Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский Томский политехнический Университет»



Институт

ИЯТШ

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

**Лабораторная работа №3**

Случайные процессы. Процесс Винера. Стохастическое интегрирование

по дисциплине:

**Теория случайных процессов**

**2 вариант**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Выполнил:** |  | | | | |
| студент группы | 0В01 |  | Белясов А.А. |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
| **Проверил:** | Крицкий О.Л. | | | | |
| преподаватель |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Томск – 2023

**Теоретическая справка**

Винеровский процесс является наиболее простым и изученным среди случайных процессов. Его широкие применения в экономической теории, в теории фракталов, в финансовой математике обусловливают повышенный теоретический интерес к его свойствам. В основе винеровского процесса лежат так называемые марковские процессы, когда вероятность занять системой определенное местоположение в заданном диапазоне в будущий момент времени однозначно определяется только текущими ее координатами и не зависит от прошлых состояний. В соответствии с этим допущением можно получить следующее определение:

Винеровским процессом называют случайный процесс, для которого выполнены следующие аксиомы:

1) для любого разбиения временного интервала [0, *T*] точками приращения независимы;

2) пусть . Тогда случайная величина распределена нормально с нулевым средним и дисперсией ;

3) реализации непрерывны по *t* на *T*

**Замечание.**Определение винеровского процесса справедливо с точностью до произвольной случайной величины ϕ, которая играет роль константы, то есть

*Метод трапеций*

Пусть последовательные ординаты, тогда получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

где . Выражение во второй квадратной скобке равно .

Заменим функцию *f*(*x*) на ее многочлен Лагранжа первой степени на интервале [*xi*; *xi*+1]:

.

Тогда на интервале [*xi*; *xi*+1] искомый интеграл запишется так:

,

откуда окончательно имеем:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

Суммируя интегралы по каждому промежутку и учитывая, что внутренние точки будут участвовать в сумме дважды, получаем формулу трапеций, записанную выше.

*Метод Монте-Карло*

Пусть функция  непрерывна в ограниченной замкнутой области S. Нам требуется вычислить m-кратный определенный интеграл .

Преобразуем данный интеграл так, чтобы новая область интегрирования полностью содержалась внутри m-мерного единичного куба, сделаем замену переменных , где

Выберем m равномерно распределенных случайных чисел на отрезке . Выбрав достаточно большое число точек N, приближенно можно положить: , отсюда искомый интеграл выражается формулой

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

Значение при данном методе определяется из соотношения: .

Рассмотрим интеграл вида, разобьем интервал интегрирования , тогда согласно методу Монте-Карло, можно записать:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

где .

*Метод Рунге-Кутта четвертого порядка*

Пусть на задана равномерная сетка с шагом h. Проинтегрируем уравнение (1) на промежутке , получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Так, если заменить интеграл в (5) формулой левых прямоугольников, то получается классический метод Эйлера. Тем не менее существует общий способ, предложенный Карлом Рунге и Мартином Кутта, построения одношаговых вычислительных правил.

Рассмотрим его. Пусть:

Тогда (5) примет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

Для вычисления интеграла в их методе вводится новая переменная , чтобы перейти к промежутку интегрирования . Выполнив данную замену в интеграле, получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

Зададим три группы параметров:

С помощью и определим следующие величины:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

Величины можно рассматривать как приближенные значения подынтегральной функции умноженные на h, если соответствующим образом подобрать параметр .

При помощи набора параметров составляется линейная комбинация , которая в данном случае будет иметь смысл квадратурной суммы:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

Численный метод общего вида (9) для решения задачи Коши в действительности построен, но в зависимости от порядка точности решения нужно выбирать параметры .

Рассмотрим один из приемов подбора данных параметров. подбираются так, чтобы разложение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

по степеням совпадали до членов с наиболее высокими степенями .

Подобрав параметры, получим следующую итерационную формулу для задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с начальными условиями:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

где , , , вычисляются следующим образом:

.

Формула (11) является одной из самых распространенных формул Рунге-Кутта, используемых в практических расчетах.

