سری چهارم تمرینات مخابرات پیشرفته دکتر الفت

علیرضا حسنی   شماره دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۱۴۲

Problem 1

16 QAM $\longrightarrow$ $s(t) = \underbrace{I_n}_{\in\{\pm1,\pm3\}} \cos 2\pi f_c t + \underbrace{Q_n}_{\in\{\pm1,\pm3\}} \sin 2\pi f_c t$

4-QAM ها : $s(t) = G\left(A_n \cos 2\pi f_c t + B_n \sin 2\pi f_c t \right)$

$$+ C_n \cos 2\pi f_c t + D_n \sin 2\pi f_c t$$

$A_n, B_n, C_n, D_n \in \{\pm 1\}$

$I_n = G A_n + C_n \quad , \quad Q_n = G B_n + D_n$

$\Longrightarrow \boxed{G = 2}$

Problem2

4-PSK , lowpass : $u(t) = \sum I_n g(t-nT)$

$I_n \in \{ \sqrt{1/2}\,(\pm 1 \pm j) \}$, equal probability

(a) $g(t) = \begin{cases} A & 0<t<T \\ 0 & o.w \end{cases}$

قبل از حل هر بخش لازم است یک سری محاسبات انجام شود :

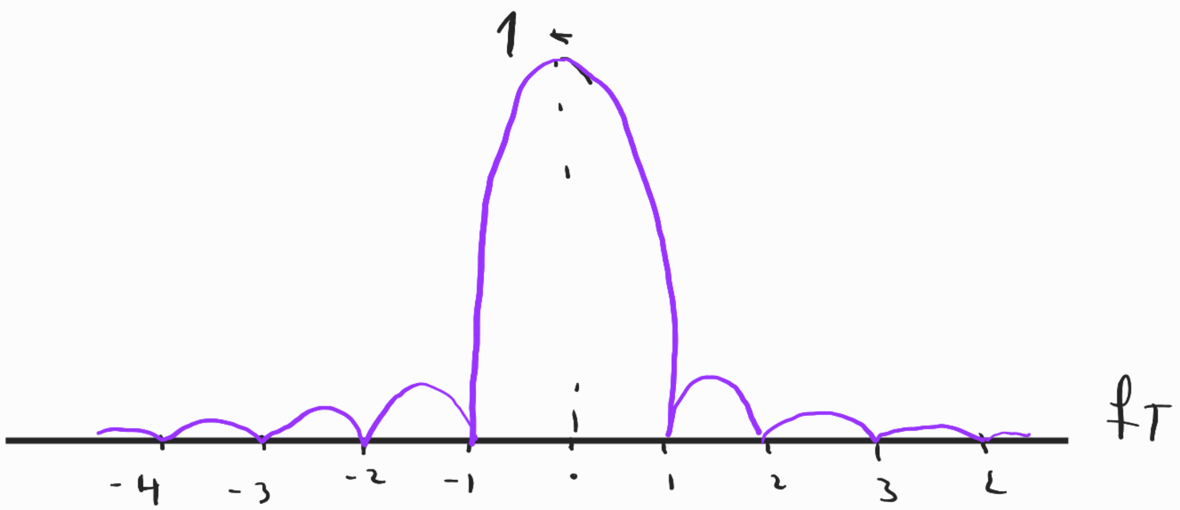
$$S_u(f) = \frac{1}{T} |G(f)|^2$$

در فرمول فوق $S_i(f)=1$ می باشد چون $E\{|I_n|^2\}=1 \Rightarrow R(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases}$

حالا در این حالت :

$$G(f) = AT \ \mathrm{sinc}(fT)\, e^{-j2\pi fT/2}$$

$$S_u(f) = \frac{1}{\cancel{T}} A^2 T^{\cancel{2}} \frac{\sin^2 \pi fT}{(\pi f T)^2} = A^2 T (\mathrm{sinc}\ fT)^2$$

