سری دوم تمرینات مخابرات پیشرفته دکتر الفت

علیرضا حسنی   شماره دانشجویی: ۸۱۰۱۰۱۱۴۲

Problem 1: Chacteristic Y, $E(Y)$, $E(Y^2)$

Y: Random variable , $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$X_i = \begin{cases} 1 & ; p \\ 0 & ; 1-p \end{cases}$$

(1)

تعریف تابع مشخصه : $\Phi_n \triangleq E\{e^{j\omega n}\}$

$$\Rightarrow \Phi_Y = E\{e^{j\omega Y}\} = E\{e^{j\omega \sum_{i=1}^{n} X_i}\}$$

$$= E\{\prod_{i=1}^{n} e^{j\omega n_i}\} = \prod_{i=1}^{n} E\{e^{j\omega n_i}\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \Phi_{n_i}$$

خود n_i در حالت کلی ۲ حالت صفر و یک دارد که :

$$\Phi_{n_i} = e^{j\omega(1)} \times P + e^{j\omega(0)}(1-p) = Pe^{j\omega} + (1-p)$$

$$\Rightarrow \Phi_Y = \left((1-p) + p e^{jw} \right)^n$$

۲

بنابر خواص تابع مشخصه و درس فرایند تصادفی داریم :

$$\frac{\partial^k}{\partial w^k} \Phi_X(w) \Big|_{w=0} = j^k \, \mathbb{E}\{X^k\}$$

$$\Rightarrow E(Y) = -j \frac{\partial \Phi_Y}{\partial w} \Big|_{w=0}$$

$$= -jn\left(1-p+pe^{jw}\right)^{n-1} jpe^{jw} \Big|_{w=0} = np$$

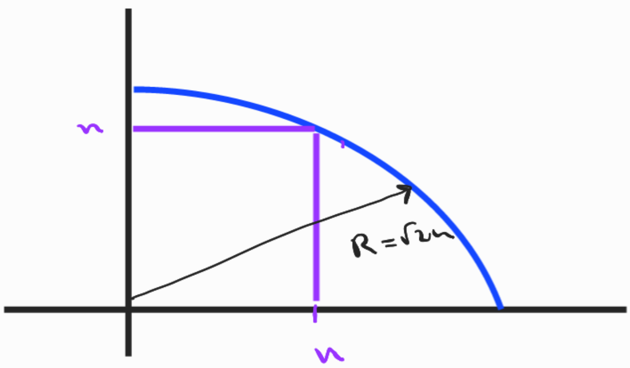
$$E(Y^2) = -\frac{\partial^2 \Phi_Y}{\partial w^2} \Big|_{w=0}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial w}\left[jn\left((1-p)+pe^{jw}\right)^{n-1} p e^{jw} \right]_{w=0}$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np = n^2p^2 + (1-p)np$$

Problem 2 : boundry $Q(x)$

① $u, v > x > 0$



$$\begin{cases} u^2+v^2 = r^2 \\ du\,dv = r\,dr\,d\theta \end{cases}$$

$$\iint_R e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\,du\,dv = \iint_R e^{-r^2/2}\, r\,dr\,d\theta$$

$$\leq \int_{x\sqrt{2}}^{\infty} r e^{-r^2/2}\,dr \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}\left[e^{-r^2/2} \right]_{x\sqrt{2}}^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-x^2}$$

با این نکته که ناحیه R شامل بخش خارج از ربع دایره شکل داده شده است.

می‌توان آن را به صورت زیر هم نوشت :

$$\iint_R e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\,du\,dv = \int_x^{\infty}\int_x^{\infty} e^{-u^2/2} e^{-v^2/2}\,du\,dv$$

$$= \left(\int_x^{\infty} e^{-u^2/2}\,du\right)^2 = 2\pi\, Q(x)^2$$

اگر فرض می‌داشتیم که انتگرال فوق کوچکتر از $\frac{\pi}{2}e^{-x^2}$ باشد:

$$2\cancel{\pi}\, Q^2(x) \le \frac{\cancel{\pi}}{2} e^{-x^2} \Rightarrow Q(x) \le \sqrt{\frac{1}{4} e^{-x^2}}$$

$$Q(x) \le \frac{1}{2} e^{-x^2/2}$$

۲

$$\int_x^{\infty} e^{-y^2/2} \frac{dy}{y^2}$$

صورت انتگرال واضح است که باید جزء به جزء بزنیم:

$$\begin{cases} u = e^{-y^2/2} \\ dv = \dfrac{dy}{y^2} \end{cases} \rightarrow \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\Rightarrow \int_x^{\infty} e^{-y^2/2} \frac{dy}{y^2} = \left[-\frac{e^{-y^2/2}}{y} \right]_x^{\infty} - \int_x^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy$$

$$= \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \sqrt{2\pi}\, Q(x)$$

حاصل انتگرال که مثبت است پس داریم:

$$\frac{e^{-x^2/2}}{x} > \sqrt{2\pi}\, Q(x) \Rightarrow Q(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x} e^{-x^2/2}$$

