

# Turbo-codes et extensions

Charly Poulliat

6 décembre 2020

# Plan

- 1 Turbo-codes : concaténations parallèle et série
- 2 Analyse EXIT charts
- 3 Systèmes à décodage itératif avec concaténation en série



# Plan

- 1 Turbo-codes : concaténations parallèle et série
  - Structure parallèle
  - Information Extrinsèque
  - Décodage itératif
  - Turbo-codes série
- 2 Analyse EXIT charts
- 3 Systèmes à décodage itératif avec concaténation en série

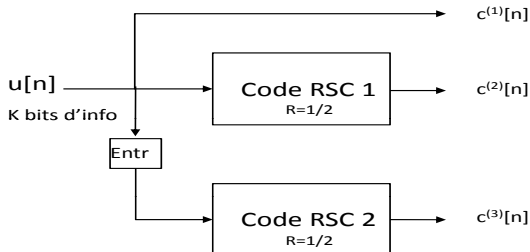


# Plan

- 1 Turbo-codes : concaténations parallèle et série
  - Structure parallèle
  - Information Extrinsèque
  - Décodage itératif
  - Turbo-codes série

# Turbo-codes parallèles

## Structure du codeur



**Figure** – Structure d'un turbo code parallèle : chaque code est un code récuratif systématique. Ici  $R = 1/2$  pour chaque code constituant.

- $K$  bits d'information sont codés avec le codeur RSC 1,
- bits d'info. entrelacés et codés par codeur RSC 2,
- Seule la partie redondance est prise en compte sur le codeur RSC 2.

## Structure du codeur : exemple UMTS

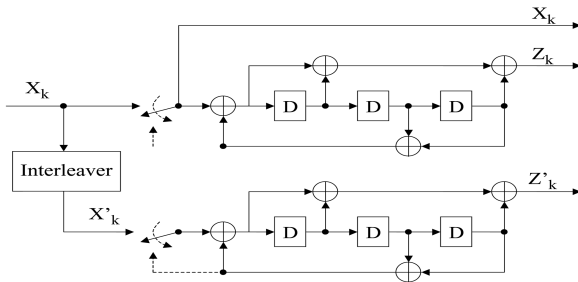


Figure – Structure d'un turbo code parallèle pour l'UMTS (3GPP)

# Notion d'information extrinsèque 1/2

## Cas d'un codeur récursif systématique $R = 1/n_c$

on supposera que  $c_n^{(1)} = u_n$

$$L(u_n) = \log \left[ \frac{\sum_{S^+} p(s_{n-1}=s', s_n=s, \mathbf{y})}{\sum_{S^-} p(s_{n-1}=s', s_n=s, \mathbf{y})} \right] \quad (1)$$

$$= L_c(u_n) + L_a(u_n) + L_{ext}(u_n) \quad (2)$$

avec

- Info. canal :  $L_c(u_n) = \log \left( \frac{p(y_n^{(1)} | u_n=+1)}{p(y_n^{(1)} | u_n=-1)} \right)$
- Info. a priori :  $L_a(u_n) = \log \left( \frac{p(u_n=+1)}{p(u_n=-1)} \right)$
- Info. extrinsèque :

$$\begin{aligned} L_{ext}(u_n) &= \log \left[ \frac{\sum_{S^+} \alpha_{n-1}(s') \prod_{k=2}^{n_c} p(y_n^{(k)} | c_n^{(k)}(s', s)) \beta_n(s)}{\sum_{S^-} \alpha_{n-1}(s') \prod_{l=2}^{n_c} p(y_n^{(l)} | c_n^{(l)}(s', s)) \beta_n(s)} \right] \\ &= \log \left[ \frac{\sum_{S^+} \alpha_{n-1}(s') \gamma_n^e(s', s) \beta_n(s)}{\sum_{S^-} \alpha_{n-1}(s') \gamma_n^e(s', s) \beta_n(s)} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

