تمرین شماره 1

علیرضا حسینی

شماره دانشجویی : ۸۱۰۱۰۱۱۴۲

مدل های مولد عمیق

دکتر توسلی پور و دکتر صادقی

پاییز 1402

فهرست مطالب

فهرست اشکال

۱-۱- سوال ۱

1-1-1- بخش ۱

شرایطی که $Z_5 = 0$ میشود :

$$\begin{cases} X_2 = 1 \;, \quad X_3 = 1 \;\; ==> P(X_2 = 1\,, X_3 = 1\,) = q^2 \\ X_2 = 0 \;, \quad X_3 = 0 \;\; ==> P(X_2 = 1\,, X_3 = 1\,) = (1-q)^2 \end{cases}$$

شرایطی که $Z_5 = 1$ میشود :

$$\begin{cases} X_2 = 1 \;, \quad X_3 = 0 \;\; ==> P(X_2 = 1\,, X_3 = 0\,) = q\,(1-q) \\ X_2 = 0 \;, \quad X_3 = 1 \;\; ==> P(X_2 = 0\,, X_3 = 1\,) = (1-q)q \end{cases}$$

$$P(X_2 = 0\,, X_3 = 0\,|Z_5 = 0\,) = \frac{(1-q)^2}{(1-q)^2 + q^2}$$

$$P(X_2 = 1\,, X_3 = 1\,|Z_5 = 0\,) = \frac{q^2}{(1-q)^2 + q^2}$$

$$P(X_2 = 1\,, X_3 = 0\,|Z_5 = 1\,) = \frac{q(1-q)}{2q(1-q)} = \frac{1}{2}$$

$$P(X_2 = 0\;\,, X_3 = 1\,|Z_5 = 1\,) = \frac{1}{2}$$

احتمال سایر حالات برابر صفر است.

1-1-2- بخش ۲

جدول احتمالات را میتوان به صورت زیر آورد :

$$\begin{cases} X_i = 1 ==> p = q \\ X_i = 0 ==> p = 1-q \end{cases}$$

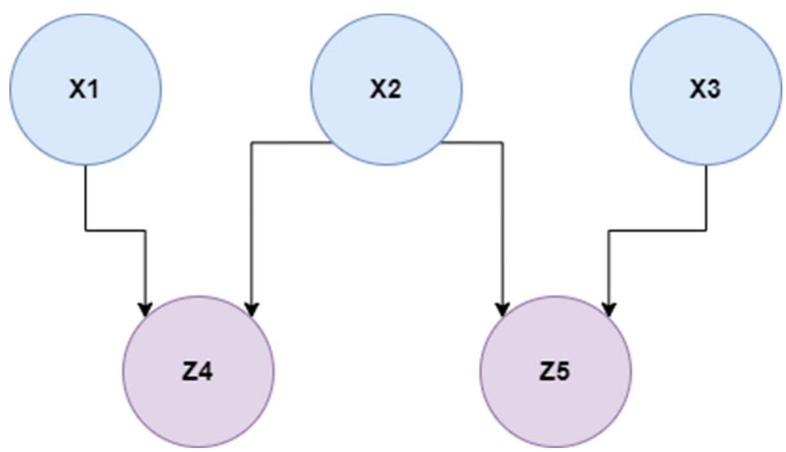
$$\begin{cases} X_1 = 0\,, X_2 = 0 \;\; ==> P(Z_4 = 0) = 1 \\ X_1 = 0\,, X_2 = 1 \;\; ==> P(Z_4 = 0) = 0 \\ X_1 = 1\,, X_2 = 0 \;\; ==> P(Z_4 = 0) = 0 \\ X_1 = 1\,, X_2 = 1 \;\; ==> P(Z_4 = 0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = 0\,, X_2 = 0 \implies P(Z_4 = 1) = 0 \\ X_1 = 0\,, X_2 = 1 \implies P(Z_4 = 1) = 1 \\ X_1 = 1\,, X_2 = 0 \implies P(Z_4 = 1) = 1 \\ X_1 = 1\,, X_2 = 1 \implies P(Z_4 = 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = 0\,, X_3 = 0 \implies P(Z_5 = 0) = 1 \\ X_2 = 0\,, X_3 = 1 \implies P(Z_5 = 0) = 0 \\ X_2 = 1\,, X_3 = 0 \implies P(Z_5 = 0) = 0 \\ X_2 = 1\,, X_3 = 1 \implies P(Z_5 = 0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{gathered} X_2 = 0\,, X_3 = 0 \implies P(Z_5 = 1) = 0 \\ X_2 = 0\,, X_3 = 1 \implies P(Z_5 = 1) = 1 \\ X_2 = 1\,, X_3 = 0 \implies P(Z_5 = 1) = 1 \\ X_2 = 1\,, X_3 = 1 \implies P(Z_5 = 1) = 0 \end{gathered}$$

با توجه به صورت سوال دیاگرام آن به صورت زیر میباشد.



