Método de Elementos Finitos

Instituto de Desarrollo Económico e Innovación
Universidad Nacional de Tierra del Fuego, Antártida e Islas del Atlántico Sur

Ushuaia, 13 al 20 de Octubre de 2016

Sumario

- Introducción. Elementos Finitos en 1D
- Elementos Finitos en 2D. Implementación
- Adaptatividad
- Elementos Finitos Mixtos

Bibliografía

- A. Ern. Éléments finis. Dunod. Paris. 2005.
- C. Johnson. Numerical solutions of partial differential equations by the finite element method. Cambridge University Press. 1987.
- P.G. Ciarlet. The finite element method for elliptic problems. North Holland. Amsterdam. 1978.
- S. Brenner, L.R. Scott. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Springer. New York. 2008.
- J. Alberty, C. Carstensen and S.A. Funken. Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation. Numerical Algorithms 20 (1999) 117–137.
- F. Hetch. FreeFem++. http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf

Problema (D)

$$\begin{aligned} -(\alpha u')' &= f \quad \text{en } \Omega = (a, b) \\ u(a) = u(b) &= 0 \end{aligned}$$

- equilibrio mecánico de una cuerda
- euilibrio térmico de una barra

Algunas variantes

Condiciones de Dirichlet no homogéneas

$$\begin{aligned} -(\alpha u')' &= f \quad \text{en } \Omega = (a, b) \\ u(a) &= u_a \\ u(b) &= u_b \end{aligned}$$

Condiciones de Neumann homogéneas

$$\begin{aligned} -(\alpha u')' &= f \quad \text{en } \Omega = (a, b) \\ u'(a) = u'(b) &= 0 \\ \int_a^b u &= 0 \end{aligned}$$

Condiciones mixtas

$$\begin{aligned} -(\alpha u')' &= f \quad \text{en } \Omega = (a, b) \\ u(a) &= u_a \\ u'(b) &= 0 \end{aligned}$$

Problema (V)

$$u \in V : \qquad \int_a^b \alpha u' v' = \int_a^b f v \qquad \forall v \in V$$

¿Quién es V?

- funciones C^1 que se anulan en a y en b?
- funciones continuas, C^1 a trozos, que se anulan en a y en b?

Problema (V)

$$u \in V : \qquad \int_a^b \alpha u' v' = \int_a^b f v \qquad \forall v \in V$$

Problema (M)

$$u \in V : \qquad F(u) = \min_{v \in V} F(v)$$

con

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_a^b \alpha (v')^2 - \int_a^b f v$$

Problema Variacional

$$u \in V : \qquad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

- V: espacio de Hilbert
- a: forma bilineal, continua y coercitiva en V
- F: forma lineal continua en V

$$H^1(\Omega)$$

Algunas propiedades de $H^1(\Omega)$

- Las funciones de $H^1([a,b])$ "son continuas"
- $v \in H^1([a,b])$ con v' continua (derivada débil), entonces "v es derivable en el sentido usual"
- Vale la fórmula de integración por partes

