

به نام خدا

تمرین سری چهارم (موعد تحویل ۴ شنبه ۳۰ فروردین ساعت ۵ بعد از ظهر)

بخش اول

در این بخش می خواهیم جداسازی کور منابع در حالتی که منابع غیر ایستان و ناهمبسته هستند را بررسی کنیم. سیگنال دو منبع در پنجره ی زمانی k ($k = 1, 2, \dots, 5$) به صورت زیر است:

$$s_1^{(k)}(t) = c_k \sin(2\pi t) \quad k-1 \leq t < k$$

$$s_2^{(k)}(t) = d_k \sin(4\pi t) \quad k-1 \leq t < k$$

مقادیر c_k و d_k از درایه ی k بردارهای زیر انتخاب شده است:

$$c = [0.2 \quad 0.4 \quad 0.6 \quad -0.1 \quad -0.3]$$

$$d = [0.1 \quad 0.3 \quad -0.2 \quad 0.5 \quad -0.3]$$

با فرض $f_s = 20 \text{ Hz}$ و ماتریس مخلوط کننده زیر، ماتریس مشاهدات $X = A S$ را که ابعاد آن 2×100 است تولید کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

ماتریس X را تا انتهای بخش اول ثابت در نظر بگیرید.

الف) سیگنال منابع و سیگنال مشاهدات را رسم کنید.

ب) حال با دید BSS به مساله نگاه کنید. فقط با استفاده از داده های دو پنجره ی اول، سیگنال منابع را تخمین بزنید. کیفیت منابع تخمین شده را با معیار زیر گزارش کنید. قبل از استفاده از این رابطه حتماً ابهام دامنه و جایگشت را برطرف کنید.

$$E = \frac{\|\hat{S} - S\|_F^2}{\|S\|_F^2}$$

ج) قسمت ب را با در نظر گرفتن داده های همه ی پنجره ها (کل ماتریس X) تکرار کنید.

د) حال فرض کنید نویز نیز وارد مساله می شود:

$$Y = X + \sigma W$$

در رابطه ی بالا اسکالر σ انحراف معیار نویز و ماتریس W ماتریس نویز می باشد که هر درایه ی آن از یک متغیر گوسی با میانگین صفر و واریانس یک انتخاب شده است. ماتریس W را پس از تولید نرمالیزه کنید به گونه ای که نرم فروبینیوس آن یک شود. اسکالر σ را به گونه ای انتخاب کنید که قدرت سیگنال مطلوب به قدرت سیگنال نامطلوب برابر 20 db یا $SNR = \frac{\|X\|_F^2}{\sigma^2} = 100$ باشد. با استفاده از ماتریس Y که ابعاد آن 2×100 است، منابع را تخمین بزنید. کیفیت منابع تخمین شده را با معیار E گزارش کنید.

ه) ماتریس Y تولید شده در قسمت د که ابعاد آن 2×100 بود را در نظر بگیرید.

به ازای تعداد پنجره های مختلف ($K = 2,3,4,5$) مساله ی BSS را حل کنید و نمودار میانگین E بر حسب K را رسم کنید. در واقع قسمت د را با فرض $K = 5$ حل کرده بودید.

* برای این که نتایج مستدل تری داشته باشید نویز را ۱۰۰ بار مختلف تولید کنید و هر بار Y را بسازید و سپس روش را به ازای K های مختلف پیاده کنید. در انتها میانگین E را بر حسب K رسم کنید.

ی) شرایط مشابه قسمت د را در نظر بگیرید. به ازای $SNR = 5,10,15,20$ داده ها را مجدداً تولید کرده و مساله ی BSS را حل کنید و نمودار میانگین E بر حسب SNR را رسم کنید. تعداد پنجره ها را $K = 5$ در نظر بگیرید (به عبارت دیگر از همه ی داده ها برای این کار استفاده کنید).

* برای این که نتایج مستدل تری داشته باشید به ازای هر SNR نویز را ۱۰۰ بار مختلف تولید کنید و هر بار Y را بسازید و روش را پیاده کنید و سپس میانگین E را بر حسب SNR رسم کنید.

بخش دوم)

ماتریس مشاهدات $X1$ که در اختیار شما قرار گرفته است از ترکیب خطی دو منبع توأم ناهمبسته بدون حضور هر گونه نویزی به وجود آمده است ($f_s = 100 \text{ Hz}$).

الف) سیگنال منابع را با استفاده از مشاهدات $X1$ تخمین زده و رسم کنید.

ب) تبدیل فوریه ی سیگنال منابع تخمین زده شده را رسم کنید. مشاهده ی خود را گزارش کنید. آیا می توانستیم با اعمال یک فیلترینگ ساده روی مشاهدات، منابع را تخمین بزنیم؟

ماتریس مشاهدات $X2$ که در اختیار شما قرار گرفته است نیز از ترکیب خطی دو منبع توأم ناهمبسته بدون حضور هر گونه نویزی به وجود آمده است ($f_s = 100 \text{ Hz}$).

ج) سیگنال منابع را با استفاده از مشاهدات $X2$ تخمین زده و رسم کنید.

د) تبدیل فوریه ی سیگنال منابع تخمین زده شده را رسم کنید. مشاهده ی خود را گزارش کنید. آیا می توانستیم با اعمال یک فیلترینگ ساده روی مشاهدات، منابع را تخمین بزنیم؟ چرا؟