

Sommersemester 2022

MITSCHRIEB DER VORLESUNG

Gewöhnliche Differentialgleichungen

gehalten von Prof. Dr. Peter Müller

LMU München

Version vom 2. Juni 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeine Grundlagen	2
1.1	Nomenklatur und Systematik	2
1.2	Elementare Lösungsmethoden: exakte Differentialgleichungen	6
2	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	9
2.1	Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder	9
2.2	Existenzssatz von Peano	15
2.3	Fortsetzen von Lösungen	19
2.4	Eindeutigkeit von Lösungen	24
3	Lineare Differentialgleichungen	25
4	Phasenportraits und Flüsse	33
5	Stabilität	40
5.1	Stetigkeit und Differenzierbarkeit des Flusses	40
5.2	Anwendung: allgemeine Formel von Liouville und Wiederkehrrsatz von Poincaré	47
5.3	Stabilitätstheorie	50
5.4	Lyapunov-Funktionen	58
5.5	Verzweigungen	64
6	Ein Blick ins Chaos	67

1 Allgemeine Grundlagen

1.1 Nomenklatur und Systematik

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 1.1

Seien $k, d \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{d(k+1)}$ und $F: D \rightarrow \mathbb{K}^d$. Die Gleichung

$$F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0 \in \mathbb{K}^d \quad (1)$$

mit Variablen $x \in \mathbb{R}$ und $y, y', \dots, y^{(k)}$ heißt (**gewöhnliche**) **Differentialgleichung** (=DGL) **k-ter Ordnung**. Falls es ein (uneigentliches) Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und $\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}^d$ k -mal diffbar gibt, mit

- $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(k)}(x)) \in D$
- $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(k)}(x)) = 0$,

für alle $x \in I$, so heißt φ **Lösung** der DGL mit **Existenz-/ Lösungsintervall** I .

Bemerkung 1.2

- (a) „gewöhnlich“ $\longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$
- (b) d Gleichungen für d unbekannte Funktionen
- (c) Für $d > 1$ spricht man von einem **System** aus d Differentialgleichungen.
- (d) Falls $I \cap \partial I \neq \emptyset$, ist $\varphi'(x)$ für $x \in I \cap \partial I$ nur einseitig definiert.
- (e) Der Begriff der DGL reicht historisch zurück bis auf Newton: Bewegungsgleichungen in der (klassischen) Mechanik;
ubiquitär in quantitativen Wissenschaften: sehr häufig als (zeitliche) Evolutionsgleichungen. Daher oft folgende Notation: $x \rightsquigarrow t$ (Zeit), $y' \rightsquigarrow \dot{y}$ usw.
- (f) Ist eine DGL in der Darstellung wie in (1), so ist sie **implizit**. Falls nach $y^{(k)}$ aufgelöst werden kann, spricht man von einer **expliziten** DGL: $y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})$
- (g) **autonome** DGL : $\iff F$ ist unabhängig von x .

Beispiel 1.3

- (a) radioaktiver Zerfall für die Anzahl $t \mapsto M(t)$ und der Zerfallsrate $\gamma > 0$:

$$\dot{M} = -\gamma M$$

- (b) Newtonsche Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators:

$$m\ddot{x} = -\kappa x$$

mit der Masse $m > 0$, der Federkonstanten $\kappa > 0$ und der Auslenkung $t \mapsto x(t)$

- (c) implizite DGL für $x \mapsto y(x) \in \mathbb{K}$:

$$(y')^2 = yx$$

Satz 1.4: Reduktion auf Systeme erster Ordnung

Gegeben eine DGL k -ter Ordnung wie in (1), betrachte das System 1. Ordnung

$$\hat{F}(x, \hat{y}, \hat{y}') = 0 \quad (2)$$

mit

$$\hat{y}' := \begin{pmatrix} \hat{y}'_1 \\ \vdots \\ \hat{y}'_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{dk}, \quad \hat{F}: \hat{D} \rightarrow \mathbb{K}^{dk}, \quad \hat{F}(x, \hat{y}, \hat{y}') := \begin{pmatrix} \hat{y}_2 - \hat{y}'_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_k - \hat{y}'_{k-1} \\ F(x, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_k, \hat{y}'_k) \end{pmatrix}$$

und $\hat{D} := \{(x, \hat{y}, \hat{y}') \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{2dk} : (x, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_k, \hat{y}'_k) \in D\}$. Dann gilt

(a)

$\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}^d$ ist Lösung von (1) $\implies \hat{\varphi} := (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(k-1)}): I \rightarrow \mathbb{K}^{dk}$ ist Lösung von (2)

(b)

$\hat{\varphi} =: (\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_k): I \rightarrow \mathbb{K}^{dk}$ ist Lösung von (2) $\implies \hat{\varphi}_1: I \rightarrow \mathbb{K}^d$ ist Lösung von (1)

Beweis.

(a) Nach Voraussetzung gilt:

- $(x, \hat{\varphi}, \hat{\varphi}'(x)) \in \hat{D} \quad \forall x \in I$
- $\hat{\varphi}_j = \varphi^{(j-1)} = (\varphi^{(j-2)})' = \hat{\varphi}'_{j-1} \quad \forall j = 2, \dots, k$
- $0 \stackrel{\text{n.V.}}{=} F(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(k)}(x)) = F(x, \hat{\varphi}_1(x), \dots, \hat{\varphi}_k(x), \hat{\varphi}'_k(x))$

(b) Nach Voraussetzung ist $\hat{\varphi}_j = \hat{\varphi}_1^{(j-1)} \quad \forall j = 2, \dots, k$. Also

$$(x, \hat{\varphi}_1(x), \hat{\varphi}'_1(x), \dots, \hat{\varphi}_1^{(k)}(x)) \in D \quad \forall x \in I$$

und

$$0 = F(x, \hat{\varphi}_1(x), \dots, \hat{\varphi}_k(x), \hat{\varphi}'_k(x)) = F(x, \hat{\varphi}_1(x), \dots, \hat{\varphi}_1^{(k-1)}(x), \hat{\varphi}_1^{(k)}(x)).$$

□

Bemerkung 1.5

- (a) Moral: es genügt Systeme 1. Ordnung zu betrachten!
- (b) Analog: es genügt Systeme mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zu betrachten! (siehe Übung)

Beispiel 1.6: Harmonischer Oszillator als Hamiltonsches System

Setze $p := m\dot{x}$ (Impuls) also $\dot{p} = -\kappa x$. Dann ist

$$\begin{aligned} m\ddot{x} = -\kappa x &\iff \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} p/m \\ -\kappa x \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \partial H(x,p)/\partial p \\ -\partial H(x,p)/\partial x \end{pmatrix}} = A \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $A = \begin{pmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & -\kappa \end{pmatrix}$ (\rightsquigarrow lineare DGL) und der **Hamiltonfunktion** $H(x, p) := \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa x^2$.

Satz 1.7: Reduktion auf autonome DGL

Wir betrachten (nach Satz 1.4 o.E.) folgende DGL erster Ordnung:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

mit $F: D \rightarrow \mathbb{K}^d$ und das um eine Dimension größere System

$$\tilde{F}(\tilde{y}, \tilde{y}') = 0 \quad (2)$$

mit

$$\tilde{y}' := \begin{pmatrix} \tilde{y}'_1 \\ \tilde{y}'_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d, \quad \tilde{F}: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d, \quad \tilde{F}(\tilde{y}, \tilde{y}') := \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 - 1 \\ F(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}'_2) \end{pmatrix},$$

wobei $\tilde{D} := \{(\tilde{y}, \tilde{y}') \in (\mathbb{R} \times \mathbb{K}^d)^2 : (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}'_2)\}$. Dann gilt:

(a)

$$\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}^d \text{ ist Lösung von (1)} \implies \tilde{\varphi} := \begin{pmatrix} \text{id} \\ \varphi \end{pmatrix}: I \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d \text{ ist Lösung von (2)}$$

(b)

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &=: (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2): I \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d \text{ ist Lösung von (2) und } \exists x_0 \in I: \tilde{\varphi}_1(x_0) = x_0 \\ &\implies \tilde{\varphi}_2: I \rightarrow \mathbb{K}^d \text{ ist Lösung von (1)} \end{aligned}$$

Beweis.

(a) Sei $x \in I$, dann ist $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D$, also $(\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}'(x)) \in \tilde{D}$ und

$$\tilde{F}(\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}'(x)) = \begin{pmatrix} \text{id}'(x) - 1 \\ F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \end{pmatrix} = 0.$$

(b) Sei $x \in I$, dann ist $\tilde{\varphi}_1(x) - 1 = 0$ und somit $\tilde{\varphi}_1(x) = x + \gamma$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$. Wegen $\tilde{\varphi}_1(x_0) = x_0$ folgt $\gamma = 0$, also $\tilde{\varphi}_1(x) = x \forall x \in I$.

$$\stackrel{\forall x \in I}{\implies} (\underbrace{\tilde{\varphi}_1(x)}_{=x}, \tilde{\varphi}_2(x), \tilde{\varphi}'_2(x)) \in D \quad \text{und} \quad 0 \stackrel{\text{n.V.}}{=} (\underbrace{\tilde{\varphi}_1(x)}_{=x}, \tilde{\varphi}_2(x), \tilde{\varphi}'_2(x))$$

□

Moral: Es genügt reelle, autonome Systeme 1. Ordnung zu betrachten.

Lemma 1.8: Translationsinvarianz autonomer DGL'en

Sei $D \subseteq \mathbb{K}^{2d}$, $F: D \rightarrow \mathbb{K}^d$ und $\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}^d$ eine Lösung der autonomen DGL $F(y, y') = 0$. Sei $\xi \in \mathbb{R}$.

Dann ist auch $\varphi_\xi: \begin{matrix} I - \xi & \rightarrow & \mathbb{K}^d \\ x \mapsto \varphi(x + \xi) \end{matrix}$ eine Lösung.

Beweis.

$$x \in I - \xi \implies x + \xi \in I \stackrel{\text{n.V.}}{\implies} (\underbrace{\varphi_\xi}_{:=\varphi(x+\xi)}, \underbrace{\varphi'_\xi}_{\varphi'(x+\xi)}) \in D \text{ und } F(\varphi_\xi(x), \varphi'_\xi(x)) = 0$$

□

Definition 1.9: Anfangswertproblem

Sei $F: D \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{K}^{dk}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_{0,0}, \dots, y_{0,k-1} \in \mathbb{K}^d$. Dann:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi: I \rightarrow \mathbb{K}^d \text{ löst das} \\ \text{Anfangswertproblem (=:AWP):} \\ \left\{ \begin{array}{l} F(x, y, \dots, y^{(k)}) = 0 \\ (x_0; y_{0,0}, \dots, y_{0,k-1}) \end{array} \right\} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ ist Lösung der DGL zu } F(x, y, \dots, y^{(k)}) = 0, \\ x_0 \in I \text{ und } \varphi^{(j)}(x_0) = y_{0,j} \quad \forall j = 0, \dots, k-1 \end{array} \right.$$

Bemerkung 1.10

Die Äquivalenz in Satz 1.4 gilt auch für die zugehörigen AWP's.

Satz 1.11: Volterra-Integralgleichung für explizite DGL 1. Ordnung

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$, $f: D \rightarrow \mathbb{K}^d$ stetig, $x_0 \in I$ und $(x_0, y_0) \in D$. Sei $\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}^d$ stetig. Dann löst φ das AWP

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

genau dann, wenn φ die Volterra-Integralgleichung erfüllt, d.h. $\{(t, \varphi(t)) : t \in I\} \subseteq D$ und

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \quad \forall x \in I. \quad (\text{VI})$$

(Das Integral ist komponentenweise gemeint.)

Beweis.

