TP 1 "Différences finies"

Formation ModIA, 4A
Toutes les notations utilisées sont celles du cours

Objectif du TP

L'objectif de ce TP est de résoudre l'équation d'advection 1D à l'aide de plusieurs schémas différences finies. On rappelle que cette équation d'advection 1D peut s'écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

L'implémentation des différents schémas se fera dans un script Python (ou, éventuellement, Julia).

1 Construction et visualisation du maillage et de la condition initiale

On considère un domaine 1D de longueur L, discrétisé en m points. Les deux conditions initiales envisagées sont les suivantes :

CI1 : $u^0 = \sin(\frac{2\beta x_i}{L})$, où β est le numéro du mode considéré.

CI2 : $u^0 = 0$ si $x < x_0, u^0 = 1$ sinon.

Pour commencer, on choisira les valeurs numériques suivantes : $L = 1$, $m = 100$.

- Construire les tableaux x, contenant les abscisses des points du maillage, et u^0, la solution initiale, puis les visualiser avec Matplotlib.

2 Etude du comportement de schémas différences finies

2.1 Paramètres physiques et numériques

Par la suite, on considèrera le problème physique suivant (sauf indication contraire dans l'énoncé) :

- Vitesse de convection $a = 1$
- Conditions limites périodiques en espace
- Solution observée au terme d'un temps T lui permettant de revenir à sa position initiale.

On rappelle que le nombre de Courant, noté $\mathcal{C}$, est défini comme :

$$\mathcal{C} = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$$

Ce nombre sera pris égal à 0.5 par défaut.

2.2 Méthodologie

Pour chaque schéma numérique implémenté, on répondra aux questions suivantes :

- Visualiser les solutions obtenues en partant de la condition initiale CI1, en utilisant successivement des valeurs de n égales à 2, 4, 8 et 16 et noter vos observations.
- Pour la condition initiale correspondant à $n = 1$, réaliser des simulations avec les nombres $\mathcal{C}$ égaux à 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1, 1.5 et noter vos observations.

- Utiliser maintenant la condition initiale CI2. Sortir la solution à $\mathcal{C} = 1$ aux instants suivants : $T/4$, $T/2$, $T/2$ et enfin T.
- Refaire l'étude sur l'influence du nombre $\mathcal{C}$ avec la condition initiale CI2.
- Toujours avec CI2 et $\mathcal{C} = 0.1$, étudiez l'influence de la discrétisation spatiale sur le résultat en prenant successivement un nombre de points m égal à 4, 10, 20, 50, 100 et 200.
- Que se passe-t-il si l'on change le signe de a ?

2.3 Schémas numériques à implémenter

- Schéma FOU-EE :
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \mathcal{C}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right)$$
- Schéma FOF-EE :
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \mathcal{C}\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)$$
- Schéma SOC-EE :
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\mathcal{C}}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$$
- Schéma de Lax-Wendroff :
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\mathcal{C}}{2}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{\mathcal{C}^2}{2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$