# 1 Duale Paare, schwache und duale Topologien

**Definition 1.1 (Duales Paar).** Seien $X, Y$ $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\langle \bullet, \bullet \rangle : X \times Y \to \mathbb{K}$ eine bilineare Abbildung. Sind die Familien $\{x \mapsto \langle x, y \rangle\}_{y \in Y}$ und $\{y \mapsto \langle x, y \rangle\}_{x \in X}$ punktetrennend, das heißt

$$\forall x \in X \setminus \{0\}\ \exists y \in Y :\ \ \langle x, y \rangle \neq 0 \quad \text{und} \quad \forall y \in Y \setminus \{0\}\ \exists x \in X :\ \ \langle x, y \rangle \neq 0\,,$$

so nennt man $(X, Y, \langle X, Y \rangle)$ ein **duales Paar**.

*Remark* 1.2. Man kann die Elemente von $X$ bzw. $Y$ als lineare Funktionale auf $Y$ bzw. $X$ auffassen, via

$$\ell_y \colon x \mapsto \ell_y(x) = \langle x, y \rangle$$

bzw.

$$\ell_x \colon y \mapsto \ell_x(y) = \langle x, y \rangle\ .$$

**Definition 1.3 ($\sigma(X, Y)$-Topologie).** Sei $(X, Y)$ ein duales Paar. Die $\sigma(X, Y)$**-Topologie** auf $X$ ist die lokalkonvexe Toplogie, die von den Halbnormen $(x \mapsto |\langle x, y \rangle|)_{y \in Y}$ erzeugt wird.

Frage: Was ist der topologische Dualraum von $X$ mit der $\sigma(X, Y)$-Topologie?
Antwort: Es ist genau $Y$!

**Corollary 1.4.** *Sei $(X, Y)$ ein duales Paar. Dann ist*

$$(X, \sigma(X, Y))' = Y\,,$$

*in dem Sinn, dass jedes lineares, $\sigma(X, Y)$-stetiges Funktional auf $X$ von der Form $x \mapsto \langle x, y \rangle$ für ein bestimmtes $y$ ist und dass jedes Funktional dieser Form linear und $\sigma(X, Y)$ stetig ist, also:*

$$(X, \sigma(X, Y))' = \big\{x \mapsto \langle x, y \rangle \;\big|\; y \in Y\big\} = \{\ell_y \,|\, y \in Y\}$$

**Definition 1.5.** Sei $(X, Y)$ ein duales Paar. Eine lokalkonvexe Topologie $\tau$ auf $X$ heißt $\langle X, Y \rangle$**-duale Topologie**, falls

$$(X, \tau)' = Y\,,$$

also die linearen, $\tau$-stetigen Funktionale genau die von der Form

$$x \mapsto \langle x, y \rangle$$

für $y \in Y$ sind.

Nach dieser Definition ist $\sigma(X, Y)$ die gröbste $\langle X, Y \rangle$-duale Topologie. Eine Charakterisierung aller $\langle X, Y \rangle$-dualen Topologien gibt der Satz von Mackey-Ahrens.

# 2 Polare Mengen und der Bipolarensatz

**Definition 2.1.** Sei $(X, Y)$ ein duales Paar und $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Dann ist die **Polare** von $A$ gegeben durch

$$A^\circ := \left\{ y \in Y \;\Big|\; \sup_{x \in A} \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) \leq 1 \right\} \qquad \text{(Teilmenge von } Y\text{)}$$

und die Polare von $B$ durch

$$B^\circ := \left\{ x \in X \;\Big|\; \sup_{y \in B} \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) \leq 1 \right\} \qquad \text{(Teilmenge von } X\text{)}$$

⚠ Oft wird auch $|\langle x, y \rangle| \leq 1$ statt $\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle)$ gefordert.

**Lemma 2.2 (Eigenschaften von Polaren).** *Sei $(X, Y)$ ein duales Paar und $A \subseteq X$. Dann gilt:*

*(i) $0 \in A^\circ$, $A^\circ$ ist konvex und abgeschlossen bzgl. $\sigma(Y, X)$ und $A^\circ = \overline{\operatorname{conv}(A)}^\circ$.*

*(ii)* $A \subseteq A^{\circ\circ}$ *und* $A \subseteq B \implies B^\circ \subseteq A^\circ$.