„ \implies “ φ erfülle das AWP.

$$\implies \varphi \text{ diffbar und } f \text{ stetig} \implies \varphi \in C^1(I, \mathbb{K}^d) \text{ (d.h. stetig diffbar)}$$

$$\stackrel{\text{HDI}}{\implies} \varphi(x) = \underbrace{\varphi(x_0)}_{=y_0} + \int_{x_0}^x \underbrace{\varphi'(t)}_{f(t, \varphi(t))} dt \quad \forall x \in I$$

„ \impliedby “

- $\varphi(x_0) = y_0$ klar
- Nach Voraussetzung ist $t \mapsto f(t, \varphi(t))$ stetig, also ist die rechte Seite von (VI) diffbar in x . Somit ist φ diffbar und $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in I$.

□

1.2 Elementare Lösungsmethoden: exakte Differentialgleichungen

Definition 1.12

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $P, Q: D \rightarrow \mathbb{R}$. Die Differentialgleichung

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \quad (*)$$

heißt **exakt** gdw. es eine diffbare Funktion $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$P = \frac{\partial V}{\partial x} \quad \wedge \quad Q = \frac{\partial V}{\partial y}.$$

In diesem Fall heißt V **Stammfunktion**.

Satz 1.13

(a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sternförmig, P, Q stetig partiell diffbar. Dann gilt:

$$\text{Die DGL } (*) \text{ ist exakt} \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ auf } D$$

(b) Die DGL $(*)$ sei exakt mit Stammfunktion V und $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar. Dann gilt:

$$\varphi \text{ löst } (*) \iff V(x, \varphi(x)) = \text{const} \quad \forall x \in I$$

Beweis.

(a) Aus der Analysis ist bekannt:

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ ist ein Gradientenfeld} \stackrel{D \times \mathbb{R} \text{ sternf.}}{\iff} \nabla \times \begin{pmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

(b) Aus der Kettenregel folgt:

$$\frac{d}{dx} V(x, \varphi(x)) = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x}(x, \varphi(x))}_{P(x, \varphi(x))} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial y}(x, \varphi(x))}_{Q(x, \varphi(x))} \varphi'(x)$$

□

Bemerkung 1.14

- (a) Die Voraussetzung „sternförmig“ in 1.13(a) kann zu „einfach zusammenhängend“ abgeschwächt werden.
- (b) Moral: Suche Äquipotentiallinien von V !

Korollar 1.15

Die DGL $(*)$ sei exakt mit Stammfunktion $V \in C^1(D)$ und $(x_0, y_0) \in D$ ein innerer Punkt mit $Q(x_0, y_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung I von x_0 und genau ein $\varphi \in C^1(I)$, sodass φ eine Lösung von $(*)$ ist und $\varphi(x_0) = y_0$. φ ist die lokal eindeutige Lösung von $V(x, \varphi(x)) = V(x_0, y_0)$ für alle $x \in I$.

Beweis.

Nach Voraussetzung und dem Satz von den impliziten Funktionen hat die Gleichung $V(x, \varphi(x)) = V(x_0, y_0)$ lokal um x_0 eine eindeutige C^1 -Lösung. Somit folgt die Behauptung mit Satz 1.13 (b). \square

Bemerkung 1.16

- (a) Falls $Q(x_0, y_0) = 0$ aber $P(x_0, y_0) \neq 0$, gibt es genau eine lokale C^1 -Lösung $V(\psi(y), y) = V(x_0, y_0)$. Aber ψ ist nicht notwendigerweise umkehrbar oder die Umkehrfunktion nicht differenzierbar, siehe Beispiel 1.17
- (b) Falls (*) nicht exakt, hilft manchmal weiter: Finde $R: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{D} \subseteq D$, $R(x, y) \neq 0$, $\forall (x, y) \in \tilde{D}$, sodass mit $\tilde{Q} := RQ$, $\tilde{P} := RP: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ die DGL

$$\tilde{P}(x, y) + \tilde{Q}(x, y)y' = 0$$

exakt ist. In diesem Fall heißt R **integrierender Faktor**.

Beispiel 1.17

$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, betrachte folgende DGL:

$$\underbrace{4x + 3y^2}_{=:P(x,y)} + \underbrace{2xy}_{=:Q(x,y)} y' = 0 \quad (*)$$

(*) ist nicht exakt:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 6y \neq 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

Ansatz: $R(x, y) = x^2$, $\tilde{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$, also $\tilde{P}(x, y) = 4x^3 + 2x^2y^2$ und $\tilde{Q}(x, y) = 2x^3y$.

$$\implies \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x},$$

also ist die neue DGL exakt! Finde Stammfunktion:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x, y) &\stackrel{!}{=} \int \tilde{Q}(x, y) dy + g(x) = x^3y^2 + g(x) \\ \tilde{V}(x, y) &\stackrel{!}{=} \int \tilde{P}(x, y) dx + h(y) = x^4 + x^3y^2 + h(y) \\ \implies \tilde{V}(x, y) &= x^4 + x^3y^2 \stackrel{!}{=} c = \tilde{V}(x_0, y_0) \\ \implies y^2 &= \frac{c}{x^3} - x = \left(\frac{x_0^3}{x}\right)^3 (x_0 + y_0^2) - x \end{aligned} \quad (**)$$

- Für $x_0, y_0 \neq 0$ ($\iff \tilde{Q}(x_0, y_0) \neq 0$) existiert eine offene Umgebung $I \ni x_0$ in \mathbb{R} , sodass

$$x \mapsto \varphi(x) := \operatorname{sgn} y_0 \left(\frac{x_0^3(x_0 + y_0^2)}{x^3} - x \right)^{1/2} \in C^1(I)$$

die einzige Lösung von (*) auf I mit $\varphi(x_0) = y_0$ ist.

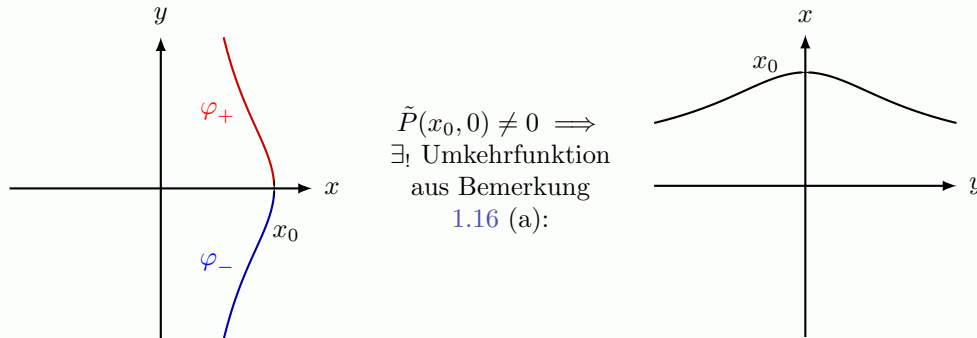
- Für $x_0 \neq 0$, $y_0 = 0$ liegt x_0 auf dem Rand des Definitionsbereiches $\{x \in \mathbb{R} : \frac{x_0^4}{x^3} - x \geq 0\}$. Z.B. für $x_0 > 0$:

$$y^2 = \frac{x_0^4}{x^3} - x \implies \frac{x_0^4}{x^3} \stackrel{!}{\geq} x \xrightarrow[\text{von } x_0]{x > 0 \text{ in Umg.}} x_0^4 \geq x^4$$

Jedoch sind

$$\varphi_{\pm}(x) := \pm \sqrt{\frac{x_0^4}{x^3} - x} = \sqrt{\frac{1}{x^3}(x_0 - x)(x_0 + x)(x_0^2 + x^2)}, \quad x \in (0, x_0]$$

keine Lösungen (da in x_0 nicht diffbar).



$\tilde{P}(x_0, 0) \neq 0 \implies$
 $\exists!$ Umkehrfunktion
 aus Bemerkung
 1.16 (a):

- Sind Lösungen von $(*)$ verloren gegangen wegen $\tilde{D} \subsetneq D$? Das heißt: Gibt es eine Lösung $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 \in I$? Eine solche Lösung wäre auch eine von $\tilde{P} + \tilde{Q}y' = 0$ auf $I \setminus \{0\}$. Wegen $\varphi(0) \in \mathbb{R}$ gilt $(**)$ mit $c = 0$, das heißt $x^4 + x^3(\varphi(x))^2 = 0$.

$$\implies (\varphi(x))^2 = -x \implies I \subseteq (-\infty, 0] \text{ und } \varphi(x) = \pm\sqrt{-x}$$

Aber $\pm\sqrt{-x}$ ist nicht diffbar in $x = 0$. Somit sind keine Lösungen verloren gegangen.

Wichtiger Spezialfall von exakten DGL'en

Satz 1.18: Trennung der Variablen

Seien $f: D_x \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D_y \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $x_0 \in D_x$, $y_0 \in D_y$ innere Punkte. Sei $g(y_0) \neq 0$. Dann \exists eine Umgebung $I \ni x_0$, sodass das AWP

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ (x_0; y_0) \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ hat. Diese ist die eindeutige (lokale) Lösung von

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Merkregel:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \xrightarrow{\text{Variablen trennen}} \text{„} \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \text{“} \implies \int_{y_0}^y \frac{d\tilde{y}}{g(\tilde{y})} = \int_{x_0}^x f(\tilde{x}) d\tilde{x}$$

Löse dann nach y auf.

Beweis.

Gegebenenfalls verkleinere D_y , sodass $g(y) \neq 0 \forall y \in D_y$. Dann:

$$\begin{aligned} y' = f(x)g(y) &\iff f(x) - \frac{1}{g(y)} = 0 \\ \implies V(x, y) &= \int_{x_0}^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} - \int_{y_0}^y \frac{1}{g(\tilde{y})} d\tilde{y} \text{ ist Stammfunktion und } V \in C^1(D_x \times D_y). \end{aligned}$$

Da (x_0, y_0) ein innerer Punkt von $D_x \times D_y$ ist und $1/g(y_0) \neq 0$ folgt mit Korollar 1.15, dass es eine

Umgebung $I \ni x_0$ und genau eine Lösung $\varphi \in C^1(I)$ von $f - \frac{1}{g}y' = 0$ gibt mit $\varphi(x_0) = y_0$. Diese löst $V(x, \varphi(x)) = V(x_0, y_0) \quad \forall x \in I$, also

$$\int_{x_0}^x f(\tilde{x}) d\tilde{x} - \int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{d\tilde{y}}{g(\tilde{y})} = 0.$$

□

Beispiel 1.19

Betrachte das AWP $\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \\ (1; 1) \end{cases}$. Definiere

$$f: \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{matrix}, \quad g: \begin{matrix} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \frac{1}{y} \end{matrix}$$

Dann:

$$\begin{aligned} & \text{„} y dy = -x dx \text{“} \\ \Rightarrow & \int_{y_0}^y \tilde{y} d\tilde{y} = - \int_{x_0}^x \tilde{x} d\tilde{x} \\ \Rightarrow & y^2 - \underbrace{y_0^2}_{=1} = -x^2 + \underbrace{x_0^2}_{=1} \\ \Rightarrow & y^2 = 2 - x^2 \\ \Rightarrow & I =] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[, \quad \varphi(x) \stackrel{\varphi(1)=+1}{=} \sqrt{2-x^2}, \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Existenz als Fixpunktproblem der Volterra-Integralgleichung 1.11:

$$\varphi = G \varphi, \quad (G \varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, \varphi(t)) dt$$

2.1 Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder

Bekannt: Fixpunktsatz von Banach für Kontraktionen (lipschitz-stetig mit Konstante < 1) auf Banachräumen.

Ziel: schwäche die Voraussetzung der Kontraktion ab

Weg:

- Fixpunktsatz für stetige Funktionen auf konvexen und kompakten Teilmengen von \mathbb{R}^n (Folgerung aus Brouwer)
- Übertragen auf ∞ -dimensionale Räume mittels Kompaktheitsarguments

Nachteil: Arbeit

Vorteil: (Funktional-)Analytische Allgemeinbildung

Definition 2.1

Sei X ein topologischer Raum.

X hat **Fixpunkteigenschaft** : $\iff \forall f: X \rightarrow X$ stetig $\exists x \in X : f(x) = x$

Satz 2.2: Fixpunktsatz von Brouwer

$\bar{B} := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 1\}$ hat die Fixpunkteigenschaft. ($|\cdot|$ bezeichnet die euklidische Norm.)

