1 Duale Paare, schwache und duale Topologien

Definition 1.1 (Duales Paar). Seien X, Y $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\langle \bullet, \bullet \rangle : X \times Y \to \mathbb{K}$ eine bilineare Abbildung. Sind die Familien $\{x \mapsto \langle x, y\rangle\}_{y \in Y}$ und $\{y \mapsto \langle x, y\rangle\}_{x \in X}$ punktetrennend, das heißt

$$\forall x \in X \setminus \{0\}\ \exists y \in Y: \ \ \langle x, y\rangle \neq 0 \quad \text{und} \quad \forall y \in Y \setminus \{0\}\ \exists x \in X: \ \ \langle x, y\rangle \neq 0\,,$$

so nennt man $(X, Y, \langle X, Y\rangle)$ ein **duales Paar**.

Remark 1.2. Man kann die Elemente von X bzw. Y als lineare Funktionale auf Y bzw. X auffassen, via

$$\ell_y \colon x \mapsto \ell_y(x) = \langle x, y\rangle$$

bzw.

$$\ell_x \colon y \mapsto \ell_x(y) = \langle x, y\rangle\ .$$

Example 1.3. (i) Ist X ein lokalkonvexer Hausdorff-Raum, dann ist (X, X') ein duales Paar, mit

$$(x, f) \mapsto \langle x, f\rangle := f(x)\,.$$

Nach Hahn Banach ist die Familie X' punktetrennend und X ist trivialerweise punktetrennend.

(ii) Genauso ist (X', X) ein duales Paar.

Definition 1.4 ($\sigma(X, Y)$-Topologie). Sei (X, Y) ein duales Paar. Die **$\sigma(X, Y)$-Topologie** auf X ist die lokalkonvexe Toplogie, die von den Halbnormen $(x \mapsto |\langle x, y\rangle|)_{y \in Y}$ erzeugt wird.

Remark 1.5. (i) Die $\sigma(X, Y)$-Topologie ist Hausdorff, weil wir in der Definition von „dualem Paar" punktetrennend gefordert haben.

(i) Die $\sigma(X, Y)$-Topologie ist die gröbste Topologie auf X, sodass alle $\ell_y \colon X \to \mathbb{K}$ stetig sind (siehe z.B. Satz VIII.3.6 oder Übungsaufgabe in Funkana1?)

Frage: Was ist der topologische Dualraum von X mit der $\sigma(X, Y)$-Topologie?
Antwort: Es ist genau Y!

Für den Beweis benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 1.6. *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\ell, \ell_1, \dots, \ell_n \colon X \to \mathbb{K}$ lineare Funktionale. Setze $N := \cap_{i=1}^n \ker(\ell_i)$, dann sind äquivalent:*

(i) $\ell \in \operatorname{span}(\ell_1, \dots, \ell_n)$

(ii) $\exists M > 0\ \forall x \in X: \ \ |\ell(x)| \leq M \max_{1 \leq i \leq n} |\ell(x_i)|$

(iii) $N \subseteq \ker(\ell)$.

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $\ell = \sum \alpha_i \ell_i$, dann gilt

$$\ell(x)| \leq \sum |\alpha_i \ell_i(x)| \leq \max \alpha_i \max_{|\ell_i(x)|}\ .$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Sei $x \in N$, dann gilt

$$|\ell(x)| \leq m \max_{1 \leq i \leq n} |\ell(x_i)| = 0\,.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i):
Daraus folgt sofort das folgende Korollar:

Corollary 1.7. *Sei (X, Y) ein duales Paar. Dann ist*

$$(X, \sigma(X, Y))' = Y\ ,$$

in dem Sinn, dass jedes lineares, $\sigma(X, Y)$-stetiges Funktional auf X von der Form $x \mapsto \langle x, y\rangle$ für ein bestimmtes y ist und dass jedes Funktional dieser Form linear und $\sigma(X, Y)$ stetig ist, also:

$$(X, \sigma(X, Y))' = \big\{x \mapsto \langle x, y\rangle \ \big|\ y \in Y\big\}$$