شکل (۱-۱) مدل احتمالی جهت دار سوال ۱

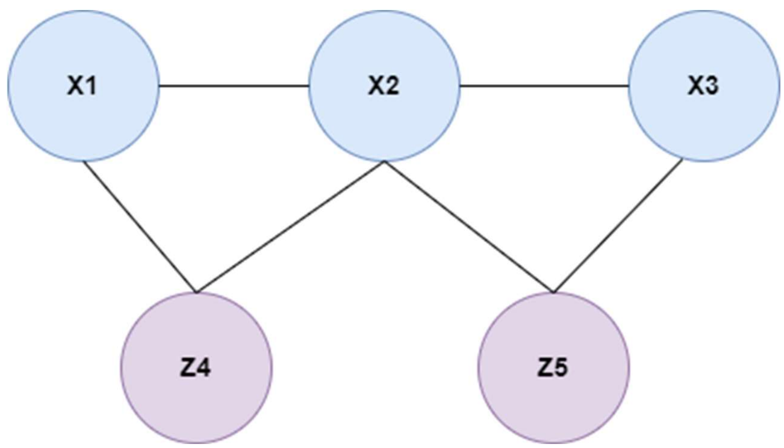
با توجه به شکل فوق Z4 و Z5 تشکیل V-Structure میدهند

روابط استقلال به فرم زیر میباشد : (به جز استقلال Xi ها با هم)

$$X_1 \perp Z_5$$
$$X_1 \perp X_2 \mid Z_5$$
$$X_1 \perp X_3 \mid Z_5$$
$$X_2 \perp X_3 \mid Z_4$$
$$X_3 \perp Z_4 \mid (X_1, X_2, Z_5)$$
$$Z_4 \perp Z_5 \mid X_2$$
$$X_1 \perp Z_5 \mid X_2$$
....

همچنان هم میتوان روابط متفاوت دیگری نوشت.

3-1-1- بخش سوم



شکل (۲-۱) گراف بدون جهت سوال ۱

در این حالت potenstial functions را میتوان به صورت زیر نوشت :

$$\emptyset(x_1, x_2, Z_4) = p(x_1)p(x_2)p(z_4|x_1, x_2)$$
$$\emptyset(x_2, x_3, z_5) = p(x_2)p(x_3)p(z_5|x_2, x_3)$$

روابط استقلال در این حالت میتوان به حالات زیر اشاره کرد :

$$X_1 \perp X_3 \mid X_2$$
$$Z_4 \perp Z_5 \mid X_2$$

$$Z_4 \perp X_3 \mid X_2 , Z_5$$
$$X_1 \perp Z_5 \mid X_2$$
And ..

1-1-4- بخش ۴

چون مستقل هستند پس باید داشته باشیم :

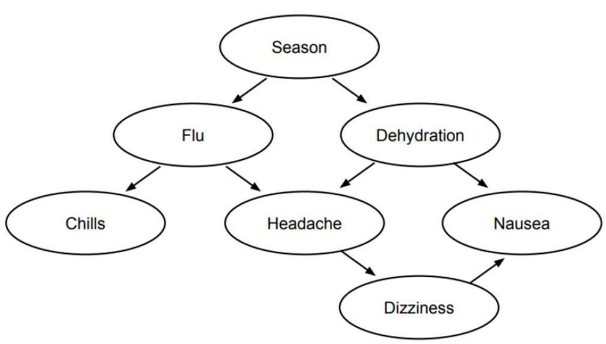
$$p(Z_5 = 1) = p(Z_5 = 1 \mid X_3 = 1) = p(Z_5 = 1 \mid X_3 = 0)$$
$$p(Z_5 = 1 \mid X_3 = 1) = 1 - q$$
$$p(Z_5 = 1 \mid X_3 = 0) = q$$

میدانیم q دربازه ۰ تا ۱ میباشد و شرط لازم و کافی برای استقلال همیشگی این است که q برابر ½ باشد که شرط های marginal به کمک گراف ها قابل تشخیص نمیباشد.

۱-۲- سوال ۲

1-2-1- مقدمه

شکل زیر گراف مساله میباشد که در ۳ بخش از آن سوالاتی مطرح شده است.



شکل (۳-۱) گراف سوال ۲

1-2-2- بخش اول

در بخش اول سوالات از ما میخواهد بررسی کنیم که روابط استقلال مطرح شده درست است یا نه.

1. Season ⊥ Chills

غلط است.

برای اینکه مستقل باشد باید Flu داده شده باشد.

2. Season ⊥ Chills|Flu

درست است.

