

تمرین شماره 2

علیرضا حسینی

شماره دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۱۴۲

جداسازی کور منابع

دکتر اخوان

زمستان 1401

فهرست مطالب

4	۱-۱- بخش اول.....
5	1-1-2- الف.....
6	1-1-3- ب.....
7	1-1-4- ج.....
8	1-1-5- د.....
9	1-1-6- ه.....
10	1-1-7- و.....
11	۱-۲- بخش دوم.....
11	1-2-1- الف.....
13	1-2-2- ب و ج.....
16	1-2-3- د و ه.....

فهرست اشکال

- شکل (۱-۱) کد متلب تشکیل ماتریس مشاهدات..... 4
- شکل (۲-۱) پراکندگی مشاهدات در 3 بعد..... 5
- شکل (۳-۱) کد متلب تشکیل ماتریس R_X و محاسبه مقدار و بردار ویژه آن..... 5
- شکل (۴-۱) مقادیر ماتریس های U ولاندا و R_X 6
- شکل (۵-۱) درایه های ماتریس C 6
- شکل (۶-۱) ماتریس سفید کننده..... 7
- شکل (۷-۱) ماتریس Q 8
- شکل (۸-۱) ماتریس Σ 8
- شکل (۹-۱) بخشی از ماتریس بزرگ V به دست آمده..... 8
- شکل (۱۰-۱) بخشی از ماتریس سفید شده Z 9
- شکل (۱۱-۱) ماتریس F 9
- شکل (۱۲-۱) مقادیر ویژه ماتریس مشاهدات..... 10
- شکل (۱۳-۱) بیش از 90 درصد انرژی در مقدار ویژه سوم میاشد..... 10
- شکل (۱۴-۱) منحنی پراکندگی داده ها پس از تک بعدی کردن مشاهدات..... 11
- شکل (۱۵-۱) فرمول بندی کلی مساله..... 12
- شکل (۱۶-۱) تشکیل ماتریس های a_1 و a_2 13
- شکل (۱۷-۱) ماتریس Σ ماتریس مشاهدات بخش دوم..... 14
- شکل (۱۸-۱) کد متلب پیاده سازی روش beamforming و MUSIC..... 14
- شکل (۱۹-۱) توزیع زوایا با استفاده از روش beam forming..... 15
- شکل (۲۰-۱) توزیع زوایا با استفاده از روش MUSIC..... 15
- شکل (۲۱-۱) توزیع فرکانس سیگنال های منابع روش MUSIC..... 16
- شکل (۲۲-۱) توزیع فرکانس سیگنال های منابع روش Beamforming..... 17

۱-۱- بخش اول

برای تعریف یک فرآیند تصادفی یکنواخت بین $[-3, 3]$ با $T = 1000$ نمونه در MATLAB، می‌توانیم از تابع داخلی rand برای تولید اعداد تصادفی بین 0 و 1 استفاده کنیم و سپس مقیاس نتیجه را به محدوده مورد نظر تغییر دهیم.

```
T = 1000;      % number of samples
a = -3;        % lower bound
b = 3;         % upper bound
X = a + (b-a)*rand(1,T); % generate T random numbers between 0 and 1 → [a , b ]
```

در متلب میتوان به صورت فوق منابع را تشکیل دهیم و در ادامه برای صفر کردن منابع از دستور mean استفاده کرده و میانگین را از آن کم میکنیم (لازم به ذکر به جای استفاده از دستور mean هم با توجه به اینکه توزیع یک نواخت در بازه $[a, b]$ دارای میانگین $\frac{a+b}{2}$ میباشد که چون با فرض یکنواختی رسم نشده است بهتر است mean منابع را آن کم کنیم تا خیلی بیشتر به صفر نزدیک بشود.