Proof. $\subseteq$: Sei $f\colon X \to \mathbb{K}$ linear und $\sigma(X,Y)$-stetig. Dann gibt es endlich viele Halbnormen, sodass

$$|f(x)| \leq M \max_i |p_i(x)|$$

Die Halbnormen sind gerade gegeben durch y, also

$$f(x)| \leq M \max_i |\langle x, y\rangle| \,.$$

Nach dem Lemma also $f \in \operatorname{span}(\ell_{y_1}, \dots, \ell_{y_n})$, also $f = \ell_{\sum \alpha_i y_i}$.
$\subseteq$: Sei $y \in Y$, dann ist ℓ_y linear und $|\ell_y|$ eine Halbnorm auf X, die die lct erzeugt, also stetig.

Definition 1.8. Sei (X,Y) ein duales Paar. Eine lokalkonvexe Topologie τ auf X heißt **$\langle X,Y\rangle$-duale Topologie**, falls

$$(X,\tau)' = Y \,,$$

also die linearen, τ-stetigen Funktionale genau die von der Form

$$x \mapsto \langle x, y\rangle$$

für $y \in Y$ sind.

Nach dieser Definition ist $\sigma(X,Y)$ die gröbste $\langle X,Y\rangle$-duale Topologie. Eine Charakterisierung aller $\langle X,Y\rangle$-dualen Topologien gibt der Satz von Mackey-Ahrens, den wir später besprechen werden.

2 Polare Mengen und der Bipolarensatz

Definition 2.1. Sei (X,Y) ein duales Paar und $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Dann ist die **Polare** von A gegeben durch

$$A^\circ := \left\{ y \in Y \;\middle|\; \sup_{x\in A} \operatorname{Re}(\langle x,y\rangle) \leq 1 \right\} \qquad \text{(Teilmenge von } Y\text{)}$$

und die Polare von B durch

$$B^\circ := \left\{ x \in X \;\middle|\; \sup_{y\in B} \operatorname{Re}(\langle x,y\rangle) \leq 1 \right\} \qquad \text{(Teilmenge von } X\text{)}$$

⚠ Oft wird auch $|\langle x,y\rangle| \leq 1$ statt $\operatorname{Re}(\langle x,y\rangle)$ gefordert.

Lemma 2.2 (Eigenschaften von Polaren). *Sei (X,Y) ein duales Paar und $A \subseteq X$. Dann gilt:*

(i) $0 \in A^\circ$, A° *ist konvex und abgeschlossen bzgl.* $\sigma(Y,X)$ *und* $A^\circ = \overline{\operatorname{conv}(A)}^\circ$.

(ii) $A \subseteq A^{\circ\circ}$ *und* $A \subseteq B \implies B^\circ \subseteq A^\circ$.

(iii) Sei I eine Indexmenge und $(A_i)_{i\in I} \subseteq X^I$. Dann gilt

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ = \bigcap_{i\in I} A_i^\circ \,.$$

(iv) Ist A kreisförmig, dann ist $A^\circ = \{y \in Y \mid \sup_{x\in A} |\langle x,y\rangle| \leq 1\}$.

Beweis. Aus dem Kopf □

Example 2.3. (i) Ist X ein normierter Raum, dann ist

$$(B_1^X)^\circ = B_1^{X'} \,.$$

Beweis: klar

Theorem 2.4 (Bipolarensatz). *Sei (X, Y) ein duales Paar und $A \subseteq X$. Dann ist*

$$A^{\circ\circ} = \overline{\operatorname{conv}(A \cup \{0\})}\,.$$

Beweis. „$\supseteq$“: Note that, by the previous lemma:

$$(A \cup \{0\})^\circ = A^\circ \cap \underbrace{\{0\}^\circ}_{Y} = A^\circ \implies (A \cup \{0\})^{\circ\circ} = A^{\circ\circ}\,.$$

