2 Mengenal Ruang Probabilitas

Achmad Basuki

Program Studi Teknologi Game

Tujuan Pembelajaran

Mahasiswa mampu memahami ruang probabilitas dan perubah acak yang menjadi dasar dari banyak pembuatan dan penyelesaian dalam game dalam bentuk nilai probabilitas, fungsi kepadatan probabilitas, fungsi distribusi kumulatif dan persoalan-persoalan dalam probabitas

Materi

- Nilai Probabilitas
- Hukum Probabilitas
- Fungsi Distribusi Probabilitas
- Nilai Ekspekstasi

Konsep Probabilitas

Satu-satunya kepastian yang ada dalam kehidupan manusia adalah “ketidak-pastian”

Probabilitas

- Probabilitas atau kemungkinan atau peluang adalah hal penting di dalam menyajikan *gamifikasi* dari keadaan nyata.
- Mendapatkan peluang yang lebih besar untuk mencapai keuntungan maksimal adalah tujuan dari sebuah strategi game dalam keadaan konflik.
- Lalu probabilitas itu apa?

Nilai Probabilitas

- Probabilitas atau peluang adalah sebuah nilai yang menyatakan kemungkinan terjadinya sesuatu.
- Nilai probabilitas berada di antara 0 s/d 1, atau dari 0% sampai 100%
- Tidak ada nilai negatif dalam probabilitas.
- Nilai probabilitas mengikuti aturan yang tercantum dalam hukum aljabar.
- Nilai probabilitas ini menjadi indikasi dalam membaca keadaan dan mengambil keputusan.

Menghitung Nilai Probabilitas

- Pendekatan Klasik
  - Probabilitas adalah sebuah rasio antara jumlah kejadian yang diinginkan/diukur dibandingkan dengan jumlah semua kejadian
- Pendekatan Frekuensi Relatif
  - Probabilitas tergantung pada berapa banyak suatu peristiwa terjadi dari seluruh kejadian/kegiatan. Besarnya probabilitas dari suatu peristiwa tidak dianggap sama.
- Pendekatan Subyektif
  - Probailitas dihitung berdasarkan penilaian pribadi atau standar yang ada berdasarkan pada derajat kepercayaan.

Contoh 1

- Pelamar sebuah pekerjaan terdiri dari 10 orang pria dan 15 orang wanita. Hanya diterima 1 orang.
- Probabilitas seseorang diterima adalah:

$$p = \frac{1}{25}$$

- Probabilitas seorang wanita diterima bila diketahui persyaratannya adalah wanita adalah:

$$p = \frac{1}{15}$$

- Probabilitas pelamar wanita dari seluru pelamar adalah:

$$p = \frac{15}{10 + 15} = \frac{3}{5}$$

Contoh 2

- Dalam sebuah angkutan umum terdapat 2 penumpang laki-laki dan 8 penumpang perempuan.
- Probabilitas penumpang yang turun adalah laki-laki adalah:

$$p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

- Probabilitas penumpang yang turun adalah perempuan adalah:

$$p = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Hukum Probabilitas

Aturan Penjumlahan

- Jika dalam ruang R terdapat kejadian A1, A2, A3,… An maka:

$$p(A1) + p(A2) + p(A3) + \cdots + p(An) = 1$$

- Jika A dan B adalah kejadian yang saling asing (mutually exclusive) maka:

$$p(A \cap B) = 0$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

- Jika A dan B adalah kejadian non mutually exclusive maka:

$$p(A \cap B) \neq 0$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Contoh 3

- Diketahui ada 8 bidan dan 5 terapis. Ada 7 bidan dan 3 terapis perempuan.
- Bila dipilih satu orang secara acak, maka probabilitas terpilih seorang bidan atau seorang pria bisa dihitung dengan:

$$p(bidan) = \frac{8}{13}, \qquad p(pria) = \frac{3}{13}, \qquad p(bidan \cap pria) = \frac{1}{13}$$

- Maka:

$$p(bidan \cup pria) = p(bidan) + p(pria) - p(bidan \cap pria)$$

$$= \frac{8}{13} + \frac{3}{13} - \frac{1}{13} = \frac{10}{13}$$

Contoh 4

- Sebuah kotak berisi 5 kelereng merah, 7 kelereng biru dan 3 kelereng putih.
- Bila diambil satu kelereng, kemungkinan terpilih kelereng merah atau biru:

$$p(merah) = \frac{5}{15}, \qquad p(biru) = \frac{7}{15}, \qquad p(putih) = \frac{3}{15}$$

