سری اول تمرینات مخابرات پیشرفته دکتر الفت

علیرضا حسنی   شماره دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۱۴۳

Problem 1 : prove for Hilbert transform

تعریف تبدیل هیلبرت :

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = x(t) * \dfrac{1}{\pi t} \\[2ex] \hat{X}(f) = X(f)\,(-j\,\mathrm{sgn}(f)) \end{cases}$$

① $x(t) = x(-t) \longrightarrow \hat{x}(t) = -\hat{x}(-t)$

هدف اثبات این است که اگر سیگنال زوج باشد تبدیل هیلبرت آن فرد خواهد شد.

$$x(t) = x(-t)$$

$$x(t) * \frac{1}{\pi t} = x(-t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{x}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}(-t) = x(t) * \frac{-1}{\pi t} = -\hat{x}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{x}(t) = -\hat{x}(-t)}$$

② $x(t) = -x(-t) \rightarrow \hat{x}(t) = \hat{x}(-t)$

کاملاً برعکس حالت قبل می‌شود.

$$x(t) = -x(-t)$$

$$x(t) * \frac{1}{\pi t} = -x(-t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{x}(t)$$

$$\hat{x}(-t) = -x(t) * \frac{-1}{\pi t} = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

$$= \hat{x}(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{x}(t) = \hat{x}(-t)}$$

③ $x(t) = \cos w_0 t \rightarrow \hat{x}(t) = \sin w_0 t$

$$x(t) = \cos w_0 t \rightarrow X(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

$$\Rightarrow \hat{X}(f) = X(f)\left(-j\,\mathrm{sgn}(f)\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\mathrm{sgn}(f)\,\delta(f - f_0) + \mathrm{sgn}(-f)\,\delta(f + f_0)\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left[(1) \times \delta(f - f_0) + (-1)\,\delta(f + f_0)\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right]$$

$$\Rightarrow \hat{x}(t) = F^{-1}\left(\hat{X}(f)\right) = \boxed{\sin w_0 t}$$

④ $x(t) = \sin w_0 t \rightarrow \hat{x}(t) = -\cos w_0 t$

$$X(f) = \frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)\right]$$

$$\hat{X}(f) = X(f)\left(-j\,\mathrm{sgn}(f)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\,\cancel{\mathrm{sgn}(f)}^{+1}\,\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\,\cancel{\mathrm{sgn}(-f)}^{-1}\,(f+f_0)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$$

$$\hat{x}(t) = F^{-1}\left[\hat{X}(f)\right] = \boxed{-\cos w_0 t}$$

راه دوم اینکه میدانیم تبدیل هیلبرت تبدیل هیلبرت یک سیگنال می
منفی آن سیگنال است پس با توجه به بخش 3 که شد مستقیم نوشت میشود

$$\boxed{-\cos w_0 t}$$

⑤ $\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$

$$\hat{X}(f) = X(f)\left(-j\,\mathrm{sgn}(f)\right)$$

$$\hat{\hat{X}}(f) = X(f)\left(-j\,\mathrm{sgn}(f)\right)\left(-j\,\mathrm{sgn}(f)\right)$$

$$= -X(f) \rightarrow \hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$$

⑥ $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}^2(t)\,dt$$

طبق پارسوال داریم $\rightarrow$ $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\,df$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\,df & \text{II} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{X}(f)|^2\,df & \text{I} \end{cases}$$

$$\text{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)\,(-j\,\mathrm{sgn}(f))|^2\,df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \underbrace{(\mathrm{sgn}(f))^2}_{1}\,df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\,df = \text{II}$$

بنابراین حکم ثابت می‌شود ☑

7 $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\hat{x}(t)\,dt = 0$

با فرض حقیقی بودن سیگنال $x(t)$ داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\hat{x}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,\big(X(f)(-j\,\mathrm{sgn}(f))\big)\,df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -j\,\underbrace{\mathrm{sgn}(f)\,|X(f)|^2}_{\mathrm{I}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{sgn} : \text{odd Func} \\ |X(f)|^2 : \text{even Func}\end{array}\right\} \rightarrow \mathrm{I} : \text{odd Function}$$

بنابراین $\int_{-\infty}^{+\infty}$ یک تابع فرد نیز صفر می‌باشد.