## Notion d'information extrinsèque 2/2

### Info. extrinsèque (domaine logarithmique)

$$\begin{aligned}
 L_{ext}(u_n) &= \max_{\mathcal{S}^+}^* (\tilde{\alpha}_{n-1}(s') + \tilde{\gamma}_n^e(s', s) + \tilde{\beta}_n(s)) \\
 &\quad - \max_{\mathcal{S}^-}^* (\tilde{\alpha}_{n-1}(s') + \tilde{\gamma}_n^e(s', s) + \tilde{\beta}_n(s)) \\
 \tilde{\gamma}_n^e(s', s) &= \log(\gamma_n^e(s', s))
 \end{aligned}$$

### Correspondance entre domaine probabilité vers domaine logarithmique : $L(u_n) \iff p(u_n)$

$$\begin{aligned}
 p(u_n) &= \frac{\exp(L_a(u_n)/2)}{1 + \exp(L_a(u_n))} \exp(u_n L_a(u_n)/2) \\
 &= \lambda_n \exp(u_n L_a(u_n)/2)
 \end{aligned} \tag{4}$$



## Cas Gaussien (domaine logarithmique)

- Info. canal :  $L_c(u_n) = \frac{2}{\sigma^2} y_n^{(1)}$ ,
- Métriques de branches :

$$\tilde{\gamma}_n(s', s) = u_n \frac{L_a(u_n)}{2} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{m=1}^{n_c} |y_n^{(m)} - c_n^{(m)}(s', s)|^2$$

$$\triangleq u_n \frac{L_a(u_n)}{2} + \sum_{m=1}^{n_c} c_n^{(m)}(s', s) \frac{y_n^{(m)}}{\sigma^2}$$

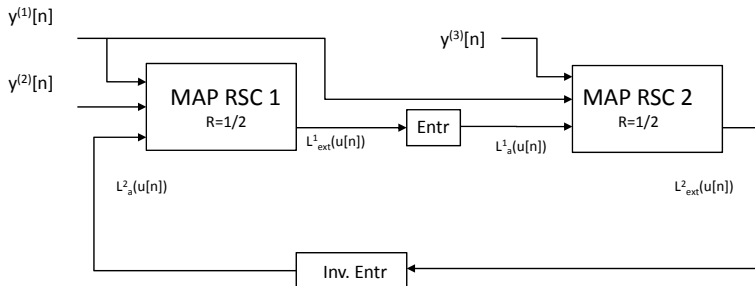
$$\triangleq u_n \frac{L_a(u_n)}{2} + \sum_{m=1}^{n_c} c_n^{(m)}(s', s) \frac{L_c(y_n^{(m)})}{2}$$

$$\tilde{\gamma}_n^e(s', s) = \sum_{m=2}^{n_c} c_n^{(m)}(s', s) \frac{L_c(y_n^{(m)})}{2}$$

$$L(u_n) = \frac{2}{\sigma^2} y_n^{(1)} + L_a(u_n) + L_{\text{ext}}(u_n)$$

# Turbo-codes parallèles

## Décodeur 1/2



- Les décodeurs MAP des deux codes constituant vont s'échanger une information extrinsèque de manière itérative relative aux bits d'information communs.

# Turbo-codes parallèles

## Décodeur 2/2

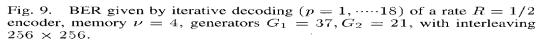
- Critères MAP au deux décodeurs à l'itération ( $\ell$ ) :

$$\begin{aligned}
 L_{RSC_1}^{(\ell)}(u_n) &= \frac{2}{\sigma^2} y_n^{(1)} + L_{a,1}^{(\ell-1)}(u_n) + L_{e,1}^{(\ell)}(u_n) \\
 &= \frac{2}{\sigma^2} y_n^{(1)} + L_{e,2}^{(\ell-1)}(u_{\pi^{-1}(n)}) + L_{e,1}^{(\ell)}(u_n) \quad (5)
 \end{aligned}$$