چون یک مسیر بلاک میشود در صورت دانستن Flu

3. Season ⊥ Headache|Flu

غلط است

چون یک مسیر دیگری وجود دارد از Dehyration که آن هم باید جزو given ها باشد.

4. Season ⊥ Headache|Flu,Dehydration

درست است.

چون به همان دلیل بخش ۳ تمامی مسیر ها در صورت obsrve شدن این ۲ بلاک میشود.

5. Season ⊥ Nausea|Dehydration

غلط است

چون مسیر دیگری از flue به headacke و dizziness وجود دارد که بلاک نشده است.

6. Season ⊥ Nausea|Dehydration,Headache

درست است.

چون با توجه به توضیحات بخش ۵ تمامی مسیر ها بلاک میشود.

7. Flu ⊥ Dehydration

غلط است

چون که برای استقلال باید Season داده شده باشد و observed شود.

8. Flu ⊥ Dehydration|Season,Headache

غلط است

درست است که Season را داشته باشیم مستقل میشود ولی آن پایین یک V-Stricture با headache داریم که headache نباید given باشد.

9. Flu ⊥ Dehydration|Season

درست است

با توجه به دلایلی که در بخش ۷ و ۸ توضیح داده شد این گزاره درست است.

10. Flu ⊥ Dehydration|Season,Nausea

غلط است

با توجه به مسیری که وجود دارد Nausea یک V-Structure تشکیل میدهد و به همین دلیل نباید given باشد.

11. Chills ⊥ Nausea

غلط است

با توجه به مسیری که وجود دارد مشتقل نیستن و تمامی flu و season و .. داده نشده است.

12. Chills ⊥ Nausea|Headache

غلط است.

Headache یک V-Structure تشکیل میدهد. که برای استقلال نباید داده میشد.

1-2-3- بخش دوم

1-2-3-1- Joint Distribution

$$P(S, F, D, C, H, Z, N) = P(S)\, P(F|S)\, P(D|S)\, P(C|F)\, P(H|F, D)\, P(Z|H)\, P(N|D, Z)$$

1-2-3-2- Factorize using Undirected model

$$\frac{1}{z}\varphi_{1(S)}\varphi_{2(F)}\varphi_{3(C)}\varphi_{4(D)}\varphi_{5(H)}\varphi_{6(N)}\varphi_{7(Z)}\varphi_{8(S,F)}\varphi_{9(S,D)}\varphi_{10(F,C)}\varphi_{11(F,H)}\varphi_{12(D,N)}\varphi_{13(D,H)}\varphi_{14(H,Z)}\varphi_{15(N,Z)}$$

1-2-4- بخش سوم

1-2-4-1- $P(Flu = True)$

با توجه به اینکه احتمالات کلی بر حسب $winter$ و $summer$ داده شده است داریم.

$$P(flu = True) = p(flu = true\, |s = winter)\, p(winter) + p(flu = true\, |s = summer)\, p(summer)$$

$$p(flu = true) = 0.4 * 0.5 + 0.1 * 0.5 = 0.25$$

1-2-4-2- $P(Flu = True \mid Season = winter)$

با توجه به جدول داده شده این احتمال ۰.۴ میباشد.

1-2-4-3- $p(Flu = True \mid Season = winter, Headache = True)$

$$P(F = T\, |S = w, H = T) = \frac{P(F = T, S = w, H = T)}{P(S = w, H = T)}$$

$$p(F=T\ ,S=w\ ,H=T)=p(H=T\ ,F=T\ ,S=w\ ,D=d\ )=p(H=T\ |F=T\ ,D=d\ )\ p(F=T\ |S=w\ )\ p(D=d\ |s=w\ )\ p(s=w)$$

$$=\ p(H=T\ |F=T\ ,D=T\ )\ p(F=T\ |S=w\ )\ p(D=T\ |s=w\ )\ p(s=w)+\ p(H=T\ |F=T\ ,D=F\ )\ p(F=T\ |S=w\ )\ p(D=F\ |s=w\ )\ p(s=w)$$

$$p(F=T\ ,S=w\ ,H=T)=\mathbf{0.9*0.4*0.1*0.5+0.8*0.4*0.9*0.5=0.162}$$

$$P(S=w\ ,H=T)=\sum_{f,d}p(\ S=w\ ,H=T\ \ ,F=f\ ,D=d)$$

$P(S=w\ ,H=T)$= 0.018 + 0.144 + 0.081 + 0.024 = 0.267

$$P(F=T\ |S=w\ ,H=T\ )=\frac{0.162}{0.267}=60.67\ \%$$

1-2-4-4- $p(Flu=True\ |\ Season=winter\ ,Headache=True\ ,dehydration=true\ )$

$$P(F=T\ |S=w\ ,H=T\ \ ,D=T)=\frac{p(F=T\ ,S=w\ ,H=T\ ,D=T)}{p(s=w\ ,H=T\ ,D=T)}$$

$$P(F=T\ |S=w\ ,H=T\ )=\frac{0.018}{\sum_{f,}p(\ S=w\ ,H=T\ \ ,F=f\ ,D=T)}=\frac{0.018}{0.018+0.024}=42.86\ \%$$

1-2-4-5- Decrease likelihood

به دلیل آنکه بدانیم آبی داریم احتمال سر درد را بالا میبرد و احتمال ابتلا به انفلانزا را دانستن این موضوع کاهش میدهد.