$$H_0^1(\Omega)$$

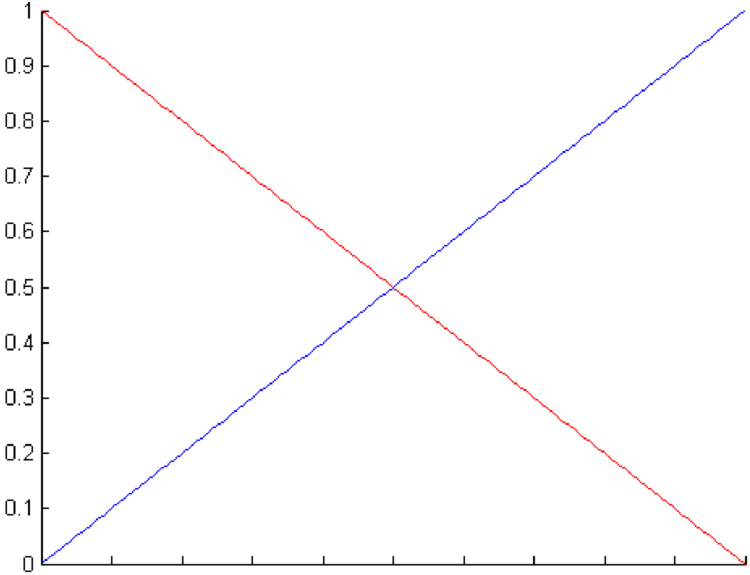
Lema de Lax-Milgram

$$(D) \implies (V) \iff (M)$$

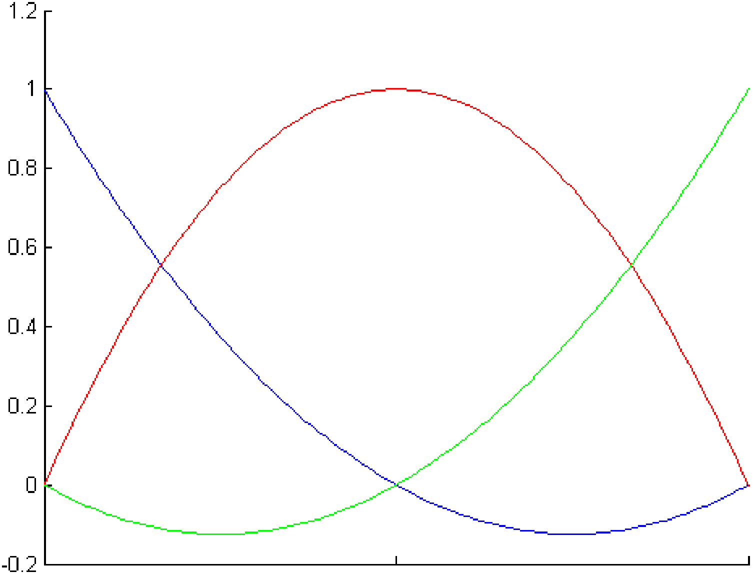
Condiciones Esenciales y Naturales

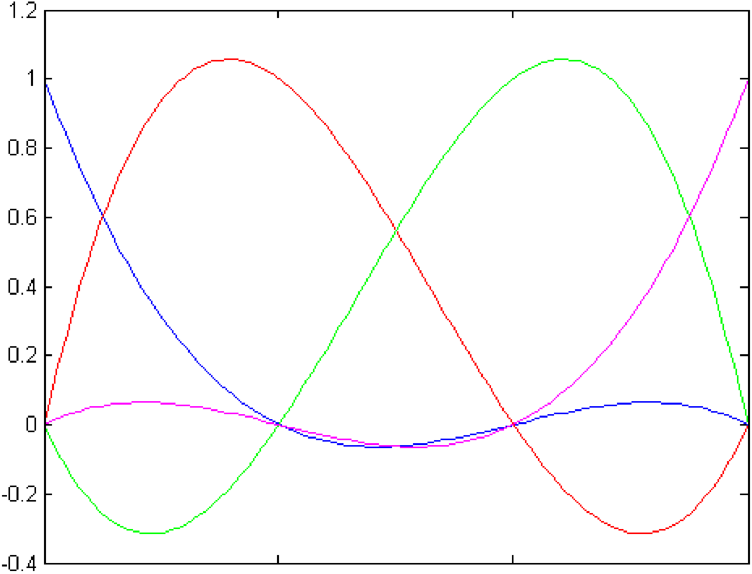
Método de Elementos Finitos

- Aproximación por el Método de Galerkin
- Espacios de aproximación caracterizados por
  - (FEM1) malla o triangulación
  - (FEM2) funciones polinomiales a trozos
  - (FEM3) bases fáciles de calcular y con soportes pequeños.


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0

Introducción. Elementos Finitos en 1D




1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4

$$V_h = \text{gen}\left\{v_1, v_2, \ldots, v_N\right\}$$

$$u_h = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots c_N v_N$$

Problema:

$$u_h \in V_h : \qquad a(u_h, v_i) = F(v_i) \qquad i = 1, 2, \dots, N.$$

Sistema Lineal equivalente

$$Mc = b$$

con

$$M_{ij} = a(v_j, v_i), \quad b_i = F(v_i), \quad c = (c_i)$$

Ejemplo

- $\alpha = 1$

$$-u'' = f \quad \text{en } (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0$$

- malla: $\mathcal{T}_h = \{x_i = ih : i = 0, 1, \ldots, N\}$ con $h = \frac{1}{N}$
- elementos finitos lineales (grado 1)