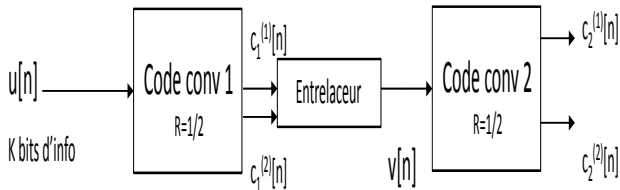
$$L_{RSC_2}^{(\ell)}(u_{\pi(n)}) = \frac{2}{\sigma^2} \pi(y_{\pi(n)}^{(1)}) + L_{e,1}^{(\ell-1)}(u_{\pi(n)}) + L_{e,2}^{(\ell)}(u_{\pi(n)}) \quad (6)$$

avec  $\pi(\cdot)$  et  $\pi^{-1}$  représentent les opérations d'entrelacement et de désentrelacement

## Performances

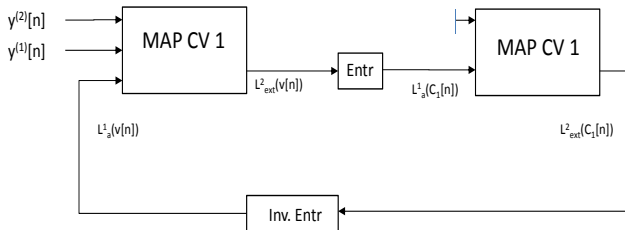


## Structure du codeur



- $K$  bits d'information codés avec codeur 1 (code externe),
- les bits codés sont entrelacés et puis codés par le codeur 2 (code interne),
- les deux décodeurs associés différents du cas parallèle,
- seul codeur 2 est récursif pour gain d'entrelacement

## Structure du décodeur 1/2



- Idem au décodage d'un bloc du cas parallèle.

# Turbo-codes série

## Structure du décodeur 2/2

### Décodeur code 2

- Critère MAP modifié :

$$L_1(c_n^{(m)}) = \max_{\mathcal{C}^+}^* (\tilde{\alpha}_{n-1}(s') + \tilde{\gamma}_n(s', s) + \tilde{\beta}_n(s)) - \max_{\mathcal{C}^-}^* (\tilde{\alpha}_{n-1}(s') + \tilde{\gamma}_n(s', s) + \tilde{\beta}_n(s)) \quad (7)$$

$$= L_2^e(c_n^{(m)}) + L_1^e(c_n^{(m)}) \quad (8)$$

$$\tilde{\gamma}_n(s', s) = \sum_{m=1}^{n_c} c_n^{(m)}(s', s) \frac{L_2^e(c_n^{(m)}(s', s))}{2} \quad (9)$$

$$\mathcal{C}^+ = \{(s', s) \text{ où } (s_{n-1} = s') \mapsto (s_n = s) | c_n^{(m)} = +1\}$$

$$\mathcal{C}^- = \{(s', s) \text{ où } (s_{n-1} = s') \mapsto (s_n = s) | c_n^{(m)} = -1\}$$

# Plan

- 1 Turbo-codes : concaténations parallèle et série
- 2 **Analyse EXIT charts**
  - Présentation générale
  - Modélisations
  - Concaténation parallèle
- 3 Systèmes à décodage itératif avec concaténation en série

]





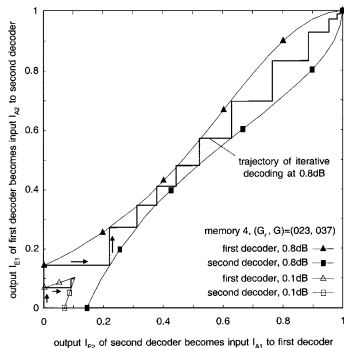
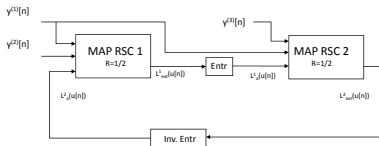
# Plan

- 2 Analyse EXIT charts
  - Présentation générale
  - Modélisations
  - Concaténation parallèle

# Analyse EXIT charts

## Motivations

- Analyser le comportement d'un turbo-récepteur pour pouvoir prédire les performances en fonction du rapport signal à bruit.