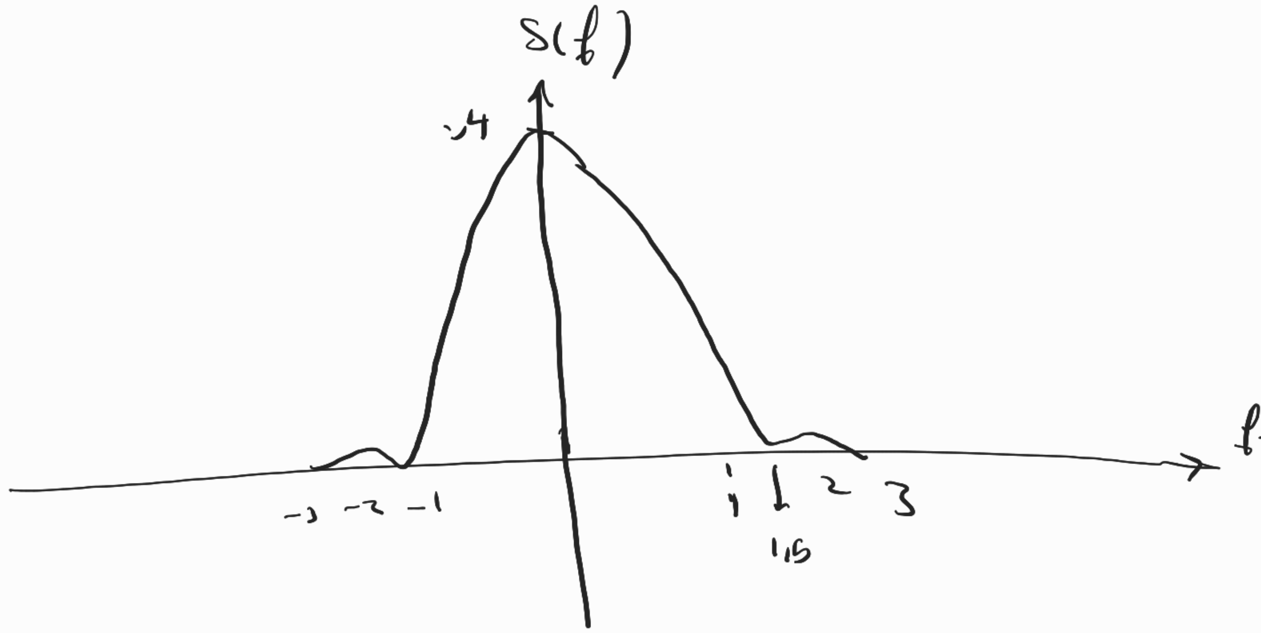


(b)

$$g(t) = \begin{cases} A \sin \frac{\pi t}{T} & , \ t < T \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$|G(f)|^2 = \frac{4A^2T^2 \overbrace{(1+\cos 2\pi f T)}^{2\cos^2 \pi f T}}{\cancel{2}(1-4T^2f^2)^2 \pi} \rightarrow$$ محاسبه تبدیل فوریه با متلب

$$\Rightarrow S_n(f) = \frac{4A^2T \cos^2 \pi f T}{(1-4T^2f^2)^2 \pi}$$



(c)

f^* : 3db freq

پالس مستطیلی : $\text{sinc}^2(f^*T) = 1/2 \rightarrow f^*T \simeq 0.44$

پالس سینوسی : $\dfrac{\cos^2 \pi f^*T}{(1-4T^2f^2)^2} = 1/2 \rightarrow f^*T \simeq 0.59$

اولین صفر طیف پالس در $fT=1$ می‌باشد در حالی که برای سینوسی در $fT = 1,5$ می‌باشد و پر واضح است که طیف مستطیلی لوب اصلی باریک‌تر ولی لوب‌های جانبی با مقادیر بالاتر دارد.

Problem 3:

QPRS $\rightarrow \begin{cases} s(t) = Re\{ v(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \} \\ v(t) = v_c(t) + j\, v_s(t) \\ \quad = \sum B_n\, g(t-nT) + j \sum C_n\, g(t-nT) \end{cases}$

$B_n = I_n + I_{n-1}$, $C_n = J_n + J_{n-1}$

$I_n, J_n \in \{\pm 1\}$, independent , equal probability

(a)

$B_n = \{ 1+1,\ -1-1,\ -1+1,\ 1-1 \} \in \{ 2, -2, 0 \}$

$C_n \in \{ 2, -2, 0 \}$

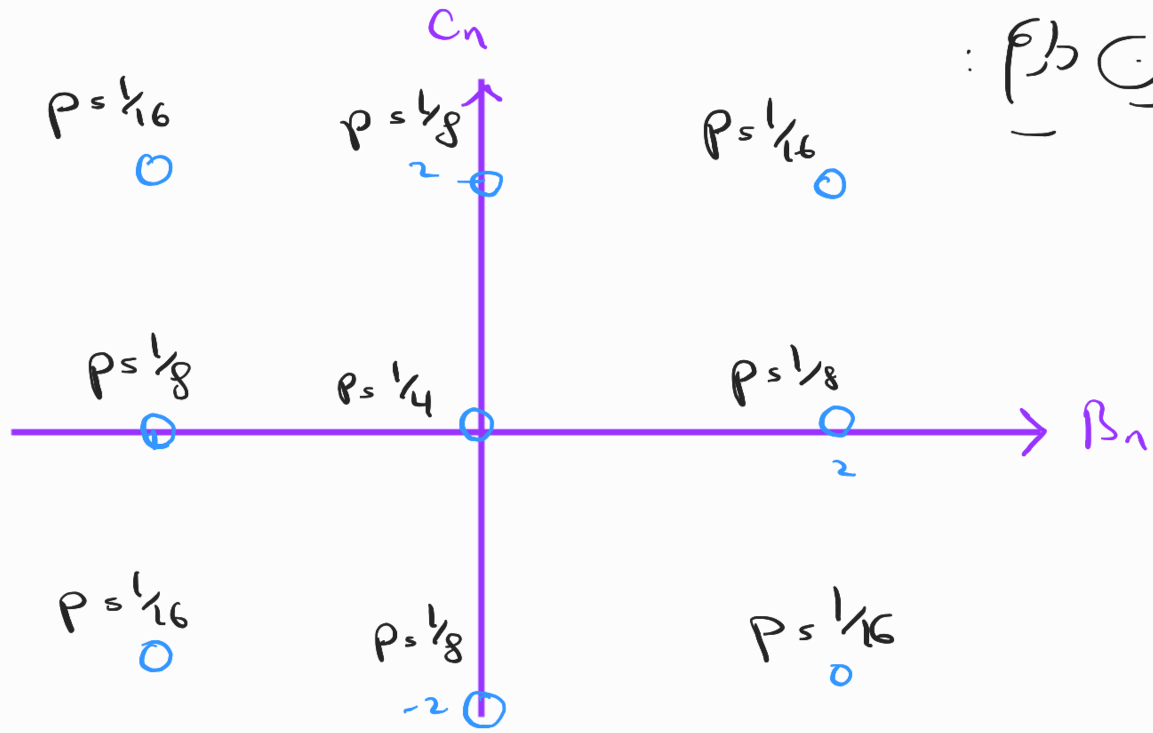
$P\{B_n = 2\} = P\{C_n = 2\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}} = P\{B_n = -2\} = P\{C_n = -2\}$