Hence:

$$A^{\circ\circ} = (A \cup \{0\})^{\circ\circ} = \overline{\operatorname{conv}(A \cup \{0\})}^{\circ\circ} \supseteq \overline{\operatorname{conv}(A \cup \{0\})}\,.$$

„$\subseteq$“: Angenommen, $\exists x \in A^{\circ\circ} \setminus \overline{\operatorname{conv}(A \cup \{0\})}$. Da $V := \overline{\operatorname{conv}(A \cup \{0\})}$ konvex und $\sigma(X, Y)$-abgeschlossen ist (Abschluss von konvexen Mengen ist konvex), gibt es nach Hahn-Banach ein $\sigma(X, Y)$-stetiges Funktional, dass x und V trennt. Wegen $(X, \sigma(X, Y))' = Y$, gibt es also ein $y \in Y$ und ein $\varepsilon > 0$, sodass:

$$\begin{aligned}
&\forall v \in V: \quad \operatorname{Re}(\langle x, y\rangle) + \varepsilon \le \operatorname{Re}(\langle v, y\rangle) \\
\iff &\forall v \in V: \quad \operatorname{Re}(\langle x, -y\rangle) - \varepsilon \ge \operatorname{Re}(\langle v, -y\rangle) \\
\implies &\sup_{v \in V} \operatorname{Re}(\langle v, -y\rangle) \le \operatorname{Re}(\langle x, -y\rangle) - \varepsilon < \operatorname{Re}(\langle x, -y\rangle) - \frac{\varepsilon}{2} \\
\iff &\underbrace{\underbrace{\sup_{v \in V} \operatorname{Re}(\langle v, -y\rangle)}_{\ge 0, \text{ da } 0 \in V} + \frac{\varepsilon}{2}}_{=: C > 0} < \operatorname{Re}(\langle x, -y\rangle)
\end{aligned}$$

Definiere $\tilde{y} := -\frac{y}{C}$. Dann gilt

$$1 < \operatorname{Re}(\langle x, \tilde{y}\rangle) \tag{1}$$

und

$$\sup_{v \in V} \operatorname{Re}(\langle v, \tilde{y}\rangle) = \frac{1}{C} \sup_{w \in V} \operatorname{Re}(\langle w, -y\rangle) \le 1\,. \tag{2}$$

(2) impliziert $\tilde{y} \in V^\circ \subseteq A^\circ$ (da $A \subseteq V$). Damit folgt jedoch aus (1), dass $x \notin A^{\circ\circ}$ ↯.

□

Corollary 2.5 (Charakterisierung abgeschlossener konvexer Mengen). *Sei (X, Y) ein duales Paar und $A \subseteq X$ konvex mit $0 \in A$. A ist genau dann abgeschlossen bzgl. $\sigma(X, Y)$, wenn A eine Polare ist, also*

$$A \text{ ist abgeschlossen bzgl. } \sigma(X, Y) \iff \exists B \subseteq Y: \quad B^\circ = A\,.$$

Beweis. „ $\implies$ “ Wähle $B := A^\circ$, dann gilt:

$$B^\circ = A^{\circ\circ} \overset{\text{Bidualensatz}}{=} \overline{\operatorname{conv}(A \cup \{0\})} = A$$

„ $\impliedby$ “ Folgt aus Lemma 2.2(i), angewendet auf das duale Paar (Y, X). □

3 Der Satz von Alaoglu-Bourbaki

Hier betrachten wir das duale Paar (X, X') eines lokalkonvexen Raums mit seinem Dualraum.

