سری سوم تمرینات مخابرات پیشرفته کلید الف

علیرضا حسنی   شماره دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۱۴۲

Problem 1 :

$$r_l(t) = \pm a\, S_l(t) + z(t)$$

$$\begin{cases} z(t) \sim \text{نویز سفید گوسی} \quad E[z]=0 \\ R_{zz}(\tau) = 2N_0\, \delta(\tau) \end{cases}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\int_0^T |S_l(t)|^2\, dt$$

$$P(a) = 0.1\, \delta(a) + 0.9\, \delta(a-2)$$

(a)

$$P_e = \mathbb{E}_a\, P[E|a]$$

$$P[E|a] = Q\left(|a|\sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{a^2\, 2\mathcal{E}}{N_0}}\right)$$

$$P_e = 0.1\, Q(a=0) + 0.9\, Q(a=2)$$

$$P_e = 0.1\, Q(0) + 0.9\, Q\left(\frac{8\mathcal{E}}{N_0}\right) = 0.05 + 0.9\, Q\left(\frac{8\mathcal{E}}{N_0}\right)$$

(b) if $\frac{\varepsilon}{N_0} \to \infty \Rightarrow P_e \leftarrow ۰٫۱\, Q(۰) = ۰٫۱ \times \frac{1}{2} e^{\frac{۰}{\sqrt{2}}}$

$$= ۰٫۱ \times ۰٫۵ = ۰٫۰۵$$

(c) در این حالت به جای $|a|$ اندازه a_1+a_2 ضرب می‌شود

$$\Rightarrow P[E|a_1,a_2] = Q\left(\frac{(\sqrt{a_1^2+a_2^2})2\varepsilon}{N_0}\right)$$

$$P[E] = \mathbb{E}_{a_1,a_2}\, P[E|a_1,a_2)$$

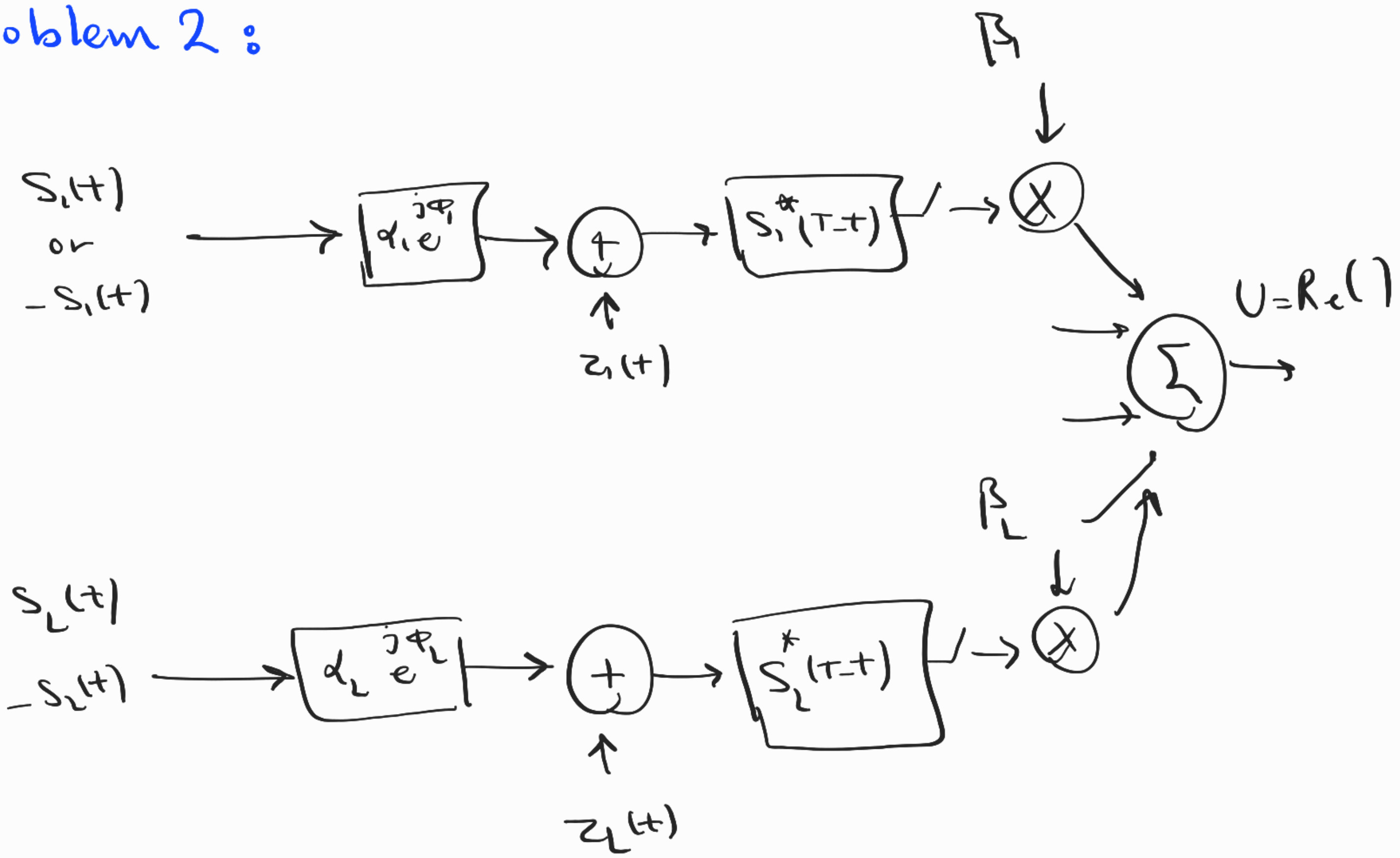
$$= (۰٫۱)^2 Q(۰) + 2\times ۰٫۹ \times ۰٫۱ \times Q\left(\sqrt{\frac{8\varepsilon}{N_0}}\right)$$