Los elementos son

$$\left(I_i, \quad \mathcal{P}_1(I_i), \quad \{\text{evaluaciones en extremos}\} \right)$$

con

$$I_i = [x_{i-1}, x_i]$$

dibujar funciones base

Ciarlet 1978

Un Elemento Finito es una terna $(K, \mathcal{P}, \Sigma)$

Algunos lemas útiles

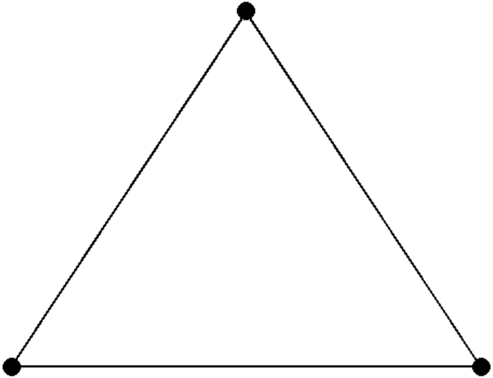
Lemma

Supongamos que $\mathcal{P}$ es d-dimensional, y $\{N_1, N_2, \ldots, N_d\} \subset \mathcal{P}'$. Entonces son equivalentes

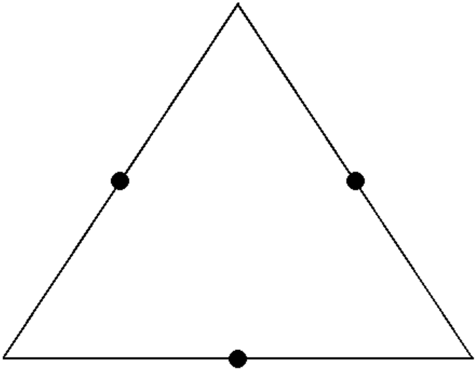
- $\{N_1, N_2, \ldots, N_d\}$ *es una base de* $\mathcal{P}'$.
- *Si* $v \in \mathcal{P}$ *y* $N_i v = 0$ *para* $i = 1, 2, \ldots, d$, *entonces* $v = 0$.

Lemma

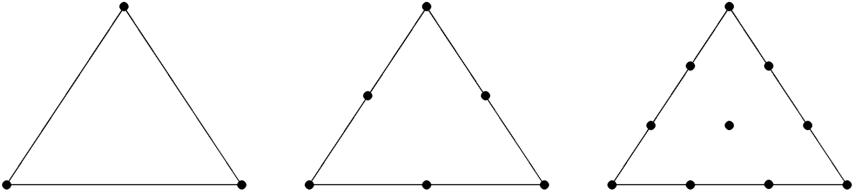
Sea $P \in \mathcal{P}_d$, *con* $d \geq 1$, *que se anula en un hiperplano de ecuación* $L(x) = 0$. *Entonces* $P = LQ$ *con* $Q \in \mathcal{P}_{d-1}$.



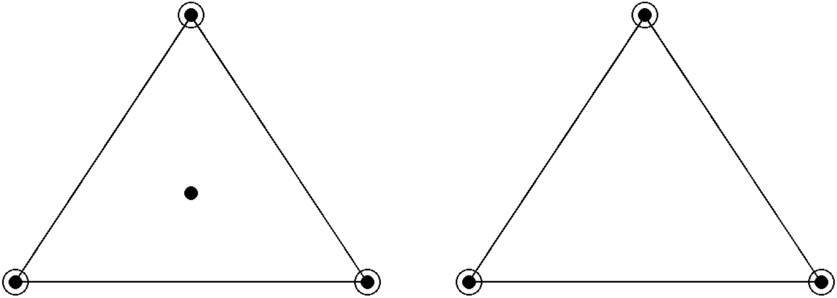
Elemento de Lagrange de grado 1



Elemento de Crouzeix-Raviart

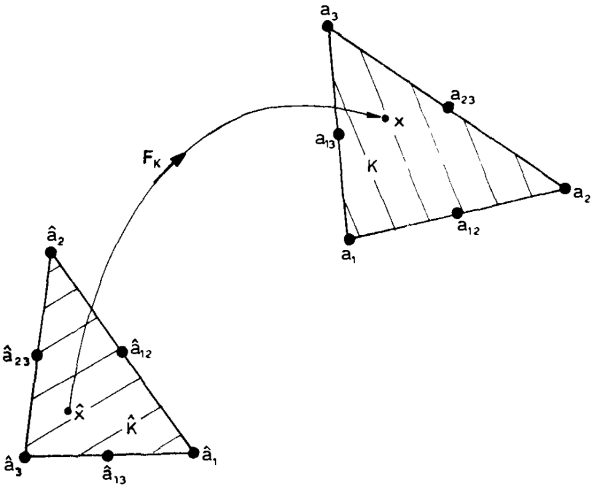


Elementos de Lagrange de grados 1, 2 y 3



Elementos de Hermite (grado 3) y de Zienkiewicz

Elementos Afín Equivalentes



Interpolación local: Π_K

Dominio de Π_K

Características de FEM

- (FEM1) malla o triangulación
- (FEM2) funciones polinomiales (o cercanas a polinomios) a trozos
- (FEM3) bases fáciles de calcular y con soportes pequeños.