Problem 2: relation bandpass to lowpass *

a) $$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y(t) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_l(t)\, y_l^*(t)\, dt \right]$$

* هدف اثبات این است که ضرب داخلی ۲ سیگنال در باند بالا $1/2$
real part ضرب داخلی ۲ سیگنال در باند پایه باشد

می‌دانیم :

$$x_l(t) = \left(x(t) + j\,\hat{x}(t)\right) e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$\langle x_l(t), y_l(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_l(t)\, y_l^*(t)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x(t) + j\,\hat{x}(t)\right)\left(y(t) + j\,\hat{y}(t)\right)^* \underbrace{e^{-j2\pi f_0 t} \left(e^{-j2\pi f_0 t}\right)^*}_{1}\, dt$$

$$= \langle x(t), y(t)\rangle + \langle \hat{x}(t), y(t)\rangle$$

$$+ j\,\langle \hat{x}(t), y(t)\rangle - j\,\langle \hat{x}(t), \hat{y}(t)\rangle \qquad \mathrm{I}$$

با بخش های موهومی کاری ندارم چون در نهایت می خواهیم Re بگیریم ولی قبل از ادامه لازم است مرحله زیر را اثبات کنیم:

$$\boxed{\begin{aligned} \langle x(t), y(t)\rangle &= \langle \hat{x}(t), \hat{y}(t)\rangle \\ \int \hat{x}(t)\,\hat{y}(t) &= \int \hat{X}(f)\,\hat{Y}^*(f)\,df \\ &= \int X(f)\,Y^*(f)\,(-j\,\cancel{\mathrm{sgn}(f)})(\cancel{j\,\mathrm{sgn}}(f))\,df \\ &= \int X(f)\,Y^*(f) = \langle x(t), y(t)\rangle \end{aligned}}$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{Re}\{\langle x_l(t), y_l(t)\rangle\} = 2\,\langle x(t), y(t)\rangle$$

$$\Rightarrow \langle x(t), y(t)\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{\langle x_l(t), y_l(t)\rangle\}$$

b) $\mathcal{E}_n = 1/2\, \mathcal{E}_{n_\ell}$

خاصیت در رابطه اثبات شده به جای $y(t)$ ، $n(t)$ را قرار دهیم

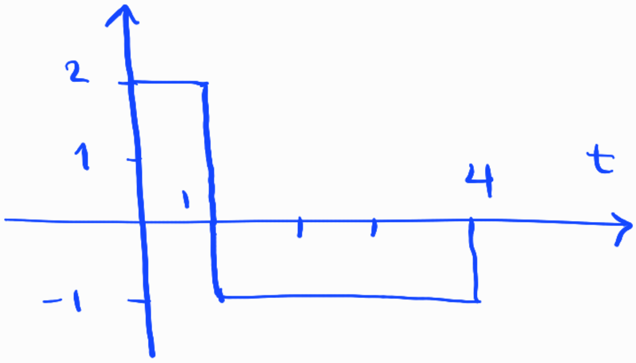
با این داریم :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n(t)^2 = 1/2\, \mathrm{Re}\{ x_\ell(t)\, n_\ell^*(t)\, dt \}$$

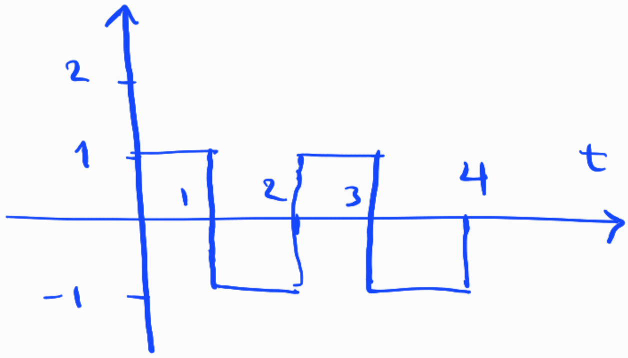
$$\mathcal{E}_n = 1/2\, \mathrm{Re}\{ \mathcal{E}_{n_\ell} \} = 1/2\, \mathcal{E}_{n_\ell}$$

