Практические задания к уроку 4

Инструкции к сдаче:
Присылайте фото листочков с вашими решениями или просто ответы в текстовом файле .doc или .txt (1-3 задание).
Прикладывайте ссылку на ваш репозиторий с кодом (4 задание). Для написания кода используйте привычную среду программирования, желательно, Jupiter Notebook

Тема “Аналитическая геометрия” и “Графики на плоскости”

1. Задание (на листочке)
Решите уравнение
$\sin(x)/x=0$.
ОДЗ $x \neq 0$
При $\sin \pi = 0$; $\sin 2\pi = 0$
Решение: $x = \pi$; $x = 2\pi$

2. Задание (на листочке)
Даны три прямые $y = k1 \cdot x + b1$, $y = k2 \cdot x + b2$, $y = k3 \cdot x + b3$. Как узнать, пересекаются они в одной точке или нет?
Если коэффициент k не равны, то прямые пересекаются
$k1 \neq k2$, $k2 \neq k3$, $k1 \neq k3$
Коэффициенты b совпадают
$b1 = b2 = b3$

3. Задание (в программе или на листочке)
На листе тетради «в линейку» (расстояние между линиями равно a) лежит игла (длиной b). Координаты нижней точки иглы (x,y), игла лежит под углом alfa. Пересекает ли игла линию или нет?

Игла не пересекает линии тетради при условии:
$\Delta x = b \cos alfa > a$;
$\Delta y = b \sin alfa > a$;
$a \cdot n < x$;
$x + \Delta x < a \cdot n+1$;
$a \cdot m < y$;
$y + \Delta y < a \cdot m+1$;
где n, m – любое целое число

4. Задание (задание делать по желанию)**

Решите аналитически и потом численно (в программе) уравнение, зависящее от параметра а:

$\sin(a \cdot x) = 0$

при условии: $0.01 < a < 0.02$, $100 < x < 500$.

Т.е. надо найти решение x как функцию параметра а - построить график $x = x(a)$.

Если численным методом не получается найти все ветви решения x(a), то отыщите хотя бы одну.

Аналитический метод.

$ax = 2\pi \cdot n \Rightarrow x = (2\pi \cdot n)/a$ или

$ax = 2\pi \cdot n - \pi \Rightarrow x = (2\pi \cdot n - \pi)/a$, где n — любое целое число.

$\sin(a \cdot ((2\pi \cdot 1)/a)) = 0$

при $a = 0.015$

$x1 = (2 \cdot 3.14159 \cdot 1 - 3.14159)/0.015 = 209,4395$

$x2 = (2 \cdot 3.14159 \cdot 1)/0.015 = 418,8790204$

$\sin(0,015 \cdot 209,4395) = \sin(3,14159) = 0$

$\sin(0,015 \cdot 418,8790204) = \sin(6,28318) = 0$

17.6.2. Найти угол α между прямыми $4y - 3x + 12 = 0$ и $7y + x - 14 = 0$.

$\text{tg } a = (A_2 \cdot B_1 - A_1 \cdot B_2)/(A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2) = (7 \cdot (-3) - 4 \cdot 1)/(4 \cdot 7 + (-3) \cdot 1) =$

$(-21 - 4)/(28 - 3) = -25/25 = -1$

$\cos a = (A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2)/((A_1^2 + B_1^2)^{1/2} \cdot (A_2^2 + B_2^2)^{1/2}) =$

$= (4 \cdot 7 + (-3) \cdot 1)/((4^2 + (-3)^2)^{1/2} \cdot (7^2 + 1^2)^{1/2}) = 0.7071068 = 2^{1/2} / 2$

$a = 7\pi / 4 = 315^o$

17.6.4. Найти угол α между прямыми $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{3}$.

$y1 = 1 \cdot 2^{1/2} + 0$

$y2 = 1 \cdot -(3^{1/2}) + 0$

$\text{tg } a = \text{tg}(a_1 - a_2) = (\text{tg } a_1 - \text{tg } a_2)/(1 + \text{tg } a_1 \cdot \text{tg } a_2) = (k_1 - k_2) / (1 + k_1 \cdot k_2) = (1 - 1) / (1 + 1 \cdot 1) = 0$

$a = 0^o$

Выяснить тип кривых второго порядка, порожденных следующими уравнениями.

17.6.5. $y^2 - 2x - 2y - 5 = 0.$
17.6.6. $3x^2 + 5y^2 + 12x - 30y + 42 = 0.$
17.6.7. $2x^2 - y^2 + 6y - 7 = 0.$
17.6.8. $2x^2 - 3y^2 - 28x - 42y - 55 = 0.$

$y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$ или

$0 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + 0 \cdot xy - 2 \cdot x - 2 \cdot y - 5 = 0$

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$

$a_{11} = 0,\ a_{22} = 1,\ a_{12} = 0,\ a_1 = -1,\ a_2 = -1,\ a_0 = -5.$

$\tau = a_{11} + a_{22} = 0 + 1 = 1;$

$$\delta = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a12 & a22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 0 - 0 = 0;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a11 & a12 & a1 \\ a12 & a22 & a2 \\ a1 & a2 & a0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= 0 - 0 - 1 \cdot (0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) = -1 \cdot (0 + 1) = -1 \cdot 1 = -1$

По таблице классификации линий 2-го порядка по инвариантам определяем, что уравнение задаёт **параболу**, так как $\delta=0$ и $\Delta\neq0$.