Уравнение вида принято называть линейным однородным уравнением. Для данного уравнения имеем:

,

где ,

Отсюда, . Следовательно, для метода Рунге-Кутта четвертого порядка расчетные формулы примут вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

Задание.

1. Сгенерировать 103 значений стандартной случайной величины.
2. Построить график винеровского процесса для моментов *t* из интервала 0*≤t≤*4 года с шагом *h*=4x10-3.
3. Построить и изобразить реализацию винеровского процесса как случайное блуждание: пусть *xk* – СВ, имеющая биномиальное распределение и принимающая значения ± 1 с одинаковыми вероятностями *p* = 0.5 и *q* = 0.5. Пусть *N* – число таких случайных величин. Тогда  для некоторого момента времени *t*. Для отрисовки использовать *N* = 104­­­ величин, задействовать функцию pause в Matlab, чтобы график винеровского процесса выводился в реальном времени.
4. В соответствии с номером варианта сгенерировать процесс ценообразования рискового актива по формуле (**не забудьте перевести волатильность в исходном задании в доли**)

.

Интегралы вычислять численно методом трапеций и Монте-Карло для первого и второго интегралов соответственно с погрешностью не ниже 10-2 и вероятностью не ниже 0,95. Последовательно положить моменты времени равными *t*=0,5;1;…; 4 года.

1. Сравнить полученные данные для *St* c данными для котировок облигаций в те же моменты времени.
2. Решить методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности дифференциальное уравнение . Сравнить с результатом, найденным в п.3 в те же моменты времени *t*.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № варианта | *S*0 | µ*t*, доли | σ*t*, % |
| 2 | 15 | 0.08 *t* | 2*t*+1 |

Табл.1 Задание

Практическая часть:

Сгенерируем 103 значений стандартной случайной величины с помощью функции *normrnd()*.

Построим график винеровского процесса для моментов *t* из интервала 0 *≤ t ≤* 4 года с шагом *h*=4×10-3, рис. 1.

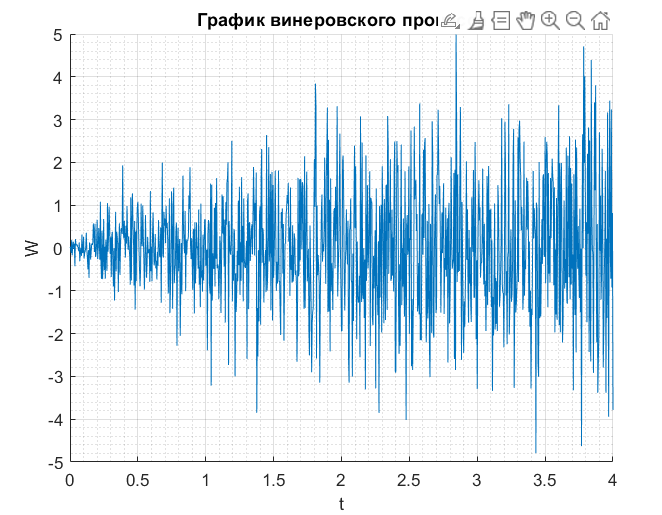


Рисунок 1. График винеровского процесса

Построим и изобразим реализацию винеровского процесса как случайное блуждание: пусть *xk* – СВ, имеющая биномиальное распределение и принимающая значения ± 1 с одинаковыми вероятностями *p* = 0.5 и *q* = 0.5. Пусть *N* – число таких случайных величин. Тогда для некоторого момента времени *t*. Для отрисовки используем *N* = 104­­­ величин, задействуем функцию *pause()* в Matlab, чтобы график винеровского процесса выводился в реальном времени. Результат выполнения данного фрагмента представлен на рис. 2.



Рисунок 2. График винеровского процесса, как случайное блуждание

1. Сгенерируем процесс ценообразования рискового актива по формуле, при этом переведем волатильность в этом задании в доли.
2. .

Интегралы вычислим численно методом трапеций и Монте-Карло для первого и второго интегралов соответственно с погрешностью не ниже 10-2 и вероятностью не ниже 0,95. Последовательно положить моменты времени равными *t* = 0,5; 1; …; 4 года.