Problem 3 :

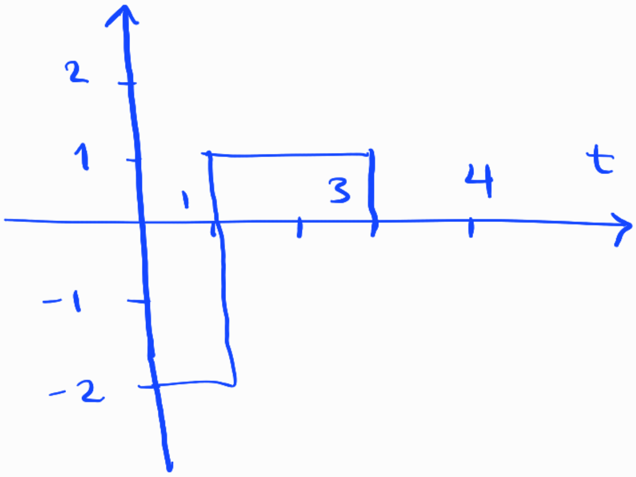
$s_1(t)$



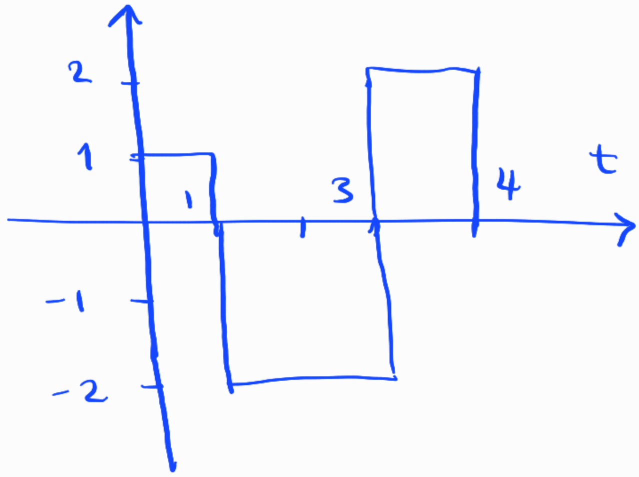
$s_3(t)$



$s_2(t)$



$s_4(t)$



ⓐ set of biasis Function :

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_{s_1}}} \quad , \quad E_{s_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t)|^2 \, dt = 4+3 = 7$$

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{7}}$$

$$\begin{cases} \gamma_2(t) = s_2(t) - \alpha_1 \phi_1(t) \\ \alpha_1 = \langle s_2(t), \phi_1(t) \rangle = \frac{-6}{\sqrt{7}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_2(t) = s_2(t) - \frac{6}{7} s_1(t) \\ \phi_2(t) = \sqrt{\frac{7}{6}}\, s_2(t) - \sqrt{\frac{6}{7}}\, s_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_3(t) = S_3(t) - \alpha_1 \varphi_1(t) - \alpha_2 \varphi_2(t) \\ \alpha_1 = \langle S_3(t), \varphi_1(t) \rangle = 3/\sqrt{7} \\ \alpha_2 = \langle S_3(t), \varphi_2(t) \rangle = -2\sqrt{7/6} + \sqrt{6/7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_3(t) = S_3(t) - S_1(t) - 2/3\, S_2(t) \\ \varphi_3(t) = \sqrt{3/7}\left[S_3(t) - S_1(t) - 2/3\, S_2(t) \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_4 = S_4(4) - \alpha_1 \varphi_1(t) - \alpha_2 \varphi_2(t) - \alpha_3 \varphi_3(t) \\ \alpha_1 = \langle S_4(t), \varphi_1(t) \rangle = \frac{4\sqrt{7}}{7} \\ \alpha_2 = \langle S_4(t), \varphi_2(t) \rangle = -\sqrt{42} + 4/7\sqrt{42} = -3/7\sqrt{42} \\ \alpha_3 = -\frac{\sqrt{21}}{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_4(t) = S_4(t) + 11/7\, S_1(t) + 19/7\, S_2(t) + 3/7\, S_3(t) \\ \varphi_4(t) = \frac{\sqrt{126}}{18}\left[\gamma_4(t) \right] \end{cases}$$