۳-۱- سوال ۳

Problem 3 - Part 1 :

observed node: $O = \{O_1, \dots, O_N\}$, Hidden node: $H = \{H_1, \dots, H_M\}$

$$q^*(h) = \arg\max_{q_1, \dots, q_M} \underbrace{-KL\Big(q(H_m) \,\|\, P(\underline{O}, \underline{H})\Big)}_{\mathrm{I}}$$

$$\mathrm{I} = E_{q(h_m)}\left[-\ln \frac{q(h_m)}{P(\underline{O}, \underline{H})}\right] =$$

$$= E_{q(h_m)}\left[\ln P(\underline{O}, \underline{H})\right] - E_{q(h_m)}\left[\ln q(H_m)\right]$$

$$= \underbrace{E_q\left[\log P(\underline{O}, \underline{H})\right]}_{\mathrm{II}} - \underbrace{\sum_{1}^{M} E_{q_m(H_m)}\left[\ln q_m(H_m)\right]}_{= E_{q_m}\left[\ln q_m(H_m)\right] + Const}$$

$$\mathrm{II} = \int_{H_m} q_m(H_m) \underbrace{\int_{H_1} \cdots \int_{H_M} q_1(H_1) \cdots q_M(H_M) \ln P(\underline{O}, \underline{H})\, dH_1 \cdots dH_M}_{E_{-m}} \, dH_m$$

$$= \underbrace{E_{H_m}\left[E_{-m}\left[\log P(\underline{O}, \underline{H})\right]\right]}_{\mathrm{III}}$$

$$\Rightarrow q^*(h) = \arg\max \underbrace{\text{III} - E_{q_m}\left[\ln q_m(H_m)\right)}_{G} + \text{Const}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta G}{\delta q_m} = E_{-H_m}\left[\ln p(\underline{O}, \underline{H})\right] - \ln q_m(H_m) - 1 = 0$$

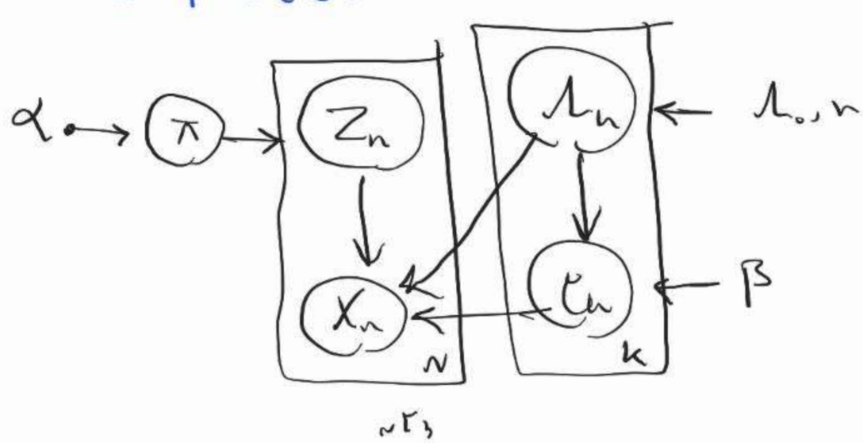
$$\Rightarrow \ln q_m^*(h_m) = E_{-m}\left[\ln P(\underline{H}, \underline{O})\right] + \text{Const}$$

$$\Rightarrow \ln q_m^*(h_m) = E_{-m}\left[\ln P(H_m \mid \underline{H}_{N-m}, \underline{O})\, P(H_m)\right]$$

$$= E_{-N}\left[\ln P(H_m \mid \underline{H}_{-m}, \underline{O})\right] + \underbrace{E_{-m}\left[\ln P(H_m)\right]}_{\text{Const}}$$

$$\Rightarrow \ln q_m^*(h_m) = E_{H_{-N}}\left[\ln P(H_n \mid H_{-m}, O_{1:N})\right] + \text{Const}$$

Problem 3 - Part 3:



a)

