Практическое задание №5

5.1.

Вектор – это частный случай матрицы 1xN и Nx1. Повторите материал для векторов, уделяя особое внимание умножению A·B.

Вычислите, по возможности не используя программирование: (5E)–1, где E – единичная матрица размера 5x5.

a = [0 1 2 3 4]

b = [4 3 2 1 0]

a · 2 = [0 2 4 6 8]

a + b = [0 1 2 3 4] + [4 3 2 1 0] = [4 4 4 4 4]

a − b = [0 1 2 3 4] − [4 3 2 1 0] = [-4 -2 0 2 4]

a · b = [] - такие матрицы невозможно перемножать, т.к. количество строк А не равно количеству строк В.

|1 0 0 0 0|-1 |5 0 0 0 0|-1 |0.2 0 0 0 0|
|0 1 0 0 0| |0 5 0 0 0| |0 0.2 0 0 0|
E = 5 * |0 0 1 0 0| = |0 0 5 0 0| = |0 0 0.2 0 0|
|0 0 0 1 0| |0 0 0 5 0| |0 0 0 0.2 0|
|0 0 0 0 1| |0 0 0 0 5| |0 0 0 0 0.2|

5.2.

Вычислите определитель:

|1 2 3|
det A = |4 0 6| = 1 |0 6| - 2 |4 6| + 3 |4 0| = 0
|7 8 9| |8 9| |7 9| |7 9|

5.3.

1. Вычислите матрицу, обратную данной:

|1 2 3|
A = |4 0 6|
|7 8 9|

Находим определитель:

|1 2 3|
A = |4 0 6| = (1 · 0 · 9) + (2 · 7 · 6) + (4 · 8 · 3) –(7 · 0 · 3) –(4 · 2 · 9) –(8 · 6 · 1) =0 +84 +96 -0 -72 - 48=60
|7 8 9|

Следовательно матрица А не особенная.

Матрица не сингулярная и не вырожденная (определитель не равен нулю)

Найдем транспонированную матрицу:

|1 4 7|
$A^т$ = |2 0 8|
|3 6 9|

Вычисляем элементы союзной матрицы как алгебраические дополнения матрицы, транспонированной относительно матрицы А:

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -48$$
$$a_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 6$$
$$a_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12$$

$$a_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 6$$
$$a_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -12$$
$$a_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$a_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 32$$
$$a_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 6$$
$$a_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

Следовательно матрица Ac союзная матрица А имеет вид:

$$Ac = \begin{vmatrix} -48 & 6 & 12 \\ 6 & -12 & 6 \\ 32 & 6 & -8 \end{vmatrix}$$

Находим матрицу, обратную матрице А:

$$A^{-1} = (1/102) * \begin{vmatrix} -48 & 6 & 12 \\ 6 & -12 & 6 \\ 32 & 6 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.8 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & -0.2 & 0.1 \\ 0.5(3) & 0.1 & -0.1(3) \end{vmatrix}$$

Проверка:

$$A * A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} -0.8 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & -0.2 & 0.1 \\ 0.5(3) & 0.1 & -0.1(3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Приведите пример матрицы 4х4, ранг которой равен 1.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Если все миноры второго порядка равны 0, то ранг матрицы равен 1.

5.4.

Вычислите скалярное произведение двух векторов:

(1, 5) и (2, 8)

$I = 1 \cdot 2 + 5 \cdot 8 = 48$

5.5

Вычислите смешанное произведение трех векторов:

(1, 5, 0), (2, 8, 7) и (7, 1.5, 3)

$$(a \times b) * c = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \\ 7 & 1.5 & 3 \end{vmatrix} = 3 * \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 3 * ((1 * 8) - (2 * 5)) = -6$$

Ответ: V = (1/3) * a * b * c = -6/3 = -2

Практическое задание №6

1. Решите линейную систему:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{vmatrix} -9.2 \\ 0.9 \\ 6.4(6) \end{vmatrix}$$

см. приложенный код

2. Найдите псевдорешение:

x + 2y – z = 1

3x – 4y = 7

8x – 5y + 2z = 12

2x – 5z = 7

11x +4y – 7z = 15

см. приложенный код

3. Сколько решений имеет линейная система:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Если ноль – то измените вектор правой части так, чтобы система стала совместной, и решите ее.

см. приложенный код
Данная линейная система не имеет решения.

|1 2 3| |12|
|4 0 6| * X = | 2| - данная линейная система имеет решения
|7 8 9| | 1|

ранг (3, 3)

     |-9.2 |
X = |0.9 |
     |6.4(6)|

4. Вычислите LU-разложение матрицы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 16 & 21 \\ 4 & 28 & 73 \end{bmatrix}$$

После этого придумайте вектор правых частей и решите полученную линейную систему трех уравнений с данной матрицей.

см. приложенный код

5. Найдите нормальное псевдорешение недоопределенной системы:

$x + 2y – z = 1$

$8x – 5y + 2z = 12$

Для этого определите функцию Q(x,y,z), равную норме решения, и найдите ее минимум.

см. приложенный код

6. Найдите одно из псевдорешений вырожденной системы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Попробуйте также отыскать и нормальное псевдорешение.
см. приложенный код