b) s_1, s_2, s_3, s_4 :

$$s_j(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t) + \alpha_3 \varphi_3(t) + \alpha_4 \varphi_4(t)$$

$$\alpha_i = \langle s_j(t), \varphi_i \rangle$$

پس از محاسبه ضرب داخلی فوق داریم :

$$\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{7} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{6\sqrt{7}}{7} \\ \frac{6}{7}\sqrt{42} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{s}_3 = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{7}}{7} \\ \frac{4}{42}\sqrt{42} \\ \frac{13\sqrt{21}}{21} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}_4 = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{7}}{7} \\ -\frac{3}{7}\sqrt{42} \\ -\frac{\sqrt{4}}{7} \\ \frac{\sqrt{126}}{7} \end{bmatrix}$$

* امکان اشتباه در محاسبات وجود دارد *

c) Minimum distance between any pair

فاصله ۲ سیگنال : $d_{ij} = \| \underline{s}_i - s_j(t) \|^2$

$\Rightarrow \quad d_{12} = \sqrt{\frac{175}{7}}, \quad d_{13} = \frac{5\sqrt{21}}{7}, \quad d_{14} = 2\sqrt{3}$

$d_{23} = \frac{\sqrt{9058}}{14}, \quad d_{24} = \sqrt{31}$

$d_{34} = \frac{3\sqrt{203}}{7}$

Problem 4 :

$s(t) = \mathrm{Re}\{ s_\ell(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \}$

$s(t) = \mathrm{Re}\{ s_\ell(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \}$

$$s(t) \longrightarrow \boxed{h(t) = \frac{1}{\pi t}} \longrightarrow \hat{s}(t)$$

میدانیم که :

$$e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow[\text{transform}]{\text{hilbert}} \begin{cases} j e^{j2\pi f_0 t} & ; f_0 > 0 \\ -j e^{j2\pi f_0 t} & ; f_0 < 0 \end{cases}$$

دلیل عبارت فوق این است که تبدیل هیلبرت یک شیفت

فاز $+\frac{\pi}{2}$ به تمام فرکانس های $\oplus$ و شیفت فاز $-\frac{\pi}{2}$ به تمام

فرکانس های $\ominus$ اعمال می کند.

با توجه به این که $s_l(t)$ حامل پایین گذر است طیفی حول فرکانس

صفر دارد و هنگامی که توسط $e^{j2\pi f_0 t}$ حامل

(modulated) شود $\Leftarrow$ معمولا سیگنال یک باند جانبی در f_0

و یک باند جانبی در $-f_0$ قرار دهد (چون $s(t)$ حقیقی است

و طیف آن حول مبدا متقارن است)

بنابراین تبدیل هیلبرت $s(t)$ یا همان $\hat{s}(t)$:

اساسا همان سیگنال $s(t)$ با شیفت $+\frac{\pi}{2}$ اعمال شده

به همه المان های طیف آن می باشد

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{ s_l(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(s_l(t)\, e^{j2\pi f_0 t} + s_l^*(t)\, e^{-j2\pi f_0 t} \right)$$

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{2}\left(j\, s_l(t)\, e^{j2\pi f_0 t} - j\, s_l^*(t)\, e^{-j2\pi f_0 t} \right)$$

عملا + ها شیفت $+\pi/2$ یا عامل j دارند و منفی ها شیفت

$-\pi/2$ یا عامل $-j$ را دارند

Simple form : $\boxed{\hat{s}(t) = \mathrm{Im}\left\{ s_l(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \right\}}$

و این به این دلیل است که بخش IM سیگنال مدوله شده با

تبدیل هیلبرت قسمت Re سیگنال مدوله شده مطابقت دارد.