- Maka:

$$p(merah \cup biru) = p(merah) + p(biru)$$
$$= \frac{5}{15} + \frac{7}{15} = \frac{12}{15}$$

Hukum Probabilitas
Aturan Perkalian

- Jika A dan B adalah kejadian yang independent atau tidak saling mempengaruhi maka:
$$p(A \cap B) = p(A).\, p(B)$$
- Jika A dan B adalah kejadian yang dependent atau saling mempengaruhi maka:
$$p(A \cap B) = p(A).\, p(B|A)$$

Contoh 5

- Dua buah dadu dilempar secara bersamaan.
- Probabilitas munculnya pasangan angka 6-6 adalah:

$$p(A \cap B) = p(A).\,p(B) = \frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

- Probabilitas munculnya pasangan genap-ganjil adalah:

$$A = genap, \qquad B = ganjil$$

$$p(A) = p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p(A \cap B) = p(A).\,p(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Contoh 6

- Dari 100 mahasiswa, 40 mahasiswa suka mata kuliah desain, 30 mahasiswa suka mata kuliah pemrograman, dan 30 mahasiswa tidak suka keduanya.
- Bila diambil 2 orang mahasiswa secara berurutan, Probabilitas munculnya 1 mahasiswa yang suka mata kuliah desain dan 1 mahasiswa yang suka mata kuliah pemrograman adalah:

$$p(desain, pemrograman) = \frac{40}{100} . \frac{30}{99} = 0.12$$

$$p(pemrograman, desain) = \frac{30}{100} . \frac{40}{99} = 0.12$$

$$p = 0.12 + 0.12 = 0.24$$

Latihan 1

- Sebuah sandi terdiri dari 1 huruf dan 3 angka.
- Berapa probabilitas munculnya sandi dengan huruf vokal dan angka terakhir genap?

Fungsi Kepadatan Probabilitas

- Fungsi kepadatan probabilitas (probability density function atau pdf) adalah sebuah fungsi yang menyatakan perilaku distribusi probabilitas dari suatu kejadian.
- Fungsi kepadatan probabilitas p(X) menyatakan nilai probabilitas dari kejadian X dimana:

$$0 \leq p(X) \leq 1$$

- Untuk semua kejadian maka jumlah nilai fungsi kepadatan probabilitas adalah satu atau ditulis dengan:

$$\sum_i p(X = x_i) = 1$$

Ciri-ciri Fungsi Kepadatan Probabilitas

- $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ menyatakan semua kejadian yang mungkin.
- Nilai probabilitas setiap kejadian $X = x_i$

$$0 \le p(X = x_i) \le 1$$

- Nilai probabilitas untuk semua kejadian X

$$\sum_i p(X = x_i) = 1$$

Contoh 7

Fungsi Kepadatan Probabilitas

- Pada sebuah kelas, terdapat 20 mahasiswa. Ada 6 mahasiswa mendapat nilai A, 10 mahasiwa mendapat nilai B, dan 4 mahasiswa medapat nilai C.
- Kejadian:

$$x1 = mahasiswa\ mendapat\ nilai\ A$$

$$x2 = mahasiswa\ mendapat\ nilai\ B$$

$$x3 = mahasiswa\ mendapat\ nilai\ C$$

- Nilai fungsi probabilitas:

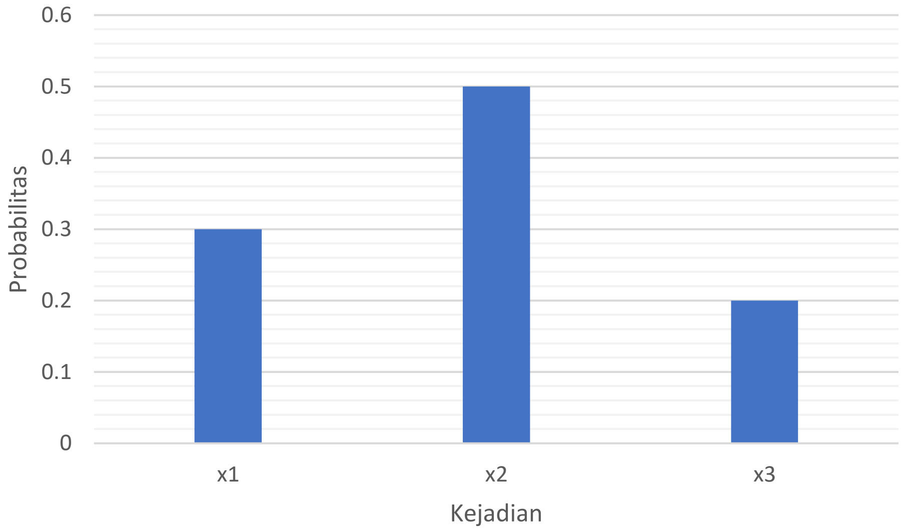
$$p(X = x1) = \frac{6}{20}, \qquad p(X = x2) = \frac{10}{20}, \qquad p(X = x3) = \frac{4}{20}$$