Bemerkung 2.3

- (a) Die Fixpunkteigenschaft ist eine topologische Eigenschaft und daher unter Homöomorphismen erhalten: Sind X, Y homöomorphe topologische Räume, so gilt:

$$X \text{ hat die Fixpunkteigenschaft} \iff Y \text{ hat die Fixpunkteigenschaft}$$

- (b) Daher hat auch die abgeschlossene Einheitskugel in \mathbb{C}^d die Fixpunkteigenschaft (wegen Satz 2.2).

Erinnerung: Eine Teilmenge A eines Vektorraums heißt **konvex** gdw.

$$\forall x, y \in A : \lambda x + (1 - \lambda)y \in A \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

Korollar 2.4

Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^d$ konvex und kompakt. Dann hat A die Fixpunkteigenschaft.

Beweis.

Sei $x \in \mathbb{R}^d$.

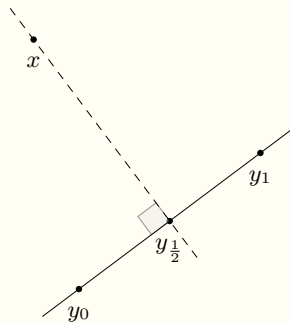
Behauptung: $\exists_1 y_x = y \in A : |x - y| = \inf_{\tilde{y} \in A} |x - \tilde{y}|$

- Existenz: Die Abbildung $A \ni \tilde{y} \mapsto |x - \tilde{y}|$ ist stetig und A ist kompakt, also wird das Infimum angenommen.
- Eindeutigkeit: Seien y_0, y_1 Minimalpunkte mit $d_{\min} := |x - y_0| = |x - y_1|$. Weil A konvex ist, ist dann $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$y_\lambda := \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_0 \in A$$

ein Minimalpunkt, denn

$$|x - y_\lambda| = |\lambda(x - y_1) + (1 - \lambda)(x - y_0)| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \lambda d_{\min} + (1 - \lambda)d_{\min} = d_{\min}.$$



Also folgt

$$\begin{aligned} (y_{1/2} - x) \cdot (y_0 - y_1) &= \frac{1}{2}[(y_0 - x) + (y_1 - x)][(y_0 - x) - (y_1 - x)] \\ &= \frac{1}{2}(y_0 - x)^2 - \frac{1}{2}(y_1 - x)^2 = 0 \\ \implies \underbrace{(y_0 - x)^2}_{d_{\min}^2} &= [(y_{1/2} - x) + \frac{1}{2}(y_0 - y_1)]^2 \stackrel{(*)}{=} \underbrace{(y_{1/2} - x)^2}_{d_{\min}^2} + \underbrace{\frac{1}{4}(y_0 - y_1)^2}_{\stackrel{!}{=} 0} \\ \implies y_0 &= y_1 \end{aligned} \quad (*)$$

Sei $P: \mathbb{R}^d \rightarrow A$. Es gilt:

- $P(x) = x \ \forall x \in A$
- P ist stetig (Übung)

Sei $K \supseteq A$ eine abgeschlossene Kugel in \mathbb{R}^d (existiert, weil A kompakt ist). Dann folgt mit Bemerkung 2.3 (a) und Brouwer (2.2), dass K die Fixpunkteigenschaft hat.

Sei $f: A \rightarrow A$ stetig. Dann ist $f \circ P: K \rightarrow A (\subseteq K)$ stetig.

$$\implies \exists \xi \in K : \underbrace{(f \circ P)(\xi)}_{\xi \in A} = \xi \in A$$

Also hat f einen Fixpunkt. □

Beweis.

(von Satz 2.2) (à la Milnor und Rogers)

O.E. sei $f \in C^1(\overline{B}, \overline{B})$, denn: Sei die Behauptung für $C^1(\overline{B}, \overline{B})$ gezeigt. Wegen $\overline{C^1(\overline{B}, \overline{B})}^{\|\cdot\|_\infty} = C(\overline{B}, \overline{B})$ (Übung) gibt es eine Folge $(f_n)_n \subseteq C^1(\overline{B}, \overline{B})$ mit $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Falls $\exists \xi_n \in \overline{B}: f_n(\xi_n) = \xi_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ folgt aufgrund der Kompaktheit von \overline{B} die Existenz einer Teilfolge $(\xi_{n_k})_k \subset \overline{B}$ und eines $\xi \in \overline{B}: \xi_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \xi$. Also

$$|f(\xi) - \xi| \stackrel{f \text{ stetig}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} |f(\xi_{n_k}) - \underbrace{\xi_{n_k}}_{f_{n_k}(\xi_{n_k})}| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_{n_k}\|_\infty = 0 \quad \checkmark$$

Sei nun also $f \in C^1(\overline{B}, \overline{B})$.

Annahme: f hat keinen Fixpunkt.

Sei $x \in \overline{B}$ beliebig aber fest. Definiere die Parabel

$$\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto P(\lambda) := |x + \lambda(f(x) - x)|^2 = a\lambda^2 + 2b\lambda + c \geq 0$$

mit:

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \begin{array}{c} f \text{ hat keinen FP und ist stetig,} \\ \overline{B} \text{ kompakt} \end{array} \\ a &:= |f(x) - x|^2 \geq \inf_{x \in \overline{B}} |f(y) - y|^2 =: \gamma \stackrel{\downarrow}{>} 0 \end{aligned} \quad (1)$$

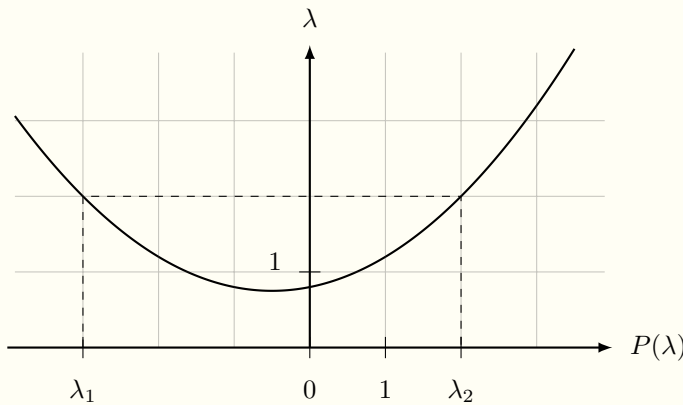
$$b := x \cdot (f(x) - x), \quad c = |x|^2 \leq 1$$

$$\bullet \quad P(0) \leq 1, \quad P(1) \leq 1 \quad (2)$$

- Also $\exists_1 \lambda_1 \equiv \lambda_1(x) \leq 0$, $\lambda_2 \equiv \lambda_2(x) \geq 1$: $P(\lambda_1) = P(\lambda_2) = 1$, denn die Gleichung $P(\lambda) = 1$ hat zwei die zwei Lösungen

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{a} \left(-b \mp \sqrt{b^2 + a(1-c)} \right).$$

Wegen (2) gilt $\lambda_1 \leq 0$ und $\lambda_2 \geq 1$ (siehe Skizze):



$$\begin{aligned} & \underbrace{\lambda_2}_{\geq 1} - \underbrace{\lambda_1}_{\leq 0} \geq 1 \\ & \Rightarrow b^2 + a(1-c) \geq \left(\frac{a}{2}\right)^2 > \frac{\gamma^2}{4} \stackrel{(1)}{>} 0 \\ & \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x \mapsto \lambda_1(x) \in C^1(\overline{B}, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Setze:

- $x \mapsto g(x) := \lambda_1(x)(f(x) - x) \in C^1(\overline{B}, \mathbb{R}^d)$
- für $t \geq 0$:

$$x \mapsto h_t(x) := x + tg(x) \in C^1(\overline{B}, \mathbb{R}^d)$$

•

$$V(t) := \int_B \det \underbrace{(Dh_t)(x)}_{\mathbb{1} + t(Dg)(x)} dx$$

Behauptung:

- (i) $V(0) = |B|$ (Volumen der Einheitskugel)
- (ii) $V(1) = 0$
- (iii) $\hat{g}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$x \mapsto \begin{cases} g(x), & x \in \overline{B} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
 ist Lipschitz-stetig mit Konstante $L > 0$.
- (iv) $h_t: \overline{B} \rightarrow \overline{B}$ ist bijektiv $\forall t \in [0, \frac{1}{2})$.

zu (i): klar

zu (ii): $\forall x \in \overline{B}: |h_1(x)|^2 = P(\lambda_1(x) = 1)$, also $h_1(\overline{B}) \subseteq \partial B$. Daher ist $(Dh_1)(x)$ nicht invertierbar $\forall x \in B$, denn gäbe es ein $x \in B$ mit $(Dh_1)(x)$ invertierbar würde mit dem Satz über die Umkehrfunktion folgen:

$$\exists \text{Umgebungen (in } \mathbb{R}^d) \text{ } U \text{ von } x \text{ und } V \text{ von } h_1(x): h_1: U \rightarrow V \text{ bijektiv} \nexists$$

Also ist $\det(Dh_1)(x) = 0, \forall x \in B$ und somit $V(1) = 0$.

zu (iii):

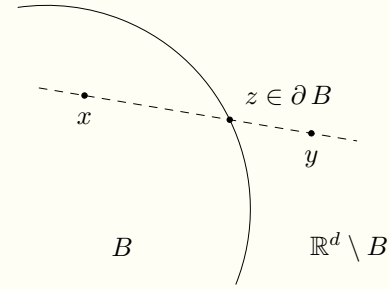
- Da $g \in C^1$ folgt mit dem mehrdimensionalen HDI:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in B: g(x) - g(y) &= \left(\int_0^1 (Dg)(y + s(x-y)) ds \right) (x-y) \\ \Rightarrow |g(x) - g(y)| &\leq \underbrace{\left(\sup_{\xi \in \overline{B}} \|(Dg)(\xi)\| \right)}_{\substack{\leq L < \infty \\ \uparrow \\ g \in C^1(\overline{B}, \mathbb{R}^d)}} |x-y| \end{aligned}$$

- $x \in \partial B \Rightarrow P(0) = |x|^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1(x) = 0 \Rightarrow g|_{\partial B} = 0$

- Sei $x \in B$, $y \in \mathbb{R}^d \setminus B$. Dann gilt:

$$|\underbrace{\hat{g}(x)}_{g(x)} - \underbrace{\hat{g}(y)}_{0=g(z)}| = \lim_{B \ni z_n \rightarrow z} \underbrace{|g(x) - g(z_n)|}_{\leq L|x-z_n|} \leq L \underbrace{|x - z|}_{\leq |x-y|} \quad \checkmark$$



zu (iv): Sei $z \in \mathbb{R}^d$. Betrachte die Fixpunktgleichung $x = z - t\hat{g}(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Nach (iii) ist die rechte Seite $\forall t \in [0, \frac{1}{2}[$ eine Kontraktion auf \mathbb{R}^d . Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es also genau einen Fixpunkt:

$$\exists_1 x_z \in \mathbb{R}^d : x_z - t\hat{g}(x_z)$$

Somit ist $\hat{h}_t : \mathbb{R}^d \ni x \mapsto x + t\hat{g}(x)$ bijektiv. Da $\hat{h}_t|_{\mathbb{R}^d \setminus B} = \text{id}$, ist auch $h_t : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$ bijektiv.

