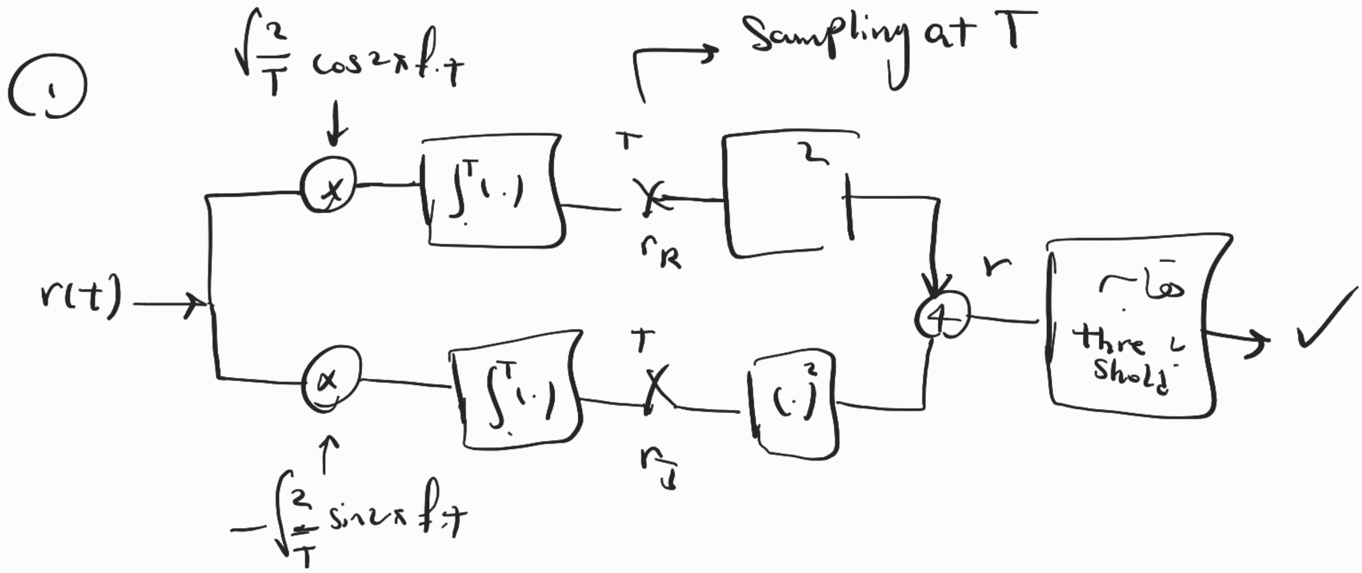
تمرین سری ششم مخابرات پیشرفته

Problem 1 :

$$s_0(t)=0\,,\quad s_1(t)=\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}}\cos 2\pi f_c t \qquad 0\le t\le T_b$$

$$\begin{cases} r(t)=n(t) \\ r(t)=\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}}\cos(2\pi f_c t+\phi)+n(t) \end{cases}$$

1



2

$s_0(t)\longrightarrow$ send $\longrightarrow$ PDF: rayleigh $\quad r=\sqrt{r_R^2+r_I^2}$

$$P(r\mid s_0(t))=\frac{r}{\sigma^2}e^{-r^2/2\sigma^2}=\frac{2r}{N_0}e^{-r^2/N_0}$$

$s_1(t)\longrightarrow$ send

$$r_R = \int_0^T r(t)\sqrt{\frac{2}{T}}\cos 2\pi f_c t \, dt$$

$$= \int_0^T 2\frac{\sqrt{E_b}}{T}\cos(2\pi f_c t+\phi)\cos 2\pi f_c t \, dt$$

$$+ \int_0^T n(t)\sqrt{\frac{2}{T}}\cos 2\pi f_c t \, dt$$

$$= \sqrt{E_b}\cos\phi + n_R$$

$$r_I = \sqrt{E_b}\sin\phi + n_I$$

$\rightarrow$ Rician توزیع

$$\Rightarrow P(r \mid s_1(t)) = \frac{2r}{N_0} e^{-\frac{r^2+E_b}{N_0}} I_0\left(\frac{2r\sqrt{E_b}}{N_0}\right)$$