① $P(\pi \mid \text{the other Random variables})$

$$\log p(\pi \mid \text{other}) = E_{-\pi}\left[\log P(\text{all})\right] + \text{Const}$$

$$\log p(\text{All}) = \log p(\pi) + \log p(Z \mid \pi) + \sum_{i=1}^{N} \log p(X_i \mid z_i, \Lambda, t) + \sum_{i=1}^{K} \log p(\Lambda_i) + \sum^{K} \log p(t \mid \Lambda)$$

چون E رو $-\pi$ باید بگیریم ۳ تا آخر const هستند.

$$\Rightarrow \log p(\text{all}) = \log p(\pi) + \log p(Z \mid \pi) + \text{const}$$

$$\Rightarrow E_{-\pi}\left[\log p(\text{all})\right] = \log P(\pi) + E_{-\pi}\left[\log p(Z \mid \pi)\right]$$

Drichlet(α) ← $\log P(\pi)$; I ← $\log p(Z \mid \pi)$

$$= (\alpha_\cdot - 1)\sum_{k=1}^{K} \log \pi_k + \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N} \overbrace{E\{z_{ik}\}}^{\gamma_{ik}} \log \pi_k + \text{Const}$$

I : $\sum_{k}\sum_{N} z_{ik} \log \pi_k$

کلم:

$$p(\pi \mid \text{other}) = \text{Dirichlet}\left(\alpha_1 + \sum_{n=1}^{N} z_{n1}, \ldots, \alpha_k + \sum_{n=1}^{N} z_{nk}\right)$$

* در رابطه بدست آمده اگر $p(\pi \mid \text{other})$ را حساب کنیم و به صورت حاصلضرب بنویسیم:

$$\alpha_{k} - 1 = \alpha_1$$

$$z_{nk} = \pi_k^{\gamma_{ik}}$$

(2) $p(\Lambda \mid \text{other})$

$$\log p(\Lambda_j \mid \text{other}) = E_{-j}\left[\log p(\text{all})\right] + \text{Const}$$

$$\log p(\text{all}) = \underbrace{\log p(\pi)}_{\text{const}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \log p(z_i \mid \pi)}_{\text{Const}}$$

$$+ \underbrace{\sum \log p(x_i \mid z_i, \Lambda_{z_i}, t_{z_i})}_{\text{I}} + \underbrace{\sum \log p(\Lambda_i)}_{\text{const} + \log p(\Lambda_j)}$$

$$+ \underbrace{\sum \log p(t_i \mid \Lambda_i)}_{\text{const} + \log p(t_j \mid \Lambda_j)}$$

* هر چیزی غیر از λ_{-j} برای ما Const است

$$\text{I}: \sum^{N} \sum^{k} z_{ik} \log p(x_i \mid t_k, \Lambda_k)$$

$$= \text{Const} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} z_{ij} \log P(x_i \mid \mu_j \Lambda_j)}_{\text{II}}$$

$$E_{-j}\left[\log P(\text{all})\right] + \text{Const} = \log P(\Lambda_j) + E\left[\log P(\mu_j \mid \Lambda_j)\right] + E\{\text{II}\}$$

$$E\{\text{II}\} = E\left\{ \frac{|\Lambda_j|^{1/2}}{(2\pi)^{d/2}} \exp\Big(\underbrace{-\tfrac{1}{2}(x_i-\mu_j)^T \Lambda_j (x_i - \mu_j)}_{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[(x_i-\mu_j)(x_i-\mu_j)^T \Lambda_j\right]}\Big)\right\}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \operatorname{tr} E\{ \cdots \} = -\tfrac{1}{2} \operatorname{tr} A$$

$$\Rightarrow P(\Lambda \mid \text{other}) = \log P(\Lambda_j) + E\{\log P(\mu \mid \Lambda)\} + \sum_{i=1}^{n} \{ \alpha_i \tfrac{1}{2} \operatorname{tr} A \Lambda_j \}$$

$\log P(\Lambda_j)$: wishart(Λ_0, n)

$E\{\log P(\mu \mid \Lambda)\} = N(\cdot)$

$$\rightarrow \text{wishart}\left(\sum_{i=1}^{n} (X_n - \mu_n)(X_n - \mu_n)^T, n' \right)$$

$$\Rightarrow P(\Lambda_j \mid \text{other}) = \text{wishart} \ \boxed{\checkmark}$$

③ $p(\tau_k \mid \text{other})$

در رابطه $p(\text{all})$ ضرایب غیر const به صورت زیر می‌شود.