Finale:

- Aus (iv) und der Transformationsformel folgt

$$V(t) = \underbrace{\text{sgn}[\det(D_t h)(x_0)]}_{\text{unabh. von } x_0 \in B} \underbrace{|h_t(B)|}_{\stackrel{(iv)}{=} B} \quad \forall t \in [0, \frac{1}{2}[\quad (*)$$

- $D(t) := \det(Dh_t)(x) = \det(1 + t(Dg)(x))$ ist ein Polynom in t , $\forall x \in B$. Daher

$$\left. \begin{array}{l} * \quad \exists t_0 > 0 \forall t \in [0, t_0[: D(t) > 0 \stackrel{(*)}{\implies} V(t) = |B| \\ * \quad V(t) \text{ Polynom in } t \text{ (per Definition)} \end{array} \right\} \implies V(t) = \text{const} \quad \forall t \in [0, 1] \quad \nexists (i), (ii)$$

□

Eine weitreichende Verallgemeinerung:

Satz 2.5: Fixpunktsatz von Schauder

Sei X ein normierter Raum, $\emptyset \neq A \subseteq X$ konvex und abgeschlossen. Sei $G \in C(A, A)$ mit $\overline{G(A)}$ kompakt. Dann hat G einen Fixpunkt.

Liefert sofort:

Korollar 2.6

Sei X ein normierter Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$ konvex und kompakt. Dann hat A die Fixpunkteigenschaft.

Reduktion von Satz 2.5 (Schauder) auf endliche Dimensionen (Brouwer) via:

Lemma 2.7: Projektionslemma von Schauder

Sei X ein normierter Raum, $\emptyset \neq K \subseteq X$ kompakt. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $F = \{y_1, \dots, y_n\} \subseteq K$ und eine stetige Abbildung

$$P : K \rightarrow \underbrace{\text{convh}(F)}_{\text{konvexe Hülle}} := \left\{ \sum_{j=1}^n t_j y_j : \sum_{j=1}^n t_j = 1, t_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \right\}$$

mit $\|P(x) - x\| < \varepsilon \quad \forall x \in K$.

Beweis.

Sei $\varepsilon > 0$. Da K kompakt (und somit totalbeschränkt), $\exists n \in \mathbb{N} \exists y_1, \dots, y_n \in K: K \subseteq \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(y_j)$ ($B_\varepsilon(y_j)$ ist der offene ε -Ball um y_j bzgl. $\|\cdot\|$).

- Setze für $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\phi_j: \begin{array}{ccc} K & \rightarrow & [0, \varepsilon] \\ x & \mapsto & \begin{cases} \varepsilon - \|x - y_j\|, & x \in B_\varepsilon(y_j) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

ϕ_j ist stetig und, da $\phi_j > 0$ auf $B_\varepsilon(y_j)$:

$$\phi(x) := \sum_{j=1}^n \phi_j(x) > 0, \quad x \in K.$$

- $P: \begin{array}{ccc} K & \rightarrow & \text{convh}(\{y_1, \dots, y_n\}) \\ x & \mapsto & \sum_{j=1}^n \frac{\phi_j}{\phi(x)} y_j \end{array}$ heißt **Schauder-Projektion** und ist stetig.

Für alle $x \in K$ gilt:

$$\|P(x) - x\| = \left\| \sum_{j=1}^n \frac{\phi_j(x)}{\phi(x)} (y_j - x) \right\| \leq \sum_{j=1}^n \frac{\phi_j}{\phi(x)} \|y_j - x\| = \sum_{\substack{j \in [n]: \\ x \in B_\varepsilon(y_j)}} \frac{\phi_j(x)}{\phi(x)} \underbrace{\|y_j - x\|}_{< \varepsilon} < \varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{\phi_j(x)}{\phi(x)} = \varepsilon$$

□

Lemma 2.8

Sei X ein normierter Raum, $\emptyset \neq A \subseteq X$ abgeschlossen und $G \in C(A, A)$ mit $\overline{G(A)}$ kompakt. Für alle $\varepsilon > 0$ gebe es ein $\xi \in A$ mit $\|G(\xi) - \xi\| < \varepsilon$. Dann hat G einen Fixpunkt.

Beweis.

Nach Voraussetzung gibt es eine Folge $(\xi_n)_n \subseteq A$ mit $G(\xi_n) - \xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Da $\overline{G(A)}$ kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge von $(G(\xi_n))_n: \exists (\xi_{n_k})_k \subseteq A \exists \eta \in \overline{G(A)}: G(\xi_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \eta$.

$$\Rightarrow \xi_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \eta \xRightarrow{A \text{ abg.}} \eta \in A \Rightarrow \eta = \lim_{k \rightarrow \infty} G(\xi_{n_k}) \stackrel{G \text{ stetig}}{\underset{\eta \in A}{=}} G(\eta)$$

□

Beweis.

(von Satz 2.5) Sei $G \in C(A, A)$. Nach Voraussetzung ist $K := \overline{G(A)}$ kompakt. Für $\varepsilon > 0$ sei $F := \{y_1, \dots, y_n\}$, sodass $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(y_i)$ und sei $P: \text{convh}(F) (\neq \emptyset)$ die Schauder-Projektion. Wegen

$$\begin{aligned} \text{convh}(\underbrace{F}_{\subseteq A}) &\subseteq \text{convh}(A) \stackrel{A \text{ konvex}}{=} A \\ &\subseteq \overline{K = G(A)} \stackrel{\text{abg.}}{\subseteq} A \end{aligned}$$

ist folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\tilde{G} := P \circ G|_{\text{convh}(F)}: \text{convh}(F) \rightarrow \text{convh}(F)$$

Außerdem ist \tilde{G} stetig. $U := \mathbb{R}\text{-span}\{y_1, \dots, y_n\} \supseteq \text{convh}(F)$ ist ein endlich dimensionaler Vektorraum,

also:

$$\exists N \in \mathbb{N} \exists \underbrace{\text{isometrischer Isomorphismus}}_{\text{Homöomorphismus}} \Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^N \quad (N \leq n)$$

$$\Phi \text{ linear} \implies C := \Phi(\text{convh}(F)) \text{ konvex}$$

$$\Phi \text{ isometrisch} \implies \left. \begin{array}{l} C \text{ abgeschlossen (da } \text{convh}(F) \text{ abgeschlossen)} \\ C \text{ beschränkt (da } \text{convh}(F) \text{ beschränkt)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{endl. dim.}} C \text{ kompakt}$$

Außerdem ist $C \neq \emptyset$.

\implies Brouwer (Kor. 2.4) und Bem. 2.3(a): $\text{convh}(F)$ hat die Fixpunkteigenschaft

$\implies \tilde{G}$ hat einen Fixpunkt $\xi \in \text{convh}(F) \subseteq A$.

$$\implies \left\| \underbrace{\xi}_{\tilde{G}(\xi)=P(G(\xi))} - G(\xi) \right\| \stackrel{\text{Lemma 2.7}}{\leq} \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt die Behauptung mit Lemma 2.8. □

2.2 Existenzssatz von Peano

Den Existenzsatz von Peano erhält man mittels dem Fixpunktsatz von Schauder. Um die Kompaktheitsvoraussetzung nachzuprüfen, dient der Satz von Arzelà-Ascoli.

Definition 2.9

Seien (X, d) , (\tilde{X}, \tilde{d}) metrische Räume und $\mathcal{F} \subseteq C(X, \tilde{X})$.

$$\mathcal{F} \text{ gleichgradig stetig} : \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \forall x \in X \exists \delta > 0 \forall y \in Y \forall f \in \mathcal{F} : \\ d(x, y) < \delta \implies \tilde{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon \end{array} \right.$$

Satz 2.10: Arzelà - Ascoli

Sei (K, d) ein kompakter metrischer Raum, $N \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{F} \subseteq C(K, \mathbb{K}^N)$ (mit sup-Norm $\|\cdot\|_\infty$). Dann gilt:

$$\overline{\mathcal{F}} \text{ kompakt} \iff \mathcal{F} \text{ beschränkt und gleichgradig stetig}$$

Wir verwenden im Beweis:

Lemma 2.11

Sei X ein vollständiger metrischer Raum und $A \subseteq X$ totalbeschränkt, das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \exists x_1, \dots, x_n \in A : A \subseteq \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k).$$

Dann ist \overline{A} kompakt.

Beweis.

Angenommen \overline{A} ist nicht kompakt. Dann existiert eine offene Überdeckung $\bigcup_{j \in J} U_j \supseteq \overline{A}$ ohne endliche Teilüberdeckung. Sei $\varepsilon_1 := 2^{-1}$. Dann gibt es nach Voraussetzung $n_1 \in \mathbb{N}$ und $x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)} \in A$:

$$\overline{A} \subseteq \overline{\bigcup_{k=1}^{n_1} B_{\varepsilon_1}(x_k^{(1)})} = \bigcup_{k=1}^{n_1} \overline{B_{\varepsilon_1}(x_k^{(1)})} \implies \overline{A} \stackrel{\text{sogar}}{\subseteq} \bigcup_{k=1}^{n_1} \left(\overline{B_{\varepsilon_1}(x_k^{(1)})} \cap \overline{A} \right)$$

Also $\exists x_{k_1}^{(1)} =: y_1$, sodass $\overline{B_{\varepsilon_1}(y_1)} \cap \overline{A}$ nicht von endlich vielen der U_j überdeckt wird. Sei $\varepsilon_2 := 2^{-2}$. Da $B_{\varepsilon_1}(y_1) \cap A$ totalbeschränkt ist, existiert $n_2 \in \mathbb{N}$ und $x_1^{(2)}, \dots, x_{n_2}^{(2)} \in B_{\varepsilon_2}(y_1) \cap A$:

$$\overline{B_{\varepsilon_1}(y_1)} \cap \overline{A} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_2} \overline{B_{\varepsilon_2}(x_k^{(2)})} \implies \overline{B_{\varepsilon_1}(y_1)} \cap \overline{A} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_2} (\overline{B_{\varepsilon_2}(x_k^{(2)})} \cap \overline{A})$$

Also $\exists x_{k_2}^{(2)} =: y_2$, sodass $\overline{B_{\varepsilon_2}(y_2)} \cap \overline{A}$ nicht von endlich vielen der U_j überdeckt wird.

Induktiv: $\exists (y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A$:

(i) $\overline{B_{2^{-k}}(y_k)} \cap \overline{A}$ wird $\forall k \in \mathbb{N}$ nicht von endlich vielen der $\{U_j\}$ überdeckt.

(ii)

$$d(y_k, y_{k+l}) \leq \sum_{i=1}^l \underbrace{d(y_{k+i-1}, y_{k+i})}_{\leq 2^{-(k+i-1)}} \leq 2^{-(k-1)} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}$$

für $k \geq 2: y_k \in B_{2^{k-1}}(y_{k-1})$

Somit ist $(y_k)_k$ eine Cauchyfolge und da X vollständig ist, existiert ein Grenzwert $y \in \overline{A}$: $y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$.

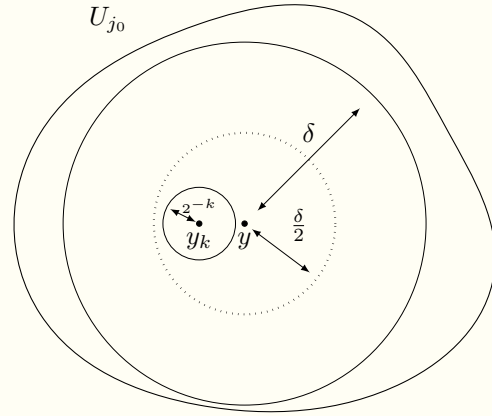
Nun:

$$\begin{aligned} y \in \overline{A} &\implies \exists j_0 \in J : y \in U_{j_0} \\ &\implies \exists \delta > 0 : B_\delta(y) \subseteq U_{j_0} \\ &\quad \uparrow \\ &U_j \text{ offen} \end{aligned}$$

Wähle $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\left. \begin{aligned} &d(y, y_k) < \frac{\delta}{2} \\ &2^{-k} < \frac{\delta}{2} \end{aligned} \right\} \implies \overline{B_{2^{-k}}(y_k)} \subseteq B_\delta(y) \subseteq U_{j_0}$$

⚡ zu (i).



□

Beweis.