Problem 5 : X_q, X_i are low pass

$$n_\ell(t) = n_i(t) + j\, n_q(t)$$

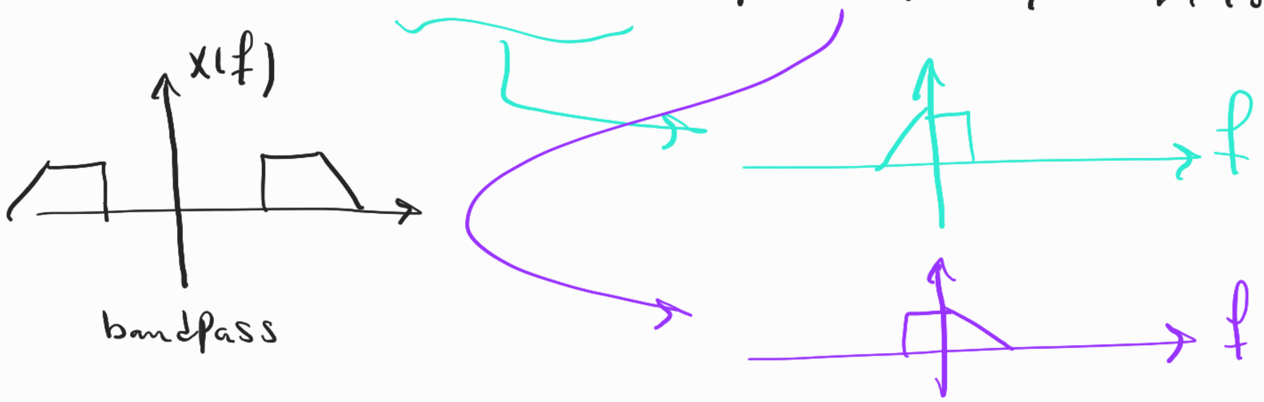
$$\begin{cases} n_i(t) = n(t)\cos(2\pi f_0 t) + \hat{n}(t)\sin(2\pi f_0 t) \\ n_q(t) = \hat{n}(t)\cos(2\pi f_0 t) - n(t)\sin(2\pi f_0 t) \end{cases}$$

$$X_i(f) = \tfrac{1}{2}\left(X(f-f_0) + X(f+f_0) \right) + \left[X(f)\,(-j\,\mathrm{sgn}(f)) * \left(\tfrac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)\right]\right)\right]$$

$$X_i(f) = \tfrac{1}{2}\left[X(f-f_0) + X(f+f_0) \right]$$

$$- \tfrac{1}{2}\left[X(f-f_0)\,\mathrm{sgn}(f-f_0) - X(f+f_0)\,\mathrm{sgn}(f+f_0) \right]$$

$$= X(f-f_0)\, U(-f+f_0) + X(f+f_0)\, U(f+f_0)$$



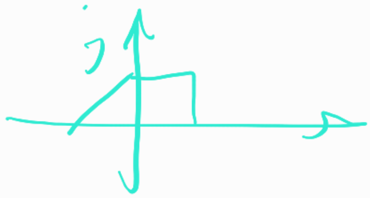
با توجه به این منحنی های فوق $n_i(t)$ $\leftarrow$ یک lowpass است