$$+ ۰٫۸۱\, Q\left(\frac{2\times 8\varepsilon}{N_0}\right)$$

$$= 5\times ۱۰^{-3} + ۰٫۱۸\, Q\left(\sqrt{\frac{8\varepsilon}{N_0}}\right) + ۰٫۸۱\, Q\left(\sqrt{\frac{16\varepsilon}{N_0}}\right)$$

(d) if $\frac{\varepsilon}{N_0} \to \infty \Rightarrow P_e = ۰٫۰۰۵$

Problem 2 :



$$R_{zz}(t) = E\left[z_k^*(t)\, z_k(t+\tau)\right] = 2N_{0k}\,\delta(\tau)$$

$$V = Re\left(\sum_{k=1}^{L} \beta_k V_k\right) \underset{-1}{\overset{1}{\gtrless}} 0$$

① +1 is transmit:

$$V = Re\left[\sum_{k=1}^{L} \beta_k V_k\right] \overset{1}{>} 0$$

$$V_k = 2\varepsilon\, a_k e^{-j\varphi_k} + N \sim (0, 2\varepsilon N_{0k})$$

خود $\bar{V}$ گوسی می‌باشد که میانگین و واریانس آن در ادامه حساب
شده است.

$$E[U] = \mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{L} \beta_k E(U_k) \right]$$

$$= 2\xi\, \mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{L} \beta_k a_k e^{-j\phi_k} \right]$$

$$= 2\xi \sum_{k=1}^{L} a_k |\beta_k| \cos(\theta_k - \phi_k) = m_u$$

$$\sigma_u^2 = 2\xi \sum_{k=1}^{L} |\beta_k|^2 N_{0k}$$

$$\Rightarrow P(u) = \mathcal{N}(m_u, \sigma_u^2)$$

(2) $$P_e = \int_{-\infty}^{0} p(u)\, du$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{m_u^2}{\sigma_u^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\left(2\xi \sum_{k=1}^{L} a_k |\beta_k| \cos(\theta_k - \phi_k)\right)^2}{2\xi \sum_{k=1}^{L} |\beta_k|^2 N_{0k}}}\right)$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{2\xi \left[\sum_{k=1}^{L} a_k |\beta_k| \cos(\theta_k - \phi_k)\right]^2}{\sum_{k=1}^{L} |\beta_k|^2 N_{0k}}}\right)$$

۳ $P_e = Q\left(\sqrt{\gamma}\right)$

$$\Rightarrow \frac{d\gamma}{d|\beta_x|} = 0$$

قبل از مشتق گیری: γ را می‌توان ساده‌تر کرد چون γ فقط وقتی $\Phi_k = \theta_k$ باشد ماکس می‌شود که حاصل cos برابر ۱ شود

$$\Rightarrow \gamma' = \frac{\varepsilon\left[\sum_{k=1}^{L} a_k|\beta_k|\right]^2}{\sum_{k=1}^{L} |\beta_k|^2 N_{0k}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\gamma'}{d|\beta_x|} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{L} |\beta_k|^2 N_{0k}\right) a_n - \left(\sum_{k=1}^{L} a_k|\beta_k|\right)|\beta_n| N_{0n} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل}} \begin{cases} |\beta_n| = \dfrac{a_n}{N_{0n}} \\[2ex] \gamma' = \dfrac{\varepsilon\left[\sum_{k=1}^{L} \frac{a_k^2}{N_{0k}}\right]^2}{\sum_{k=1}^{L} a_k^2/\cancel{N_{0k}^2}\ \cancel{N_{0k}}} = \boxed{\varepsilon \sum_{k=1}^{L} \frac{a_k^2}{N_{0k}}} \end{cases}$$