(FEM1) $\mathcal{T}_h$ es una triangulación de Ω (polígono) si

1. $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$, cada K es un polígono.
2. todo $K \in \mathcal{T}_h$ es cerrado y tiene interior no vacío.
3. Conformidad: Si $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$, entonces $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, o $K_1 \cap K_2 = \{p\}$ o $K_1 \cap K_2 = \ell$ con p o ℓ vértice o lado (respectivamente) común a K_1 y K_2.

Interpolador Global: Π_h

$$\left(\Pi_h u\right)|_K = \Pi_K\left(u|_K\right) \qquad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

Dominio de Π_h

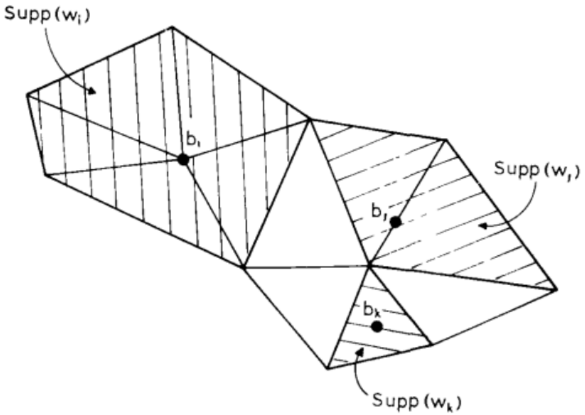
Espacio de elementos finitos (Lagrange): X_h

- Nodos / Grados de libertad globales: $\mathcal{N}_h$
-

$$X_h = \left\{ v = (v_K) \in \prod_{K \in \mathcal{T}_h} P_K : \right.$$

$$\left. \forall b \in \mathcal{N}_h, \lambda, \mu \in \lambda(b), v_{K_\lambda}(b) = v_{K_\mu}(b) \right\}$$

Bases globales



(FEM3) X_h tiene una base fácil de construir y de soportes pequeños.

Interpolante global en X_h

$$\Pi_h v = \sum_{j=1}^{M} \phi_j(v) w_j$$

con $\{\phi_j\}$ grados de libertad y $\{w_j\}$ base.

Elementos Finitos de clase $\mathcal{C}^0$ y $\mathcal{C}^1$

Condiciones de borde: X_{0h}

Datos del problema

$$\text{Hallar } u \in V : \qquad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

- V: espacio de hilbert
- $a : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal en V, continua y coerciva:

$$\begin{aligned} a(v, w) &\leq M\|v\|\|w\| \qquad \forall v, w \in V \\ a(v, v) &\geq \alpha\|v\|^2 \qquad \forall v \in V \end{aligned}$$

- $F : V \to \mathbb{R}$ forma lineal en V.

Métodos de elementos finitos conformes

$$\text{Hallar } u_h \in V_h : \qquad a(u_h, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h$$

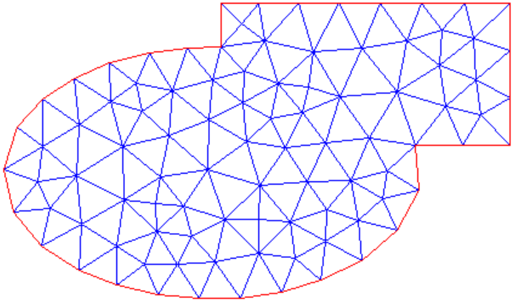
- V_h espacio de dimensión finita con

$$V_h \subset V$$

Ortogonalidad de Galerkin

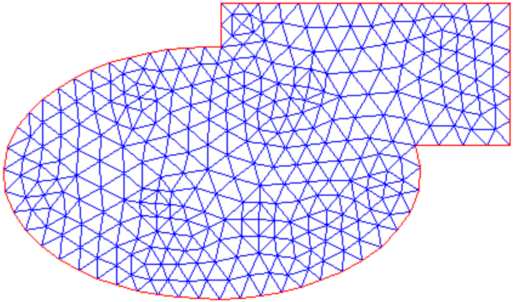
Lema de Céa

¿Qué es h?