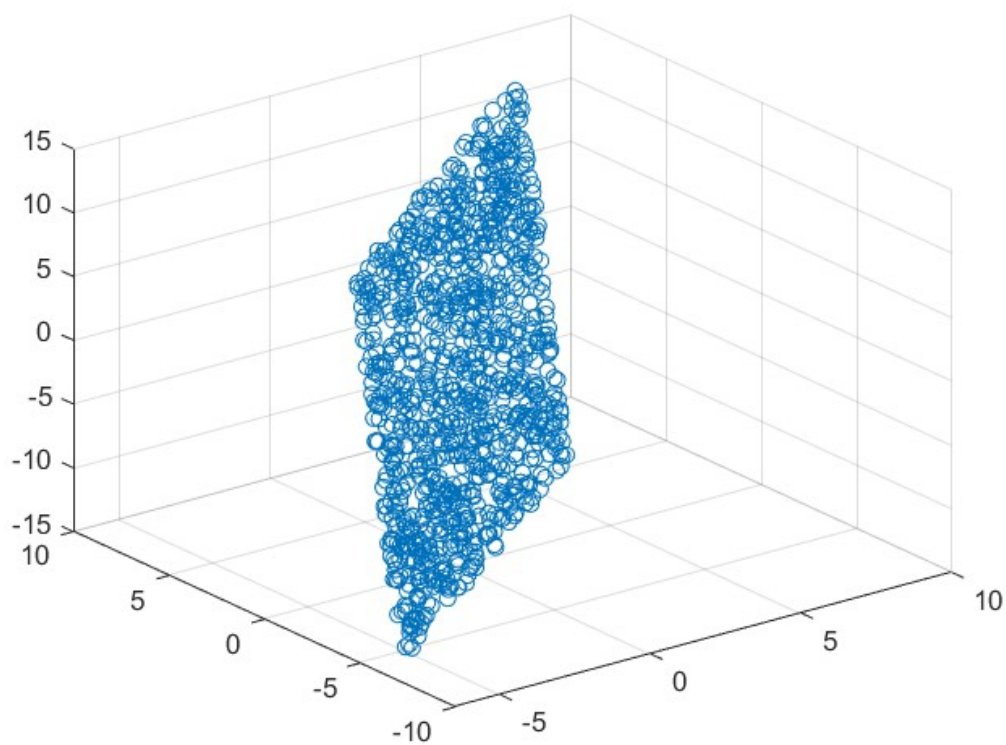
در ادامه ماتریس S را در ماتریس مخلوط کننده ضرب کرده و ماتریس مشاهدات را تشکیل میدهیم.

```
s1=-3 + rand(1,1000)*6;
s2=-2 + rand(1,1000)*4;
s1= s1 - mean(s1);
s2= s2 - mean(s2);
A=[1 -2;2 -1;3 -2];
x = A * [s1;s2];
x1 = x(1,:);
x2 = x(2,:);
x3 = x(3,:);
```

شکل (۱-۱) کد متلب تشکیل ماتریس مشاهدات

2-1-1-الف

پراکندگی مشاهدات در 3 بعد به صورت زیر می باشد.



شکل (۱-۲) پراکندگی مشاهدات در 3 بعد

با دستور Eig بردار و مقادیر ویژه کورولیشن به دست میاید و همانطور که از قبل میدانیم ماتریس R_X از

حاصل ضرب XX^T به دست میاید.

```
Rx = x*transpose(x);  
[U,L] = eig(Rx);
```

شکل (۱-۳) کد متلب تشکیل ماتریس R_X و محاسبه مقدار و بردار ویژه آن

```

U =
    0.1961    0.9125    0.3589
    0.7845   -0.3656    0.5010
   -0.5883   -0.1833    0.7876

Rx =
    1.0e+04 *
    0.8071    0.8350    1.3824
    0.8350    1.2824    1.9883
    1.3824    1.9883    3.1118

L =
    1.0e+04 *
    0.0000         0         0
         0    0.1949         0
         0         0    5.0065

```

شکل (۱-۴) مقادیر ماتریس های U ولاندا و Rx

مشاهده میشود که $L(1,1)$ برابر صفر میشود و میتوان u1 را حذف کرد و در 2 بعد u1 و u2 دیتا ها را رسم

کرد.

3-1-1-ب

ماتریس به کمک دستور linsolve میتوان به دست آورد که درایه های ماتریس C به صورت زیر میباشد. (

حاصل u2 و u3 در ماتریس A)

```

>> C = linsolve([U(:,2),U(:,3)],A)

C =
   -0.3685   -1.0929
    3.7235   -2.7938

```

شکل (۱-۵) درایه های ماتریس C

ج-1-1-4

ابتدا باید ماتریس سفید کننده را به دست بیاوریم

ماتریس سفید کننده به صورت زیر محاسبه میشود. و در ادامه ماتریس Z محاسبه میشود.