Следовательно, . Величина в формуле (4) реализуется как *normrnd(0,1,1).* Результат вычислений представлен в таблице 2.

Ценообразование рискового актива

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|  | 15 | 15.04 | 15.40 | 17.06 | 17.09 | 18.26 | 21.06 | 22.02 | 22.47 |

Сравним полученные данные для *St* c данными для котировок облигаций в те же моменты времени. Результат вычисления представлен в таблице 3.

Таблица 3

Данные котировок облигаций

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|  | 15 | 15.15 | 15.61 | 16.41 | 17.60 | 19.26 | 21.49 | 24.48 | 28.44 |

Решим методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности дифференциальное уравнение . Сравним с результатом, найденным в пункте 4 в те же моменты времени *t*. Результаты представлены в таблице 4.

Таблица 4

Решение дифференциального уравнения

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|  | 15 | 15.38 | 16.01 | 16.95 | 18.25 | 20.57 | 22.12 | 25.87 | 26.53 |

Ниже приведен график сравнения результатов, полученных в заданиях 4-6.

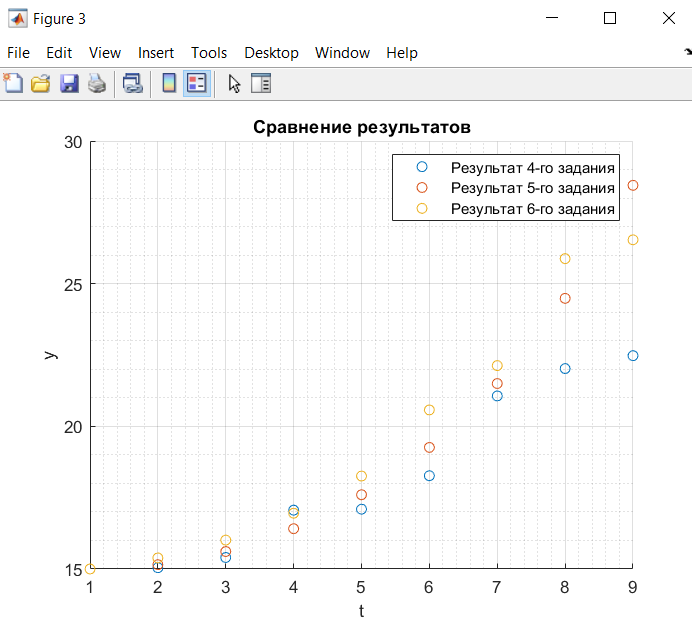


Рисунок 3. График сравнения результатов

**Вывод:**

В ходе выполнения лабораторной работы были выполнены следующие задачи:

1. Сгенерировано 103 значений стандартной случайной величины.
2. Построен график винеровского процесса для моментов *t* из интервала 0*≤t≤*4 года с шагом *h*=4×10-3.
3. Построена реализация винеровского процесса как случайное блуждание.
4. Сгенерирован процесс ценообразования рискового актива по формуле:

.

При вычислении интегралов были использованы численные методы: метод трапеций (для первого интеграла) и метод Монте-Карло (второго интеграла) с погрешностью не ниже 10-2 и вероятностью не ниже 0,95.

1. Произведено сравнение полученные данные для *St* c данными для котировок облигаций в те же моменты времени. Для вычисления этого интеграла использовался метода трапеций.
2. Решено методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности дифференциальное уравнение . Также произведено сравнение с результатом, найденным в п.4 в те же моменты времени *t*.

Как можно наблюдать на рис. 3 результаты, полученные в заданиях 4, 5, 6 практически совпадают, но есть и значимые различия, причем при росте t погрешность растет, скорее всего это связано со случайностью при реализации численных методов.