Theorem 3.1 (Alaoglu-Bourbaki). *Sei $U \subseteq X$ eine Nullumgebung. Dann ist U° kompakt bezüglich $\sigma(X', X)$.*

Beweis. Vorüberlegung: Tychonoff gibt eine Kompaktheitsbedingung in der Produkttopologie auf $\mathbb{K}^X$. Sei $\mathbb{K}^X$ die Menge aller Funktionale auf X, dann ist offensichtlich $X' \subseteq X$. Sei τ_p die Produkttopologie auf

$\mathbb{K}^X$ und $\mathbb{K}^X|_{X'}$ die Teilraumtopologie auf X'. Die Produktopologie ist die gröbste Topologie, bezüglich der alle kanonischen Projektionen

$$\pi_x\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^X & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array},$$

stetig sind. Dies sind gerade die Auswertungsfunktionale. Somit ist τ_p die Topologie der punktweisen Konvergenz, denn falls $f_n \to f \in \mathbb{K}^X$ wrt. τ_p, dann gilt auch $f_n(x) = \pi_x(f_n) \to \pi_x(f) = f(x)$ für jedes x.

- $\mathbb{K}^X, \tau_p$ ist ein topologischer Vektorraum, d.h. $+\colon \mathbb{K}^X \times \mathbb{K}^X \to \mathbb{K}^X$ und $\cdot\colon \mathbb{K} \times \mathbb{K}^X \to \mathbb{K}^X$ sind stetig wrt. τ_p.
- Somit ist auch $(X', \tau_p|_{X'})$ ein topologischer Vektorraum, denn $+\colon X' \times X' \to \mathbb{K}^X$ und $\cdot\colon \mathbb{K} \times X' \to \mathbb{K}^X$ sind stetig wrt. $\tau_p|_{X'}$.
- Außerdem sind die eingeschränkten kanonischen Projektionen stetig wrt. $\tau_p|_{X'}$:

$$\pi_x|_{X'}\colon \begin{array}{ccc} X' & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Nach Definition ist die schwach-$*$-Topologie ($\sigma(X', X)$) auf X' die gröbste Vektorraumtopologie, sodass alle Auswertungsfunktionale stetig sind, daher muss $\tau_p|_{X'}$ feiner sein als $\sigma(X', X)$, d.h.

$$\sigma(X', X) \subseteq \tau_p|_{X'}\,.$$

Daraus folgt, dass die Identität

$$\mathrm{id}\colon (X', \tau_p|_{X'}) \to (X', \sigma(X', X))$$

stetig ist. Das heißt, falls eine Menge $A \subseteq X'$ kompakt bezüglich $\tau_p|_{X'}$ ist, dann auch bezüglich $\sigma(X', X)$.

Sei nun $U \subseteq X$ eine Nullumgebung, dann gibt es eine absolutkonvexe offene Menge $V \subseteq U$, denn es gibt eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Mengen. Außerdem ist V als Nullumgebung absorbierend: Sei $x \in X$, dann ist

$$g_x\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & X \\ \lambda & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

stetig. Also ist $g^{-1}(V)$ eine Nullumgebung in $\mathbb{K}$, das heißt $\exists\, \varepsilon_x > 0$ sodass $\forall 0 < \varepsilon \le \varepsilon_x\colon \varepsilon \in g^{-1}(V)$, was äquivalent ist zu $\varepsilon\, x \in V \iff x \in \varepsilon^{-1}\, V$. Wähle

$$\lambda_x := \begin{cases} 1, & x \in V \\ \varepsilon_x, & x \notin V \end{cases}$$

und $K_x := \overline{B_{\lambda_x^{-1}}(0)} \subseteq \mathbb{K}$, was offensichtlich kompakt ist. Nach Tychonoff ist

$$K := \bigtimes_{x \in X} K_x = \{f\colon X \to \mathbb{K} \mid \forall x \in X:\ \ f(x) \in K_x\}$$

kompakt in τ_p.

Wir zeigen $V^\circ \subseteq K$. Sei $f \in V^\circ$. Dann gilt, weil V absolut konvex ist:

$$\forall x \in V:\ \ |\langle f, x\rangle| \le 1$$

Sei nun $x \in X$ beliebig, dann ist $\lambda_x x \in V$ nach Konstruktion und somit

$$|\langle f, \lambda_x x\rangle| \le 1 \iff |\langle f, x\rangle| \le \frac{1}{\lambda_x} \iff f(x) \in K_x\,.$$

Zu guter Letzt zeigen wir, dass V° abgeschlossen in $\tau_p|_K$ ist. Sei dazu $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ein Netz in V° mit $\lim_{\alpha \in I} f_\alpha = f$.