Problem 3 :

$$\begin{cases} r_\ell(t) = a_k e^{j\varphi_k} s_\ell(t) + z_k(t) \\ k = 1, 2, \dots, L \end{cases}$$

$$R_{zz}(\tau) = 2N_0\,\delta(\tau)$$

$$U_k = \mathrm{Re}\left[e^{-j\varphi_k} \int_0^T r_k s_\ell^* \, dt \right]$$

$$U = \sum_{k=1}^{L} U_k$$

(a)

$$U_k = 2\mathcal{E} a_k + v_k$$

$$\hookrightarrow \mathcal{N}(0, 2\mathcal{E}N_0)$$

fixed a_k : $U \sim \mathcal{N}(m_u, \sigma_u^2)$

$$\begin{cases} m_u = \sum_{n=1}^{L} E(U_n) = 2\mathcal{E} \sum_{k=1}^{L} a_k \\ \sigma_u^2 = L\, 2\mathcal{E}N_0 \end{cases}$$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{m u^2}{\sigma_n^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}\left(\sum_{k=1}^{L} a_k\right)^2}{L N_0}}\right)$$

(b)

حال فرض کنیم که :

$$P(a_k) = \frac{a_k}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{a_k^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$X \equiv \sum_{k=1}^{L} a_k \rightarrow P_e\Big|_{a\ \text{fix}} = P(X)$$

$$P_b(X) = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}X}{L N_0}}\right)$$

$$\Rightarrow a \sim \text{Rayleigh} \Rightarrow P_e = \int_0^{+\infty} P_b(X)\, P(X)\, dX$$

که در عبارت فوق $P(X)$ را می‌توان حساب کرد

عبارت بسته ای برای $\sum$ SNRها توزیع رایلی وجود ندارد و نمی‌توان انتگرال فوق را بدست آورد.

ج

decision variable: $U = \sum_{k=1}^{L} 2a_k$

$$U = 2 \sum_{k=1} a_k \quad , \quad P_e = P(U < 0)$$

بازهم به همان دلیل قبلی نمی‌توان توزیع ها را بدست آورد چرا که

$$P(a_k) = \frac{a_k}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a_k^2}{2\sigma^2}\right) \leftarrow \text{Reyleigh}$$

Problem 4 :

$T_m = 1s$, $B_d = 0.01\ Hz$, $W = 5\ Hz$, $T = 10S$

(a)
$$\begin{cases} (\Delta f)_c \simeq \dfrac{1}{T_m} = 1\ Hz \\[2ex] (\Delta t)_c \simeq \dfrac{1}{B_d} = 100\ sec \end{cases}$$

(b) $W = 5\ Hz$, $W > (\Delta f)_c$: $\underline{\underline{\text{Selective}}}$ ✓

(c) $T = 10S$, $T < (\Delta t)_c \rightarrow$ Slow fading

(d) در این مسئله rate داده شده است.

$T = 10S \rightarrow R = \frac{1}{10} = 0.1\ Hz$, $W = 5\ Hz$

carrier frequency با subchannel ($\frac{5}{0.1}$) تا ۵۰ تقسیم
داشته باشیم.

diversity : $\dfrac{W}{(\Delta f)_c} = \underline{5|}$

موجود در کانال

فرض کنیم شده $R_b = 1\ \text{bit}/\text{sec}$:

با توجه به order=5 برای diversity حداکثر $\frac{50}{5}=10$ تا carry

برای انتقال داده‌ها به صورت موازی استفاده کرده و اطلاعات ۵ بار

تکرار می‌شود (diversity)

(e)

$$P_e = \binom{2L-1}{L}\left(\frac{1}{4\bar{\gamma}_c}\right)^L$$

$L=5$

$$\Rightarrow P_e = \binom{9}{5}\left(\frac{1}{4\bar{\gamma}_c}\right)^5$$

$$= \frac{9!}{4!\,5!}\left(\frac{1}{4\bar{\gamma}_c}\right)^5 = 126\left(\frac{1}{4\bar{\gamma}_c}\right)^5$$

$$\Rightarrow P_e = 10^{-6} \Rightarrow \bar{\gamma}_c^5 = \frac{984375}{8}$$

$$\Rightarrow \bar{\gamma}_c \simeq \sqrt[5]{\frac{984375}{8}} \simeq 10{,}4235$$

$$\boxed{\bar{\gamma}_c \simeq 10{,}18\ dB}$$