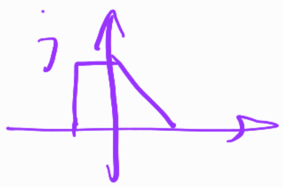
به همین ترتیب برای n_q نیز داریم:

$$X_q(f) = -\frac{j}{2}\,\text{sgn}(f-f_0)\,X(f-f_0) + \frac{j}{2}\,X(f-f_0)$$

$$-\frac{j}{2}\,\text{sgn}(f+f_0)\,X(f+f_0) - \frac{j}{2}\,X(f+f_0)$$

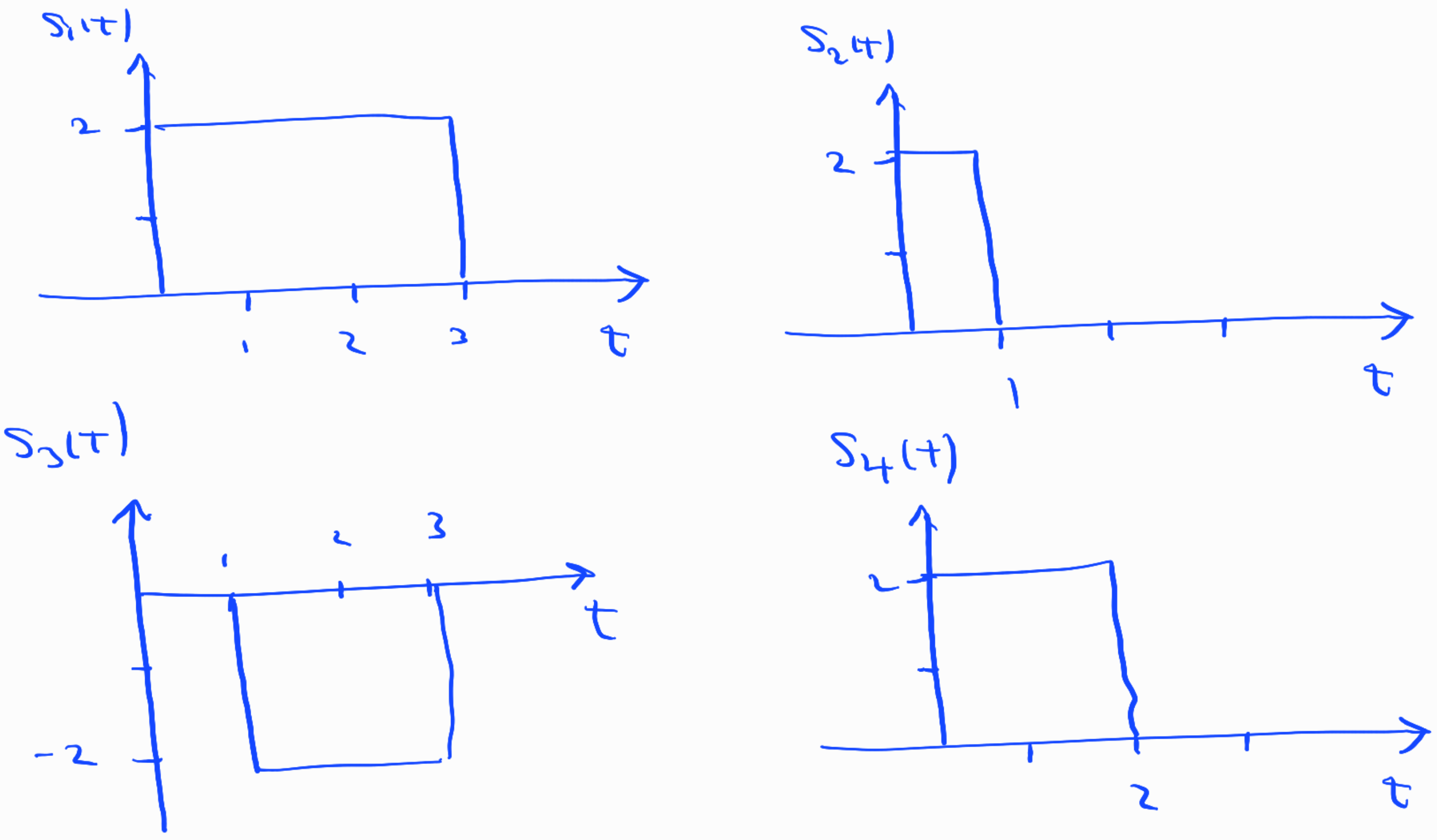
$$= j\left[\,X(f-f_0)\,u(-f+f_0) - X(f+f_0)\,u(f+f_0)\,\right]$$