**Приложение А**

**Main**

clc, clearvars, close all, format compact

% randn('state', 88);

h = 4\*10^(-3);

n = 10^3;

N = 10^4;

S0 = 15;

a = 0; b = 4;

eps = 0.01;

delta = 0.05;t = 0:h:4;

p = 0.5; q = 0.5;

f\_1 = @(x) 0.08 .\* x - (2^x + 1).^2 / (100^2 \* 2);

f\_2 = @(x) (2 ^ x + 1) / 100;

f\_3 = @(x) 0.08 .\* x;

f\_4 = @(x, S, h) 0.08 .\* x .\* S .\* h + (2 ^ x + 1) / 100 .\* S \* (sqrt(h)\*normrnd(0, 1, 1));

r = normrnd(0, sqrt(t), 1, n+1);

create\_plot(t,r);

model\_winner\_process(N);

S = integrate\_ex(f\_1, f\_2, a, b, eps, delta);

B = integrate\_ex\_5(f\_3, a, b);

res = dif\_Runge\_Kutta\_method(f\_4, a, b);

test\_res = zeros(1, 9);

test\_res(1) = res(1);

for i = 1:8

test\_res(i+1) = res(i\*12500);

end

error = compare\_result(S, B, test\_res);

**model\_winner\_process**

function model\_winner\_process(n)

x = randi([0 1], 1, n) \* 2 - 1;

W = zeros(1, n);

figure('Color', 'w');

for i = 1:n

W(i) = sum(x(1, 1:i)) / sqrt(n);

end

plot(W)

grid on

grid minor

title('График моделирования винеровского процесса')

xlabel('t')

ylabel('W')

end

**integrate\_ex\_5**

function B = integrate\_ex\_5(f, a, b)

right\_board = a:0.5:b;

B = zeros(1, 9);

for i = 1:9

B(i) = 15 \* exp(int\_trapez\_method(f, a, right\_board(i), 2));

end

end

**integrate\_ex**

function S = integrate\_ex(f\_1, f\_2, a, b, eps, delta)

N = 1 / (4 \* eps ^ 2 \* delta);

right\_board = a:0.5:b;

S = zeros(1, 9);

S(1) = 15;

for i = 1:8

res\_1 = int\_trapez\_method(f\_1, a, right\_board(i+1), 2);

res\_2 = int\_Monte\_Carlo\_method(f\_2, i, right\_board(i+1), N);

S(i+1) = S(1) \* exp(res\_1 + res\_2);

end

end

**int\_trapez\_method**

function ans = int\_trapez\_method(f, a, b, n)

h = (b - a) / n;

sum = f(a) + f(b);

x = a;

for i = 1:n-1

x = x + h;

sum = sum + 2 \* f(x);

end

ans = h / 2 \* sum;

end

**int\_Monte\_Carlo\_method**

function ans = int\_Monte\_Carlo\_method(f, j, t, N)

under = 0;

n = N \* j / 8;

for i = 1:n

under = under + f(rand(1) \* t);

end

ans = sqrt(t) \* normrnd(0, 1, 1) \* under / n;

end

**dif\_Runge\_Kutta\_method**

function S = dif\_Runge\_Kutta\_method(f, a, b)

t = linspace(a, b, 100000);

h = t(2)-t(1);

S = zeros(1, length(t));

S(1) = 15;

for i = 1:length(t)-1

k1 = f(t(i), S(i), h);

k2 = f(t(i) + 0.5 \* h, (S(i) + 0.5 \* h \* k1), h);

k3 = f((t(i) + 0.5 \* h), (S(i) + 0.5 \* k2), h);

k4 = f((t(i) + h), (S(i) + k3 \* h), h);

S(i+1) = S(i) + 1/6 \* (k1 + 2 \* k2 + 2 \* k3 + k4);

end

end

**create\_plot**

function create\_plot(t, r)

figure('Color', 'w')

hold on

plot(t, r)

hold off

grid on

grid minor

title('График винеровского процесса')

xlabel('t')

ylabel('W')

end

**compare\_result**

function error = compare\_result(data\_1, data\_2, data\_3)

t = 1:9;

figure('Color', 'w')

scatter(t, data\_1)

hold on

scatter(t, data\_2)

scatter(t, data\_3)

hold off

grid on

grid minor

title('Сравнение результатов')

legend('Результат 4-го задания','Результат 5-го задания', 'Результат 6-го задания')

xlabel('t')

ylabel('y')

for i = 1:9

error(i) = abs(data\_1(i) - data\_2(i)) / data\_1(i) \* 100;

end

end