۳ $P[E] = \frac{1}{2}P[H_0 \mid H_1] + \frac{1}{2}P[H_1 \mid H_0]$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{V_T} P(r \mid s_1)\, dr + \frac{1}{2}\int_{V_T}^{\infty} P(r \mid s_0)\, dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{V_T} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2+E_b}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{r\sqrt{E_b}}{\sigma^2}\right) dr$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{V_T}^{\infty} \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}\, dr$$

ترشولد $V_T \cong \frac{\sqrt{E_b}}{2}$ $\leftarrow$ از قبل می‌دانیم که اگر $\frac{E_b}{N_0} \gg 1$

$$I_0(x) \simeq \frac{e^{x}}{\sqrt{2\pi x}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{V_T} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2+\mathcal{E}_b}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{r\sqrt{\mathcal{E}_b}}{\sigma^2}\right) dr \simeq \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{\mathcal{E}_b}}{2}} \underbrace{\sqrt{\frac{r}{2\pi\sigma^2\sqrt{\mathcal{E}_b}}}}_{\to \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}}} e^{-\frac{(r-\sqrt{\mathcal{E}_b})^2}{2\sigma^2}} dr$$

$$= \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{2N_0}}\right)$$

$$P_e \simeq \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{2N_0}}\right) + \frac{1}{2}\int_{V_T}^{\infty} \frac{2r}{N_0} e^{-r^2/N_0} dr$$

$$\leq \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_b}{2N_0}}\right) + \frac{1}{2} e^{-\frac{\mathcal{E}_b}{4N_0}}$$

Problem 2 :

$$r = \frac{R_b}{W} = \frac{2\log_2 M}{N} \Rightarrow W = \frac{R_b N}{2\log_2 M}$$

طبق کلاس درس داریم :

① orthogonal BFSK

$M=2,\ N=2 \rightarrow W = \frac{R_b \times 2}{2} = R_b$

② 8PSK

$M=8,\ N=2,\ W = \frac{R_b \times 2}{2\times 3} = R_b/3$

③ QPSK

$M=4,\ N=2,\ W = \frac{R_b}{2}$

④ 64 QAM

$M=64,\ N=2 \rightarrow W = \frac{R_b \times 2}{2\times 6} = \frac{R_b}{6}$

⑤ BPSK

$M=2,\ N=2,\ W = R_b$

⑥ orthogonal 16-FSK

$M=16,\ N=16 \rightarrow W = \frac{R_b \times \cancel{16}^{\,4}}{2\times \cancel{4}} = \boxed{2R_b}$

Problem 3 :

$$S_1(t) = S(t), \quad S_2(t) = -S(t)$$

(1)

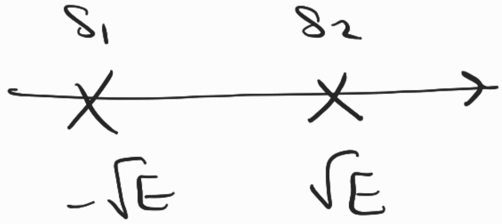
وقتی گیرنده وضعیت سوییچ را می‌داند و با توجه به احتمال برابر:

$$P(S=\text{closed}) = P(S=\text{open}) = 1/2$$

شرط تصمیم به صورت زیر می‌باشد.

$$\hat{m} = \arg\max\{P(S=\text{closed})\,P(r_1, r_2 \mid H_m, S=\text{closed}) + P(S=\text{open})\,P(r_1, r_2 \mid H_m, S=\text{open})\}$$

با توجه کانستلیشن داریم.