$$\log p(\tau_k \mid \text{other}) = E_{-k}\left[\log p(\text{all})\right] \quad \text{II}$$

$$\log p(\text{all}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \log p(x_i \mid z_i, \mu_{z_i}, \tau_{z_i})}_{\text{I}} + \sum_{i=1}^{K} \log p(\tau_i \mid \lambda) + \text{const.}$$

$$\text{I}: \ \text{const} + \sum_{i=1}^{N} z_{ij} \log p(x_i \mid \tau, \mu) \quad \text{III}$$

$$\text{II}: \ \prod_{k=1}^{K} \mathcal{N}\left(\tau_k \mid \tau_0, (\beta_0 \lambda_k)^{-1}\right) \quad \text{IV}$$

$$\log p(\tau_k \mid \text{other}) = \sum_{k=1}^{K} \left[\text{III} + \text{IV}\right]$$

$$p(\tau_k \mid \text{other}) \propto \exp \ \boxed{\text{V}}$$

④ $p(z_{nk}=1 \mid \text{other})$

$$p(z_{nk}=1 \mid \text{other}) = E_{-nk} \log p(\text{All}) + \text{Const}$$

$$\log p(\text{all}) = \sum_{i=1}^{N} \log p(z_i \mid \pi) + \sum_{i=1}^{N} \log p(x_i \mid z_i, \Lambda, \mu)$$

$$+ \text{Const}$$

$$\log p(z_{nk}=1 \mid \text{other}) = E_{\pi}\left[\log p(z \mid \pi)\right] + E_{\mu,\Lambda}\left[\log(x \mid z, \mu, \Lambda)\right] + \text{Const}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} z_{nk} \Big(\overbrace{E[\log \pi_k] + \tfrac{1}{2} E\{\log \lambda\} - \tfrac{D}{2} \tfrac{\log 2\pi}{2} - \tfrac{1}{2} E_{\mu,\Lambda}\left[(x_n-\mu_k)^T \Lambda_k (x_n-\mu_k)\right]}^{A_{nk}}$$

$$z_{nk} \rightarrow \mathcal{N}(x_n \mid \mu, \beta\Lambda^{-1}) \rightarrow z_n$$

$$p(z_{nk}=1 \mid \text{other}) \propto \prod_{\substack{n=1 \\ z_n}}^{N} \prod_{k=1}^{K} A_{nk} \propto \text{Categorical}$$

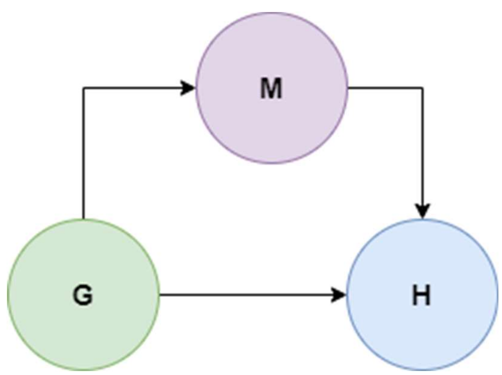
۴-۱- سوال ۴

با توجه به داده شده در صورت سوال که به صورت زیر میباشد:

	Medicine A	Medicine B
Grade 1	81/87 = 0.931 %	234/270 = 87 %
Grade 4	192/263 = 73 %	55/80 = 69 %

اگر نگاه کلی به جدول انداخته شود مشاهده میشود که در حالات grade 1 و grade 4 به طور جداگانه داروی A بهتر است.

Network شبکه فوق به صورت زیر میشود : (M همان Medicine و H همان heal و G همان grade میباشد)



شکل (۴-۱) Baysian network مساله سوال ۴

باتوجه به شکل خب و توجه به اینکه A برای H یک cause الزاما میباشد داریم:

$$p(H|M) = p(H|do\ M)$$

حال برای آنکه ببینیم در حالت کلی کدام دارو بهتر است باید $P(H = True\ |do\ M = A)$ و $P\ (H = True|do\ M = B)$ را جدا گانه حساب کنیم.

$$P(H = True \mid do\ M = A) = p(H = True \mid G = 1, M = A)\ p(G = 1) + p(H = True \mid G = 4, M = A)\ p(G = 4)$$

$$P(H = True \mid do\ M = A) = \frac{\left(\frac{81}{87} * (87 + 270)\right)}{700} + \frac{\left(\frac{192}{263} * (263 + 80)\right)}{700} = 83.25\ \%$$

$$P(H = True \mid do\ M = B) = \frac{\left(\frac{243}{270} * (87 + 270)\right)}{700} + \frac{\left(\frac{55}{80} * (263 + 80)\right)}{700} = 79.59\ \%$$

۵-۱- سوال ۵

ابتدا کتاب خانه های مورد نیاز را import میکنیم.