$$B = L^{-1/2} U^T$$

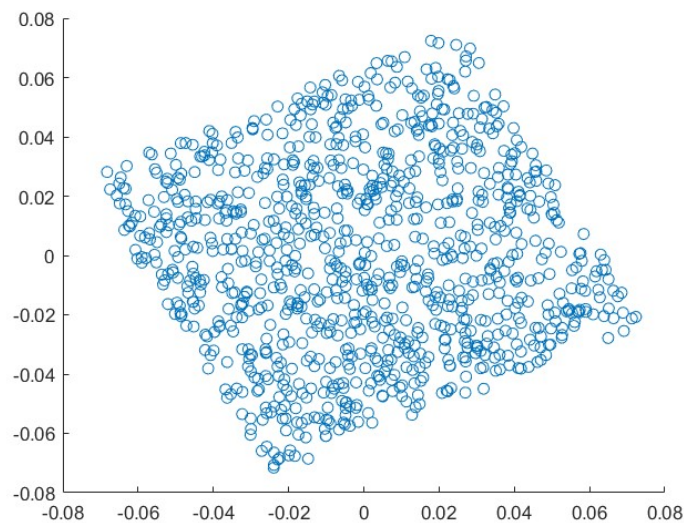
$$Z = B X$$

$B =$

0.0207	-0.0083	-0.0042
0.0016	0.0022	0.0035

شکل (۶-۱) ماتریس سفید کننده

در ادامه پس از تشکیل ماتریس Z ، منحنی پراکندگی z_1 را بر حسب z_2 رسم میکنیم.



که مشاهده میشود به روش PCA توانستیم کاهش ابعاد داده و داده ها را در دو بعد نمایش دهیم.

5-1-1-د

به کمک دستور $\text{rank}(x)$ میتوان رتبه ماتریس x را به دست آورد که در این مساله رتبه ماتریس مشاهدات

2 میباشد.

تبدیل SVD را روی ماتریس مشاهدات اولیه به دست میاوریم.

1	2	3
-0.3589	-0.9125	0.1961
-0.5010	0.3656	0.7845
-0.7876	0.1833	-0.5883

شکل (۷-۱) ماتریس Q

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
223.7514	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	44.1498	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1.8388e-14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

شکل (۸-۱) ماتریس Σ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
-0.0265	0.0283	-0.7182	-0.0450	-0.0147	0.0395	0.0218	-0.0087	-0.0019	-0.0206	-0.0028	-0.0331	-0.0
-0.0494	0.0055	0.4441	-0.0243	-0.0121	0.0261	0.0163	0.0031	-0.0512	-0.0476	0.0487	-0.0459	-0.0
0.0605	0.0301	-0.0117	0.0148	-0.0232	0.0042	0.0240	0.0384	0.0980	0.0268	0.0061	-0.0254	-0.0
-0.0567	-0.0070	-0.0185	0.9971	-7.0524e-04	0.0024	0.0011	-8.2744e-04	-0.0020	-0.0022	6.0173e-04	-0.0022	-0.0
-0.0072	0.0213	-0.0116	-8.2412e-05	0.9992	5.6648e-04	8.4842e-04	9.6418e-04	0.0011	-3.7495e-04	0.0012	-0.0015	-6.2188e-04
0.0438	-0.0102	0.0186	0.0021	9.6591e-04	0.9980	-0.0013	-3.6554e-05	8.1136e-04	0.0018	-0.0013	0.0025	0.0
0.0149	-0.0227	0.0152	4.4226e-04	9.2564e-04	-9.2314e-04	0.9989	-9.7022e-04	-0.0010	6.7470e-04	-0.0014	0.0019	0.0
-0.0242	-0.0335	0.0023	-0.0016	5.5902e-04	7.0142e-04	-4.2334e-04	0.9983	-0.0025	-7.2536e-04	-0.0013	6.7140e-04	-9.5951e-04
-0.0710	-0.0245	0.0484	-0.0046	0.0011	0.0025	-6.3057e-04	-0.0041	0.9905	-0.0042	-4.0392e-04	-2.0849e-04	-0.0
-0.0520	0.0150	0.0137	-0.0028	-3.9202e-04	0.0022	7.7552e-04	-0.0011	-0.0042	0.9970	0.0014	-0.0022	-0.0
0.0168	-0.0489	-0.0228	7.5457e-04	6.1167e-04	-9.9473e-04	-7.6541e-04	-4.4288e-04	0.0020	0.0021	0.9975	0.0022	0.0
-0.0373	0.0455	-0.0104	-0.0015	-0.0015	0.0020	0.0018	0.0011	-3.1972e-04	-0.0022	0.0028	0.9964	-0.0
-0.0537	0.0096	-0.0239	-0.0025	-0.0011	0.0025	0.0016	-1.4503e-05	-9.6891e-04	-0.0021	0.0014	-0.0030	0.0
0.0169	0.0327	-0.0078	0.0013	-7.2021e-04	-3.6952e-04	6.4328e-04	0.0017	0.0026	5.2152e-04	0.0014	-0.0010	5.5541e-04
-0.0199	0.0378	-0.0340	-3.7783e-04	-0.0017	0.0014	0.0019	0.0020	0.0028	-6.8174e-04	0.0023	-0.0033	-0.0
0.0377	-0.0113	-0.0041	0.0020	4.2437e-04	-0.0017	-7.0972e-04	6.0219e-04	0.0025	0.0021	-0.0011	0.0017	0.0
-0.0099	-0.0363	-0.0073	-7.5391e-04	5.0575e-04	1.4028e-04	-4.6662e-04	-0.0012	-8.1795e-04	2.2865e-04	-0.0016	0.0011	-2.6896e-04
-0.0203	0.0657	0.0109	-6.6930e-04	-0.0013	0.0014	0.0015	0.0014	-7.2889e-04	-0.0022	0.0034	-0.0033	-0.0
-0.0425	-0.0090	0.0074	-0.0024	3.2505e-05	0.0017	2.6064e-04	-0.0015	-0.0036	-0.0021	1.5178e-04	-9.3245e-04	-0.0
-0.0263	0.0646	0.0195	-0.0011	-0.0011	0.0016	0.0013	8.7806e-04	-0.0019	-0.0027	0.0034	-0.0033	-0.0
-0.0310	-0.0200	2.8313e-04	-0.0018	1.8245e-04	0.0011	2.1391e-05	-0.0014	-0.0025	-0.0012	-5.1346e-04	-2.2163e-04	-0.0
0.0384	-0.0362	-0.0407	0.0022	1.0857e-04	-0.0017	-3.8555e-04	0.0011	0.0053	0.0033	-0.0021	0.0019	0.0
-0.0571	-0.0238	0.0344	-0.0037	8.4059e-04	0.0020	-4.8933e-04	-0.0033	-0.0074	-0.0032	-4.9828e-04	-1.0309e-04	-0.0
-0.0380	0.0352	0.0257	-0.0020	-4.2565e-04	0.0017	7.1552e-04	-5.8212e-04	-0.0039	-0.0029	0.0021	-0.0022	-0.0
-0.0354	-0.0231	0.0114	-0.0022	4.6498e-04	0.0012	-2.4506e-04	-0.0020	-0.0038	-0.0016	-6.6006e-04	4.3723e-05	-0.0