حد بالا بدست آمد حال بریم سراغ حد پایین:

$$\int_x^\infty e^{-y^2/2}\,\frac{dy}{y^2} < \frac{1}{x^2}\int_x^\infty e^{-y^2/2}\,dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{x^2}Q(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \sqrt{2\pi}\,Q(x) < \frac{\sqrt{2\pi}}{x^2}Q(x)$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2\pi}\,\frac{1+x^2}{x^2}\,Q(x) > \frac{e^{-x^2/2}}{x}$$

$$\Rightarrow \quad Q(x) > \frac{x}{1+x^2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}$$

۳

$$\frac{x}{1+x^2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2} < Q(x) < \frac{1}{x}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}$$

$$\frac{1}{1/x + x} \xrightarrow{x \gg 1} 1/x \to 0 \Rightarrow \frac{1}{x}$$

بنابراین برای x های بزرگ حد ۲ طرف یکی می‌شود پس داریم:

$$Q(x) \simeq 1/x \,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}$$

Problem 3 :

$$Y_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

$X_1, \dots, X_n$: i.i.d , uniform $[0, A]$

(a)

$$F_{Y_n}(y) = P[Y_n \le y]$$

باتوجه به تعریف Y_n بهتر است $P[y \le Y_n]$ را حساب کنیم چون min دارد:

$$F_{Y_n}(y) = 1 - P[Y_n > y]$$

$$= 1 - P[X_1 > y, X_2 > y, \dots]$$

باتوجه به i.i.d بودن تمامی احتمال ها در هم ضرب می شود.

$$F_{Y_n}(y) = 1 - \left(P[X > y]\right)^n$$

$$\hookrightarrow P[X > y] = \frac{A-y}{A}$$

$$\Rightarrow F_{Y_n}(y) = 1 - \frac{(A-y)^n}{A^n} \quad ; \quad 0 \le y \le A$$

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & ; \ y \le 0 \\ 1 - \dfrac{(A-y)^n}{A^n} & ; \ 0 \le y < A \\ 1 & ; \ y \ge A \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{Y_n}(y) = \frac{d}{dy} F_{Y_n}(y)$$

$$= -n \left(\frac{A-y}{A} \right)^{n-1} \times \frac{-1}{A} = \boxed{\frac{n}{A} \left(\frac{A-y}{A} \right)^{n-1}}$$

(b)

$$\begin{cases} n, A \to \infty \\ \frac{n}{A} = \lambda \end{cases} \Rightarrow f_Y(y) = \frac{n}{A} \left(\frac{A-y}{A} \right)^{n-1}$$

$$= \lim_{\substack{A \to \infty \\ n \to \infty}} \lambda \left(1 - \frac{y}{A} \right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \lim_{\substack{A \to \infty \\ n \to \infty}} \lambda \, e^{-y \frac{n-1}{A}\lambda} = \boxed{\lambda e^{-\lambda y} \; ; \; y > 0}$$

Problem 4 : $E\{X_1 X_2 X_3 X_4\}$

$X_i \; ; \; i = 1, 2, 3, 4 : \begin{cases} \text{Zero mean, Jointly Gaussian} \\ C_{ij} = E\{X_i X_j\} \end{cases}$

X_i : توأماً گوسی

$$\Rightarrow Z = w_1 X_1 + w_2 X_2 + w_3 X_3 + w_4 X_4$$

در این حالت Z نیز گوسی میباشد

$$\Phi_{\underline{X}}(w_1, w_2, w_3, w_4) = \mathbb{E}\left\{ e^{j(\underline{Z})} \right\}$$