(von Satz 2.10)

„ \implies “: Übung

„ \impliedby “: Zeige, dass \mathcal{F} total beschränkt, die Behauptung folgt dann mit Lemma 2.11, da $(C(K, \mathbb{K}^n), \|\cdot\|_\infty)$ vollständig ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann, nach Voraussetzung,

$$\forall x \in K \exists \delta_x > 0 \forall f \in \mathcal{F} \forall x' \in B_{\delta_x}(x) : |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (1)$$

$\{B_{\delta_x}(x)\}_{x \in K}$ ist eine offene Überdeckung von K . Weil K kompakt ist, gibt es eine offene Teilüberdeckung:

$$\exists J \in \mathbb{N} \exists x_1, \dots, x_J \in K : K \subseteq \bigcup_{j=1}^J B_{\delta_{x_j}}(x_j)$$

Also:

$$|f(x) - f(x_j)| \stackrel{(1)}{<} \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall x \in B_{\delta_{x_j}}(x_j) \quad \forall f \in \mathcal{F}, \forall j = 1, \dots, J \quad (2)$$

\mathcal{F} beschränkt $\implies F := \{f(x_j) : j = 1, \dots, J, f \in \mathcal{F}\} \subset \mathbb{K}^N$ beschränkt $\xRightarrow[\text{in } \mathbb{K}^N]{\text{Heine-Borel}} \overline{F}$ kompakt \implies

$$\exists L \in \mathbb{N} \exists y_1, \dots, y_L \in \overline{F} : F \subseteq \bigcup_{l=1}^L B_{\frac{\varepsilon}{4}}(y_l)$$

Für $\varphi: \{1, \dots, J\} \rightarrow \{1, \dots, L\}$ sei

$$\mathcal{F}_\varphi := \{f \in \mathcal{F} : f(x_j) \in B_{\frac{\varepsilon}{4}}(y_{\varphi(j)}), \forall j = 1, \dots, J\}.$$

Dann ist

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\varphi} \mathcal{F}_\varphi \quad (\text{endliche (!) Vereinigung}) \quad (3)$$

Ball in $C(K, \mathbb{K}^n)$

Behauptung: $\text{diam } \mathcal{F}_\varphi < \varepsilon$ ($\implies \mathcal{F}_\varphi \subseteq \overbrace{B_\varepsilon(f_\varphi)}^{(3)} \implies \mathcal{F}$ total beschränkt)

Wahr, da $\forall f, g \in \mathcal{F}_\varphi, \forall x \in K$: Sei $j_0 \in \{1, \dots, J\}$, sodass $x \in B_{\delta_{x_{j_0}}}(x_{j_0})$. Dann:

$$|f(x) - g(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f(x_{j_0})|}_{\substack{(2) \\ < \frac{\varepsilon}{4}}} + \underbrace{|f(x_{j_0}) - g(x_{j_0})|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{Def } \mathcal{F}_\varphi}} + \underbrace{|g(x_{j_0}) - g(x)|}_{\substack{(2) \\ < \frac{\varepsilon}{4}} < \varepsilon$$

□

Satz 2.12: Peano

Seien $a, b > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^d$. Sei $D \supseteq \overline{B_a(x_0)} \times \overline{B_b(y_0)}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{K}^d$ stetig. Dann gibt es ein $\delta > 0$ und eine Lösung $\varphi \in C^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta], \mathbb{K}^d)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ (x_0; y_0) \end{cases}.$$

Beweis.

Falls $f|_{\overline{B_a(x_0)} \times \overline{B_b(y_0)}} = 0$, ist $\varphi(x) = y_0 \forall x \in \overline{B_a(x_0)}$ eine Lösung. Andernfalls definiere

$$F := \sup_{(x,y) \in \overline{B_a(x_0)} \times \overline{B_b(y_0)}} |f(x, y)|$$

und wähle:

$$\delta := \min \left(a, \frac{b}{F} \right)$$

Sei $I := [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ und $A := \{\varphi \in (C(I, \mathbb{K}^d), \|\cdot\|_\infty) : \|\varphi - y_0\|_\infty \leq b\}$. Dann:

- (i) $A \neq \emptyset$, denn $(x \mapsto y_0) \in A$.
- (ii) A ist abgeschlossen (wegen „ \leq “).
- (iii) A ist konvex: Seien $\varphi, \psi \in A$ und $\lambda \in [0, 1]$. Dann

$$\xi := \lambda \varphi + (1 - \lambda) \psi \in C(I, \mathbb{K}^d)$$

und

$$\|\xi - y_0\|_\infty = \|\lambda(\varphi - y_0) + (1 - \lambda)(\psi - y_0)\|_\infty \leq \lambda b + (1 - \lambda)b = b.$$

Für $\varphi \in A$, $x \in I$ sei:

$$(G(\varphi))(x) := y_0 + \int_{x_0}^x \underbrace{f(t, \varphi(t))}_{\substack{\in \overline{B_b(y_0)} \\ \in D}} dt \quad (\text{wohldefiniert})$$

Dann:

(iv) $G(\varphi) \in A$, da:

- $G(\varphi)$ sogar stetig diffbar (HDI, f stetig, φ stetig)
- $\|G(\varphi) - y_0\|_\infty \leq \sup_{x \in I} |x - x_0| F \leq \delta F \leq b$

(v) $G(A)$ ist beschränkt, da (iv) und A beschränkt:

$$\varphi \in A \implies \|\varphi\|_\infty = \|\varphi - y_0 + y_0\|_\infty \leq \|\varphi - y_0\|_\infty + |y_0| \leq b + |y_0| < \infty$$

(vi) $G \in C(A, A)$, da (iv) und: Sei $(\varphi_n)_n \subseteq A$, $\varphi \in A$ und $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Dann

$$\|G(\varphi_n) - G(\varphi)\|_\infty = \sup_{x \in I} \left| \int_{x_0}^x [f(t, \varphi_n(t)) - f(t, \varphi(t))] dt \right| \leq \int_I \underbrace{|f(t, \varphi_n(t)) - f(t, \varphi(t))|}_{\leq 2F} dt \xrightarrow[\text{dom. Kgz.}]{n \rightarrow \infty} 0.$$

(Folgenstetigkeit \iff Stetigkeit, denn $C(A, A)$ ist ein metrischer Raum).

(vii) $G(A)$ ist gleichgradig (Lipschitz) stetig, da $\forall x_1, x_2 \in I$:

$$\sup_{\varphi \in A} |(G(\varphi))(x_1) - (G(\varphi))(x_2)| = \sup_{\varphi \in A} \left| \int_{x_2}^{x_1} f(t, \varphi(t)) dt \right| \leq F |x_1 - x_2|$$

(v) und (vii) $\xrightarrow[2.10]{\text{Arz.-Asc}} \overline{G(A)}$ kompakt in $C(I, \mathbb{K}^d)$ (I kompakt).

(i)-(iii) und (vi) $\xrightarrow[2.5]{\text{Fixppts. Schauder}} \exists \varphi \in A : \varphi = G(\varphi)$, das heißt:

- $\varphi \in C(I, \mathbb{K}^d)$
- $\{(t, \varphi(t)) : t \in I\} \subseteq D$
- φ löst die Volterra-Integralgleichung zum AWP ($\implies \varphi \in C^1(I, \mathbb{K}^d)$, vgl. (iv)) $\xrightarrow{\text{Satz 1.11}} \varphi$ löst das AWP.

□

Bemerkung 2.13

(a) Die Lösung muss nicht unbedingt eindeutig sein (siehe Gegenbeispiel im Tutorium).

(b) Die Größe des Lösungsintervalls ist optimal für $\delta = \min(a, b/F)$.

Beispiel: $f(x, y) = c \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ für $(x, y) \in \overline{B_a(x_0)} \times \overline{B_b(y_0)} =: D$. Dann hat das AWP

$$\begin{cases} y' = c \\ (x_0; y_0) \end{cases}$$

die eindeutige Lösung $\phi(x) = y_0 + c(x - x_0)$ und es gilt

$$(x, \phi(x)) \in D \iff |x - x_0| \leq a \wedge \underbrace{|\phi(x) - y_0|}_{|c||x - x_0|} \leq b \iff |x - x_0| \leq \min\{a, \underbrace{b/|c|}_{b/F}\}.$$

Korollar 2.14

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{K}^d$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{K}^d$ stetig und $K \subset D$ kompakt. Dann $\exists \delta > 0$, sodass es \forall Anfangsbedingungen $(x_0, y_0) \in K$ eine Lösung $\varphi \in C^1([x_0 - \delta, x_0 + \delta], \mathbb{K}^d)$ des AWP $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ (x_0; y_0) \end{cases}$ gibt.

Beweis.

Verwende die explizite Form von δ im Beweis des Satzes von Peano und dass $\text{dist}(K, \partial D) > 0$ (warum?). Details: Übung!

2.3 Fortsetzen von Lösungen

Ziel: Vergrößere das (lokale) Lösungsintervall so weit es geht! O.E. sei im Folgenden $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Satz 2.15: Globaler Existenzsatz

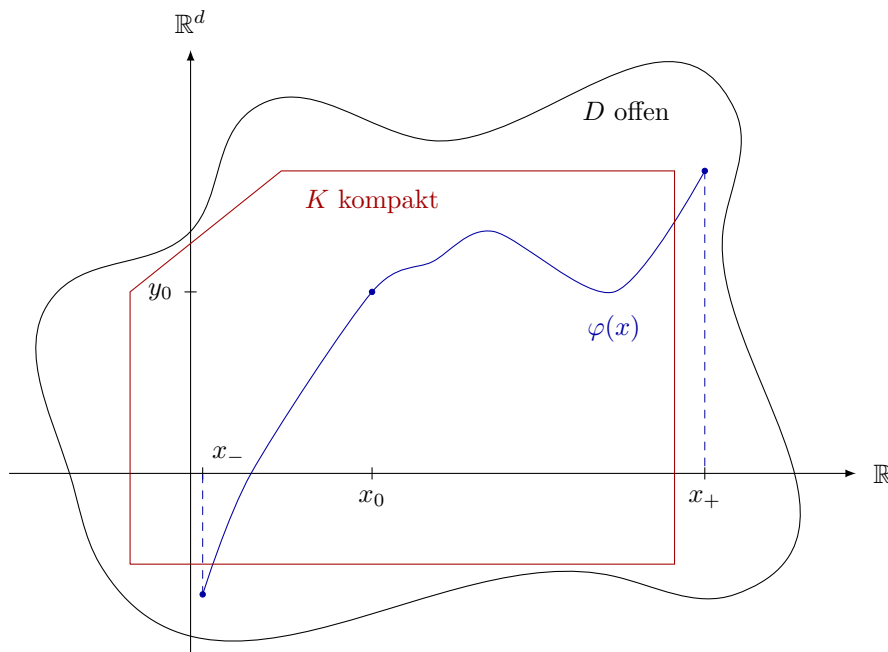
Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $(x_0, y_0) \in D$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ (x_0, y_0) \end{cases} \quad (*)$$

mindestens eine Lösung $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^d$, deren Graph jedes Kompaktum in beide Richtungen verlässt, das heißt

$$\forall K \subseteq D \text{ kompakt mit } (x_0, y_0) \in K \exists x_{\pm} \in I \text{ mit } x_- < x_0 < x_+ \text{ und } (x_{\pm}, \varphi(x_{\pm})) \notin K.$$

Zur Definition „Kompaktum in beide Richtungen verlassen“:


Beweis.