شکل (۹-۱) بخشی از ماتریس بزرگ V به دست آمده

همانطور که انتظار میرود ماتریس Q همان ماتریس U میباشد (ترتیب ها متفاوت است اما همان ماتریس

میباشد و فقط در منفی ضرب شده که scale اهمیتی ندارد)

و همانطور که ثابت شد و در اینجا نیز مشاهده شده است ماتریس Σ همان $L^{1/2}$ در بخش قطری اش میباشد

و سایر جاها صفر میباشد.

با توجه به بعدی بودن مشاهدات 2 ستون اول ماتریس V همان 2 سطر ماتریس سفید شده Z میباشد . و سایر

ستون های V نیز به صورتی میباشد که V^T یک ست orthonormal تشکیل دهد که قطعا این بخش یونیک

نبوده و هر برداری میتواند باشد.

Z													
2x1000 double													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	-0.0283	-0.0055	-0.0301	0.0070	-0.0213	0.0102	0.0227	0.0335	0.0245	-0.0150	0.0489	-0.0455	-0.0095
2	0.0265	0.0494	-0.0605	0.0567	0.0072	-0.0438	-0.0149	0.0242	0.0710	0.0520	-0.0168	0.0373	0.0537

شکل (۱۰-۱) بخشی از ماتریس سفید شده Z

6-1-1-هـ

برای آنکه نشان دهیم ماتریس V در فضای S (منابع) قرار دارد باید $S = FZ$ باشد.

ماتریس F به صورت زیر میباشد.

$$F = \begin{bmatrix} -24.1904 & 47.9591 \\ -32.2396 & -16.1704 \end{bmatrix}$$

شکل (۱۱-۱) ماتریس F

بنابراین 2 ردیف اول ماتریس V^T و 2 ستون اول ماتریس Z در یک فضا میباشد.

7-1-1-1 و

با توجه به ماتریس مقادیر ویژه که مجدداً در زیر آمده است. میتوان گفت با توجه به اینکه $L(3,3)$ و سومین مقدار ویژه بیشترین انرژی را دارد اول باید چک شود که آیا آین مقدار از 90 درصد بیشتر است یا خیر در صورت بیشتر بودن میتوان طبق شرط داده شده بعد را به یک کاهش داد.