از طرفی:

$$\frac{\partial^4 \Phi_{\underline{X}}(\underline{w})}{\partial w_1 \partial w_2 \partial w_3 \partial w_4} = E\left\{ j^4 X_1 X_2 X_3 X_4 \, e^{jw_1X_1} e^{jw_2X_2} \cdots \right\}\Bigg|_{w=0}$$

$$= E\{X_1 X_2 X_3 X_4\} \; \boxed{\checkmark}$$

بنابراین کافیست از عبارت فوق ۴ بار مشتق بگیریم.

$$\Phi_{\underline{X}}(\underline{w}) = \mathbb{E}\left\{ e^{j(\underline{Z})} \right\} = \Phi_{\underline{Z}}(w_Z)\Big|_{w(z)=1}$$

$$Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2)$$

$$\Phi_Z(w_Z) = e^{j w_Z \mu_Z - \frac{\sigma_Z^2}{2} w_Z^2}$$

$$\mu_Z = \mathbb{E}\{Z\} = 0 \;,$$

$$\mathbb{E}\{Z^2\} = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + w_4^2\sigma_4^2$$
$$+ 2w_1w_2C_{12} + 2w_1w_3C_{13} + 2w_1w_4C_{14}$$
$$+ 2w_2w_3C_{23} + 2w_2w_4C_{24}$$
$$+ 2w_3w_4C_{34}$$

$$\Rightarrow \Phi_z(w_z) = e^{-\frac{\mathbb{E}\{z^2\}}{2}} = e^{-1/2\left(\mathbb{E}\{z^2\}\right)}$$

$$u \triangleq -1/2\, \mathbb{E}\{z^2\}$$

$$\Phi_z(w_z) = \Phi_{\underline{x}}(\underline{w}) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_{\underline{x}}(\underline{w})}{\partial w_1} = e^u u_1 \\ u_1 \triangleq \dfrac{\partial u}{\partial w_1} \end{cases}$$

به همین ترتیب :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Phi_{\underline{x}}(\underline{w})}{\partial w_1 \partial w_2} = e^u u_2 u_1 + e^u u_{12} \\ u_1 \triangleq \dfrac{\partial u}{\partial w_1}, \quad u_2 \triangleq \dfrac{\partial u}{\partial w_2}, \quad u_{12} \triangleq \dfrac{\partial}{\partial w_2}\left(\dfrac{\partial}{\partial w_1} u\right) = \boxed{-C_{12}} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{سوم}]{\text{برای}} \frac{\partial^3 \Phi_{\underline{x}}(\underline{w})}{\partial w_1 \partial w_2 \partial w_3} = e^u u_3 u_2 u_1 + e^u u_1 u_{23} + e^u u_2 u_{13} + e^u u_3 u_{12}$$

و در نهایت برای مشتق چهارم :

$$\frac{\partial^4 \Phi_{\underline{x}}(\underline{w})}{\partial w_4 \partial w_3 \partial w_2 \partial w_1} = e^u u_4 u_3 u_2 u_1 + e^u u_2 u_1 u_{34} + e^u u_3 u_1 u_{24} + e^u u_3 u_2 u_{14} + e^u u_4 u_1 u_{23} + e^u u_{14} u_{23} + e^u u_4 u_2 u_{13} + e^u u_{24} u_{13} + e^u u_4 u_3 u_{12} + e^u u_{34} u_{12}$$

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial w_i}\Big|_{w_1,\dots=0} = 0 \quad , \quad \boxed{u_{ij} = -C_{ij}}$$

$$e^{u}\Big|_{\underline{w}=0} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^4 \Phi_{\underline{x}}(\underline{w})}{\partial w_1 \partial w_2 \partial w_3 \partial w_4} = E\{X_1 X_2 X_3 X_4\}$$

$$= u_{14}u_{23} + u_{24}u_{13} + u_{34}u_{12}$$

$$= C_{14}C_{23} + C_{24}C_{13} + C_{34}C_{12}$$

Problem 5:

$$P(\underset{\text{Rayleigh}}{R} > \underset{\text{Ricean}}{R}) = \frac{1}{2} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4\sigma^2}}$$

$$f_{R_0}(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} & ; r > 0 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_{R_1}(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} I_0\left(\frac{\varepsilon r}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{r^2+\varepsilon^2}{2\sigma^2}} & ; r > 0 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

با توزیع مشترک را بدست آوریم و روی ناحیه‌ای که $R_0 > R_1$ می‌باشد انتگرال را حساب کنیم.