$P\{B_n = 0\} = P_n\{C_n = 0\} = 2 \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

این دو مستقل از هم هستند مثلاً

$P\{B_n = 2, C_n = 2\} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{16}}$

بنابراین داریم:



(b)

$$Z_n = B_n + j\,C_n$$

$$R_Z(m) = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left\{ (B_{n+m} + j\,C_{n+m})(B_n + jC_n)^* \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left\{ (B_{n+m} + j\,C_{n+m})(B_n - jC_n) \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[R_B(m) + R_C(m) \right]$$

B و C ← مستقل از هم و عین هم از نظر آماری هستند

$$= R_B(m) = R_C(m) = \begin{cases} 2 & m = 0 \\ 1 & m = \pm 1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

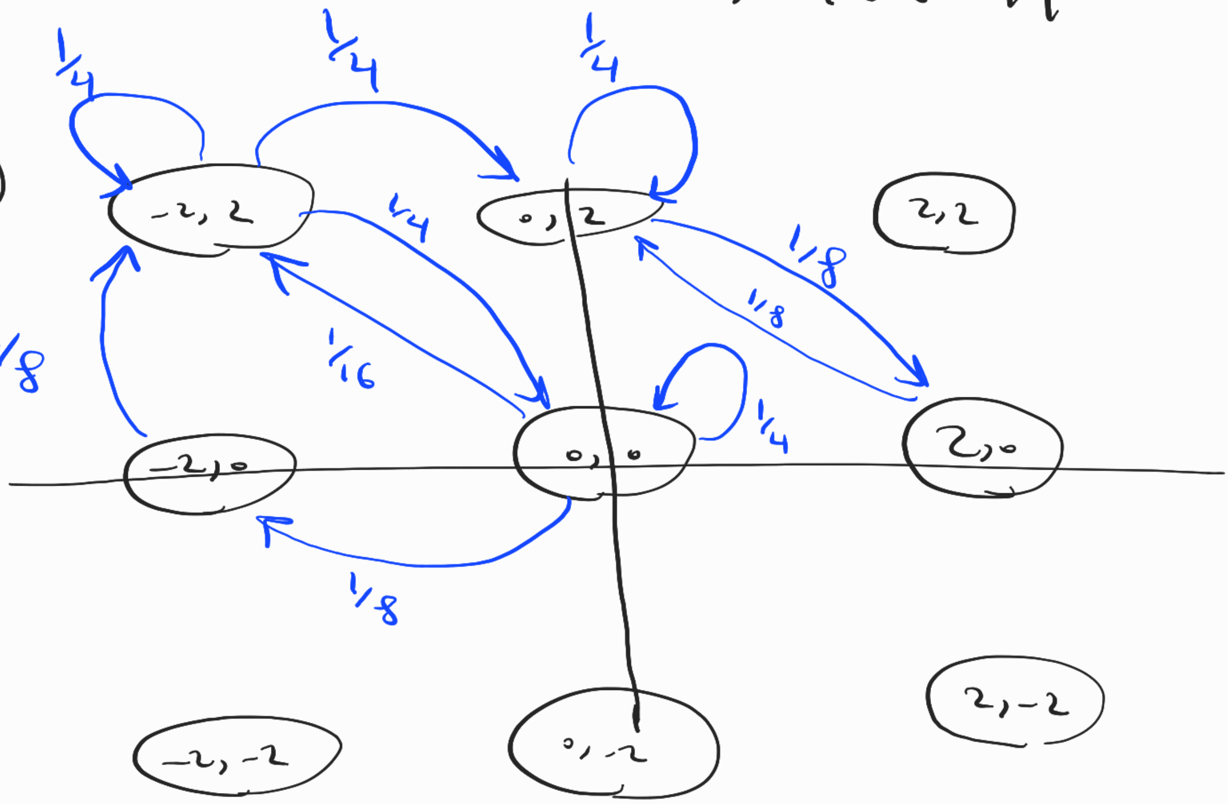
با توجه به روابط فوق :

$$\begin{cases} \boxed{R_{vs}(\tau) = R_{vc}(\tau) = R_v(\tau)} \\ \Rightarrow S_{vs}(f) = S_{vc}(f) = S_v(f) \end{cases}$$

$$S_{vs}(f) = \frac{1}{T} |V(f)|^2 S_B(f)$$

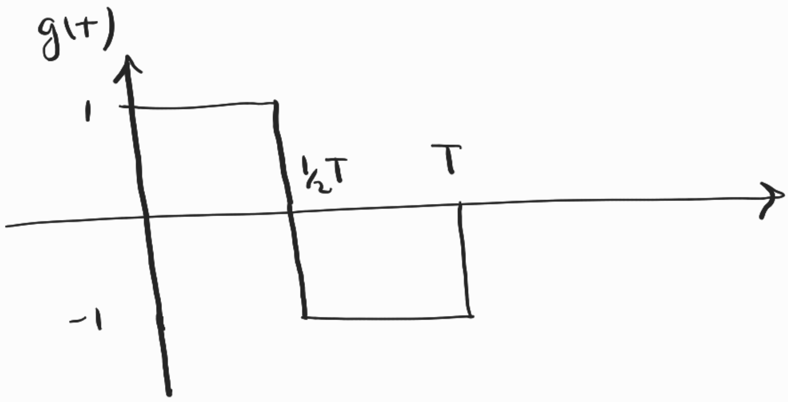
$\hookrightarrow 4\cos^2 \pi f T$

c



Problem 4

$\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$; iid $\in \{\pm 1\}$, $s(t) = \sum a_n g(t-nT)$