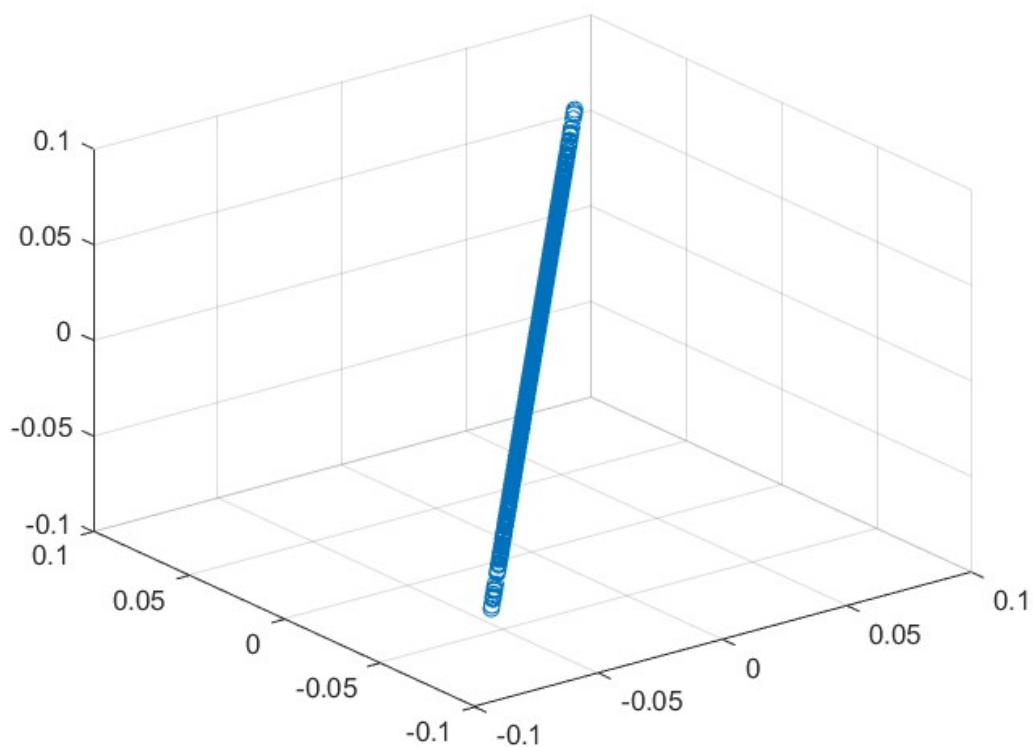
```
L =  
  
1.0e+04 *  
  
0.0000      0      0  
      0    0.1949      0  
      0      0    5.0065
```

شکل (۱-۱۲) مقادیر ویژه ماتریس مشاهدات

```
>> L(3,3)/sum > 0.9  
  
ans =  
  
logical  
  
1
```

شکل (۱-۱۳) بیش از 90 درصد انرژی در مقدار ویژه سوم میباشد

در نهایت مانند قبل عمل کرده و $L(3,3)^{-0.5}$ را در u_3^T ضرب کرده تا ماتریس سفید کننده B1 را تشکیل داده و از ضرب از ماتریس در مشاهدات Z جدید بدست آمده که منحنی پراکندگی آن به صورت زیر میباشد.



شکل (۱۴-۱) منحنی پراکندگی داده ها پس از تک بعدی کردن مشاهدات

۱-۲- بخش دوم

۱-۲-۱- الف

در تصویر زیر فرمول بندی کلی مساله آمده است.

لازم به ذکر است در مساله منابع به صورت زیر تعریف خواهند شد.

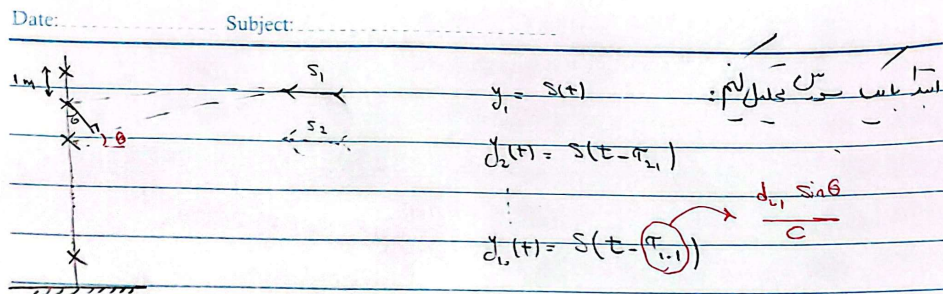
$$s1 = e^{j2\pi f_1 t}$$

$$s2 = e^{j2\pi f_2 t}$$

به علاوه در مطلب زوایا به رادیان تبدیل میشود. ($teta = x * \pi / 180$)

رنج داده های تولیدی رندوم هم برای نویز باید بین صفر و یک قرار دهیم به همین دلیل از $\text{rng}(1)$ استفاده

شده است.