independent $\longrightarrow$ $f_{R_0R_1}(r_0,r_1) = f_{R_0}(r_0)\, f_{R_1}(r_1)$

$$P(R_0 > R_1) = \iint_{r_0 > r_1} f(r_0,r_1)\, dr_1\, dr_0$$

$$= \int_0^{\infty} dr_1 \int_{r_1}^{\infty} f(r_0,r_1)\, dr_0$$

$$= \int_0^{\infty} dr_1 \int_{r_1}^{\infty} f_{R_1}(r_1)\, f_{R_0}(r_0)\, dr_0$$

$$= \int_0^{\infty} f_{R_1}(r_1) \left[\int_{r_1}^{\infty} f_{R_0}(r_0)\, dr_0 \right] dr_1$$

$$= \int_0^{\infty} f_{R_1}(r_1) \left[-e^{\frac{-r_0^2}{2\sigma^2}} \right]_{r_1}^{\infty} dr_1$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{r_1}{\sigma^2} I_0\left(\frac{\ell r_1}{\sigma^2}\right) e^{\frac{-(r_1^2+\ell^2)}{2\sigma^2}}\, e^{\frac{-r_1^2}{2\sigma^2}}\, dr_1$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{r_1}{\sigma^2} I_0\left(\frac{\ell r_1}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{\ell^2+2r_1}{2\sigma^2}}\, dr_1$$

$$\xrightarrow{\text{تغيير متغير}} = \int_0^\infty \frac{y}{\sqrt{2}\,\sigma^2} I_0\left(\frac{z y}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{2z^2+y^2}{2\sigma^2}} \frac{dy}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{2}\, r_1 \\ z = \dfrac{t}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{y}{\sigma^2} I_0\left(\frac{z y}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{z^2+y^2}{2\sigma^2}} dy}_{1 = \text{استدلال تكامل توزيع Rician}}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}}$$

Problem 6 :

$z = X + jY \;,\quad X \perp Y \;,\quad \mathbb{E}\{X\} = \mathbb{E}\{Y\} = 0$

$E\{X^2\} = E\{Y^2\} = \sigma^2 \;,\quad R = z + m = A + jB$

$A = X + m_r \;,\quad B = Y + m_i$

(a) $P_{A,B}(a,b) = ?$

$$P_{A,B}(a,b) = P_{xy}(a - m_r,\, b - m_i)$$

independent $\longrightarrow$ $= P_x(a-m_r)\, P_y(b-m_i)$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}\left[(a-m_r)^2 + (b-m_i)^2 \right] \right\}$$

(b) $P_{V,\phi}(u,\phi) = ?$ $\qquad V = \sqrt{A^2+B^2}\,, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$

قطبی کردن $\longrightarrow$ $\begin{cases} a = u\cos\phi \\ b = u\sin\phi \end{cases}$

$$J(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial a}{\partial \phi} \\ \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -u\sin\phi \\ \sin\phi & u\cos\phi \end{bmatrix}$$

$$= u\cos^2\phi + u\sin^2\phi = u$$

$$P_{V,\phi}(u,\phi) = \frac{J(a,b)}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}\left[(u\cos\phi - m_r)^2 + (u\sin\phi - m_i)^2 \right] \right\}$$

$$= \frac{u}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}\left[u^2 + M^2 - 2uM\cos(\phi-\theta) \right] \right\}$$

$$\begin{cases} M = \sqrt{m_i^2 + m_r^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{m_i}{m_r} \end{cases}$$

(c) $P_V(u) = ?$

$$P_V(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{U,\Phi}(u,\phi)\,d\phi = \int_{0}^{2\pi} P_{U,\Phi}(u,\phi)\,d\phi$$

$$= \frac{u}{2\pi\sigma^2}\, e^{-\frac{u^2+m^2}{2\sigma^2}} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[-2uM\cos(\phi-\theta)\right]}\,d\phi$$

$$= \frac{u}{\sigma^2}\, e^{-\frac{u^2+m^2}{2\sigma^2}}\, I_0\!\left(\frac{uM}{\sigma^2}\right)$$

Problem 7: Z: Proper $\Longrightarrow$ $W = AZ+b$: Proper

$Z \rightarrow$ Proper $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[\tilde{z}\,\tilde{z}^t] = 0$