Contoh 7
Fungsi Kepadatan Probabilitas

- Jumlah nilai probabilitas

$$P(X) = \frac{6}{20} + \frac{10}{20} + \frac{4}{20} = 1$$

- Grafik dari fungsi kepadatan probabilitasnya adalah:



3 Permutasi dan Kombinasi

Achmad Basuki
Program Studi Teknologi Game

Tujuan Pembelajaran

Mahasiswa mampu memahami permasalahan-permasalahan permutasi dan kombinasi dalam menentukan ruang pembicaraan.

Materi

- Himpunan Kejadian
- Faktorial
- Permutasi
- Kombinasi
- Perkalian Kombinasi

Himpunan Kejadian

Himpunan kejadian adalah himpunan semua peristiwa yang diamatidalamruang probabilitas.

Himpunan Kejadian

- Himpunan kejadian bisa dituliskan dengan:
$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$$
- x_i adalah kejadian ke-*I*
- n adalah jumlah kejadian
- Setiap kejadian adalah independent
- Jumlah kejadian menjadi hal yang berubah sesuai dengan pilihan, solusi dan keadaan yang mungkin.

Contoh 1

- Seorang penyewa baju mempunyai 7 buah baju dan 3 buah celana.
- Jumlah kemungkinan orang menyewa dengan pasangan baju dan celana yang berbeda adalah:

$$n = 7 \times 3 = 21$$

Contoh 2

- Ada 5 orang laki-laki dan 8 orang perempuan dalam sebuah kontes.
- Jika diambil satu pasangan yang terdiri 1 orang laki-laki dan 1 orang perempuan, maka jumlah pasangan yang mungkin adalah:

$$n = 5 \times 8 = 40$$

Faktorial

- Faktorial *k!* adalah perkalian dari sederetan bilangan bulat sampai bilangan k
- Faktorial ditulis dengan:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$$

- Atau

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i$$

Contoh 3

- Ada N titik P1, P2, P3, P4,... ,PN yang saling berhubungan.
- Jalur yang mungkin dibentuk untuk melalui 3 buah titik adalah:

$$S = 1$$

- Jalur yang mungkin dibentuk untuk melalui 4 buah titik adalah:

$$S = 1 \times 2 = 2$$

- Jalur yang mungkin dibentuk untuk melalui 5 buah titik adalah:

$$S = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

- Jalur yang mungkin dibentuk untuk melalui N buah titik adalah:

$$S = (n - 2)!$$

Permutasi

Jumlah kejadian yang mungkin bila urutan diperhatikan

Permutasi

- Permutasi adalah sebuah teknik untuk menghitung berapa kejadian yang mungkin bila diambil sebuah pasangan dengan jumlah *r* anggota di dalam himpunan yang jumlah anggotanya *n*.
- Dalam permutasi pasangan diperhitungkan urutannya. Artinya $s = \{A, B, C\}$ dianggap tidak sama dengan $s_1 = \{A, C, B\}$ atau $s_2 = \{B, A, C\}$
- Permutasi bisa dihitung menggunakan:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh Pasangan dalam Permutasi

- Himpunan permutasi dari pasangan yang dibentuk dari huruf A, B dan C adalah:

ABC ACB BAC BCA CAB CBA

- Himpunan permutasi dari pasangan yang dibentuk dari A, B, C dan D adalah:

ABCD	ABDC	ACBD	ACDB	ADBC	ADCB
BACD	BADC	BCAD	BCDA	BDAC	BDCA
CABD	CADB	CBAD	CBDA	CDAB	CDBA
DABC	DACB	DBAC	DBCA	DCAB	DCBA

Contoh 4
Permutasi

- Jumlah kata yang bisa dihasilkan dari huruf B, A, G, U dan S adalah:

$$P_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = 5! = 120$$

- Dalam hal ini tidak ada huruf yang sama, sehingga $r = 5$

Contoh 5
Permutasi

- Jumlah kata yang bisa dihasilkan dari huruf M, A, L, A dan M tidak bisa dihitung dengan rumus permutasi, karena mengandung huruf yang sama.
- Formulasi permutasi menjadi

$$P^{n}_{r_1,r_2,\ldots r_n} = \frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_n!}$$