Verlassen nach „rechts“: Sei $K \subseteq D$ kompakt, $(x_0, y_0) \in K$. Sei $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine **kompakt-offene Ausschöpfung** von D , das heißt K_n kompakt, $K_n \subseteq (K_{n+1})^\circ \subseteq K_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = D$. (z.B. $K_n := \{x \in D \mid \text{dist}(x, \partial D) \geq 1/n \wedge |x| \leq n\}$). O.E. sei $(x_0, y_0) \in K_1$ (sonst lasse endlich viele weg). Dann:

$$\exists N \in \mathbb{N} : K \subset K_N \quad (1)$$

Kor. 2.14 $\implies \forall n \in \mathbb{N} \exists \delta_n > 0 \forall (\hat{x}, \hat{y}) \in K_n \exists \text{Lsg. } \varphi: [\hat{x}, \hat{x} + \delta_n] \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ des AWP } \begin{cases} y' = f(x, y) \\ (\hat{x}, \hat{y}) \end{cases}$

Definiere rekursiv:

- $\phi_{1,1}$ als Lösung von $(*)$ auf $[x_0, x_0 + \delta_1]$
- $\phi_{1,k+1}$ als Lösung von

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ x_0 + k\delta_1; \phi_{1,k}(x_0 + k\delta_1) \end{cases}$$

auf $[x_0 + k\delta_1, x_0 + (k+1)\delta_1]$, so lange wie $(x_0 + k\delta_1, \phi_{1,k}(x_0 + k\delta_1)) \in K_1$. Dies ist höchstens endlich oft machbar, weil K_1 beschränkt. Nun setze die einzelnen Stücke zu einer C^1 Funktion zusammen (möglich, weil die Stücke im Funktionswert und der Ableitung an den Bruchstellen übereinstimmen): $\exists \alpha_1 > 0$ und eine Lösung Φ_1 des AWP $(*)$ auf $[x_0, x_0 + \alpha_1]$ mit $\exists n_2 \in \mathbb{N} : (x_0 + \alpha_1, \Phi_1(x_0 + \alpha_1)) \in K_{n_2} \setminus K_1$

- $\phi_{2,1}$ als Lösung des AWP

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ (x_0 + \alpha_1; \Phi_1(x_0 + \alpha_1)) \end{cases} \quad (2)$$

auf $[x_0 + \alpha_1, x_0 + \alpha_1 + \delta_{n_2}]$.

- $\phi_{2,k+1}$ als Lösung von... $\xRightarrow{\text{wie oben}} \exists \alpha_2 > 0$ und eine Lösung Φ_2 von (2) auf $[x_0 + \alpha_1, x_0 + \alpha_1 + \alpha_2]$ mit $(x_0 + \alpha_1 + \alpha_2, \Phi_2(x_0 + \alpha_1 + \alpha_2)) \in K_{n_3} \setminus K_{n_2}$.

Per Induktion: \exists strikt isotone Folge $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $n_1 = 1$, $\forall j \in \mathbb{N} \forall j \in \mathbb{N} \exists \alpha_j > 0$ und eine Lösung Φ_j von

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ (x_0 + \beta_j^+; \Phi_{j-1}(x_0 + \beta_j^+)) \end{cases}$$

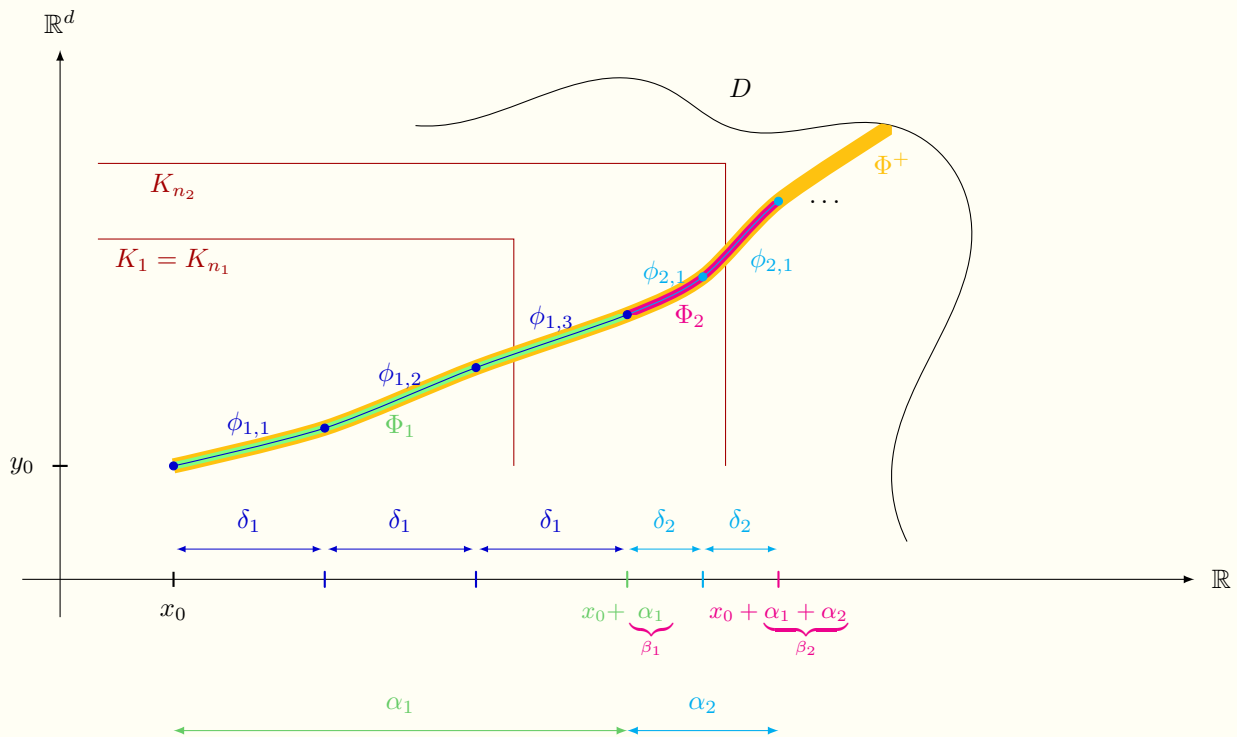
mit $\beta_j^+ := \sum_{l=1}^{j-1} \alpha_l$, auf $[x_0 + \beta_j^+, x_0 + \beta_{j+1}^+]$ mit $(x_0 + \beta_{j+1}^+, \Phi_j(x_0 + \beta_{j+1}^+)) \in K_{n_{j+1}} \setminus K_{n_j}$. Setze die

einzelnen Lösungen zusammen: \exists Lösung Φ^+ von $(*)$ auf $[x_0, x_0 + \overbrace{\lim_{j \rightarrow \infty} \beta_j^+}^{=: \beta^+}]$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n > x_0 : (x_n, \Phi^+(x_n)) \notin K_n$$

$\xRightarrow{(1)} \Phi^+$ verlässt jedes Kompaktum $K \subset D$ nach rechts.

Skizze der Fortsetzung:



Verlassen nach links: analog \rightsquigarrow Lösung Φ^- auf $(x_0 - \beta^-, x_0]$.
Zusammenstückeln bei x_0 :

$$\Phi: (x_0 - \beta^-, x_0 + \beta^+) \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$x \mapsto \begin{cases} \Phi^-(x), & x \leq x_0 \\ \Phi^+(x), & x > x_0 \end{cases}$$

□

$x_0 - \beta^-$ bzw. $x_0 + \beta^+$ heißt **negative** bzw. **positive Entweichzeit** von Φ .

Die Lösung aus Satz 2.15 ist im folgenden Sinn maximal:

Definition 2.16

Sei $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Lösung einer DGL oder eines AWP.

- φ heißt **fortsetzbar**, falls es ein Intervall $J \supsetneq I$ und eine Lösung $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $\psi|_I = \varphi$ gibt. In diesem Fall heißt ψ **Fortsetzung** von φ .
- φ heißt **maximal**, falls φ nicht fortsetzbar ist.

Satz 2.17

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig und $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Lösung des AWP $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ (x_0; y_0) \end{cases}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- φ verlässt jedes Kompaktum $(x_0, y_0) \in K \subseteq D$ in beide Richtungen.
- φ ist maximal.

In diesem Fall gilt: $I \subseteq \mathbb{R}$ ist offen.

Beweis.

(i) \implies (ii): Angenommen, φ besitzt eine Fortsetzung nach rechts, das heißt $\exists J \supset I$ und $\xi \in J$ mit $\xi > x \forall x \in I$ und eine Lösung $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $\psi|_I = \varphi$. Dann

- $(x_0, y_0) \in K := \{(x, \psi(x)) \mid x \in [x_0, \xi]\} \subseteq D$ (K kompakt)
- $(x, \phi(x)) \in K, \forall x \in I, x \geq x_0$, das heißt φ verlässt K nicht nach rechts \nmid .

analog mit Annahme, φ besäße keine Fortsetzung nach links.

(ii) \implies (i): siehe Übung

□

Speziell für autonome Differentialgleichungen:

Korollar 2.18

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig und $\varphi: I \rightarrow D$ eine maximale Lösung des AWP $\begin{cases} y' = f(y) \\ (x_0; y_0) \end{cases}$ mit $\overline{\varphi(I)}$ kompakt. Dann gilt $I = \mathbb{R}$.

Beweis.

Angenommen, I sei nach rechts beschränkt (links analog). Dann ist $K := [x_0, \sup I] \times \overline{\varphi(I)}$ kompakt in $\mathbb{R} \times D =: \tilde{D}$ (Definitionsbereich für Satz 2.17) $\xrightarrow{2.17} \varphi$ verlässt K nach rechts \nmid zur Def. von K .

□

Unter starken Voraussetzungen gilt mehr:

Definition 2.19

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: J \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig.

f stetig linear beschränkt : $\iff \exists \rho, \sigma: J \rightarrow \mathbb{R}_+$ stetig $\forall x \in J, y \in \mathbb{R}^d: |f(x, y)| \leq \rho(x)|y| + \sigma(x)$

Satz 2.20

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall (möglicherweise unbeschränkt) und $f: J \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig und linear beschränkt. Dann ist jede Lösung der DGL $y' = f(x, y)$ auf ganz J fortsetzbar.

Der Beweis benötigt eine Ungleichung von allgemeinem Interesse:

Satz 2.21: Gronwall-Ungleichung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall (möglicherweise unbeschränkt), $x_0 \in I$ und $u, \alpha, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, $\beta \geq 0$ und $\beta, \alpha\beta, u\beta \in L^1_{\text{loc}}(I)$. Falls

$$u(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(x')u(x') dx' \quad \text{für fast alle } x \in I \quad (*)$$

dann gilt

(a)

$$u(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^x \alpha(x')\beta(x') \exp\left(\int_{x'}^x \beta(x'') dx''\right) dx' \quad \text{für fast alle } x \in I.$$

(b) Falls zusätzlich α isoton (monoton wachsend), so ist

$$u(x) \leq \alpha(x)e^{\int_{x_0}^x \beta(x') dx'} \quad \text{für fast alle } x \in I.$$

Beweis.

(a) Für $x_0 \leq x \in I$ setze

$$v(x) := \left(e^{-\int_{x_0}^x \beta(x') dx'} \right) \int_{x_0}^x \beta(x') u(x') dx'$$

abs. stetig \Rightarrow für fast alle $x_0 \leq x \in I$:

$$v'(x) = -\beta(x) e^{-\int \dots} \int \dots + e^{-\int \dots} \beta(x) u(x) = \underbrace{\beta(x)}_{\geq 0} \underbrace{\left[u(x) - \int_{x_0}^x \beta(x') u(x') dx' \right]}_{\stackrel{(*)}{\leq} \alpha(x)} \underbrace{e^{-\int_{x_0}^x \beta(x') dx'}}_{\geq 0}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{v(x_0)=0}{\Rightarrow} v(x) &= \int_{x_0}^x v'(x') dx' \leq \int_{x_0}^x \alpha(x') \beta(x') e^{-\int_{x_0}^{x'} \beta(x'') dx''} dx' \\ \Rightarrow \int_{x_0}^x \beta(x') u(x') dx' &= e^{+\int_{x_0}^x \beta(x') dx'} v(x) \stackrel{(**)}{\leq} \int_{x_0}^x \alpha(x') \beta(x') e^{\int_{x_0}^{x'} \beta(x'') dx''} dx' \end{aligned} \quad (**)$$

Die Behauptung folgt mit $(*)$ für fast alle $x_0 \leq x \in I$. Für $x_0 \geq x \in I$ analog.