# Analyse EXIT charts

## Idée :

- Pouvoir analyser le comportement entrée-sortie de chaque bloc SISO indépendamment : on cherche à déterminer le comportement moyen en sortie par rapport au comportement moyen en entrée suivant une figure de mérite donnée,
- Ce comportement en entrée est fonction de l'info. extrinsèque entrée et des probabilités de transitions du canal : le canal est connu mais nécessité de modéliser le comportement statistique des informations extrinsèques,
- La figure de mérite en entrée sera associée au info. a priori entrantes (extrinsèques des autres blocs),
- de même, la figure de mérite sortante sera associée aux info extrinsèques fournies par le bloc SISO,
- pour simplifier l'analyse, utiliser une mesure de performance mono-dimensionnelle (scalaire) pour caractériser le processus de décodage itératif

# Analyse EXIT charts

## EXtrinsic Information Transfer Charts :

- Information mutuelle entre un log-rapport de vraisemblance  $L$  et le bit émis  $C$  (considérés comme variables aléatoires) :

$$I(L; C) = \frac{1}{2} \sum_{c=\pm 1} \int_{\mathbb{R}} f(l|c) \log_2 \left( \frac{2f(l|c)}{f(l|c=+1)+f(l|c=-1)} \right) dl$$

- Hypothèses :**

- Modulation BPSK, entrelacement parfait,
- $C$  variable binaire de loi uniforme,
- Symétrie de la densité :  $f(l|C = -1) = f(-l|C = +1)$ ,
- Consistance de la densité (symétrie exponentielle) :  
 $f(-l|C = c) = f(l|C = c)e^{-c \cdot l}$

$$\begin{aligned} I(L; C) &= 1 - \mathbb{E}_{L|C=+1}(\log_2(1 + e^{-l})) \\ &= 1 - \int_{\mathbb{R}} f(l|c = +1) \log_2(1 + e^{-l}) dv \end{aligned}$$

# Analyse EXIT charts

## Estimation

- Utilisation du mot de code nul :

$$I(L; C) \approx 1 - \frac{1}{N} \sum_n \log_2 (1 + e^{-l_n})$$

- Mot de codes indifférents et connus :

$$I(L; C) \approx 1 - \frac{1}{N} \sum_n \log_2 (1 + e^{-c_n l_n})$$

- Mot de codes indifférents et inconnus :

$$I(L; C) \approx 1 - \frac{1}{N} \sum_n \mathcal{H}_b \left( \frac{e^{+|l_n|/2}}{e^{+|l_n|/2} + e^{-|l_n|/2}} \right)$$

$$\mathcal{H}_b(p) = -p \log_2 (p) - (1 - p) \log_2 (1 - p)$$

# Analyse EXIT charts

## Information a priori et extrinsèque

- **Modèle Gaussien des messages a priori :**

$$l = m.c + b, \quad b \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 = 2m), \quad c = \pm 1$$

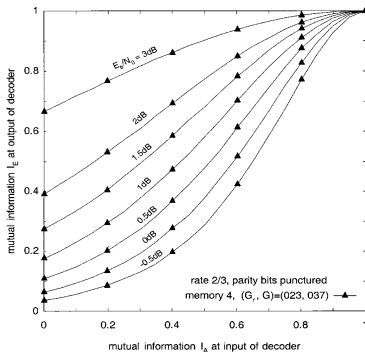
$$I(L; C) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(l - \sigma^2/2)^2}{2\sigma^2}\right) \log_2(1 + e^{-l}) dl$$

- **Information mutuelle extrinsèque :** Elle est évaluée **sans approximation Gaussienne** à l'aide des histogrammes des densités en sortie ou à l'aide des estimateurs précédents.