Import libarires

```
[1] import pandas as pd
    import matplotlib.pyplot as plt
    from sklearn.linear_model import LinearRegression
```

شکل (۵-۱) Import کتابخانه های مورد نیاز

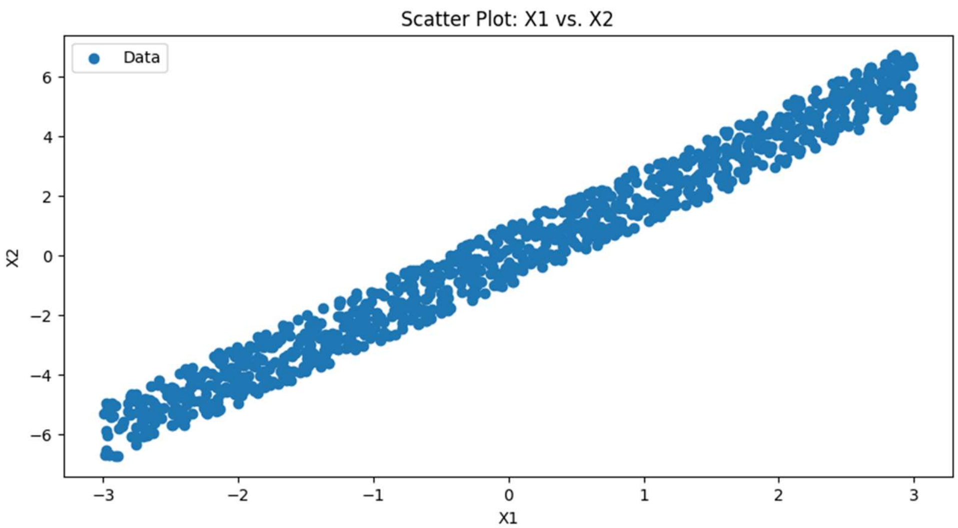
در ادامه فایل داده ها را خوانده و X1 و X2 را تشکیل میدهیم.

Read CSV file

```
[2] df = pd.read_csv("ngaussian.csv", delimiter=' ', header=None)
    df.columns = ['X1', 'X2']
```

شکل (۶-۱) کد پایتون خواندن فایل csv داده ها

ابتدا داده های X1 و X2 را برای آنکه با شکل کلی آن ها اشنا شویم پلات میکنیم.



شکل (۷-۱) اسکتر پلات x1 وx2

به کمک دستور زیر داده های X2 را بر روی X1 فیت میکنیم و در نهایت β_{12} را به دست میاوریم که همان coef میباشد و مقدار آن برابر ۲ میشود.

```
[4] regression1 = LinearRegression(fit_intercept=False)
    X1 = df['X1'].values.reshape(-1, 1)
    X2 = df['X2'].values.reshape(-1, 1)
    regression1.fit(X1, X2)
    B12 = regression1.coef_[0][0]
```

```
[5] print(f"B12 is {B12}")

    B12 is 2.0032651720243653
```

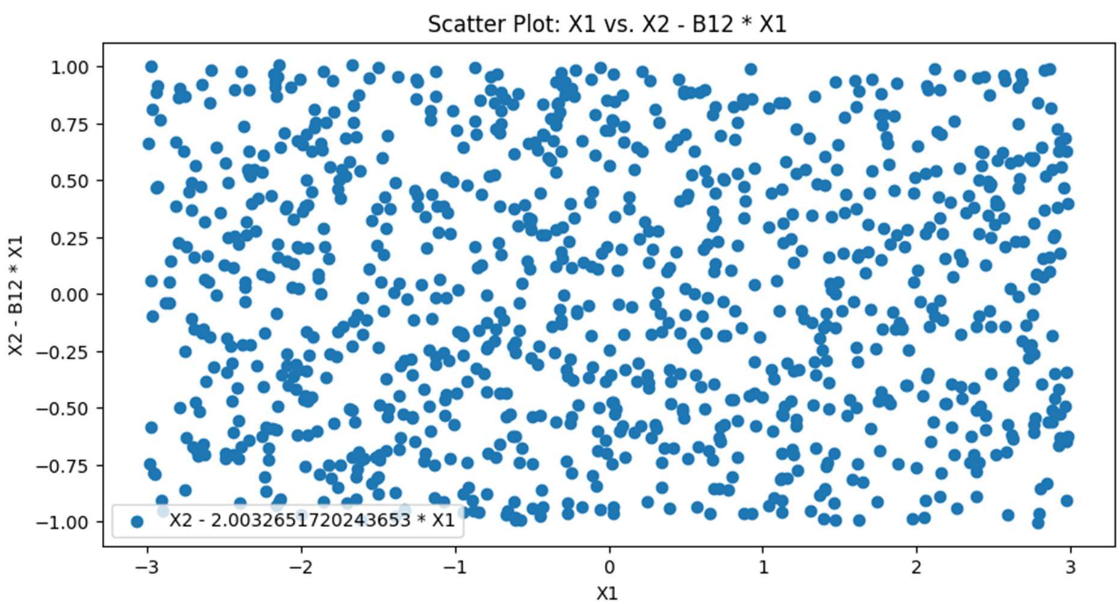
شکل (۸-۱) کد پایتون فیت کردن X1 روی X2

به کمک دستور زیر میتوان $X1$ را بر حسب $X2 - \beta_{12} \times X1$ رسم کرد.

```python
# Create a scatter plot for X1 and X2 - B12 * X1
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.scatter(X1, X2 - B12 * X1, label=f'X2 - {B12} * X1')
plt.xlabel('X1')
plt.ylabel('X2 - B12 * X1')
plt.legend()
plt.title('Scatter Plot: X1 vs. X2 - B12 * X1')
plt.show()
```