(b) (a) und α isoton \Rightarrow für fast alle $x_0 \leq x \in I$:

$$u(x) \leq \alpha(x) \left[1 + \underbrace{\int_{x_0}^x \beta(x') e^{\int_{x_0}^{x'} \beta(x'') dx''} dx'}_{-\frac{d}{dx'} e^{\int_{x_0}^{x'} \beta(x'') dx''} \Big|_{x'=x_0}^{x'=x}} \right] = \alpha(x) e^{\int_{x_0}^x \beta(x'') dx''}$$

Für $x_0 \geq x \in I$ analog. □

Beweis.

(von Satz 2.20) Sei $\varphi: J \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine maximale Lösung. Zu zeigen:

$$I_{\pm} := \sup_{\inf} I = \sup_{\inf} J =: J_{\pm}$$

(a) Angenommen, $I_+ < J_+$ (insbesondere $I_+ < \infty$). Sei $x_0 \in I$, $x_0 < I_+$. Volterra Integralgleichung (Satz 1.11) und f linear beschränkt $\Rightarrow \forall x_0 \leq x \in I$:

$$|\varphi(x)| \leq \left| \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x f(x', \varphi(x')) dx' \right| \leq |\varphi(x_0)| + \int_{x_0}^x \sigma(x') dx' + \int_{x_0}^x \rho(x') |\varphi(x')| dx'$$

Sei

$$S := \sup_{x' \in [x_0, I_+]} \sigma(x') \stackrel{\text{stetig, kompakt}}{\downarrow} < \infty$$

$$R := \sup_{x' \in [x_0, I_+]} \rho(x') \stackrel{\text{stetig, kompakt}}{\downarrow} < \infty$$

$$C := |\varphi(x_0)| + (I_+ - x_0) S (< \infty)$$

$\Rightarrow \forall x_0 \leq x \in I: |\varphi(x)| \leq C + R \int_{x_0}^x |\varphi(x')| dx'$. Somit folgt mit Satz 2.21(b) (alle Funktionen stetig $\Rightarrow L_{\text{loc}}^1$):

$$|\varphi(x)| \leq C e^{R(x-x_0)} \leq C e^{R(I_+-x_0)} =: \Phi$$

$\implies \varphi$ verlässt das Kompaktum $[x_0, I_+] \times \overline{B_\Phi(0)} \subseteq J \times \mathbb{R}^d$ nicht nach rechts \nmid Satz 2.17, also $I_+ = J_+$.

(b) $I_- = J_-$ analog.

□

2.4 Eindeutigkeit von Lösungen

Eine übliche, hinreichende Bedingung:

Definition 2.22

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$. Dann

f **lokal Lipschitz**
(in der 2. Variablen) : $\iff \begin{cases} \forall (x, y) \in D \exists \text{ Umgebung } U \subseteq D \text{ von } (x, y) \exists L > 0 \\ \forall (x', y_1), (x', y_2) \in U : |f(x', y_1) - f(x', y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \end{cases}$

Satz 2.23: Globale Existenz und Eindeutigkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $(x_0, y_0) \in D$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig und lokal Lipschitz. Dann existiert genau eine Lösung φ des AWP $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ (x_0, y_0) \end{cases}$ deren Graph jedes Kompaktum $(x_0, y_0) \in K \subseteq D$ in beide Richtungen verlässt.

Bemerkung 2.24

Existenz folgt bereits aus Satz 2.15, kann aber auch ohne diesen mittels Banachschem Fixpunktsatz gefolgt werden: Satz von Picard-Lidelf

Beweis.

Nur Eindeutigkeit ist zu zeigen. *Annahme:* \exists Intervall $I \ni x_0$ und Lösungen $\varphi_1 \neq \varphi_2$ des AWP auf I . O.E. sei $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$ für ein $x_0 < x \in I$ (Fall $x_0 > x \in I$ analog). Sei

$$\hat{x}_0 := \inf\{\tilde{x} > x_0 : \varphi_1(\tilde{x}) \neq \varphi_2(\tilde{x})\} \in [x_0, x[\implies \underbrace{\varphi_1(\hat{x}_0) = \varphi_2(\hat{x}_0)}_{\varphi_j \text{ stetig}} =: \hat{y}_0$$

Nach Voraussetzung \exists Umgebung $U \subseteq D$ von (\hat{x}_0, \hat{y}_0) , worauf f Lipschitz. U offen $\implies \exists$ offenes Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in J$, $\exists \varepsilon > 0$: $J \times B_\varepsilon(\hat{y}_0) \subseteq U$.

Nun wähle $\hat{x} \in]\hat{x}_0, x]$, sodass

- $\hat{x} \in J$
- $\varphi_1(\hat{x}) \neq \varphi_2(\hat{x})$ (möglich per Def. von \hat{x}_0)
- $\varphi_j(x') \in B_\varepsilon(\hat{y}_0)$, $\forall x' \in [\hat{x}_0, \hat{x}]$, $j = 1, 2$ (möglich, da φ_j stetig)

$$\begin{aligned} \text{Volterra (1.11)} \implies |\varphi_1(\hat{x}) - \varphi_2(\hat{x})| &= \left| \underbrace{\varphi_1(\hat{x}_0) - \varphi_2(\hat{x}_0)}_0 + \int_{\hat{x}_0}^{\hat{x}} [f(x', \varphi_1(x')) - f(x', \varphi_2(x'))] dx' \right| \\ &\leq \int_{\hat{x}_0}^{\hat{x}} \underbrace{f(x', \varphi_1(x')) - f(x', \varphi_2(x'))}_{\substack{\text{lok. Lip.} \\ \downarrow \\ \underbrace{L(\hat{x}_0, \hat{y}_0)}_{=: L} |\varphi_1(x') - \varphi_2(x')|, \forall x' \in [\hat{x}_0, \hat{x}]}} dx' \\ \text{Gronwall-Ungl. (2.21)} \implies |\varphi_1(x') - \varphi_2(x')| &\leq \underbrace{0}_{\substack{\uparrow \\ \alpha(t) \text{ in Satz 2.21}}} \cdot e^{L(\hat{x} - \hat{x}_0)} = 0 \quad \nexists \end{aligned}$$

□

3 Lineare Differentialgleichungen

Wichtig, denn es gibt eine „vollständige“ Lösungstheorie.

Definition 3.1

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall (möglicherweise unbeschränkt), sei $d \in \mathbb{N}$ und seien $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{d \times d}$, $b: I \rightarrow \mathbb{K}^d$. Ein **System linearer Differentialgleichungen** erster Ordnung ist ein System der Form

$$y' = A(x)y + \underbrace{b(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Inhomogenität}}} . \quad (\square)$$

Ein System linearer DGL heißt **homogen**, gdw $b = 0$. Man kann ein d -dimensionales System auch gemäß Satz 1.4 in eine lineare DGL d -ter Ordnung umwandeln.

Beispiel 3.2: Harmonischer Oszillator in einer Raumdimension (Beispiel 1.6)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

Satz 3.3: Superpositionsprinzip

Seien $\varphi_1, \varphi_2: I \rightarrow \mathbb{K}^d$ Lösungen von (\square) und seien $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$. Dann erhalten wir für

$$\psi: I \rightarrow \mathbb{K}^d, \quad \psi = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 ,$$

dass

$$\psi'(x) = c_1 \varphi_1'(x) + c_2 \varphi_2'(x) = c_1 A(x) \varphi_1 + c_1 b(x) + c_2 A(x) \varphi_2 + c_2 b(x) = A(x) \psi(x) + (c_1 + c_2) b(x).$$

Das heißt, ψ löst

$$y' = A(x) + (c_1 + c_2) b(x). \quad (*)$$

Insbesondere gilt

(a)

$$\mathcal{L}_{\text{hom}} := \{\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}^d : \varphi \text{ löst homogene DGL}\}$$

ist ein Vektorraum.

(b)

$$\{\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}^d : \varphi \text{ löst inhomogene DGL}\} = \phi_{\text{part}} + \mathcal{L}_{\text{hom}},$$

wobei φ_{part} irgendeine Lösung der inhomogenen DGL ist.

Beweis.

(a) Folgt aus Rechnung im Satz mit $b = 0$.

(b) „ \supseteq “: $(\varphi_{\text{part}} + \varphi_{\text{hom}})'(x) = A(x) \varphi_{\text{part}}(x) + b + A(x) \varphi_{\text{hom}}(x)$
 „ \subseteq “: Sei φ Lösung der inhomogenen Gleichung, dann löst $\varphi - \varphi_{\text{part}}$ die homogene DGL. □

Satz 3.4: Existenz und Eindeutigkeit maximaler Lösungen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall (möglicherweise unbeschränkt) und $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{d \times d}$, $b: I \rightarrow \mathbb{K}^d$ stetig. Weiter seien $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{K}^d$. Dann existiert genau eine Lösung $\varphi \in C^1(I, \mathbb{K}^d)$ des AWP

$$\begin{cases} y' = A(x)y + b(x) \\ (x_0, y_0) \end{cases},$$

die jedes Kompaktum $K \subset I \times \mathbb{K}^d$, $(x_0, y_0) \in K$ beidseitig verlässt.

Beweis.

Aus Satz 2.23, lokale Lipschitzstetigkeit aus Linearität und Stetigkeit von A .

Korollar 3.5

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 3.4. Sei $d \geq 2$ und $n \in \{2, \dots, d\}$. Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Lösungen der homogenen DGL (□) und sei $x_0 \in I$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $\exists x_0 \in I : \varphi_1(x_0), \dots, \varphi_n(x_0)$ sind linear abhängig.
- (ii) $\forall x \in I : \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ sind linear abhängig.

Beweis.

Nur (i) \implies (ii) ist nichttrivial. N.V. $\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K} : \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu(x_0) = 0$. Sei

$$\psi := \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu \in C^1(I, \mathbb{K}^d) \xrightarrow{\text{Satz 3.3}} \psi \text{ löst das AWP } \begin{cases} y' = Ay \\ (x_0, 0) \end{cases}$$

Dieses hat $\varphi(x) \equiv 0$ als Lösung. Nach Satz 3.4 ist diese Lösung eindeutig, also $\psi(x) = 0, \forall x \in I$. □

Korollar 3.6

In der Situation von Kor. 3.5 gilt

$$\dim \mathcal{L}_{\text{hom}} = d.$$

Definition 3.7

Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_d \in C^1(I, \mathbb{K}^d)$ linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL $y' = A(x)y$ (**Fundamentalsystem**).

$$\Psi: \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{K}^{d \times d} \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x) \quad \cdots \quad \varphi_d(x)) \end{array}$$

heißt **Fundamentalmatrix**.

Bemerkung 3.8

(a) $\Psi \in C^1(I, \mathbb{K}^{d \times d})$ mit $\Psi'(x) = (A(x)\varphi_1(x) \quad \cdots \quad A(x)\varphi_d(x)) = A(x)\Psi(x)$, $\forall x \in I$

(b) Sei $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{K}^d$. Dann löst $I \ni x \mapsto \Psi(x)\Psi(x_0)^{-1}y_0$ das AWP $\begin{cases} y' = A(x)y \\ (x_0, y_0) \end{cases}$ und $I \ni x \mapsto \Psi(x)\Psi(x_0)^{-1} =: \Phi_{x,x_0}$ das matrixwertige AWP $\begin{cases} M' = A(x)M \\ (x_0, \mathbb{1}) \end{cases}$.

Die Fundamentalmatrix ist nützlich für:

Satz 3.9: Variation der Konstanten

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall (möglicherweise unbeschränkt), $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{d \times d}$, $b: I \rightarrow \mathbb{K}^d$ stetig. Sei Ψ eine Fundamentalmatrix zur homogenen DGL $y' = A(x)y$. Sei $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}^d$. Dann ist

$$\varphi: \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{K}^d \\ x & \mapsto & \Psi(x) \left[\Psi(x_0)^{-1}y_0 + \int_{x_0}^x \Psi(x')^{-1}b(x') dx' \right] \end{array}$$

die eindeutige Lösung des inhomogenen AWP

$$\begin{cases} y' = A(x)y + b(x) \\ (x_0, y_0) \end{cases}.$$

Beweis.

