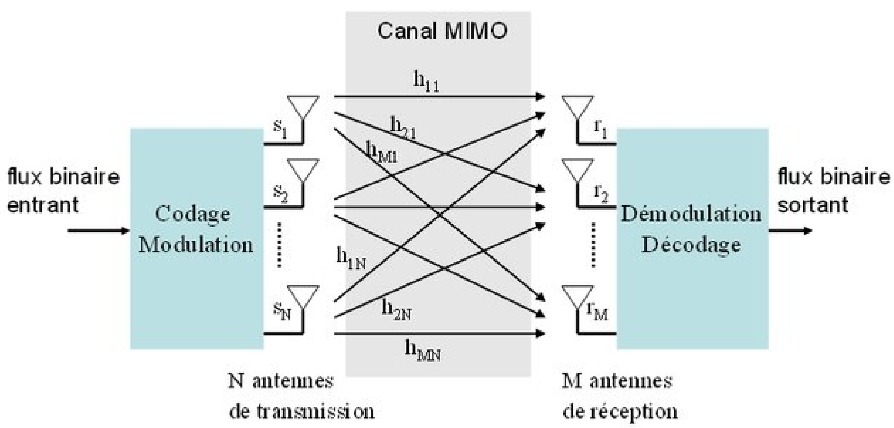
Département Sciences du Numérique

Parcours Télécommunications

Travaux pratiques

Détection MIMO

Auteur : C. Poulliat



Version 1.0 du
27 novembre 2020

1 Introduction

Ce TP sera effectué à l'aide du logiciel Matlab. Les thèmes abordés sont :

- Détection par maximum de vraisemblance,
- Détection linéaire.

2 Transmission MIMO

On considère la transmission sur un canal MIMO ergodique dont les coefficients sont des variables gaussiennes complexes de moyenne unitaires. On considérera le modèle de transmission bande de base. On utilisera à l'émetteur une modulation de type MAQ à M états avec mapping de type Gray. Le nombre d'états considérés pourra être variable de $M = 4$ à $M = 16$ états en fonction de la taille du canal considéré.

On appellera $\mathbf{X}_n = [x_1[n], \cdots, x_{N_T}[n]]^\top$ le vecteur de symbole QAM émis et $\mathbf{Y}_n$ le vecteur reçu tel que

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{H}_n \mathbf{X}_n + \mathbf{B}_n.$$

où $\mathbf{B}_n$ est un vecteur complexe Gaussien de matrice de covariance $R_B = \sigma_B^2 I_{N_R}$.

$\mathbf{H}_n$ est une matrice $N_R \times N_T$ dont les coefficients sont notés $h_{i,j}[n],\ \forall (i,j) \in [1, \cdots N_R] \times [1, \cdots N_T]$ Le signal émis est transmis dans un canal de type avec N_T antennes à l'émission et N_R antennes en réception. On prendra $N_T = N_R$ dans un premier temps.

1. Générer une suite de symboles QAM en utilisant un mapping de Gray en utilisant la fonction qammod.
2. Générer pour chaque symbole MIMO $N_R \times N_T$ un canal dît de Rayleigh dont ie. dont les coefficients sont des variables aléatoires complexes, ie. $h_{i,j}$ est une variables complexe Gaussienne centrée de variance unitaire. On définira le rapport signal sur bruit $\frac{E_s}{N_0}$ comme le rapport signal sur bruit par voie.

3 Détecteurs MIMO lineaires

On réalisera la mise en oeuvre des détecteur linéaires de type ZF et MMSE sur les données générées.

3.1 Récepteur ZF

Pour les récepteurs linéaires ZF, on cherche un opérateur linéaire tel l'on supprime les interférence des autres voies en absence de bruit. Ainsi, on cherche la matrice $\mathbf{W}_{zf}$ telle que

$$\hat{\mathbf{x}}_{zf}[n] = \mathbf{W}_{zf}^H \mathbf{H}_n \mathbf{X}_n = \mathbf{X}_n$$

où $.^H$ est l'opérateur de transposition et de conjugaison. Ainsi on obtient que

$$\mathbf{W}_{zf}^H \mathbf{H}_n = I_{N_T}$$

et donc que

$$\mathbf{W}_{zf}^H = \mathbf{H}_n^\dagger$$

où $\mathbf{H}_n^\dagger$ est la matrice pseudo inverse associée à $\mathbf{H}_n$ donnée par

$$\mathbf{H}_n^\dagger = (\mathbf{H}_n^{\mathrm{H}} \mathbf{H}_n)^{-1} \mathbf{H}_n^{\mathrm{H}}.$$

et telle que

$$\mathbf{H}_n^{\dagger}\mathbf{H}_n = I_{N_T}.$$

En résumé, la détection ZF consiste à calculer

$$\hat{\mathbf{x}}_{zf}[n] = \mathbf{W}_{zf}^{H}\mathbf{y}[n]$$

où

$$\mathbf{W}_{zf} = \mathbf{H}\left(\mathbf{H}_n^{\mathrm{H}}\mathbf{H}_n\right)^{-1}.$$

En présence de bruit, on obtient alors

$$\hat{\mathbf{x}}_{zf}[n] = \mathbf{X}_n + \mathbf{W}_{zf}^{\dagger}\mathbf{B}_n.$$

On aura une amplification du bruit potentielle.