$* \ \tilde{z} = z - \mathbb{E}\{z\}$

$\Rightarrow \ w = Az + b$

$$\mathbb{E}\{\tilde{w}\,\tilde{w}^t\} = E\{(w - \mathbb{E}\{w\})(w - \mathbb{E}\{w\})^t\}$$

$$= A\,\underbrace{E\{\tilde{z}\,\tilde{z}^t\}}_{\text{صفر}}\,A^t = 0$$

بنابراین w هم Proper خواهد شد

Problem 8 : $X(t), Y(t)$; jointly stationary

1 $\quad Z(t) = X(t) + j\,Y(t)$

$$R_{zz}(\tau) = \mathbb{E}\left\{ \left(x(t+\tau) + y(t+\tau)\right)\left(x(t) + y(t)\right) \right\}$$

$$= R_{xx}(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) + R_{yy}(\tau)$$

۲ $\quad x(t), y(t)$: uncorrelated !

$$R_{zz}(\tau) = R_{xx}(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) + R_{yy}(\tau)$$

uncorrelated $\longrightarrow$

$$\begin{cases} R_{xy}(\tau) = \mathbb{E}\left(x(t+\tau)\,y(t)\right) = \mathbb{E}\left(x(t+\tau)\right)\mathbb{E}\left(y(t)\right) \\ \qquad\qquad = m_x m_y \\ R_{yx} = m_x m_y \end{cases}$$

چون stationary پس

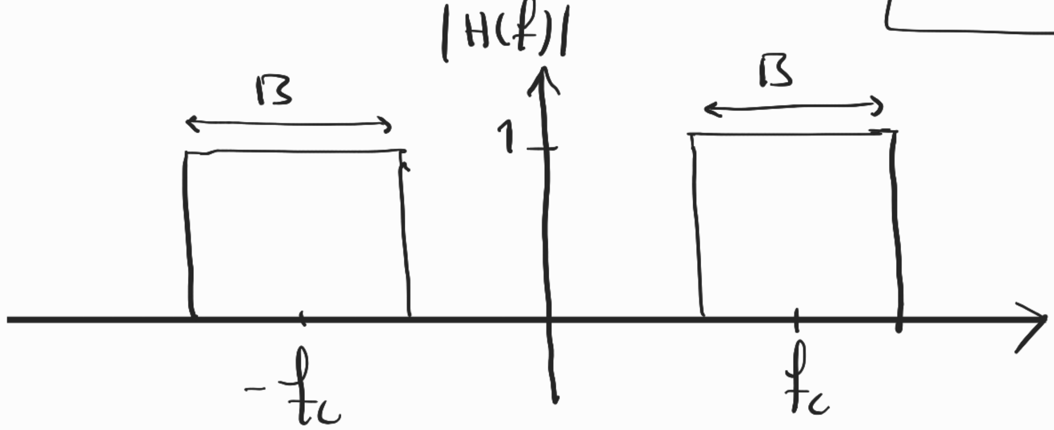
$$\Rightarrow R_{zz}(\tau) = R_{xx}(\tau) + R_{yy}(\tau) + 2\,m_x m_y$$

۳ $\quad$ uncorrelated, zero mean

$$R_{zz}(\tau) = R_{xx}(\tau) + R_{yy}(\tau)$$

Problem 9 : Noise Power output of the filter

$R_X(\tau) = \frac{1}{2} N_0 \, \delta(\tau)$ $\qquad n(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$



$$S_X(f) = F\{R_X(\tau)\} = \frac{N_0}{2}$$

$$S_Y(f) = S_X(f)\,|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2$$

Total Power $\quad R_Y(\tau)\Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)\,df$

$$= \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}\,2B$$

$$= \boxed{N_0 B}$$

Problem 1c: $\quad Cov(Y)$

$$Cov(X_1, X_2, X_3) = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} \\ 0 & c_{22} & 0 \\ c_{31} & 0 & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$Y = AX, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_Y = \mathbb{E}\left\{ (Y - \underline{\mu}_y)(Y - \underline{\mu}_Y)^H \right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{ A(X - \mu_x)(x - \mu_x)^H A^H \right\} = A\, C_X\, A^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} \\ 0 & c_{22} & 0 \\ c_{31} & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{11} + c_{13} \\ 0 & 4c_{22} & 0 \\ c_{11} + c_{31} & 0 & c_{11} + c_{13} + c_{31} + c_{33} \end{bmatrix}$$

Problem 11 : $V(t) \Rightarrow$ if condition $\Longleftrightarrow$ $V(t)$ is WSS

$$V(t) = X \cos 2\pi f_c t - Y \sin 2\pi f_c t$$

$$\text{Condition} \rightarrow \begin{cases} E(X) = E(Y) = 0 \\ E(X^2) = E(Y^2) \\ E(XY) = 0 \end{cases}$$