شکل (۹-۱) کد پایتون scatter برای X1 و $X2 - \beta_{12} \times X1$

خروجی نهایی به صورت زیر میشود:



شکل (۱۰-۱) Scatter plot برای X1 و $X2 - \beta_{12} \times X1$

پلات فوق یک مستطیل شکل از و شرط استقلال را دارا میباشد.

حال همین کار را بر عکس انجام داده و X1 را روی X2 فیت میکنیم.

```python
regression2 = LinearRegression(fit_intercept=False)
regression2.fit(X2, X1)
B21 = regression2.coef_[0][0]
```

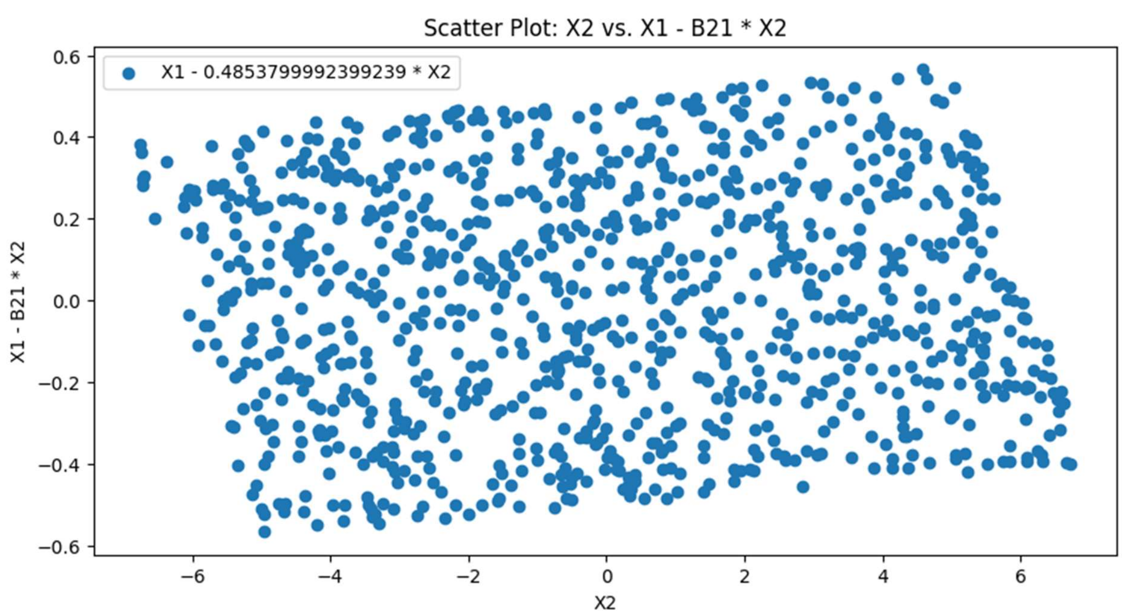
```python
[10] print(f"B21 is {B21}")
```

```
B21 is 0.4853799992399239
```

شکل (۱۱-۱) کد پایتون فیت کردن X1 روی X2

مشاهده میشود که در این حالت مقدار β_{21} برابر ۰.۴۸ (همان $\frac{1}{\beta_{12}}$) میشود.

اگر scatter plot خواسته شده برای این بخش هم رسم کنیم خروجی به صورت زیر میباشد.



شکل (۱۲-۱) Scatter plot برای X2 و X1-B21*X2

مشاهده میشود که در اینجا یک وابستگی ای وجود دارد از طرفی میدانستیم که ε_1 و ε_2 از هم مستقل میباشند.

با توجه به این فرضیات و اینکه یک وابستگی بین X1 و X2 در حالت $X1 = \beta_{21} * X2 + \varepsilon_2$ وجود دارد

میتوان نتیجه گرفت که از روی دانستن X1 میتوان به X2 رسید (X1 میشود cause) و به عبارت دیگر X1 همان داده ای سات که دیتاست را generate کرده است. بنابراین نتورک به صورت زیر است :

شکل (۱۳-۱) نتورک علت و معلول در سوال ۵

- فایل نوت بوک کد های این بخش در فایل ارسالی موجود میباشد.