در حالت روشن بودن ۲تا گوسی داریم به سیگنال‌های $\sqrt{E}$ یا $-\sqrt{E}$ در غیر صورت

یکی سیگنال‌اش $\sqrt{E}$ و دیگری صفر می‌باشد.

$$\tfrac{1}{2}\exp\left\{-\frac{(r_1-\sqrt{E})^2+(r_2-\sqrt{E})^2}{2N_0/2}\right\}+\tfrac{1}{2}\exp\left(-\frac{r_1^2+(r_2-\sqrt{E})^2}{N_0}\right)$$

$$\underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ \tfrac{1}{2}\exp\left\{-\frac{(r_1+\sqrt{E})^2+(r_2+\sqrt{E})^2}{2N_0/2}\right\}+\tfrac{1}{2}\exp\left(-\frac{r_1^2+(r_2+\sqrt{E})^2}{N_0}\right)$$

$$\Rightarrow \exp\left\{-\frac{r_1^2+E-2r_1\sqrt{E}+r_2^2+E-2r_2\sqrt{E}}{N_0}\right\}$$

$$+\exp\left\{-\frac{r_1^2+r_2^2+E-2r_2\sqrt{E}}{N_0}\right\}$$

$$\underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ \exp\left\{-\frac{r_1^2+E+2r_1\sqrt{E}+r_2+E+2r_2\sqrt{E}}{N_0}\right\}$$

$$+\exp\left\{-\frac{r_1^2+r_2^2+E+2r_2\sqrt{E}}{N_0}\right\}$$

فاکتور بگیریم:

$$\exp\left\{\frac{4r_2\sqrt{E}}{N_0}\right\}\ \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}}\ \frac{1+\exp\left\{\frac{-E-2r_1\sqrt{E}}{N_0}\right\}}{1+\exp\left\{\frac{-E+2r\sqrt{E}}{N_0}\right\}}$$

(۲)

نویز اضافی و عملا $\Leftarrow r_1 = n_1 \leftarrow$ open

فقط r_2 کافی است و

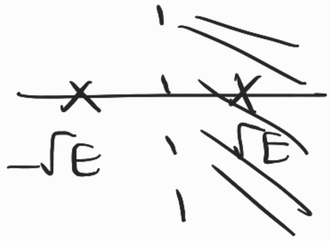
sufficient

است

$\arg\max\{p(r_1,r_2 \mid H_m)\} \leftarrow$ close

$\leftarrow$ ۲ حالت داریم

open $\rightarrow$ e



ترشولد برای صفر و یک‌ها یکی

$$\boxed{r_2 \gtrless 0}$$

و در این حالت احتمال خطا :

$$Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{2N_0}}\right)$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

close :

$$P(r_1, r_2 \mid S = -\sqrt{E}) \gtrless P(r_1, r_2 \mid S = +\sqrt{E})$$

$$\exp\left\{-\frac{(r_1+\sqrt{E})^2 + (r_2+\sqrt{E})^2}{N_0}\right\} \gtrless \exp\left\{-\frac{(r_1-\sqrt{E})^2 + (r_2-\sqrt{E})^2}{N_0}\right\}$$

$$-2r_1\sqrt{E} - 2r_2\sqrt{E} \gtrless 2r_1\sqrt{E} + 2r_2\sqrt{E}$$

$$\boxed{r_1 + r_2 \lessgtr 0}$$

در حالت $S=\text{close}$:

$$P[E] = P[H_1 \mid H_2]\,\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,P[H_2 \mid H_1]$$

$$P[H_2 \mid H_1] = P[n_1 + n_2 > 2\sqrt{E}] = Q\left(\frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{4E}{N_0}}\right)$$

$$P[E]\Big|_{S=\text{close}} = P[H_2 \mid H_1]$$

بنابراین در حالت کلی :

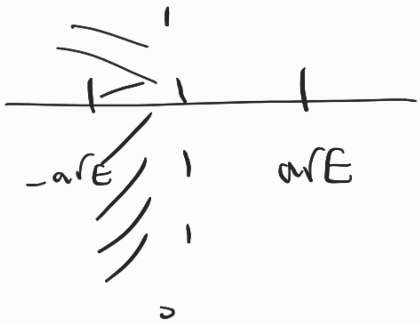
$$\Rightarrow \quad P[E] = \underbrace{\tfrac{1}{2}\, Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)}_{\text{جمله غالب}} + \tfrac{1}{2}\, Q\left(\sqrt{\frac{4E}{N_0}}\right)$$

$$P[E] \simeq \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

Problem 4 :

$r = aS_m + n$; $P(a) = \begin{cases} \frac{2a}{\Omega} e^{-a^2/\Omega} & a \geq 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$

① باتوجه به مثبت بودن a و coherent بودن کانال مرزی با AWGN نداشته و آستانه صفر میباشد و گوسی تقسیم هم مانند کانال AWGN میباشد.