- Maka jumlah angka yang bisa dihasilkan dari “MALAM” adalah:

$$P = \frac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30$$

Contoh 6
Permutasi

- Jumlah kata yang bisa dihasilkan dari “MATEMATIKA” bisa dihitung dengan:
- Huruf M muncul 2x, huruf A muncul 3x, huruf T muncul 2x, huruf I muncul 1x dan huruf K muncul 1x
- Maka jumlah angka yang bisa dihasilkan dari “MATEMATIKA” adalah:

$$P = \frac{10!}{2!\,3!\,2!} = 302400$$

Kombinasi

Jumlah kejadian yang mungkin bila urutan tidak diperhatikan

Kombinasi

- Kombinasi adalah sebuah teknik untuk menghitung berapa kejadian yang mungkin bila diambil sebuah pasangan dengan jumlah *r* anggota di dalam himpunan yang jumlah anggotanya *n*.
- Dalam kombinasi pasangan tidak diperhitungkan urutannya. Artinya $s = \{A, B, C\}$ dianggap sama dengan $s_1 = \{A, C, B\}$ atau $s_2 = \{B, A, C\}$
- Permutasi bisa dihitung menggunakan:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Contoh 7
Kombinasi

- Saat seorang anak membeli balon, ternyata penjual balon mempunyai 6 balon yang semuanya berbeda warna.
- Bila anak tersebut membeli 2 balon, jumlah pasangan warna yang mungkin adalah:

$$C_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!\,2!} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$$

Perbedaan Permutasi dan Kombinasi

- Permutasi mengacu pada beberapa cara mengatur satu set obyek secara berurutan. Kombinasi menyiratkan beberapa cara untuk memilih item dari kumpulan obyek tanpe perlu mengindahkan urutannya.
- Titik pembeda utama antara dua konsep matematika ini adalah keurutan, penempatan, dan posisi.
- Permutasi menunjukkan beberapa **cara untuk mengatur sesuatu**, **orang, digit, huruf, warna**, dan sebagainya. Di sisi lain, kombinasi menunjukkan cara **memilih item** menu, makanan, pakaian, subjek, dll.

Perbedaan Permutasi dan Kombinasi

- Permutasi tidak lain hanyalah kombinasi yang teratur sementara kombinasi menyiratkan kumpulan tidak beraturan atau memasangkan nilai dalam kriteria tertentu.
- Banyak permutasi dapat diturunkan dari kombinasi tunggal. Sebaliknya, hanya kombinasi tunggal yang bisa didapat dari sebuah permutasi tunggal.

Contoh 8
Permutasi

- Dalam pemilihan ketua, sekretaris dan bendahara Komunitas, terdapat 5 calon yang maju.
- Jumlah pasangan ketua, sekretaris dan bendahara yang mungkin adalah:

$$P_2^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Contoh 9
Kombinasi

- Dalam pemilihan 3 orang wakil Komunitas, terdapat 5 calon yang maju.
- Jumlah pasangan wakil komunitas yang mungkin adalah:

$$P_2^5 = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Contoh 9
Kombinasi

- Dalam pemilihan 3 orang wakil Komunitas, terdapat 5 calon yang maju.
- Jumlah pasangan wakil komunitas yang mungkin adalah:

$$P_2^5 = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Latihan

- Dalam suatu pertemuan terdapat 10 orang yang belum saling kenal. Agar mereka saling kenal maka mereka saling berjabat tangan. Berapa banyaknya jabat tangan yang terjadi.
- Dalam sebuah ujian, seorang mahasiswa diwajibkan mengerjakan 5 soal dari 8 soal yg tersedia. Tentukan banyaknya jenis pilihan soal yg mungkin untuk dikerjakan.

Perkalian Kombinasi

- Dalam sebuah komunitas terdapat 10 anggota laki-laki dan 8 orang wanita.
- Jumlah pasangan yang terdiri dari 2 orang laki-laki dan 2 orang wanita yang mungkin adalah:

$$C = C_2^{10} \times C_2^{8} = \frac{10!}{8!\,2!} \times \frac{8!}{6!\,2!} = 1260$$

Terima Kasih