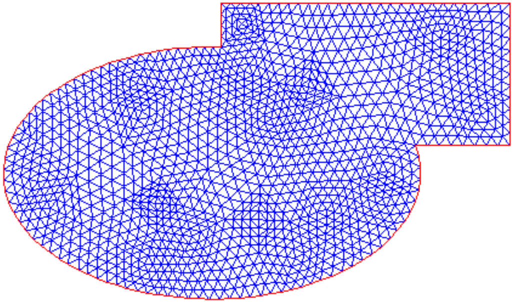
$h = 0.25$

¿Qué es h?



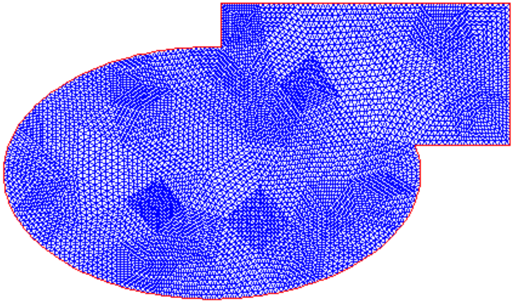
$h = 0.125$

¿Qué es h?



$h = 0.0625$

¿Qué es h?



$h = 0.03125$

Convergencia

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\| = 0 \ ?$$

$$\|u - u_h\| = O(h^p) \ ?$$

Error de Interpolación

global: $\|u - \Pi_h u\|_\Omega$

local: $\|u - \Pi_K u\|_K$

Error de Interpolación Local

- Error de Interpolación en elemento de referencia
- Argumento de re-escale en elementos de la malla

Error de Interpolación en elemento de referencia

- Lema de Bramble-Hilbert
- Polynomial preserving property del operador de interpolación
- Estabilidad del operador de Interpolación

Argumento de re-escale

$$x = F(\hat{x}) := B\hat{x} + c$$

- Una propiedad fundamental:

$$\Pi_{\hat{K}}\hat{u}(\hat{x}) = \Pi_K u(x)$$

- Acotar $\|B\|$ y $\|B^{-1}\|$ por cantidades geométricas
- Condición de regularidad de la familia de mallas

Convergencia y orden

Theorem (Convergencia para Elementos de Lagrange de orden k)

Supongamos que la familia de mallas $\mathcal{T}_h$ verifica

H1) *es regular:*

1. $\forall K \in \cup \mathcal{T}_h, \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$
2. $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \to 0$

H2) $\forall K \in \cup \mathcal{T}_h, \quad (K, \mathcal{P}_K, \Sigma_K) \simeq (\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\Sigma})$

siendo $(\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\Sigma})$ un elemento de Lagrange de grado k. Si la solución $u \in V$ del problema está también en $H^{k+1}(\Omega)$, existe una constante C independiente de h tal que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^k |u|_{k+1,\Omega}$$

Suponemos $V \subset H^1(\Omega)$, $\|\cdot\|_V \simeq \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Notar que los elementos son de clase $\mathcal{C}^0$.

Implementación: Malla

nv: cantidad de vértices
nt: cantidad de elementos
ne: cantidad de aristas del borde

$$\text{malla} \qquad \longleftrightarrow \qquad p, \quad e, \quad t$$

p: $2 \times nv$
e: $2 \times ne$
t: $3 \times nt$

Implementación: Malla

Matriz `p`

define la numeración global de los vértices de la malla
`p(:,j)`: coordenadas del vértice *j*

