensor de torque en el efecto final es muy recomendable (aunque no obligatorio) para poder monitorear el contacto y la presión ejercida por la herramienta en el chasis, garantizando que el punto se aplique con la fuerza óptima sobre la chapa y evitar deformaciones excesivas, garantizando calidad en el producto final.

## Conclusión

Consideramos que este proyecto ha sido una gran oportunidad para integrar y aplicar los temas aprendidos a lo largo del cursado, en un caso práctico y de una aplicación industrial altamente demandada. A la misma vez, creemos que hemos desarrollado cierto criterio ya que tuvimos que tomar decisiones técnicas a lo largo del desarrollo del mismo.

Para realizar el desarrollo tuvimos que manejar las herramientas del Toolbox de Peter Corke aprendidas en los trabajos prácticos, el cuál resultó una herramienta muy útil, ya que nos permite visualizar conceptos de forma gráfica, como el espacio de trabajo y la simulación de trayectorias, que de otra forma serían difíciles de comprender. Esto facilitó la validación de los modelos cinemáticos desarrollados.

En resumen, este proyecto ha sido un ejercicio profundo en la aplicación de conocimientos, desde la parametrización de la estructura (DH) hasta el análisis de singularidades (Jacobiano) y la planificación de trayectorias. Nos vemos preparados para desafíos futuros en el campo de la robótica industrial, ya que hemos adquirido herramientas valiosas que nos serán de gran aplicación para nuestra formación.

## Referencias

- [1] ABB. (s.f.) \*Datasheet: IRB 6710-210/2.65. ABB Robotics. Obtenido de:  
<https://www.abb.com/global/en/areas/robotics/products/robots/articulated-robots/large-robots/irb-6710>
- [2] ABB. (s.f.) \*Datasheet: GWT X9 700. ABB Robotics. Obtenido de:  
<https://search.abb.com/library/Download.aspx?DocumentID=9AKK107045A3883&LanguageCode=en&DocumentPartId=&Action=Launch>
- Instituto Tecnológico de León (2020). Cinemática Inversa. Obtenido de:  
<https://www.studocu.com/es-mx/document/instituto-tecnologico-de-leon/robotica/cinematica-inversa/12281135>
- Wikipedia (2025). Cinematica Inversa. Obtenido de:  
[https://es.wikipedia.org/wiki/Cinem%C3%A1tica\\_inversa](https://es.wikipedia.org/wiki/Cinem%C3%A1tica_inversa)
- Craig, J. J. (2018). *Introduction to robotics: Mechanics and control* (4th ed., Global ed.). Pearson.
- Corke, P. (2017). *Robotics, vision and control: Fundamental algorithms in MATLAB* (2nd ed.). Springer.

## Anexos

Repositorio con los códigos:  
[https://github.com/Arguur/Robotica1\\_IRB6710](https://github.com/Arguur/Robotica1_IRB6710)