(a)

$$G(f) = \frac{T}{2}\,\text{sinc}\left(f\frac{T}{2}\right) e^{-j2\pi f \frac{T}{4}} - \frac{T}{2}\,\text{sinc}\left(f\frac{T}{2}\right) e^{-j2\pi f \frac{3T}{4}}$$

$$= jT\,\frac{\sin^2 \pi f \frac{T}{2}}{\pi f \frac{T}{2}}\, e^{-j\pi f T}$$

$$S_S(f) = \frac{1}{T}\,|G(f)|^2 = \frac{1}{T}\,T^2\left(\frac{\sin^2 \pi f \frac{T}{2}}{\pi f \frac{T}{2}}\right)^2$$

$$= T\left(\frac{\sin^2 \pi f \frac{T}{2}}{\pi f \frac{T}{2}}\right)^2$$

(b) Zero in Power spectrum $\rightarrow fT = 1$

$$b_n = a_n + K a_{n-1}$$

$$R_b(m) = \mathbb{E}\left[(a_{n+m} + k a_{n+m-1})(a_n + k a_{n-1}) \right]$$

$$= \mathbb{E}[a_{n+m} a_n] + K \mathbb{E}\{a_{n+m-1} a_n\}$$

$$+ k \mathbb{E}\{a_{n+m} a_{n-1}\} + k^2 \mathbb{E}\{a_{n+m-1} a_{n-1}\}$$

$$= \begin{cases} k & ; m = \pm 1 \\ 1 + k^2 & ; m = 0 \\ 0 & ; o.w \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_b(f) = \sum R_b(m) e^{-j 2\pi f m T}$$

$$= 1 + k^2 + 2k \cos 2\pi f T$$

$$fT = 1 \rightarrow S_b = 0 \Rightarrow 1 + k^2 + 2k = 0$$

$$(k+1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{k = -1}$$

$$\Rightarrow \quad S_S(f) = 4T\left(\frac{\sin^2 \pi f T/2}{\pi f T/2}\right)^2 \sin^2 \pi f T$$

(c)

$$fT = \frac{k'}{4} \longrightarrow k' \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

$1 + k^2 + 2k\cos 2\pi \frac{k'}{2} = 0 \longrightarrow$ نمی‌شود که شرط فوق ارضا شود.

$b_n = a_n + k\, a_{n-4}$ برای این کار تحول:

$S_b = 1 + k^2 + 2k\cos 2\pi f 4T$ که در این صورت:

که در این حالت با $k=-1$ برای S ، $\frac{k'}{4T}$ ها صفر می‌شود.

Problem 5

$$s_0(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left[2\pi\left(f_c - \frac{\Delta f}{2}\right)t + \theta_0\right] \qquad 0 \le t < T$$

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left[2\pi\left(f_c - \frac{\Delta f}{2}\right)t + \theta_1\right] \qquad 0 \le t < T$$

$\Delta f = \frac{1}{T} \ll f_c$, θ_0, θ_2 independent $\sim U[0, 2\pi]$

$s_0, s_1 \rightarrow$ equal Probability

(a)

$$S(f) = \frac{1}{4T^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| S_0\left(\frac{n}{T}\right) + S_1\left(\frac{n}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$+ \frac{1}{4T} \left| S_0(f) - S_1(f) \right|^2$$

$$S_0(f) = \mathcal{F}\{s_0(t)\} = \int_0^T s_0(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \sqrt{\frac{T E_b}{2}} \left[\frac{\sin \pi T(f - f_0)}{\pi(f - f_0)} + \frac{\sin \pi T(f + f_0)}{\pi(f + f_0)} \right]$$

$$\times e^{-j2\pi f T} e^{j\theta_0}$$

به طور مشابه $S_1(f)$ نیز حاصل فرمول فوق می‌باشد به جای $f_1 \leftarrow f_0$

و به جای $\theta_1 \leftarrow \theta_0$ می‌گذاریم.

برگردیم به جواب $S(f)$:

$$S(f) = \frac{1}{4T^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left| S_0\left(\frac{n}{T}\right) + S_1\left(\frac{n}{T}\right) \right|^2}_{\downarrow} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) + \frac{1}{4T} \left| S_0(f) - S_1(f) \right|^2$$

$$\left|S_0\left(\frac{n}{T}\right)\right|^2 + \left|S_1\left(\frac{n}{T}\right)\right|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left\{ \underbrace{S_0\left(\frac{n}{T}\right) S_1^*\left(\frac{n}{T}\right)}_{\downarrow} \right\}$$

اگر در فازها میانگین بگیریم عملا این ترم حذف می‌شود.

$$S(f) = \frac{1}{4T^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\left| S_0\left(\frac{n}{T}\right) \right|^2 + \left| S_1\left(\frac{n}{T}\right) \right|^2 \right] \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$+ \frac{1}{4T} \left[|S_0(f)|^2 + |S_1(f)|^2 \right]$$

$$|S_0(f)|^2 = \frac{T\mathcal{E}_b}{2} \left| \frac{\sin(\pi T (f - f_0))}{\pi (f - f_0)} + \frac{\sin(\pi T (f + f_0))}{\pi (f + f_0)} \right|^2$$

$$|S_1(f)|^2 = \frac{T\mathcal{E}_b}{2} \left| \frac{\sin(\pi T (f - f_1))}{\pi (f - f_1)} + \frac{\sin(\pi T (f + f_1))}{\pi (f + f_1)} \right|^2$$