Le travail à réaliser est le suivant :

1. Implémenter le récepteur ZF MIMO. Evaluer les performances sur canal de Rayleigh.
2. Que peut-on dire des performances en présences du bruit ?

3.2 Récepteur MMSE

Le récepteur MMSE est la matrice$\mathbf{W}_{mmse}$ telle que

$$\hat{\mathbf{x}}_{mmse}[n] = \mathbf{W}_{mmse}^{H}\mathbf{Y}_n,$$

telle que

$$\mathbf{W}_{mmse} = arg\min_{\mathbf{W}} \mathbb{E}(\|\mathbf{x} - \mathbf{W}^H\mathbf{Y}\|^2)$$

La solution est donnée par

$$\mathbf{W}_{mmse} = \left(\mathbf{H}_n\mathbf{H}_n^{\mathrm{H}} + \frac{N_0}{E_s}I_{N_R}\right)^{-1}\mathbf{H}_n.$$

On peut également montrer que

$$\mathbf{W}_{mmse} = \mathbf{H}_n\left(\mathbf{H}_n^{\mathrm{H}}\mathbf{H}_n + \frac{N_0}{E_s}I_{N_R}\right)^{-1}.$$

Le travail à réaliser est le suivant :

1. Implémenter le récepteur ZF MIMO en utilisant simplement la fonction $\mathrm{pinv}(.)$ de Matlab. Evaluer les performances sur canal de Rayleigh.
2. Comparer au cas ZF. Que pouvez vous dire.

4 Détecteurs MIMO non-lineaires

4.1 Détecteur ML et MAP

Le détecteur ML est donné par

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{ml} &= \arg\max_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}^{\mathrm{N_R}}} p(\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}) \\ &= \arg\min_{\mathrm{ses}^{\mathbf{u}}} \|\mathbf{y} - \mathbf{Hs}\|^2\end{aligned}$$

1. Implémenter le récepteur ML pour un canal 2×2 et une QPSK. Quelle est sa limitation ?

4.2 Détecteur SIC - ZF

On peut appliquer un factorisation QR à la matrice $\mathbf{H}$ qui permet ensuite d'appliquer une détection séquentielle et une annulation successive d'interférence. Pour $N_T = N_R$, on peut écrire la factorisation suivante

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{QR} \\ &= \mathbf{Q}\begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,N_T} \\ 0 & r_{2,2} & \cdots & r_{2,N_T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{N_T,M=N_T} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

où $\mathbf{Q}$ est une matrice unitaire ($\mathbf{Q}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q} = I_{N_T}$) et $\mathbf{R}$, une matrice triangulaire supérieure. Après multiplication par $\mathbf{Q}^{\mathrm{H}}$, il vient

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{Y}} &= \mathbf{Q}^{\mathrm{H}}\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{RX} + \mathbf{Q}^{\mathrm{H}}\mathbf{B}\end{aligned}$$

où $\mathbf{N} = \mathbf{Q}^{\mathrm{H}}\mathbf{B}$ garde les caractéristiques de $\mathbf{B}$. On peut alors écrire le système

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{RX} + \mathbf{N}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_{N_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,N_T} \\ 0 & r_{2,2} & \cdots & r_{2,N_T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{N_T,N_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N_T} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{N_T} \end{bmatrix}$$

On obtient alors les équations suivantes

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{N_T} &= r_{N_T,N_T} x_{N_T} + n_{N_T} \\ \tilde{y}_{N_T-1} &= r_{N_T-1,N_T} x_{N_T} + r_{N_T-1,N_T-1} x_{N_T-1} + n_{N_T-1}\end{aligned}$$

On peut alors appliquer une procédure de détection séquentielle de type ML (ie. ZF dans notre cas) en supposant tous les symboles précédents correctement détectés. Le m-ième symbole de $\mathbf{X}$, x_m, peut être détecté après annulation de la contribution de $N_T - m$ symboles de la manière suivante

$$u_m = \tilde{y}_m - \sum_{q=m+1}^{N_T} r_{m,q}\hat{x}_q, \quad m \in \{1, 2, \dots, N_T - 1\}$$

où $\hat{x}_q$ est la décision dure de x_q à partir de u_q. La règle de décision est alors donnée par

$$\hat{x}_m = \arg\min_{x \in \mathcal{X}} |s - u_m / r_{m,m}|^2$$

1. Proposer une implémentation du Détecteur SIC-ZF et comparer aux autres détecteur. Quel est le principal inconvénient ?