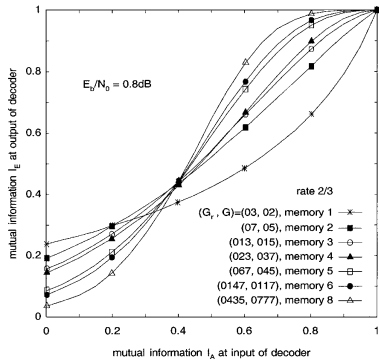


# Analyse EXIT charts

## Concaténation parallèle 1/3



Influence de  $E_b/N_0$

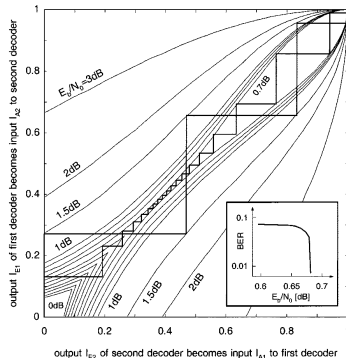
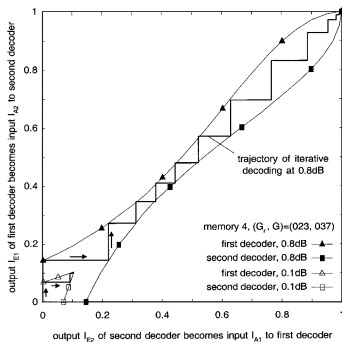


influence de la mémoire

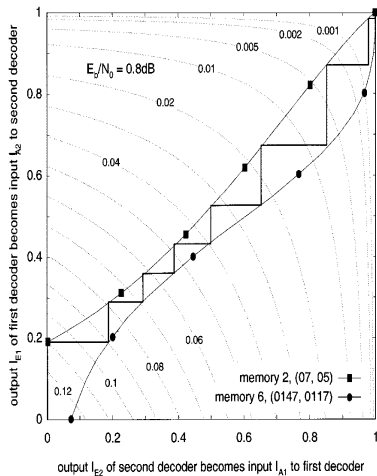


# Analyse EXIT charts

## Concaténation parallèle 2/3





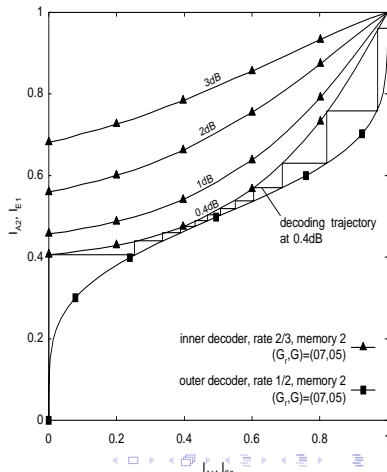
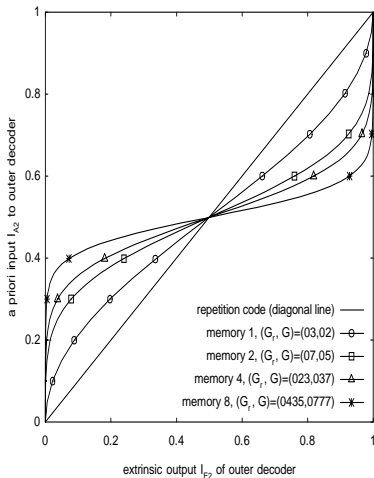


$$P_b \approx \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{8R\frac{E_b}{N_0} + J^{-1}(I_A)^2 + J^{-1}(I_E)^2}\right)$$