این فرمول تبدیل نام به صورت زیر می شود:

$$S(t - \tau_{s1}) = \text{Re} \left\{ S_d(t - \tau_{s1}) e^{j2\pi f_c(t - \tau_{s1})} \right\} = \text{Re} \left\{ S_d(t - \tau_{s1}) e^{j2\pi f_c t} e^{-j2\pi f_c \tau_{s1}} \right\}$$

تبدیل نام به صورت زیر می شود:

چون سیگنال S_d پس از استیکس و تبدیل نام به صورت زیر می شود:

$$\Rightarrow = \text{Re} \left\{ S_d(t) e^{j2\pi f_c \frac{d_{s1} \sin \theta}{c}} e^{-j2\pi f_c t} \right\} \quad S_d(t - \tau_{s1}) = S_d(t)$$

$$\Rightarrow d_{s1}^{(1)} = S_d(t)$$

$$\left. \begin{aligned} y_{d2}^{(1)} &= S_d(t) e^{-j2\pi f_c \frac{d_{s1} \sin \theta}{c}} \\ &\vdots \\ y_{d11}^{(1)} &= S_d(t) e^{-j2\pi f_c \frac{d_{s11} \sin \theta}{c}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_d(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j2\pi f_c \frac{d_{s1} \sin \theta}{c}} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi f_c \frac{d_{s11} \sin \theta}{c}} \end{bmatrix} S_d(t)$$

در اینجا $a(\theta)$ را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{2\pi f_c d \sin \theta}{c} = k$$

برای این که بتوانیم به صورت افقی تعریف کنیم (برای این که بتوانیم به صورت افقی تعریف کنیم) باید این فرمول را بنویسیم:

$$\begin{cases} y_1 = a_1 s_1 \\ y_2 = a_2 s_2 \end{cases} \quad y = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

بنابراین در متلب تعاریف را انجام داده و به کمک یک for loop ماتریس $a(\theta)$ را تشکیل می‌دهیم

```
a2 =
    1.0000 + 0.0000i    0.4762 - 0.8793i   -0.5465 - 0.8375i   -0.9967 + 0.0818i   -0.4027 + 0.9153i    0.6132 + 0.7900i    0.9866 - 0.1630i    0.3265 - 0.9452i   -0.6757 - 0.7372i   -0.9700 + 0.2432i
    1.0000 + 0.0000i    0.8549 - 0.5189i    0.4615 - 0.8871i   -0.0658 - 0.9978i   -0.5740 - 0.8189i   -0.9155 - 0.4022i   -0.9914 + 0.1312i   -0.7794 + 0.6266i   -0.3411 + 0.9400i    0.1961 + 0.9806i
```

شکل (۱۶-۱) تشکیل ماتریس های a_1 و a_2

در نهایت با ضرب ماتریس a در s و اضافه کردن نویز ماتریس مشاهدات را میسازیم تا در ادامه به کمک

این ماتریس به دنباله دست آوردن زوایای 10 و 20 درجه باشیم.

2-2-1- ب و ج

ابتدا تجزیه SVD را انجام داده و همانطور که از قبل میدانیم از روی ماتریس Σ میتوان تعداد منابع را حدس

زد

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	112.8763	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	95.3225	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	33.5406	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	33.0508	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	32.6585	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	32.0672	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	31.7336	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	31.2248	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	29.6981	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28.9452	0	0	0

شکل (۱-۱۷) ماتریس Σ ماتریس مشاهدات بخش دوم

با توجه به تصویر فوق ، 2 منبع داریم و باقی اعداد برای نویز میباشد.

بدین ترتیب در ماتریس U 2 تا ستون اول را برای $Usig$ و باقی ستون ها را به عنوان $Unull$ جدا میکنیم.

همانند بخش قبل مجدداً ماتریس های a را این بار ولی برای زوایای 0 تا 90 تشکیل میدهیم و در هر مرحله

مقدار های زیر را محاسبه میکنیم و در جایی ذخیره میکنیم (تابع هدف اول روش beam forming و تابع هدف

دوم روش MUSIC میباشد)