(ط)

باید توجه شود که در $|S_0(f)|^2$ و $|S_1(f)|^2$ از قوانین ۲ را بازکنیم

با توجه به این که حاصل ضرب ۲ عبارت I و II تقریبا صفر می‌باشد داریم.

$$|S_0(f)|^2 = \frac{T\mathcal{E}_b}{2}\left|\underbrace{\frac{\sin(\pi T(f-f_0))}{\pi(f-f_0)}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\frac{\sin(\pi T(f+f_0))}{\pi(f+f_0)}}_{\mathrm{II}}\right|^2$$

$$= \frac{T\mathcal{E}_b}{2}\left[\mathrm{I}^2 + \mathrm{II}^2 + \underbrace{\cancel{2\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}}}_{\simeq 0}\right]$$

$$= \frac{T\mathcal{E}_b}{2}\left[\mathrm{I}^2 + \mathrm{II}^2\right]$$

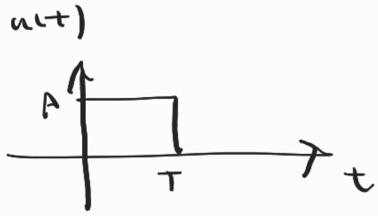
اگر f_0 و f_1 به اندازه‌ی کافی بزرگ باشند با توجه به این که $|S_0(f)|^2$ و $|S_1(f)|^2$

نزول $\frac{1}{(f-f_1)^2}$ و $\frac{1}{(f-f_0)^2}$ و تقریبا به دلیل $f \gg f_c$ نزول

$\frac{1}{f^2}$ می‌باشد $\leftarrow$ $S(f)$ نیز شامل این رفتار می‌شود.

Problem 6

$$\{I_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}, \quad I_n \in \{\pm 1\}$$



$$; \quad X(t) = \sum I_n u(t-nT)$$

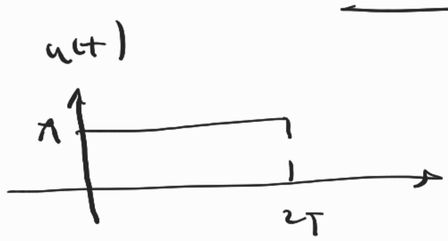
(a)

$$S_X(f) = \frac{1}{T}|U(f)|^2 S_I(f)$$

$$= \frac{1}{T} \underbrace{S_I(f)}_{=1} |AT\,\mathrm{sinc}(fT)|^2$$

$$= A^2 T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

(b)



$$S_x(f) = \frac{1}{T}(A2T)^2\,\mathrm{sinc}^2(f2T)$$

$$= 4A^2T\,\mathrm{sinc}^2(2Tf)$$

(c) پارت b: null → $fT = 1/3$

$$b_n = I_n + \alpha I_{n-1}$$

طبق مسأله 4 در HW4 بلدیم که طیف چگالی توان به این شکل در میاد:

$$S_b(f) = 1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(2\pi f T)$$

$$\Rightarrow 1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos\frac{2\pi}{3} = 0$$

با توجه به معادله فوق α مقدار حقیقی ندارد و این رمزگذاری این null را نمی‌تواند بسازد.

(d) خیر، $S_b(f)$ یک تابع تحلیلی می‌باشد و حداکثر می‌تواند تعداد صفر countable داشته باشد.

Problem 7

$$\{a_n\}_{k=-\infty}^{+\infty} \quad , \quad a_k \in \{0,1\}$$

$$\begin{cases} u(t) = \sum a_n \, g(t-nT)\cos(2\pi f_0 t + \theta_n) \\ \{\alpha_i , \theta_i\}_{i=1}^{8} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 2t/T & ; \; 0<t<T/2 \\ 2-2t/T & ; \; T/2<t<T \\ 0 & ; \; \text{o.w.} \end{cases} = \Lambda\left(\frac{t-T/2}{T/2}\right)$$

ⓐ $\quad \alpha^2 = \sum_{i=1}^{8} |\alpha_i|^2 , \quad \beta = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i e^{j\theta_i}$

$$u(t) = \sum a_n \, g(t-nT)\cos(2\pi f_0 t + \theta_n)$$

$$u_l(t) = \sum a_n e^{j\theta_n} g(t-nT)$$

$$S_{u_l}(f) = \frac{1}{T} S_a(f) \, |G(f)|^2$$

$$|G(f)|^2 = \left| \frac{T}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{Tf}{2}\right) e^{-j\pi f T} \right|^2 = \boxed{\frac{T^2}{4} \operatorname{sinc}^4\left(\frac{Tf}{2}\right)}$$

برای محاسبه $S_a(f)$ باید $R_a(m)$ را اول محاسبه کنیم.

$$R_a(m) = \mathbb{E}\{a_{m+n}\, a_n^*\} = \begin{cases} \mathbb{E}\{|a_n|^2\} & m=0 \\ |\mathbb{E}\{a_n\}|^2 & m\neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{8}\alpha^2 & ;\ m=0 \\ \frac{1}{64}|\beta|^2 & ;\ m\neq 0 \end{cases}$$

$$S_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_a(m)\, e^{-j2\pi f m T}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{64}|\beta|^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f m T}}_{\mathrm{I}} + \frac{1}{8}\alpha^2 - \frac{1}{64}|\beta|^2$$

$$S_{u_\ell}(f) = \frac{T}{4}\,\mathrm{sinc}^4\left(\frac{Tf}{2}\right)\left[\frac{1}{8}\left(\alpha^2 - \frac{1}{8}|\beta|^2\right) + \mathrm{I}\right]$$

$$\mathrm{I} = \frac{|\beta|^2}{64} \times \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

$$\Rightarrow S_{u_\ell}(f) = \frac{T}{4}\,\mathrm{sinc}^4\left(\frac{Tf}{2}\right)\left[\frac{1}{8}\left(\alpha^2 - \frac{1}{8}|\beta|^2\right) + \frac{|\beta|^2}{64} \times \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)\right]$$