# Analyse EXIT charts

## Concaténation série



# Plan

- 1 Turbo-codes : concaténations parallèle et série
- 2 Analyse EXIT charts
- 3 **Systèmes à décodage itératif avec concaténation en série**
  - Modulations codées à bits entrelacés
  - Démodulation et décodage itératifs : analyse EXIT
  - Turbo-égalisation
  - Exemples de codes concaténés en série

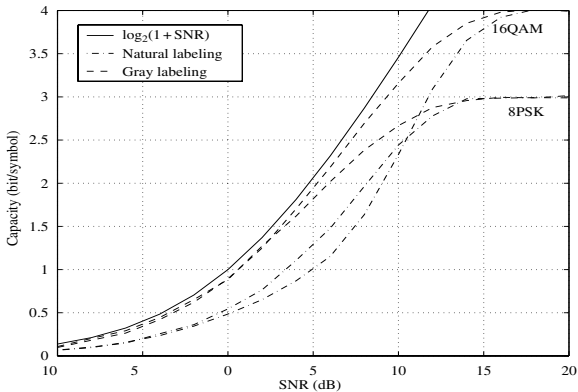
# Plan

- 3 Systèmes à décodage itératif avec concaténation en série
  - Modulations codées à bits entrelacés
  - Démodulation et décodage itératifs : analyse EXIT
  - Turbo-égalisation
  - Exemples de codes concaténés en série

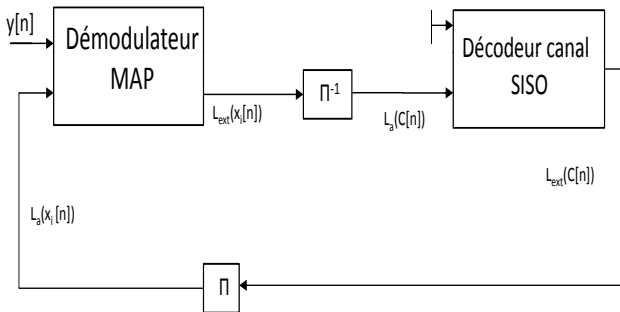




# Modulations codées à bits entrelacés



# Démodulation et décodage itératifs



# Démodulateur MAP

- Les vecteurs binaires  $x[n] = [x_1[n] \cdots x_m[n]]$  sont “mappés” sur des symboles  $s[n] \in \mathcal{S}$ .
- Log-rapport de vraisemblance bit :

$$\begin{aligned}
 L(x_i[n]) &= \log \left( \frac{\sum_{s[n] \in \mathcal{S}_0^i} \exp \left( -\frac{\|y[n] - s[n]\|^2}{2\sigma^2} \right) \prod_m \pi(x_m[n])}{\sum_{s[n] \in \mathcal{S}_1^i} \exp \left( -\frac{\|y[n] - s[n]\|^2}{2\sigma^2} \right) \prod_m \pi(x_m[n])} \right) \\
 &= L_a(x_i[n]) + L_e(x_i[n])
 \end{aligned}$$

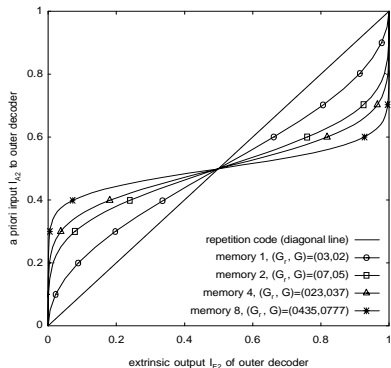
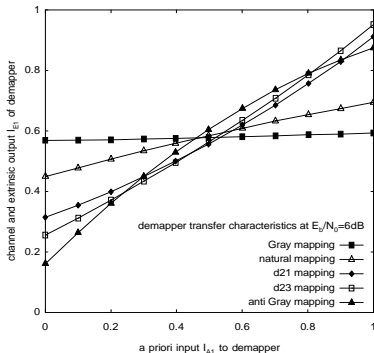
- Log-rapport de vraisemblance extrinsèque bit :