*(iii)* *Sei* $I$ *eine Indexmenge und* $(A_i)_{i\in I} \subseteq X^I$. *Dann gilt*

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ = \bigcap_{i\in I} A_i^\circ .$$

*(iv)* *Ist* $A$ *kreisförmig, dann ist* $A^\circ = \{y \in Y \mid \sup_{x\in A} |\langle x, y\rangle| \leq 1\}$.

**Example 2.3.** Ist $X$ ein normierter Raum, dann ist

$$(\overline{B_1^X})^\circ = \overline{B_1^{X'}} .$$

**Theorem 2.4 (Bipolarensatz).** *Sei* $(X, Y)$ *ein duales Paar und* $A \subseteq X$. *Dann ist*

$$A^{\circ\circ} = \overline{\operatorname{conv}(A \cup \{0\})} .$$

*Beweis.* „$\supseteq$“:

$$(A \cup \{0\})^\circ = A^\circ \cap \underbrace{\{0\}^\circ}_{Y} = A^\circ \implies (A \cup \{0\})^{\circ\circ} = A^{\circ\circ}$$

$$\implies A^{\circ\circ} = (A \cup \{0\})^{\circ\circ} = \overline{\operatorname{conv}(A \cup \{0\})}^{\circ\circ} \supseteq \overline{\operatorname{conv}(A \cup \{0\})} .$$

„$\subseteq$“: Trenne konvexe Menge und einen Punkt mit Hahn-Banach. □

# 3 Der Satz von Alaoglu-Bourbaki

Hier betrachten wir das duale Paar $(X, X')$ eines lokalkonvexen Raums mit seinem Dualraum.

**Theorem 3.1 (Alaoglu-Bourbaki).** *Sei* $U \subseteq X$ *eine Nullumgebung. Dann ist* $U^\circ$ *kompakt bezüglich* $\sigma(X', X)$.

*Beweis.* Tychonoff gibt eine Kompaktheitsbedingung in der Produkttopologie auf $\mathbb{K}^X$ und die $\sigma(X', X)$-Topologie ist gröber als die Teilraumtopologie der Produkttopologie auf $X'$. □

**Corollary 3.2 (Banach-Alaoglu).** *Ist* $X$ *ein normierter Raum, dann ist* $B_1(0) \subseteq X'$ *weak-$*$-kompakt.*

*Beweis.* Folgt aus Alaoglu-Bourbaki, mit $U = \overline{B_1(0)} \subseteq X$ und Beispiel **??**. □

# 4 Mackey topologies and the Mackey-Ahrens theorem

Wir wissen ja bereits, dass die $\sigma(X, Y)$-Topologie die gröbste duale Topologie ist, das heißt die gröbste Topologie, sodass

$$X' \ni f \leftrightarrow \ell_y .$$

Für eine gröbere Topologie gibt es $y \in Y$, sodass $\ell_y$ nicht stetig ist. Aber man kann auch die Gegenteilige Frage stellen: Welches ist die feinste duale Topologie, also welches ist die feinste lokalkonvexe Toplogie, sodass es keine stetigen linearen Funktionale gibt, die nicht von der Form $\ell_y$ sind? Dies ist gerade die Mackey-Topologie $\tau(X, Y)$, die gerade die lokalkonvexe Topologie ist, die von den Halbnormen

$$\{x \mapsto \sup_{y\in C} |\langle x, y\rangle|\}_{C\subseteq Y \text{ kompakt und konvex}}$$

erzeugt wird.

**Theorem 4.1 (Mackey-Ahrens).** *Sei* $(X, Y)$ *ein duales Paar und* $\tau$ *eine* $\langle X, Y\rangle$*-duale Topologie auf* $X$. *Dann gilt*

$$\sigma(X, Y) \subseteq \tau \subseteq \tau(X, Y) .$$