AR models

AR(1) model:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \epsilon_t$$

AR(2) model:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \epsilon_t$$

AR(p) model:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \ldots + a_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

usando la notación del libro, un AR(1) se puede expresar como:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t$$

la autocovarianza resulta:

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2}$$

$$\gamma_k = \phi^k \frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2}$$

y el coeficiente de autocorrelación resulta:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k \text{ para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Usando notación recursiva, para el caso general se puede expresar:

$$Y_{t-1} = \phi Y_{t-2} + e_{t-1}$$

y entonces

$$Y_t = \phi(\phi Y_{t-2} + e_{t-1}) + e_t$$

asumiendo que $|\phi| < 1$ y k es suficientemente grande se puede obtener la representación en serie infinita como

$$Y_t = e_t + \phi e_{t-1} + \phi^2 e_{t-2} + \phi^3 e_{t-3} + \ldots$$

esta es la forma de proceso lineal general, de donde los coeficientes se relación con los del proceso generalizado como:

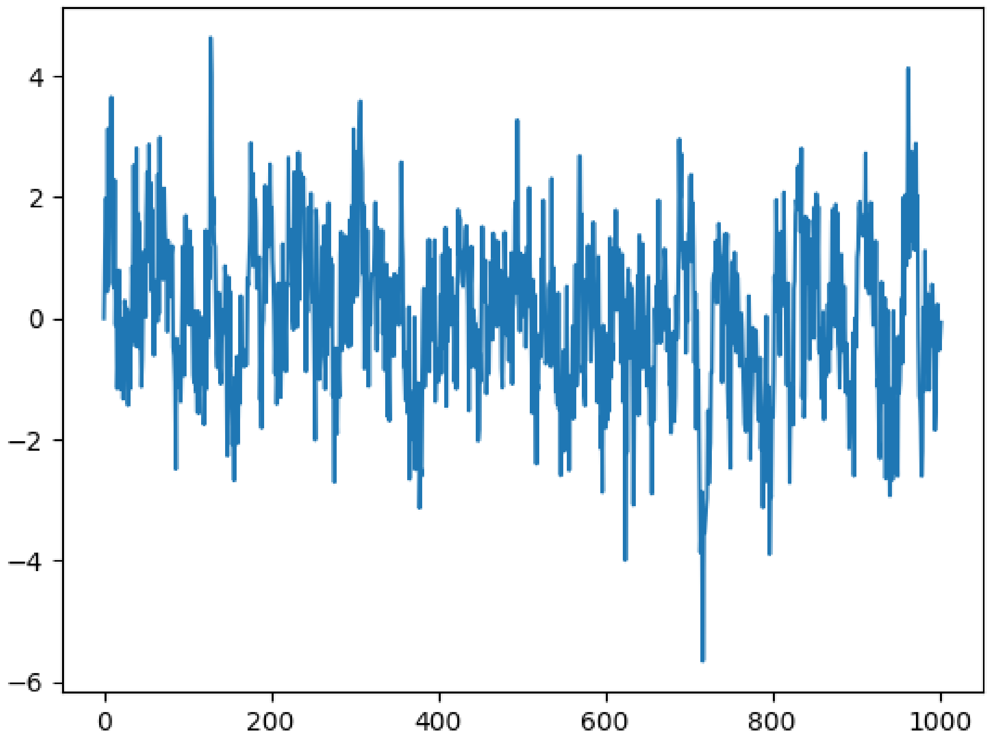
$$\Psi_j = \phi^j$$

Ejemplo

```
# AR(2)
N=1000
a1=0.4
a2=0.35
x=np.arange(2)
e_t=np.random.normal(0,1)
y=np.append(x,a1*x[1]+a2*x[0]+e_t)

for i in range(N):
   e_t=np.random.normal(0,1)
   y=np.append(y,a1*y[-1]+a2*y[-2]+e_t)


y.mean()
y.std()
plt.plot(y);plt.show()
```



MA models

MA(1) model:

$$y_t = b_1\epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

MA(2) model:

$$y_t = b_1\epsilon_{t-1} + b_2\epsilon_{t-2} + \epsilon_t$$

MA(q) model

$$y_t = b_1\epsilon_{t-1} + b_2\epsilon_{t-2} + \ldots + b_q\epsilon_{t-q} + \epsilon_t$$

usando la notación del libro:

$$Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \ldots - \theta_q e_{t-q}$$

resulta que la **autocovarianza** es:

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2)\sigma_e^2$$

y la **autocorrelación** es:

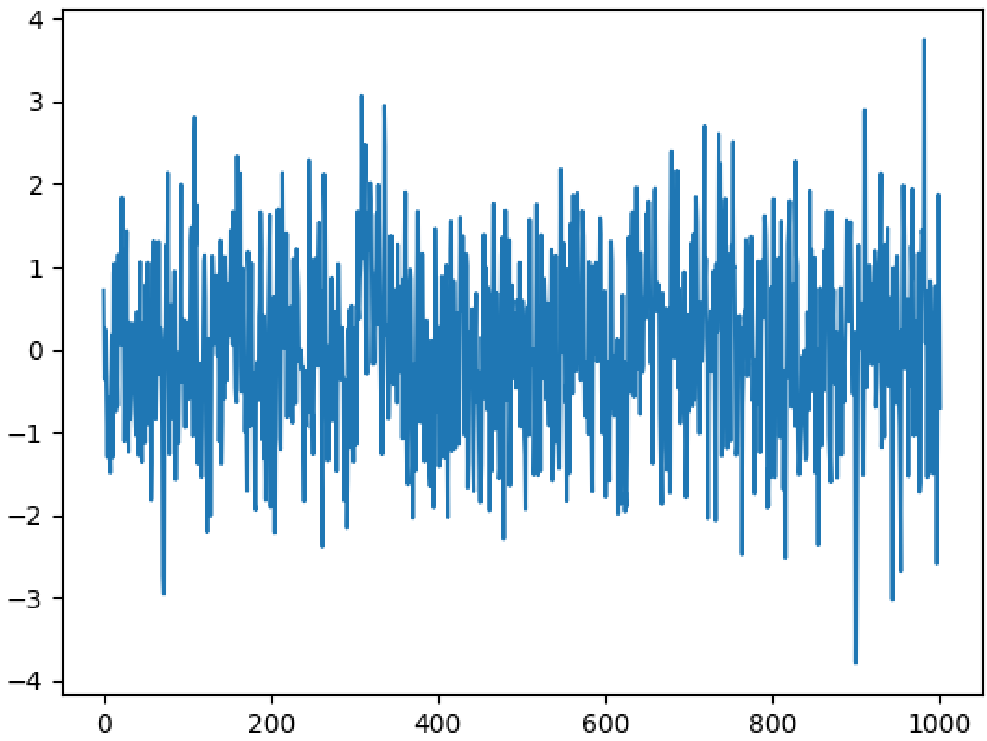
$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + \ldots + \theta_q\theta_{k+q}}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2} & \text{for } k = 1, 2, \ldots, q \\ 0 & \text{for } k = 0 \end{cases}$$

Ejemplo

```
# MA(1)
N =1000
b1 =0.25
e_t0 = np.random.normal(0,1)
e_t1 = np.random.normal(0,1)
y = np.append(e_t0,b1*e_t0+e_t1)  # y1 = b1*e_t0+e_t1

for i in range(N):
   e_t0 = e_t1
   e_t1 = np.random.normal(0,1)
   y = np.append(y,b1*e_t0+e_t1)


y.mean()
y.std()
plt.plot(y);plt.show()
```



ARMA models

AR+MA (1,1):

$$y_t = a_1 y_{t-1} + b_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

ARMA(p,q)

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \ldots + a_p y_{t-p} + b_1 \epsilon_{t-1} + \ldots + b_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t$$

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} b_i \epsilon_{t-i} + \epsilon_t$$

Ejemplo

```
#ARMA

N=10000
a1=0.4
a2=0.3
b1 =-0.3

x=np.arange(2)
e_t=np.random.normal(0,1)
y=np.append(x,a1*x[1]+a2*x[0]+e_t)

for i in range(N):
   e_0 = e_t
   e_t=np.random.normal(0,1)
```

```
    y=np.append(y,a1*y[-1]+a2*y[-2]+ b1*e_0 + e_t)


y.mean()
y.std()
#plt.plot(y);plt.show()
```