$$L(x_i[n]) = \log \left( \frac{\sum_{s[n] \in \mathcal{S}_0^i} \exp \left( -\frac{\|y[n] - s[n]\|^2}{2\sigma^2} \right) \prod_{m; m \neq i} \pi(x_m[n])}{\sum_{s[n] \in \mathcal{S}_1^i} \exp \left( -\frac{\|y[n] - s[n]\|^2}{2\sigma^2} \right) \prod_{m; m \neq i} \pi(x_m[n])} \right)$$

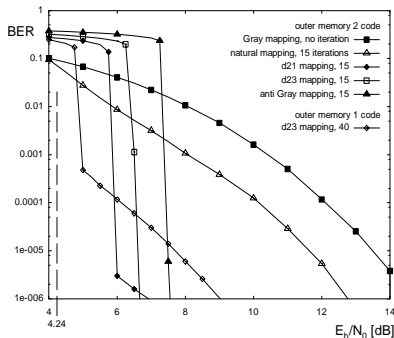
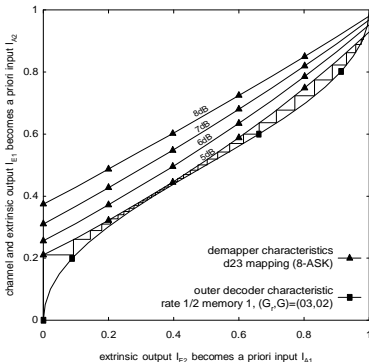


◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

# Démodulation et décodage itératifs : analyse EXITs



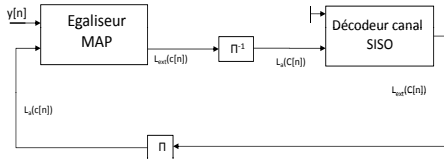
# Démodulation et décodage itératifs : analyse EXIT



⇒ Pas de gain en décodage itératif pour le mapping de Gray



## Principe générale



## Turbo-codes

## EXIT charts

## Turbo-X

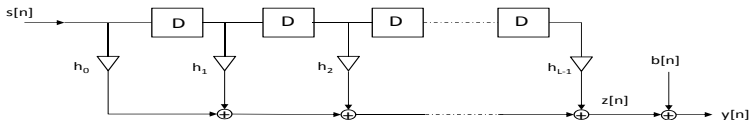
A 5x5 grid of circles. The circles are arranged in 5 rows and 5 columns. The first row has 2 circles, the second row has 4 circles, the third row has 4 circles, the fourth row has 5 circles, and the fifth row has 3 circles. The circle at the intersection of the 4th row and 2nd column is filled black.

# Décodage MAP

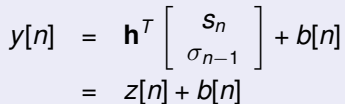
Modèle discret équivalent bande de base

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{k \in \mathbb{N}} s_k h_{n-k} + b[n] \\
 &= \sum_{k=0}^{L_h-1} h[k] s[n-k] + b[n] \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= h_0 s[n] + \underbrace{\sum_{k=1}^{L_h-1} h[k] s[n-k]}_{IES} + b[n] \quad (11)
 \end{aligned}$$