بنابراین به صورت $n_q(t)$ نیز یک low pass است

Problem 6: derive signal space Representation



طبق مراحل گرام اشمیت سوال ۴ پیش می‌ریم:

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_{s_1}}} = \frac{s_1(t)}{\sqrt{12}} = \boxed{\frac{s_1(t)}{2\sqrt{3}}}$$

$$\begin{cases} r_2(t) = s_2(t) - \alpha_1 \phi_1(t) \\ \alpha_1 = \langle s_2(t), \phi_1(t) \rangle = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_2(t) = s_2(t) - \frac{1}{3} s_1(t) \\ \|r_2\| = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi_2(t) = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(s_2(t) - \frac{1}{3} s_1(t) \right)$$

$$\begin{cases} r_3(t) = s_3(t) - \alpha_1 \phi_1(t) - \alpha_2 \phi_2(t) \\ \alpha_1 = \langle s_3(t), \phi_1(t) \rangle = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \\ \alpha_2 = \langle s_3(t), \phi_2(t) \rangle = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Rightarrow r_3(t) = s_1(t) - s_2(t) + s_3(t) = \boxed{0}$$

بنابراین کاهش بعد داریم.

$$\begin{cases} \gamma_4 = s_4(t) - \alpha_1 \varphi_1(t) - \alpha_2 \varphi_2(t) \\ \alpha_1 = \langle s_4(t), \varphi_1(t) \rangle = \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ \alpha_2 = \langle s_4(t), \varphi_2(t) \rangle = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_4(t) = s_4(t) - \frac{1}{2} s_1(t) - \frac{1}{2} s_2(t) \\ \|\gamma_4\| = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi_4(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(s_4(t) - \frac{1}{2} s_1(t) - \frac{1}{2} s_2(t) \right)$$

برای نمایش فضای سیگنال باید s_j ها را برحسب φ_i بنویسیم.

برای $\underline{s_j}$ $\rightarrow \alpha_i = \langle s_j, \varphi_i \rangle$

$$\underline{s_1} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{s_2} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{s_3} = \begin{bmatrix} -\frac{4\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{s_4} = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

محاسبه فواصل: $d_{12} = 2\sqrt{2}$, $d_{13} = 6$, $d_{14} = 2$, $d_{23} = 2\sqrt{3}$

Problem 7 : $s_i(t) = m(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \frac{(i-1)\pi}{4}\right)$

ابتدا $s_i(t)$ را به ازای $i = 1, 2, 3, 4$ بدست آوریم

$$s_1(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$s_2(t) = m(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$s_3(t) = m(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$s_4(t) = m(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

چیزی که میدانستیم :

$$s_{il}(t) = m(t)\, e^{j\left(\frac{i-1}{4}\pi\right)}$$

$$\langle s_i(t), s_j(t)\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{ s_{il}(t), s_{jl}(t) \right\}$$

1. $$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_{s_1}}}$$

$$E_{s_1} = \frac{1}{2}\,\|s_{1l}(t)\|^2 = \frac{E_m}{2}$$

$$* \boxed{E_m = \int m^2(t)\, dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_1(t) = \frac{m(t)\cos(2\pi f_0 t)}{\sqrt{E_m/2}}}$$

$$\begin{cases} \gamma_2(t) = S_2(t) - \alpha_1 \varphi_1(t) \\ \alpha_1 = \langle S_2(t), \varphi_1(t) \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \langle S_{2\ell}(t), \varphi_{1\ell}(t) \rangle \right\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \int m(t) e^{j\frac{\pi}{4}} m^*(t) \sqrt{\frac{2}{E_m}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \sqrt{\frac{2}{E_m}} \times E_m \times e^{j\frac{\pi}{4}} \right\} = \frac{1}{2} \sqrt{2E_m} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{E_m}}{2}$$