② $\frac{P_{es}}{k} < P_{e,bit} < P_{es}$

$k = \log_2 2 = 1 \Rightarrow P_{e,bit} = P_{es}$

$$P_{es} = Q\left(\frac{2a\sqrt{E}}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(a\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

حال باید روی a بین E میانگیریم.

قبل از این کار نیاز به یک اثبات داریم:

Rayleigh : $f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}$

$$\begin{cases} E\{Q(\alpha X)\} = ? \\ \alpha > 0 \end{cases}$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha x}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt \right] \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \int_0^{t/\alpha} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2/2} \left(1 - e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2\sigma^2}} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}\left(1 + \frac{1}{\alpha^2\sigma^2}\right)}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2\sigma^2}{1+\alpha^2\sigma^2}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\overbrace{t^2\left(\frac{1+\alpha^2\sigma^2}{\alpha^2\sigma^2}\right)}^{s^2}/2}\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\alpha^2\sigma^2}{1+\alpha^2\sigma^2}} \right)$$

حل با توجه به فرمول اثبات شده $\alpha^2 = 2E_b/N_0$ ، σ^2 برابر با $\Omega/2$

$$E\left\{ a\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right\} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\frac{\Omega}{2}\, 2E_b/N_0}{1 + \frac{\Omega}{2}\, 2E_b/N_0}} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\Omega E_b/N_0}{1 + \Omega E_b/N_0}} \right)$$

اگر $\Omega = 1$ باشد حکم ثابت می‌شود. و در ادامه با فرض

$\Omega = 1$ داریم:

$$\text{large SNR}: \quad \frac{E_b/N_0}{1+E_b/N_0} = \frac{1}{\frac{1}{E_b/N_0}+1}$$

$$\simeq -\frac{1}{E_b/N_0} + 1 \simeq \left(1 - \frac{1}{2E_b/N_0}\right)^2$$

$$\Rightarrow P_{e,bit} \simeq \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{1}{2E_b/N_0}\right) = \boxed{\frac{1}{4E_b/N_0}}$$

۳

$$\text{AWGN} \to 10^{-5} \to$$

$$P_e = Q\left(\frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2E}{N_0}} = 4{,}26 \to E/N_0 = 9{,}07$$

$$\Rightarrow 10 \log 9{,}07 = 9{,}576 \text{ dB} \simeq \boxed{9{,}6 \text{ dB}}$$

fading $\rightarrow \quad 10^{-5} = \frac{1}{4 E_b/N_0} \Rightarrow E_b/N_0 = \frac{10^5}{4} = 44\ \text{dB}$

که اختلاف آن‌ها ۳۴٫۴ dB بیشتر شد.

(4)

$$P_e = \tfrac{1}{2} e^{-a^2 E_b/2N_0}$$

برای متعامدها داریم:

که در این جا هم باید $\mathbb{E}$ بگیریم روی a و حل از آن رابطه زیر را داریم.

$$f_\alpha(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$$\mathbb{E}\{e^{-\alpha X^2}\} = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \frac{1}{1+2\alpha\sigma^2} \int_0^\infty s e^{-s^2/2} ds \ ; \quad s = x\sqrt{\frac{1+2\alpha\sigma^2}{\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{1+2\alpha\sigma^2} \simeq \frac{1}{2\alpha\sigma^2}$$

بنابراین در حالت متعامد:

$$P_e \simeq \frac{1}{1 + 2\frac{E_b}{2N_0} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2 + E_b/N_0}$$