- f ist linear, weil Vektoraddition und Skalarmultiplikation stetig sind.
- $f\colon X \to \mathbb{K}$ ist stetig, denn:

$$\begin{aligned} & f\colon X \to \mathbb{K} \text{ stetig} \\ \iff & \exists M > 0\, \exists p_1, \ldots, p_n\, \forall x \in X : \quad |f(x)| \le M \max_{1 \le j \le n} |p_j(x)| \\ \iff & |f|\colon X \to \mathbb{R}_+ \text{ stetig} \\ \overset{\substack{|f| \text{ Halbnorm} \\ \downarrow}}{\iff} & \{x \in X \,|\, |f(x)| \le 1\} \text{ Nullumgebung} \end{aligned}$$

Wir zeigen $V \subseteq \{x \in X \,|\, |f(x)| \le 1\}$. Sei $x \in V$, dann gilt für alle $\alpha \in I$:

$$1 \ge |\langle f_\alpha, x\rangle|$$

und somit auch $|\langle f, x\rangle| \le 1$.

Somit ist $f \in X'$. Das heißt, f_α ist ein konvergentes Netz in X' bezüglich $\tau_p|_{X'}$. Weil die Identität stetig ist, ist auch $\lim_{\alpha \in I} f_\alpha = f$ bezüglich $\sigma(X', X)$. Somit ist $f \in \overline{V^\circ}^{\sigma(X',X)} = V^\circ$.

Somit ist V° eine abgschlossene Teilmenge des Kompaktums K und somit selbst kompakt in $\tau_p|_K$. Also auch in τ_p und auch in $\tau_p|_{X'}$. Nach unserer Vorüberlegung, ist V° also auch kompakt in $\sigma(X', X)$. Nun ist ja $V \subseteq U$, also $U^\circ \subseteq V^\circ$ und U° ist abgschlossen in $\sigma(X', X)$ also ist auch U° kompakt in $\sigma(X', X)$. □

Corollary 3.2 (Banach-Alaoglu). *Ist X ein normierter Raum, dann ist $B_1(0) \subseteq X'$ weak-$*$-kompakt.*

Beweis. Folgt aus Alaoglu-Bourbaki, mit $U = B_1(0) \subseteq X$ und Beispiel **??**. □

4 Mackey topologies and the Mackey-Ahrens theorem

Wir wissen ja bereits, dass die $\sigma(X, Y)$-Topologie die gröbste duale Topologie ist, das heißt die gröbste Topologie, sodass

$$X' \ni f \leftrightarrow \ell_y\,.$$

Für eine gröbere Topologie gibt es $y \in Y$, sodass ℓ_y nicht stetig ist.
Aber man kann auch die Gegenteilige Frage stellen: Welches ist die feinste duale Topologie, also welches ist die feinste lokalkonvexe Toplogie, sodass es keine stetigen linearen Funktionale gibt, die nicht von der Form ℓ_y sind?

Dies ist gerade die Mackey-Topologie $\tau(X, Y)$, die gerade die lokalkonvexe Topologie ist, die von den Halbnormen

$$\{x \mapsto \sup_{y \in C} |\langle x, y\rangle|\}_{C \subseteq Y \text{ kompakt und konvex}}$$

erzeugt wird.

Theorem 4.1 (Mackey-Ahrens). *Sei (X, Y) ein duales Paar und τ eine $\langle X, Y\rangle$-duale Topologie auf X. Dann gilt*

$$\sigma(X, Y) \subseteq \tau \subseteq \tau(X, Y)\,.$$

Es gibt einige schöne Resultate:

- Ein lokalkonvexer Raum ist reflexiv, gdw. er die Mackey Topologie trägt.
- Jeder Frechet Raum trägt die Mackey topology.
- Insbesondere ist also der Schwartzraum reflexiv.
- Im Schwartzraum ist jede abgschlossene, beschränkte Menge kompakt.