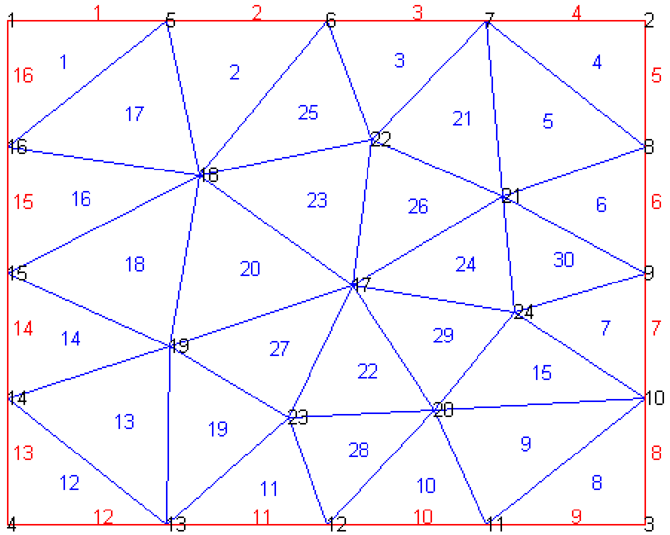
Matriz `t`

contiene a los elementos: si `t(:,n)=[v1 v2 v3]'`, entonces el *n*-ésimo elemento tiene vértices `v1, v2, v3`.

Matriz `e`

contiene las aristas del borde: si `e(:,j)=[v1 v2]'` entonces la *j*-ésima arista tiene vértices `v1, v2`

Implementación: Malla



Adaptatividad

Solve $\longrightarrow$ Estimate $\longrightarrow$ Mark $\longrightarrow$ Refine

Problema

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{div}(A(x)\nabla u) + b\cdot\nabla u + cu &= f \qquad \text{en } \Omega \\
u &= 0 \qquad \text{on } \partial\Omega
\end{aligned}
$$

Formulación Variacional

$$
u \in V: \qquad a(u,v) = \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in V
$$

con

$$
\begin{aligned}
V &:= H_0^1(\Omega) \\
a(u,v) &:= \int_\Omega A(x)\nabla u\cdot\nabla v + b\cdot\nabla u\, v + c\, u\, v \\
\langle f, v\rangle &:= \int_\Omega f\, v
\end{aligned}
$$

Adaptatividad: Residuo

$$R(u_h) \in V^* = H^{-1}(\Omega)$$

$$\langle R(u_h), v \rangle := \langle f, v \rangle - a(u_h, v), \qquad v \in V$$

Adaptatividad: Residuo

Lemma (Estimación de error a posteriori)

$$\alpha\|u - u_h\|_V \leq \|R(u_h)\|_{V^*} \leq M\|u - u_h\|_V$$

Estimadores

$T \in \mathcal{T}_h$: $\qquad R_T(u_h)$

$S \in \mathcal{E}_h$: $\qquad J_S(u_h)$

$$\eta_h(T)^2 = h_T^2 \|R_T(u_h)\|_{0,T}^2 + \sum_{S \subset T} h_S \|J_S(u_h)\|_{0,S}^2$$

$$\omega \subset \Omega : \qquad \eta_h(\omega)^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h, T \subset \Omega} \eta_h(T)^2$$

Lemma (Cota superior)

$$\|u - u_h\|_V \leq C_1\, \eta_h(\Omega)$$

con $C_1 = C_1(\alpha, M, \sigma)$

Lemma (Cota inferior)

Para cada $T \in \mathcal{T}_h$

$$C_2\,\eta_h(T) \leq \|u - u_h\|_{V,\omega_T} + osc\,_h(\omega_T)$$

con $C_2 = C_2(\alpha, M, \sigma)$ *y* $\omega_T = \bigcup\{K : K \text{ comparte arista con } T\}$.

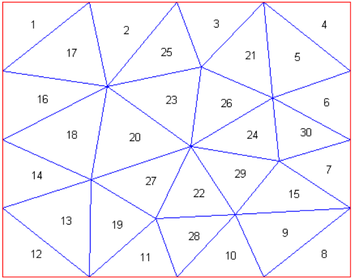
Procedimiento de Marcado

Dado un parámetro $\theta \in (0, 1)$, sea $\widehat{\mathcal{T}_h}$ un conjunto *minimal* de $\mathcal{T}_h$ tal que

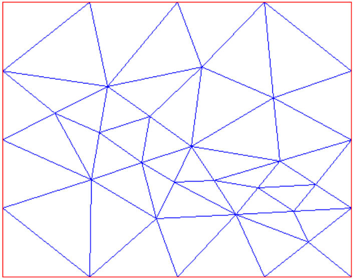
$$\sum_{T \in \widehat{\mathcal{T}_h}} \eta_h(T)^2 \geq \theta \eta_h(\Omega)^2.$$

Se marcan todos los elementos de $\widehat{\mathcal{T}_h}$ para refinamiento.