برای WSS بودن ۲ تا شرط باید ارضا شود یکی این که میانگین یک عدد ثابت شود دوم این که $R_n(t,t+\tau) = R_n(\tau)$ شود.

$$\mathbb{E}\{V(t)\} = E\{X\} \cos 2\pi f_c t - E\{Y\} \sin 2\pi f_c t$$

$$\xrightarrow{E(X) = E(Y) = 0} E\{(V(t))\} = 0 \quad \boxed{\checkmark}$$

$$R_n(t, t+\tau) = \mathbb{E}\{ [X \cos 2\pi f_c t - Y \sin 2\pi f_c t] \cdot [X \cos 2\pi f_c (t+\tau) - Y \sin 2\pi f_c (t+\tau)] \}$$

$$= \mathbb{E}\{X^2\} [\cos 2\pi f_c (2t+\tau)]$$

$$+ E\{Y^2\} [-\cos 2\pi f_c (2t+\tau) + \cos 2\pi f \tau]$$

$$- E(XY) \sin 2\pi f (2t+\tau)$$

$$E\{x^2\} = E\{y^2\} \quad \xrightarrow{\hspace{3cm}} \quad R_n(t, t+\tau) = E\{Y^2\} \cos 2\pi f \tau$$
$$E\{xy\} = 0$$

$$= R_n(\tau) \quad \boxed{\checkmark}$$

بنابراین این شرایط باشد WSS می‌باشد و برعکس اگر WSS باشد

باید شرایط ذکر شده برقرار باشد.

Problem 12: $R_x(t+\tau, t) = ?$

$$X(t) = A \sin(2\pi f_c t + \theta), \quad P(\theta) = 1/2\pi \; ; \; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$R_x(t+\tau, t) = E\{X(t+\tau) X(t)\}$$

$$= A^2 \, \mathbb{E}\{\sin(2\pi f_c(t+\tau) + \theta) \sin(2\pi f_c t + \theta)\}$$

$$= \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_c \tau - \frac{A^2}{2} \underbrace{\mathbb{E}\{\cos[2\pi f_c(2t+\tau) + 2\theta]\}}_{\mathrm{I}}$$

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_c(2t+\tau) + 2\theta) \, P(\theta) \, d\theta$$

$$= 1/2\pi \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_c(2t+\tau) + 2\theta = 1/2\pi (0) = \boxed{0}$$

$$\Rightarrow \quad R_X(t+\tau, t) = \frac{A^2}{2}\cos 2\pi f_c \tau$$

Problem 13 :

$x(t) \xrightarrow{\text{proper}}$ LTI $\xrightarrow{\text{proper ?}} y(t)$

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

برای بررسی این که $y(t)$ ، proper هست یا نه باید به Cov^+ آن

یعنی به $y(t)\, y(t+\tau)$ توجه شود با توجه به این که $x(t)$ ، proper

می‌باشد پس $Cov_x^+ = 0$

و از طرفی نیز عملاً $*$ سر جمع‌ها می‌آید و $Cov_Y^+ = \boxed{0}$ می‌شود

چون عملاً سیستم LTI بین correlation جدید نقش

حقیقی و موهومی سیگنال ورودی ایجاد نمی‌کند. بنابراین $y(t)$ هم

proper می‌شود.

Problem 14 : $n(t) \xrightarrow[\text{Gauss \& circular}]{} \boxed{LTI} \to y(t)$

کاملا به همان دلیل مطرح شده در بخش قبلی و حتمی بود * و عدم

ایجاد correlation بین real و image در این جا نیز $y(t)$ یک

circular process می باشد

* اثبات اینکه واریانس بخش real و image یکی می شود:

$$n(t) = n_r(t) + j\, n_i(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = y_r(t) + j\, y_i(t)$$

$$\begin{cases} y_r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n_r(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \\ y_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n_i(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[n_r(t)\, n_i(t')] = 0 \quad \text{for all } t, t'$$

$$\mathbb{E}[y_r(t)\, y_i(t')] = \iint_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{E}[n_r(\tau)\, n_i(\tau')]}_{=0}\, h(t-\tau)\, h(t'-\tau')\, d\tau\, d\tau'$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[y_r(t)\, y_i(t')] = 0$$

* با توجه به این که ورودی گسسته می‌باشد خروجی نیز گسسته است.