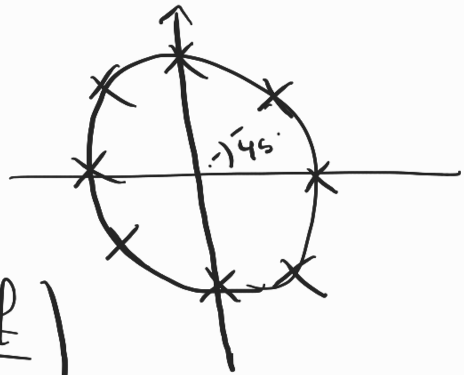
(b) $\alpha_{odd} = a,\ \alpha_{even} = b,\ \theta_i = \frac{(i-1)\pi}{4}$

$$\Rightarrow \beta = 0,\ \alpha^2 = \frac{a^2+b^2}{4}$$

$$S_{u_\ell}(f) = \frac{T(a^2+b^2)}{4\times4\times8}\,\mathrm{sinc}^4\left(\frac{Tf}{2}\right)$$

$$= \frac{T(a^2+b^2)}{128}\,\mathrm{sinc}^4\left(\frac{Tf}{2}\right)$$

(c) $a=b$ in Part (b) $\rightarrow$



$$S_{u_\ell}(f) = \frac{Ta^2}{64}\,\mathrm{sinc}^4\left(\frac{Tf}{2}\right)$$

(d) $b_n = a_n \oplus a_{n-1}$

$b_n \leftarrow$ مستقل نیستند و هم احتمال نیستند پس خواهد داد [illegible] تغییر

نمی کند.

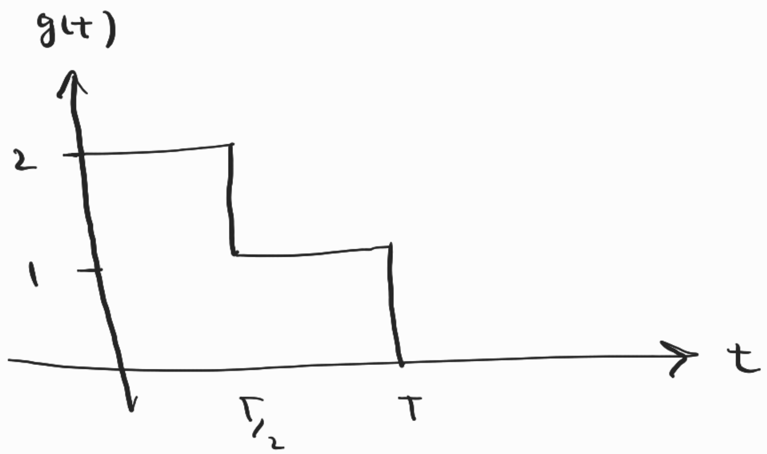
Problem 8:

$$\{I_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \qquad I_n \in \{2, -2, 0\}$$

$$P(I_n = 2) = \tfrac{1}{4}, \quad P(I_n = -2) = \tfrac{1}{4}, \quad P(I_n = 0) = \tfrac{1}{2}$$

$$C(t) = \sum I_n \, g(t - nT)$$

(a)



$$S_v(f) = \frac{1}{T} |G(f)|^2 S_i(f)$$

$$G(f) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \tfrac{T}{2} \operatorname{sinc}\!\left(\tfrac{Tf}{2}\right) e^{-j\pi f T/2} + T \operatorname{sinc}(Tf)\, e^{-j\pi f T}$$

برای $S_i(f)$ هم باید $R_i(m)$ حساب شود:

$$R_i(m) = \begin{cases} (E\{I_n\})^2 & : m \neq 0 \\ E\{I_n^2\} & : m = 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ \tfrac{1}{4}(2^2 + 2^2) \end{cases} = 2\delta(m)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_v(f) = \frac{2}{T} |G(f)|^2 \\ G(f) = \frac{T}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{Tf}{2}\right) e^{-j\pi f T/2} + T \operatorname{sinc}(Tf)\, e^{-j\pi f T} \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} w(t) = \sum J_n \, g(t - nT) \\ J_n = \end{cases}$$

$$R_j(m) = \mathbb{E}\{(I_{n+m-1} + I_{n+m} + I_{n+m+1})(I_{n-1} + I_n + I_{n+1})\}$$

$$= \begin{cases} 2 & m = \pm 2 \\ 4 & m = \pm 1 \\ 6 & m = 0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$S_j(f) = 6 + 8\cos 4\pi f T + 4 \cos 8\pi f T$$

$$S_w(f) = \frac{1}{T}\left(3 + 4\cos 4\pi f T + 2\cos 8\pi f T\right) |G(f)|^2$$

Problem 9

$$\{a_n\} \quad a_n \in \{\underset{P=\frac{1}{4}}{-1},\ \overset{P=\frac{1}{4}}{2},\ \underset{P=\frac{1}{2}}{0}\} \quad ; \quad r(t) = \sum a_n \operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