$$f1(\theta) = \|a(\theta)^H Usig\|$$

$$f2(\theta) = \frac{1}{\|a(\theta)^H Unull\|}$$

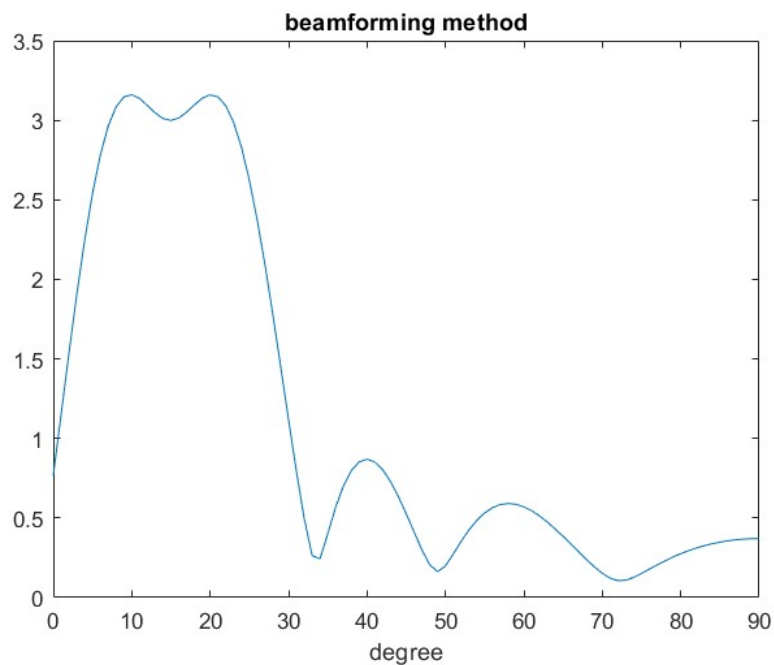
برای اینکار در متلب به صورت زیر مینویسیم.

```
Usig = [U(:,1),U(:,2)];
Unull = U(:,3:10);
beamforming = zeros(90,1);
music = zeros(90,1);
idx = 1;

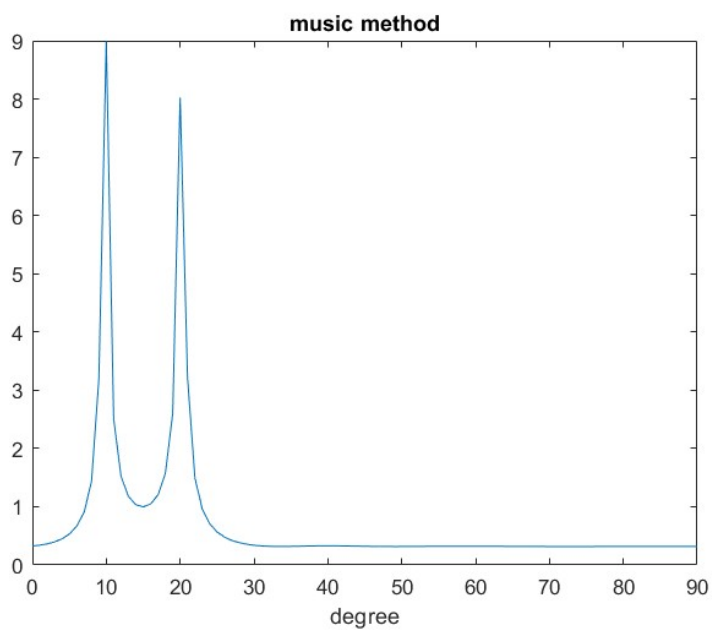
for teta_priod1 = 0:90
    a1 = ones(10,1);
    a2 = ones(10,1);
    for i=2:10
        a1(i,1) = exp(-1i * 2 * pi * fc * (i-1) * sin(teta_priod1 * pi / 180) / c );
    end
    beamforming(idx) = norm( (a1)' * Usig );
    music(idx) = 1/ (norm( (a1)' * Unull ) );
    idx = idx + 1;
end
```

شکل (۱-۱۸) کد متلب پیاده سازی روش beamforming و MUSIC

پس از رسم منحنی ها با متود های مختلف به صورت زیر میشود.



شکل (۱۹-۱) توزیع زوایا با استفاده از روش beam forming



شکل (۲۰-۱) توزیع زوایا با استفاده از روش MUSIC

مطابق با شکل های فوق مشاهده میشود که مقدار پیک ها در هر 2 منحنی در زوایای 10 و 20 درجه میباشد.