Adaptatividad: Refinamiento



Malla 0



Ref. elem. 15 y 20

Matlab: `refinemesh(g,p,e,t,[15;20])`

$\mathcal{T}_0$: malla inicial

1) SOLVE $(\mathcal{T}_H, A, b, c)$
2) $\{\eta_H(T)\}_{T\in\mathcal{T}_H}$= ESTIMATE $(\mathcal{T}_H, u_H)$
3) $\widehat{\mathcal{T}_H}$ = MARK$(\mathcal{T}_H, \{\eta_H(T)\})$
4) $\mathcal{T}_h$ = REFINE $(\mathcal{T}_H, \widehat{\mathcal{T}_H})$
5) $\widehat{\mathcal{T}_H} = \widehat{\mathcal{T}_h}$ y volver al paso 1)

Métodos Mixtos. Ecuaciones de Stokes

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + \nabla p &= f && \text{en } \Omega \\
\nabla \cdot u &= g && \text{en } \Omega \\
u &= 0 && \text{en } \partial\Omega
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,p) &= \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in V \\ b(u,q) &= \langle g, q\rangle \qquad \forall q \in Q \end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned} Au + B^t q &= f \qquad \text{en } V' \\ Bu &= g \qquad \text{en } Q' \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Au + B^t q &= f \qquad \text{en } V' \\
Bu &= g \qquad \text{en } Q'
\end{aligned}
$$

ó

$$
\begin{aligned}
u &\in W(g) \\
a(u, v) &= \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in W
\end{aligned}
$$

Condición inf-sup

Existe $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{v \in V} \frac{b(v,q)}{\|v\|_V} \geq \beta \|q\|_Q, \qquad \forall q \in Q$$

Theorem (Existencia y unicidad)

Supongamos que

1. *a es coercitiva en W con constante α*
2. *b satisface la condición inf-sup copn constante β*

Entonces existe única solución $(u, p) \in V \times Q$ del problema mixto y además

$$
\begin{aligned}
\|u\|_V &\leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{V'} + \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{\|a\|}{\alpha}\right)\|g\|_{Q'} \\
\|p\|_Q &\leq \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right)\|f\|_{V'} + \frac{\|a\|}{\beta^2}\left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right)\|g\|_{Q'}
\end{aligned}
$$

Problema Discreto

$V_h \subset V, \qquad Q_h \subset Q$

$$
\begin{aligned}
a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) &= \langle f, v_h \rangle \qquad \forall v_h \in V_h \\
b(u_h, q_h) &= \langle g, q_h \rangle \qquad \forall q_h \in Q_h
\end{aligned}
$$

Theorem

Suponemos

1. *a coercitiva en W con constante α*
2. *b satisface condición inf-sup con constante β*
3. *a coercitiva en W_h con constante α^**
4. *b satisface condición inf-sup $discreta$ con constante β^**

Entonces existe $C = C(\alpha, \beta, \|a\|, \|b\|, \alpha^*, \beta^*)$ tal que

$$\|u - u_h\|_V + \|p - p_h\|_Q \leq \left(\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_V \right)$$

El Sistema Lineal

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}^t \\ \mathcal{B} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N_u \times N_u}, \qquad \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{N_p \times N_u}$$

$$N_u = \dim V, \qquad N_p = \dim Q$$

condición inf-sup discreta

$$\Updownarrow$$

$$\ker \mathcal{B} = \{0\}$$

$$\Updownarrow$$

$\mathcal{B}$ tiene rango máximo

- Espacio para la velocidad: $V = H_0^1(\Omega)^2$
- Espacio para la presión: $Q = L_0^2(\Omega)$
- Formas bilinelaes

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \int_\Omega \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w}\, dx \qquad \mathbf{v},\mathbf{w} \in V \\ b(\mathbf{v},q) &= \int_\Omega q\, \nabla \cdot \mathbf{v}\, dx \qquad \mathbf{v} \in V,\ q \in Q \end{aligned}$$

Espacios Incompatibles

1. $\mathcal{P}_1/\mathcal{P}_0$
2. $\mathcal{Q}_1/\mathcal{P}_0$
3. $\mathcal{P}_1/\mathcal{P}_1$

Espacios Compatibles

1. Mini: $\left(\mathcal{P}_1 + \{\text{burbujas}\}\right)/\mathcal{P}_0$
2. Taylor-Hood: $\mathcal{P}_k/\mathcal{P}_{k-1}$, $k \geq 2$