

به نام خدا

تمرین سری دوم (موعد تحویل ۴ شنبه ۲۴ اسفند ساعت ۵ بعد از ظهر)

۱- منبع S_1 را که یک فرآیند تصادفی دارای توزیع یکنواخت بین $[-3, 3]$ می باشد با $T=1000$ نمونه و منبع S_2 را که یک فرآیند تصادفی دارای توزیع یکنواخت بین $[-2, 2]$ می باشد با $T=1000$ نمونه تولید کنید. در صورت وجود میانگین در منابع، میانگین منابع را حتما صفر کنید. این دو منبع را به صورت خطی و آنی توسط ماتریس مخلوط کننده $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ترکیب کنید و مشاهدات x_1 و x_2 و x_3 را تولید کنید.

$$X_{3 \times T} = A_{3 \times 2} S_{2 \times T}$$

ا) پراکندگی مشاهدات را در فضای سه بعدی (دستور scatter3) رسم کنید. همان طور که مشاهده می کنید با این که مشاهدات سه بعدی هستند، اما عملاً در یک فضای دو بعدی پراکنده شده اند. با محاسبه ی ماتریس R_x و اعمال تحلیل PCA (توسط دستور eig) ماتریس بردارهای ویژه (U) و ماتریس قطری مقدار ویژه (D) را به دست آورید.

ب) سعی کنید هر سه گزاره ی زیر را به صورت مفهومی درک کنید. بردار ویژه ها را متناظر با مقادیر ویژه از بزرگ به کوچک، به صورت u_1 ، u_2 و u_3 در نظر بگیرید.

* یکی از مقادیر ویژه صفر شده است (متناظر با u_3). این اتفاق یعنی داده ها در جهت u_3 تصویری ندارند یا به عبارت دیگر پراکندگی ندارند. معادل ریاضی این گزاره یعنی $u_3^T X = 0$.

* u_3 بر ستون های ماتریس A عمود است زیرا این ستون ها هستند که داده ها را تولید کرده اند و در واقع داده ها در فضای این ستون ها هستند. معادل ریاضی این گزاره یعنی $u_3^T A = 0$.

* u_1 و u_2 در همان فضای ستون های ماتریس A یعنی a_1 و a_2 قرار دارند. معادل ریاضی این گزاره یعنی $A = [u_1 \ u_2] C_{2 \times 2}$. درایه های ماتریس C را به دست آورید.

ج) چون یکی از مقادیر ویژه صفر است می توان بدون از دست دادن هیچ گونه اطلاعاتی، داده ها را به فضای دو بعدی برد. ماتریسی که می تواند بعد اضافی داده ها را حذف کند و همچنین آنها را در فضای جدید سفید کند به دست آورید ($Z_{2 \times T} = B_{2 \times 3} X_{3 \times T}$). داده های سفید شده $z_1(t)$ و $z_2(t)$ را رسم کنید.

د) تبدیل SVD را $(X = Q G V)$ روی ماتریس مشاهدات اولیه به صورت $[Q, G, V^T] = \text{svd}(X)$ اعمال کنید. رتبه (یا Rank) ماتریس X چند است؟ رابطه ی ماتریس Q با U ، ماتریس G با D و ماتریس V با Z چیست؟

ه) در قسمت ب دیدیم که u_1 و u_2 در فضای ستون های ماتریس A یعنی a_1 و a_2 قرار دارند. حال نشان دهید که سطرهای اول و دوم ماتریس V^T یعنی v_1^T و v_2^T یا همان $z_1(t)$ و $z_2(t)$ نیز در فضای سطر های ماتریس S یعنی s_1^T و s_2^T قرار دارند. معادل ریاضی این گزاره یعنی

$$S_{2 \times T} = F_{2 \times 2} Z_{2 \times T}$$

درایه های ماتریس F را به دست آورید. با توجه به این نتایج می توان دریافت که سیگنال منابع بر سطرهای سوم تا T م ماتریس V^T عمود است.

و) اگر از ما بخواهند که بُعد داده های اولیه X را تا حد ممکن کاهش دهید به گونه ای که حداقل ۹۰ درصد انرژی کل مشاهدات ($E_{\text{tot}} = E_1 + E_2 + E_3$) حفظ شود، چگونه این کار را انجام می دهید؟ داده ها را در فضای u با بعد تقلیل یافته رسم کنید.

۲- در گیرنده ای یک آرایه ی یکنواخت عمودی با $M=10$ المان و فواصل آنتن $d=1$ متر که سیگنال ها را با فرکانس $f_c=150 \text{ MHz}$ پایین گذر می کند وجود دارد. دو منبع در زوایای ارتفاعی ۱۰ و ۲۰ درجه وجود دارند. سیگنال زمانی پایین گذر شده این دو منبع به صورت زیر است.

$$s_1(t) = \exp(j2\pi f_1 t) \quad f_1 = 20 \text{ KHz}$$

$$s_2(t) = \exp(j2\pi f_2 t) \quad f_2 = 10 \text{ KHz}$$

فرض کنید گیرنده مجموع سیگنال پایین گذر شده منابع و نویز را به مدت ۱ میلی ثانیه و با فرکانس نمونه برداری $f_s = 1 \text{ MHz}$ ضبط می کند. همچنین فرض کنید نویزگوسی است و مستقل از منابع با میانگین صفر و واریانس ۱ در هر آنتن به سیگنال اصلی پایین گذر شده اضافه می شود.

الف) فرمول بندی مساله را با دید جداسازی کور منابع بنویسید.

ب) از روی مشاهدات و با استفاده از روش beamforming زوایای منابع را بیابید.

ج) از روی مشاهدات و با استفاده از روش MUSIC زوایای منابع را بیابید.

د) فرض کنید که می دانیم سیگنال منابع سیگنال تک تُن (فرم $\exp(j2\pi ft)$) بوده است. از روی مشاهدات و با استفاده از روش beamforming فرکانس سیگنال منابع را تخمین بزنید.

ه) فرض کنید که می دانیم سیگنال منابع سیگنال تک تُن بوده است. از روی مشاهدات و با استفاده از روش MUSIC فرکانس سیگنال منابع را تخمین بزنید.