(a) ابتدا باید $S_a(f)$ را حساب کنیم که بنابراین کافیست $R_a(m)$ یافت شود

$$R_a(m) = \begin{cases} (E\{a_n\})^2 & ; m \neq 0 \\ E\{a_n^2\} & ; m = 0 \end{cases} = \begin{cases} \left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\times 4 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$S_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_a(m)\, e^{-j2\pi f m T}$$

$$= \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{16}\sum e^{-j2\pi f m T}$$

$$= \frac{19}{16} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{T}\,\delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

$$G(f) = T\,\Pi(Tf) \longrightarrow |G(f)|^2 = T^2\,\Pi(Tf)$$

$$S_r(f) = \frac{1}{T}\left(T^2\,\Pi(Tf)\right) S_a(f)$$

$$= \frac{19}{16}\,T\,\Pi(Tf) + \frac{1}{16}\,\delta(f)$$

(b) $b_n = a_n + a_{n-1} - a_{n-2}$

$$u(t) = \sum b_n \operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

با توجه b_n تعریف شده ←

$$\left[1 + e^{-j2\pi fT} - e^{-j4\pi fT}\right]^2 = 3 - 2\cos(4\pi f t)$$

$$S_u(f) = \frac{19}{16}\left(3 - 2\cos 4\pi fT\right) T\,\Pi(f) + \frac{1}{16}\delta(f)$$

(c)
$$\begin{cases} w(t) = \sum c_n \operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right) \\ c_n = a_n + j\,a_{n-1} \end{cases}$$

$$c_n \longrightarrow \left[1 + j\,e^{-j2\pi fT}\right]^2 = 2 + 2\sin 2\pi fT$$

$$S_w(f) = \frac{19}{16}\left(2 + 2\sin 2\pi f t\right) T\,\Pi(f) + \frac{1}{16}\delta(f)$$

Problem 6

$$\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \quad \text{i.i.d}, \quad a_n \in \{0,1\}$$

(a) $b_n = a_{n-1} \oplus a_n$

$$v(t) = \sum b_n \, g(t - nT)$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$P(b_n = 0) \xrightarrow{\text{if}} \begin{cases} P(a_n = 0, a_{n-1} = 0) = \frac{1}{4} \\ P(a_n = 1, a_{n-1} = 1) = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow P(b_n = 0) = 1/2$$

$$P(b_n = 1) = 1/2$$

$$R_b(m) = \mathbb{E}\{b_{n+m} \, b_n\}$$

$$= \mathbb{E}\{(a_{n+m-1} \oplus a_{n+m})(a_{n-1} \oplus a_n)\}$$

$$= \begin{cases} 1/2 & m = 0 \\ 1/4 & m \neq 0 \end{cases}$$

$$S_b(f) = \left(1/2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

$$S_n(f) = \frac{1}{T} T^2 \operatorname{sinc}^2(Tf) \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4T} \sum \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \right]$$

$$= \boxed{\frac{T}{4} \operatorname{sinc}^2(Tf) + \frac{1}{4} \delta(f)}$$

(b) $b_n = a_{n-1} + a_n$

$$\rightarrow R_b(m) = 2R_a(m) + R_a(m-1) + R_a(m+1)$$

$$R_b(m) = \begin{cases} 1{,}5 \ ; & m = 0 \\ 1{,}25 \ ; & m = \pm 1 \\ 1 \ ; & \text{o.w} \end{cases}$$

$$S_b(f) = 1/2 + \frac{1}{4}\left(e^{j\pi f T} + e^{-j2\pi f T} \right) + \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f m T}$$

$$\Rightarrow S_n(f) = T/2 \operatorname{sinc}^2(Tf) \left[S_b(f) \right]$$

$$= T/2 \operatorname{sinc}^2(Tf) \left[1 + \cos 2\pi f T \right]$$

$$+ \sum \operatorname{sinc}^2(m)\, \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