3-2-1- دوه

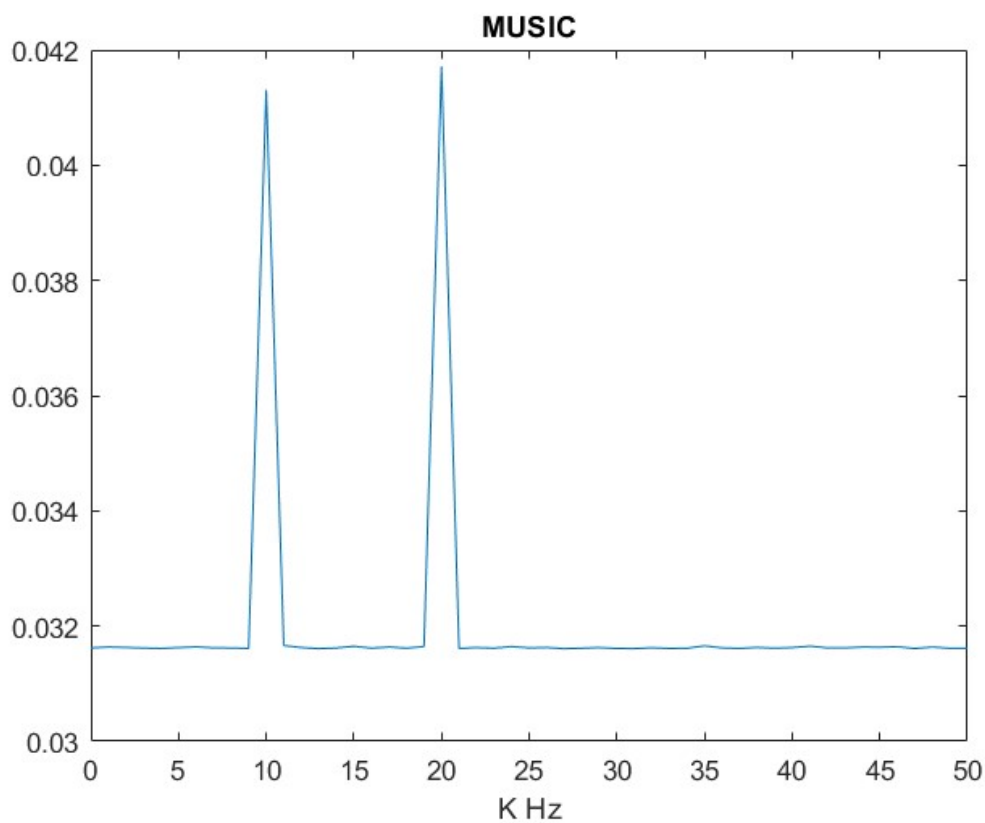
این بخش ها نیز همانند بخش قبل میباشد با این تفاوت که برای زوایای مختلف توابع هدف زیر را محاسبه

کرد و پیک ها را مشاهده میکنیم.

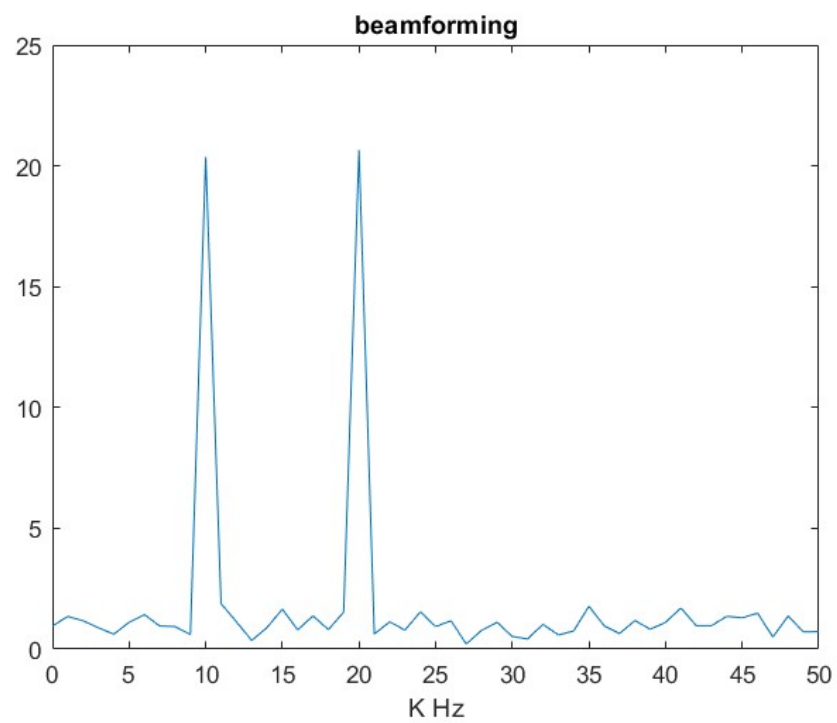
$$f1(\theta) = \| S(f)^H \times V_{sig} \|$$

$$f2(\theta) = \frac{1}{\| S(f)^H \times V_{null} \|}$$

بدیهی است که در اینجا 2 سطر اول ماتریس V^T همان V_{sig} میباشد و باقی V_{null} میشود.



شکل (۲۱-۱) توزیع فرکانس سیگنال های منابع روش MUSIC



شکل (۱-۲۲) توزیع فرکانس سیگنال های منابع روش Beamforming

که مشاهده میشود در هر 2 حالت در فرکانس های 10 و 20 کیلو پیک میزند.