## Modèle convolutif et Représentation d'état



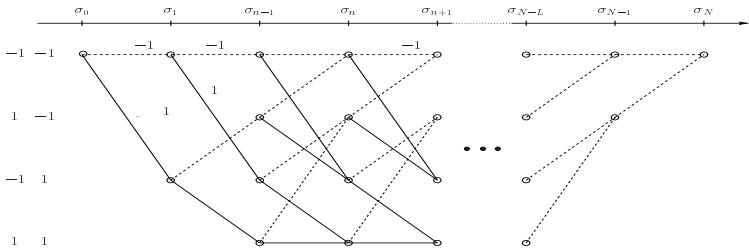


## Représentation en treillis

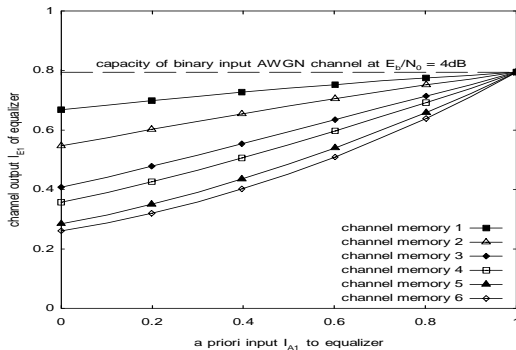
- $$\sigma_n = F_1(\sigma_{n-1}, \mathbf{s}_n)$$

- $$z_n = \sum_{k=0}^{L-1} h_k s_{n-k}.$$

$$z_n = F_2(\sigma_{n-1}, \mathbf{s}_n) = F_3(\sigma_{n-1}, \sigma_n)$$



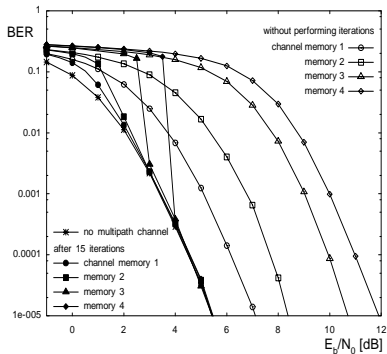
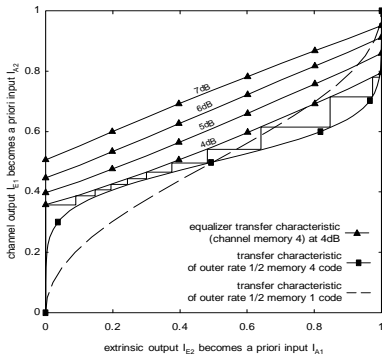
## Analyse EXIT d'un canal



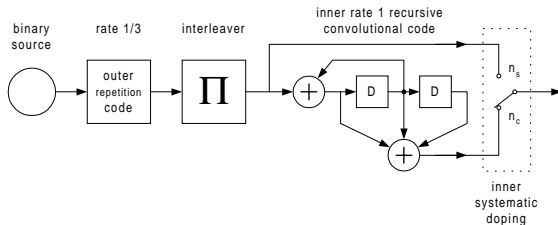


# Turbo-égalisation

## Analyse EXIT en turbo-égalisation

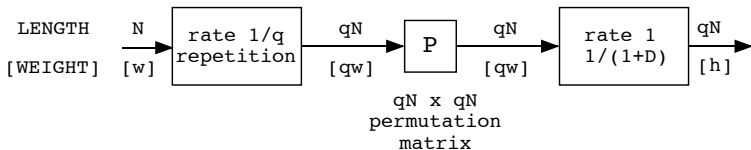


## Des turbo-codes aux codes LDPC 1/2



## Structure RA like proposée par S. ten Brink'00

## Des turbo-codes aux codes LDPC 2/2



## Codes RA originaux proposés par Divsalar, Allerton 98



# Bibliographie

- A. Glavieux and all, *Channel coding in communication networks : from theory to turbocodes*, Volume 3 de Digital Signal Image Processing Series, John Wiley Sons, 2007.
- Claude Berrou and all, *Codes and Turbo Codes*, Collection IRIS Series, IRIS International, Springer, 2010.
- W.E. Ryan, Shu Lin, *Channel codes : classical and modern*, Cambridge University Press, 2009.
- Shu Lin, Daniel J. Costello, *Error control coding : fundamentals and applications*, Édition 2, Pearson-Prentice Hall, 2004.
- T. Richardson, R. Urbanke, *Modern coding theory*, Cambridge University Press, 2008.