$$\Rightarrow \gamma_2(t) = S_2(t) - \alpha_1 \varphi_1(t)$$

$$= m(t)\cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{E_m}}{2} \frac{m(t)\cos(2\pi f_0 t)}{\sqrt{E_m/2}}$$

$$= m(t)\cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{2} m(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$= \overset{?}{j} \frac{\sqrt{2}}{2} m(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$\gamma_{2\ell}(t) = j \frac{\sqrt{2}}{2} m(t) \Rightarrow \|\gamma_2(t)\|^2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} E_m$$

$$\Rightarrow \varphi_2(t) = \frac{2}{\sqrt{E_m}} \gamma_2(t) = \boxed{-\sqrt{\frac{2}{E_m}}\, m(t)\sin(2\pi f_0 t)}$$

$$\begin{cases} r_3(t) = s_3(t) - \alpha_1 \varphi_1(t) - \alpha_2 \varphi_2(t) \\ \alpha_1 = \langle s_3(t), \varphi_1(t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \langle s_{3\ell}(t), \varphi_{1\ell}(t) \rangle \right\} \quad \mathrm{I} \\ \alpha_2 = \langle s_3(t), \varphi_2(t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \langle s_{3\ell}(t), \varphi_{2\ell}(t) \rangle \right\} \quad \mathrm{II} \end{cases}$$

$$\mathrm{I} \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \int m(t) e^{j\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2}{E_m}}\, m^*(t)\, dt \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \sqrt{2E_m}\, j \right\} = \boxed{0}$$

$$\mathrm{II} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \int m(t) e^{j\frac{\pi}{2}} \left(j\, m(t) \sqrt{\frac{2}{E_m}} \right)^* dt \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ E_m\, \underbrace{j\,(-j}_{1} \sqrt{\frac{2}{E_m}}) \right\} = \frac{1}{2} \sqrt{2E_m}$$

$$r_3(t) = m(t) \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$- \frac{\sqrt{2E_m}}{2} \left(-\sqrt{\frac{2}{E_m}} \right) m(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

$$= -m(t) \sin 2\pi f_0 t + m(t) \sin 2\pi f_0 t = \boxed{0}$$

کاهش بعد داریم!

نیازی به حساب $\gamma_4(t)$ نمی باشد چراکه :

$$S_4(t) = m(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\Big[\underbrace{m(t)\cos(2\pi f_0 t)}_{\phi_1} + \underbrace{m(t)\sin(2\pi f_0 t)}_{\phi_2}\Big]$$

$S_4(t)$ برحسب $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ قابل بیان می باشد و لذا γ_4 هم حساب کنیم صفر می شود

بنابراین بعد فضا برابر $\underline{\underline{2}}$ می باشد.

2

ابتدا معادل lowpass سیگنال ها را بدست می آوریم :

$$S_{1l}(t) = m(t)$$

$$S_{2l}(t) = m(t)\, e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$S_{3l}(t) = m(t)\, e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$S_{4l}(t) = m(t)\, e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

پر واضح است که اگر $\phi_1(t)$ را برای $S_{1\ell}(t)$ تعریف کنیم تمام
سیگنال ها برحسب آن قابل بیان می‌شوند و بعد فضا برابر 1 می‌شود

$$\phi_1'(t) = \frac{S_{1\ell}(t)}{\sqrt{E_{1\ell}(t)}} = \frac{1}{\sqrt{E_m}}\, m(t)$$

بقیه سیگنال ها:

$$\begin{cases} S_{2\ell}(t) = e^{j\pi/4}\sqrt{E_m}\,\phi_1'(t) \\ S_{3\ell}(t) = e^{j\pi/2}\sqrt{E_m}\,\phi_1'(t) \\ S_{4\ell}(t) = e^{j3\pi/4}\sqrt{E_m}\,\phi_1'(t) \end{cases}$$

همان طور که انتظار هم داشتیم $N' \le N$ می‌شود

$N' \downarrow$ 1 : بعد فضا در باند پایه

$N \downarrow$ 2 → بعد فضا در باند میانی