$3x^2 + 5y^2 + 12x - 30y + 42 = 0$

$3x^2 + 12x = 3(x^2 + 3x + 3/2 - 3/2) = 3(x^2 + 3x + 3/2) - 9/2 = 3(x - 3/2)^2 - 9/2$

$x = a;\ 3x = 2\,a\,b \Rightarrow\ b = 3/2$

$5y^2 - 30y = 5(y^2 - 6y + 3 - 3) = 5(y^2 - 6y + 3) - 15 = 5(y - 3)^2 - 15$

$y = a;\ 6y = 2\,a\,b \Rightarrow\ b = 3$

Собираем исходное уравнение:

$3(x - 3/2)^2 - 9/2 + 5(y - 3)^2 - 15 + 42 = 0$

$3(x - 3/2)^2 + 5(y - 3)^2 = -22\ ½\ |\ :\ -22\ ½$

$-(x – 3/2)^2/7.5 - (y – 3)^2/4.5 = 1$

Это **гипербола** с центром (-1.5; -3)

$2x^2 – 3y^2 – 28x – 42y – 55 = 0$ или

$2 \cdot x^2 - 3 \cdot y^2 + 0 \cdot xy - 28 \cdot x - 42 \cdot y - 55 = 0$

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$

$a_{11} = 2,\ a_{22} = -3,\ a_{12} = 0,\ a_1 = -14,\ a_2 = -21,\ a_0 = -55.$

$\tau = a_{11} + a_{22} = 2 - 3 = -1;$

$\delta = \begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a12 & a22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 0 \cdot 0 = -6 - 0 = -6;$

$\Delta = \begin{vmatrix} a11 & a12 & a1 \\ a12 & a22 & a2 \\ a1 & a2 & a0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -14 \\ 0 & -3 & -21 \\ -14 & -21 & -55 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -21 \\ -21 & -55 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -21 \\ -14 & -55 \end{vmatrix} + (-14) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -14 & -21 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot (-3 \cdot (-55) - (-21) \cdot (-21)) - 0 \cdot (0 \cdot (-55) - (-14) \cdot (-21)) - (-14) \cdot (0 \cdot (-21) - (-3) \cdot (-14)) =$

$= 2 \cdot (165 - 441) - (-14) \cdot (- 42) = -552 + 588 = 36$

По таблице классификации линий 2-го порядка по инвариантам определяем, что уравнение задаёт **гиперболу**, так как $\delta<0$ и $\Delta\neq0$.

$2x^2 – 28x =2(x^2 – 14x + 7 – 7) =2(x^2 – 14x + 7) – 14 =2(x – 7)^2 - 14$

$x = a;\ 14x = 2\,a\,b \Rightarrow b = 7$

$– 3y^2 – 42y = -3(y^2 + 14y + 7 - 7) = -3(y^2 + 14y + 7) + 42 = -3 (y – 7)^2 + 42$

$y = a;\ 14y = 2\,a\,b \Rightarrow b = 7$

Собираем исходное уравнение:

$2(x – 7)^2 - 14 - 3 (y – 7)^2 + 42 – 55 = 0$

$2(x – 7)^2 - 3 (y – 7)^2 = 27 \mid : 27$

$(x – 7)^2/13.5 - (y – 7)^2/9 = 1$

Это **гипербола** с центром (-7; -7)

Классификация линий 2-го порядка по инвариантам

<table>
<tr><th></th><th colspan="4">Признаки вида</th><th>Название линии</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Центральные линии</td><td rowspan="3">Эллиптический тип</td><td rowspan="3">$\delta > 0$
$\Updownarrow$
$(\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0)$</td><td rowspan="2">$\Delta \neq 0$</td><td>$\tau \cdot \Delta < 0$</td><td>Эллипс</td></tr>
<tr><td>$\tau \cdot \Delta > 0$</td><td>Эллипс мнимый</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta = 0$</td><td>Пара мнимых пересекающихся прямых</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Гиперболический тип</td><td rowspan="2">$\delta < 0$
$\Updownarrow$
$(\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0)$</td><td colspan="2">$\Delta \neq 0$</td><td>Гипербола</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta = 0$</td><td>Пара пересекающихся прямых</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Нецентральные линии</td><td rowspan="4">Параболический тип</td><td rowspan="4">$\delta = 0$
$\Updownarrow$
$(\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0)$</td><td colspan="2">$\Delta \neq 0$</td><td>Парабола</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta = 0$</td><td>$\kappa < 0$</td><td>Пара параллельных прямых</td></tr>
<tr><td>$\kappa > 0$</td><td>Пара мнимых параллельных прямых</td></tr>
<tr><td>$\kappa = 0$</td><td>Пара совпадающих прямых</td></tr>
</table>