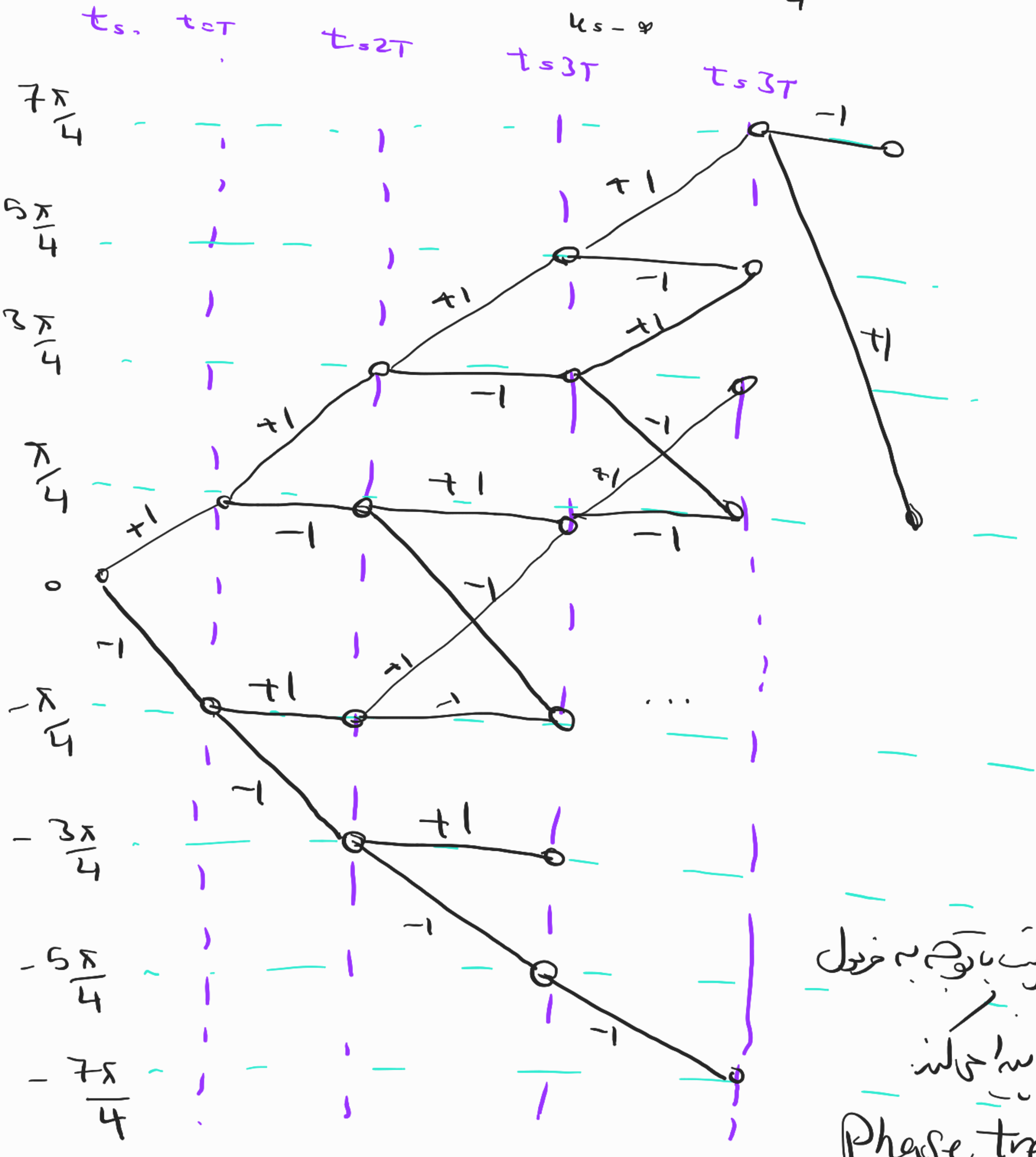
$$= \frac{T}{2} \operatorname{sinc}^2(Tf)\left[1 + \cos 2\pi f T\right] + \delta(f)$$

Problem 11 :

$$h = \tfrac{1}{2} \; ; \quad g(t) = \begin{cases} \frac{1}{4T} & 0 < t < 2T \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$\frac{p}{m} = \frac{1}{2} \in \left\{ \pm \frac{7\pi}{4}, \pm \frac{5\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}, \pm \frac{\pi}{4}, 0 \right\}$$

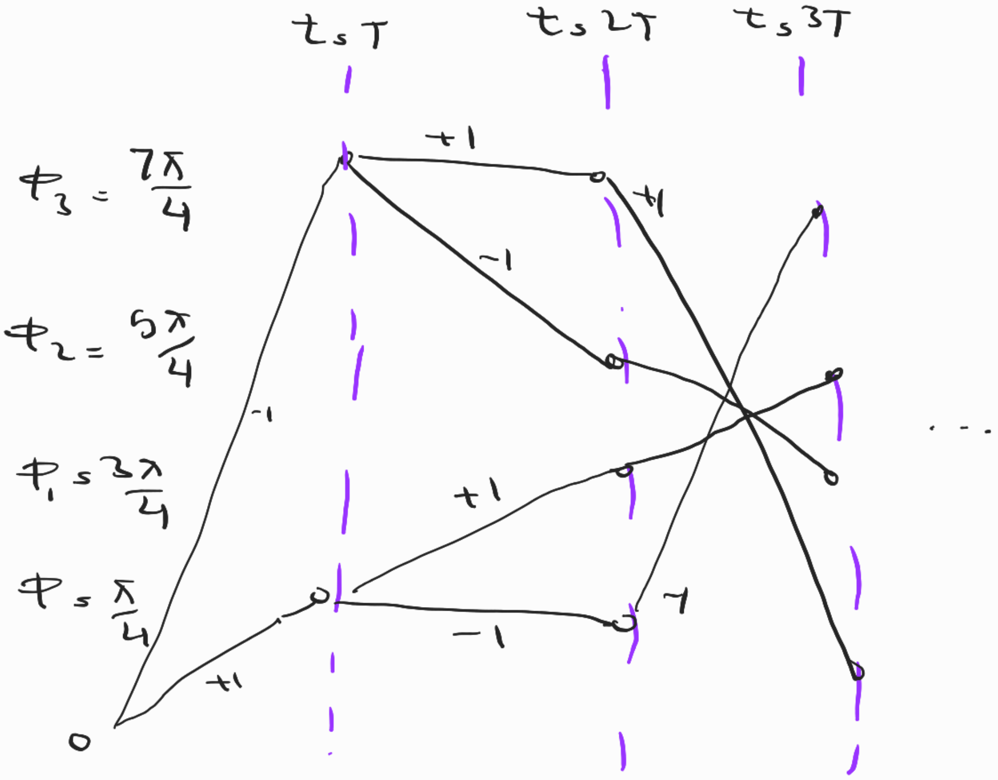
$$R\big((n+1)T; I\big) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{n-1} I_k + \frac{\pi}{4} I_n$$



به همین ترتیب با توجه به خروجی
فوق ادامه پیدا می‌کنند

Phase tree

State trellis:



State diagram: