Partie 5 - Projet

Analyse de phénomènes dispersifs

On souhaite étudier au cours du temps le comportement dispersif d'un produit déversé dans une rivière de largeur constante b et animée d'une vitesse V. Ce produit est supposé peu miscible à l'eau et moins dense que l'eau (par exemple de l'huile), de sorte que ce produit flotte à la surface de l'eau.

On note $C(x, y, t)$ et $\rho(x, y, t)$ la masse volumique de ce produit à la position (x, y) et à l'instant t. La dynamique de ce problème est donnée par la conservation de la masse et de la concentration :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0,$$
$$\frac{\partial \rho C}{\partial t} + \operatorname{div}(\Phi) = 0.$$

La grandeur Φ correspond aux flux dispersifs, a savoir :

— Les flux diffusifs, donnés par $\Phi_d = -\lambda \nabla C$ avec λ le coefficient de diffusion que l'on supposera constant.

— Les flux advectifs, donnés par $\Phi_c = \rho C V$

Le flux total correspond alors à la somme des deux : $\Phi = \Phi_c + \Phi_d$.

1. Montrer que
$$\frac{\partial C}{\partial t} - \mu \Delta C + V \cdot \nabla C = 0, \tag{1}$$
avec μ un coefficient de diffusion que l'on déterminera.

L'objectif de ce projet est résoudre ce problème en supposant que μ est constant et avec une vitesse de la rivière $V = (1, 0)$. Afin de simplifier ce problème, nous ne considérons qu'une portion de la rivière. Le domaine sur lequel nous allons travaillé est ainsi noté $\Omega =]0, a[\times]0, b[$. On suppose que le produit se trouve initialement à l'intérieur de Ω et on distingue la frontière Γ_0 ou l'on impose une condition de Dirichlet homogène et Γ_1 on l'on impose une condition de Neumann homogène, permettant au fluide de sortir du domaine Ω. Ainsi, notre problème s'écrit :

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \mu \Delta C + V \cdot \nabla C = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{2a}$$
$$C = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \tag{2b}$$
$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1, \tag{2c}$$
$$C(t = 0) = C_0 \text{ dans } \Omega. \tag{2d}$$

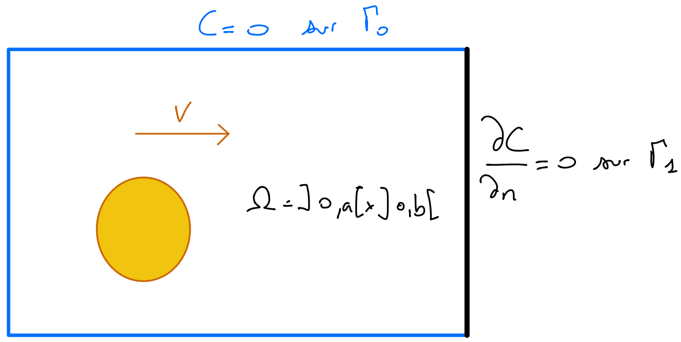

FIGURE 1 – Configuration du domaine Ω représentant la rivière en présence du produit (en orange) et avec les conditions limites.

Pour approcher la solution de ce problème, nous allons maintenant utiliser la méthode des différences finies. On considère ainsi un maillage cartésien de Ω constitué de $N_x + 2$ points dans la direction Ox et $N_y + 2$ points dans la direction Oy (dans la largeur de la rivière). Les coordonnées des points du maillages sont ainsi

$$x_i = \frac{ia}{N_x+1} \quad 0 \le i \le N_x + 1, \qquad y_j = \frac{jb}{N_y+1} \quad 0 \le j \le N_y + 1,$$

avec

$$h_x = \frac{a}{N_x+1}, \quad h_y = \frac{b}{N_y+1}$$

En tout point (x_i, y_j), la méthode des différences finies permet de déterminer une approximation $U_{i,j}$ de la quantité $C(x_i, y_j)$, la solution exacte évaluée en ces points.

Afin d'implémenter correctement la résolution du problème (2), nous procédons en plusieurs étapes. Dans un premier temps, nous nous concentrons sur la discrétisation de l'opérateur Laplacien, pour lequel nous considérons des conditions mixtes Dirichlet/Neumann (non) homogènes. Après cela, nous étudions une discrétisation centrée du terme advectif, et enfin nous terminons par regarder les aspects de discrétisation en temps. L'objectif de ce travail est de pouvoir prédire numériquement le comportement de ce produit à la surface de l'eau au cours du temps.

Approximation spatiale du Laplacien

Considérons pour commencer l'approximation de l'opérateur Laplacien en 2D sur l'ouvert $\Omega =]0, a[\times]0, b[$ avec des conditions à la limite de type Dirichlet homogène sur $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} -\mu\Delta u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

avec $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un terme source.

2. A y_j fixé, montrer que

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{2u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j) - u(x_{i+1}, y_j)}{h_x^2} + \mathcal{O}(h_x^2),$$

En déduire une approximation à l'ordre 2 de $-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j)$.

3. Ecrire le schéma aux différences finies consistant à l'ordre 2 en un point (x_i, y_j) n'appartenant pas au bord.

4. Ecrire les conditions de Dirichlet homogènes discrètes sur le bord $\partial\Omega$ et mettre ce schéma sous la forme $\mathbf{AU} = \mathbf{F}$ avec

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_0 \\ \boldsymbol{U}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{N_y+1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}_j = \begin{pmatrix} U_{0,j} \\ U_{1,j} \\ \vdots \\ U_{N_x+1,j} \end{pmatrix} \quad 0 \leq j \leq N_y + 1$$

5. Vérifier votre implémentation pour différentes valeurs de $(n, k) \in \mathbb{N}_{>0}$ avec $u_{n,k}(x, y) = \sin(\frac{n\pi x}{a}) \sin(\frac{k\pi y}{b})$.

Prenons maintenant en compte la condition de Neumann sur le bord Γ_1 :

$$\begin{aligned} -\mu\Delta u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_1. \end{aligned}$$

6. Sur $\Gamma_1 = \{(a, y) | y \in [0, b]\}$, montrer que l'on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = \frac{4u(a - h_x, y) - u(a - 2h_x, y) - 3u(a, y)}{2h_x} + \mathcal{O}(h_x^2).$$

7. En déduire la modification à apporter sur $\mathbf{A}$ pour prendre en compte cette condition de Neumann sur Γ_1 et vérifier vos résultats en considérant la solution $u(x, y) = \sin(\frac{\pi y}{b}) \big(\cos(\frac{\pi x}{a}) - 1\big)$.

Approximation des termes advectifs

Sous l'influence de l'écoulement de la rivière, les effets advectifs ont tendance à déplacer le produit dans le sens de V. Comme on l'a vu, ces effets sont représentés par le terme de dérivée directionnelle $V\cdot\nabla u$. Considérons le problème de diffusion-advection stationnaire :

$$\begin{aligned}-\mu\Delta u + V\cdot\nabla u &= f \text{ dans } \Omega,\\ u &= 0 \text{ sur } \Gamma_0,\\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_1,\end{aligned}$$

avec $V \in \mathbb{R}^2$.

8. Dans ce problème, deux phénomènes physiques sont en intéraction : les phénomènes diffusifs et et les phénomènes advectifs. Afin de quantifier quel phénomène est prédominant sur l'autre, on introduit le nombre de Péclet. Soit ℓ une échelle de longueur caractéristique (par exemple le rayon de la tache de produit) et v une échelle de vitesse (typiquement la norme de V). Par analyse dimensionnelle, montrer que le nombre de Péclet peut être défini par

   $$\mathrm{Pe}_\ell = \frac{\ell v}{\mu}.$$

   Quel est le régime dominant si $\mathrm{Pe}_\ell \gg 1$? Montrer que l'on peut aussi définir ce nombre sous la forme $\mathrm{Pe}_\ell = \tau_d/\tau_a$ avec τ_d et τ_a les échelles de temps caractéristiques diffusifs et advectifs, respectivement.

9. Montrer que si $V = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \end{pmatrix}$, alors,

   $$V\cdot\nabla u(x_i, y_j) = v_x \frac{u(x_{i-1}, y_j) - u(x_{i+1}, y_j)}{2h_x} + \mathcal{O}(h_x^2).$$

   En déduire la discrétisation du terme advectif et vérifier vos résultats dans le régime diffusif.

Marches en temps

Considérons maintenant le problème complet (2). On note $\mathbf{A}$ l'approximation de l'opérateur $C \mapsto -\mu\Delta C + V\cdot\nabla C$ avec les conditions au bord de type Dirichlet/Neumann. Le problème semi-discret en espace ainsi s'écrit sous la forme d'un problème de Cauchy :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{U}(t) + \mathbf{A}\mathbf{U}(t) = 0, \tag{3a}$$

$$\mathbf{U}(t=0) = \mathbf{U}_0. \tag{3b}$$

Dans la suite on prendra un coefficient de diffusion $\mu = 0.01$ et on choisira pour condition initiale une Gaussienne centré en (x_0, y_0), suffisament éloigné du bord $\partial\Omega$ et de rayon r_0 :

$$C_0(x,y) = e^{-\left(\frac{x-x_0}{r_0}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{r_0}\right)^2}.$$

L' intervalle de temps pour notre étude sera $[0, T]$, avec δt le pas de temps et N_T le nombre de pas de temps (*ie.* $\delta t = T/N_T$). On notera également $t_n = n\delta t$ pour tout $n \in [0, N_T]$. L'approximation de la quantité $\mathbf{U}(t_n)$ pour $n \geq 1$ est notée $\mathbf{U}^n$. L'objectif de cette dernière partie est de déterminer un "bon" schéma en temps en régime advectif.

10. Commençons par considérer l'équation de la chaleur, c'est à dire pour $v_x = 0$.
    (a) Ecrire l'algorithme d'Euler explicite dans l'intérieur de Ω. Montrer en particulier que $U_{i,j}^{n+1}$ est une combinaison convexe de $U_{i,j}^n$, $U_{i-1,j}^n$, $U_{i+1,j}^n$, $U_{i,j-1}^n$ et $U_{i,j+1}^n$ si
    $$\mathrm{CFL} = \frac{\mu\delta t}{h_x^2} + \frac{\mu\delta t}{h_x^2} \leq \frac{1}{2}.$$
    (b) Verifier cette condition CFL en pratique. Que pensez-vous de cette condition ?
    (c) Dans l'objectif d'intégrer par la suite les phénomènes advectifs, on va considérer le schéma de Crank-Nicholson. Quelle est la particularité de ce schéma dans le cas de l'équation de la chaleur ? (On pourra reprendre l'analyse de stabilité par la méthode de Fourier dans le cas 1D).
11. Appliquer le schéma de Crank-Nicholson en présence d'un champs advectif $V = (1, 0)$. Quel est le régime de l'écoulement ? Pourquoi il n'est pas raisonnable de considérer le schéma d'Euler ?
12. On choisit $r_0 = 0.1$, $x_0 = 0.25$ et $y_0 = 0.5$ sur $\Omega =]0, 2[\times]0, 1[$. Au bout de combien de temps la concentration a t-elle diminuée de 80% ?
13. Effectuer de même pour une condition initiale moins régulière :
    $$C_0(x, y) = \begin{cases} r_0^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 \text{ si } r_0^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 > 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$