φ ist wohldefiniert, da Ψ stetig und invertierbar auf I (zudem C^1) $\implies \Psi^{-1}$ stetig $\implies \int dx'$ wohldefiniert und C^1 in $x \implies \varphi \in C^1(I, \mathbb{K}^d)$. Weiterhin

- $\varphi(x_0) = \Psi(x_0)[\Psi(x_0)^{-1}y_0 + 0] = y_0$
- $\varphi'(x) = A(x)\varphi(x) + \underbrace{\Psi(x)\Psi(x)^{-1}}_{\mathbb{1}}b(x)$, $\forall x \in I$

□

Damit genügt es von nun an, homogene lineare DGL'en zu betrachten.

Definition 3.10

(a) Sei $B \in \mathbb{K}^{d \times d}$. Setze $e^B := \exp(B) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n$ (**e hoch Matrix**)

(b) Sei $A \in C(I, \mathbb{K}^{d \times d})$, seien $x_0, x \in I$. Setze

$$\overleftarrow{\exp} \left(\int_{x_0}^x A(x') dx' \right) := \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{x_n} \cdots \int_{x_0}^{x_2} A(x_n) \cdots A(x_1) dx_1 \cdots dx_n$$

oder Physiker-Notation:

$$\overleftarrow{\exp} \left(\int_{x_0}^x A(x') dx' \right) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x dx_n \int_{x_0}^{x_n} dx_{n-1} \cdots \int_{x_0}^{x_2} dx_1 A(x_n) \cdots A(x_1)$$

(zeitgeordnete e-Funktion)

Lemma 3.11

(a) Die Reihen in 3.10 (a) und (b) konvergieren in der Abbildungsnorm $\|\cdot\|$, in (b) sogar gleichmäßig in $x \in I$ auf Kompakta .

(b) Falls $[A(x), A(x')] = 0$ für alle $x, x' \in I$:

$$\overleftarrow{\exp} \left(\int_{x_0}^x A(x') dx' \right) = \exp \left(\int_{x_0}^x A(x') dx' \right)$$

Zum Beweis von Lemma 3.11(a) das allgemeine Resultat:

Lemma 3.12

Sei X ein Banach-Raum und $(x_n)_n \subseteq X$. Dann gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \text{ ist in } X \text{ konvergente Reihe}$$

Beweis.

Zeige $(y_N)_{N \in \mathbb{N}}$, $y_N := \sum_{n=1}^N x_n$, ist eine Cauchy-Folge in X . Seien $N, M \in \mathbb{N}$, $N \geq M$. Dann

$$\left\| \underbrace{y_N - y_M}_{\sum_{n=M+1}^N x_n} \right\| \leq \sum_{n=M+1}^N \|x_n\| = \xi_N - \xi_M = |\xi_N - \xi_M|$$

mit $\xi_K := \sum_{n=1}^K \|x_n\|$, $K \in \{M, N\}$; nach Voraussetzung $(\xi_N)_N$ Cauchy in \mathbb{R} . □

Beweis.

(von Lemma 3.11) Wir zeigen zunächst: Unter den Voraussetzungen von (b) gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{x_0}^x dx_n \int_{x_0}^{x_n} dx_{n-1} \cdots \int_{x_0}^{x_2} dx_1 A(x_1) \cdots A(x_n) = \frac{1}{n!} \left(\int_{x_0}^x A(x') dx' \right)^n \quad (*)$$

Beweis per Induktion: $n = 1$ klar; $n - 1 \rightsquigarrow n$:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x dx_n \int_{x_0}^{x_n} dx_{n-1} \dots \int_{x_0}^{x_2} dx_1 A(x_1) \dots A(x_n) &= \frac{1}{n!} \left(\int_{x_0}^{x_n} A(x') dx' \right) \Big|_{x_n=x_0}^{x_n=x} \xrightarrow[\text{vorausgesetzt}]{\text{Konv.}} (b) \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{(n-1)!} A(x_n) \underbrace{\left(\int_{x_0}^{x_n} A(x') dx' \right)^{n-1}}_{\substack{\frac{1}{n} \frac{d}{dx_n} \left(\int_{x_0}^{x_n} A(x') dx' \right)^n \\ \text{(Vertauschbarkeit geht ein)}}} \end{aligned}$$

Zu (a): Sei $a := \sup_{x' \in K} \|A(x')\|$, $K \supseteq [\min(x, x_0), \max(x, x_0)]$ kompakt, $K \subseteq I$. Dann

$$\begin{aligned} \left\| \int_{x_0}^x dx_n \dots \int_{x_0}^{x_2} dx_1 A(x_n) \dots A(x_2) \right\| &\leq \left| \int_{x_0}^x dx_n \dots \int_{x_0}^{x_2} dx_1 \underbrace{\|A(x_n) \dots A(x_2)\|}_{\leq \prod_{j=1}^n \|A(x_j)\|} \right| \\ &\leq a^n \left| \underbrace{\int_{x_0}^x dx_n \dots \int_{x_0}^{x_2} dx_1}_{= \frac{1}{n!} \left(\int_{x_0}^x dx' \right)^n} \right| = \frac{a^n |x - x_0|^n}{n!} \leq \frac{a^n (\text{diam}(K))^n}{n!} \\ &\stackrel{(*)}{\uparrow} \text{ mit } A \equiv 1 \end{aligned}$$

Somit folgt Konvergenz in Def. 3.10(b) aus Lemma 3.12, da die Exponentialreihe konvergent, glm. in $x \in K$. Die Reihe in in Def. 3.10(a) ist der Spezialfall $x_0 = 0$, $x = 1$ und $A(x') = B$, $\forall x' \in I$, siehe (*). \square

Satz 3.13

Sei I offen, $A: I \rightarrow \mathbb{K}^{d \times d}$ stetig, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}^d$. Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi: I &\rightarrow \mathbb{K}^d \\ x &\mapsto \overleftarrow{\exp} \left(\int_{x_0}^x A(x') dx' \right) y_0 \end{aligned}$$

die eindeutige maximale Lösung des homogenen linearen AWP $\begin{cases} y' = A(x)y \\ (x_0; y_0) \end{cases}$.

Beweis.

Volterra-Integralgleichung (Satz 1.11) nachrechnen:

$$\text{Lemma 3.11} \implies \varphi(x) = y_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x dx_n \int_{x_0}^{x_n} dx_{n-1} \dots \int_{x_0}^{x_2} dx_1 (A(x_n) \dots A(x_1) y_0)}_{=: v_n(x)}$$

konvergiert bzgl. $|\cdot|$ in \mathbb{K}^d gleichmäßig auf Kompakta in I .

$$|v_n(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x dx_n \int_{x_0}^{x_n} dx_{n-1} \cdots \int_{x_0}^{x_2} dx_1 \prod_{j=1}^n \|A(x_n)\| \|y_0\| \right| \leq \underbrace{\left(\sup_{x' \in K} \|A(x')\| \right)^n}_{\substack{=: a \\ \uparrow \\ K \subset I \text{ kompakt, } [\min(x, x_0), \max(x, x_0)] \subset K}} \frac{|x - x_0|^n}{n!} |y_0|$$

$$\forall j \in \{1, \dots, d\} \quad \forall x' \in I \quad \left| \sum_{n=1}^N (A(x') v_n(x'))_j \right| \leq a \sum_{n=1}^N a^n \frac{|x' - x_0|^n}{n!} |y_0| \leq a |y_0| e^{a|x' - x_0|}$$

ist eine von N unabhängige über $x' \in K$ integrierbare Majorante. Also folgt mit dominierter Konvergenz:

$$y_0 + \int_{x_0}^x A(x') \varphi(x') dx'$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^x A(x') dx' y_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x dx' A(x') \int_{x_0}^{x'} dx_n \cdots \int_{x_0}^{x_2} dx_1 A(x_n) \cdots A(x_1) y_0}_{\sum_{n=2}^{\infty} \int_{x_0}^{x'} dx_n \cdots \int_{x_0}^{x_2} dx_1 A(x_n) \cdots A(x_1) y_0} = \varphi(x)$$

$\xRightarrow{\text{Satz 1.11}}$ φ löst das AWP, da φ stetig in x (Übung). Eindeutigkeit folgt aus Satz 3.4. □

Bemerkung 3.14

Im Allgemeinen lässt sich $\overleftarrow{\exp} \left(\int_{x_0}^x A(x') dx' \right)$ nicht explizit bestimmen, aber im autonomen Spezialfall ist folgendes Korollar nützlich:

Korollar 3.15

Sei $A \in \mathbb{K}^{d \times d}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{K}^d$. Dann ist

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{K}^d \\ x & \mapsto & e^{A(x-x_0)} y_0 \end{array}$$

die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems $\begin{cases} y' = Ay \\ (x_0; y_0) \end{cases}$.

Die Berechnung des Matrix-Exponentialis erfolgt mittels Jordan-Normalform oder dem Putzer-Algorithmus (später), zuvor jedoch:

Korollar 3.16

Mit der Notation aus Bemerkung 3.8(b) folgt für alle $x \in I$:

$$\Phi_{x, x_0} = \Psi(x) \Psi(x_0)^{-1} = \overleftarrow{\exp} \left(\int_{x_0}^x A(x') dx' \right),$$

wobei $\Psi = (\varphi_1 \ \dots \ \varphi_d)$ und $\{\varphi_j\}_{j=1, \dots, d}$ beliebige linear unabhängige Lösungen von $y' = A(x)y$ sind.

Satz 3.17: Formel von Liouville

Sei $A \in C(I, \mathbb{R}^{d \times d})$ und $x_0 \in I$. Dann gilt für die **Wronski-Determinante** $W := \det \Psi \in C^1(I, \mathbb{R})$:

$$W(x) = W(x_0) \exp \left(\int_{x_0}^x \operatorname{tr} A(x') \, dx' \right), \quad \forall x \in I$$

Beweis.

Sei $x \in I$. Zu zeigen:

$$\log \det \Phi_{x, x_0} = \int_{x_0}^x \operatorname{tr} A(x') \, dx'$$

Sei $0 \neq h \in \mathbb{R}$ mit $x+h \in I$. Differenzenquotient Zähler:

$$\begin{aligned} \log \det \Phi_{x+h, x_0} - \log \det \Phi_{x, x_0} &= \log \det \overbrace{(\Phi_{x+h, x_0} \Phi_{x, x_0}^{-1})}^{= \Psi(x+h) \Psi(x)^{-1} =: \Phi_{x+h, x}} \\ &= \log \det \exp \left(\underbrace{\int_x^{x+h} A(x') \, dx'}_{= \mathbb{1} + \int_x^{x+h} A(x') \, dx' + \mathcal{O}(h^2)} \right) = \log \left(1 + \int_x^{x+h} A(x') \, dx' + \mathcal{O}(h^2) \right) \\ &\quad \text{(Details: Übung!)} \\ &\iff \frac{\log \det \Phi_{x+h, x_0} - \log \det \Phi_{x, x_0}}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \operatorname{tr} A(x), \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt den Mittelwertsatz der Integralrechnung und die Stetigkeit des Integranden verwendet haben. Weil $\Phi_{x_0, x_0} = \mathbb{1}$, folgt

$$\log \det \Phi_{x, x_0} = \int_{x_0}^x \operatorname{tr} A(x') \, dx'$$

□

Satz 3.18: Jordan Normalform

Sei $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ und $\{\lambda_j\}_j$ die Menge der Eigenwerte gezählt mit geometrischer Vielfachheit. Dann gibt es ein $T \in \operatorname{Gl}_{\mathbb{C}}(d)$ und für alle j ein $m_j \in \mathbb{N}$ mit $\sum_j m_j = d$:

$$A = T \bigoplus_j (\lambda_j \underbrace{\mathbb{1}_{m_j}}_{\substack{m_j \times m_j \text{ Einheitsmatrix} \\ \downarrow}} + J_{m_j}) T^{-1}.$$

- $J_1 =: 0 \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$

- Jordan-Block: $J_\mu := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\mu \times \mu\text{-Matrix})$ für $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Beweis.

Lineare Algebra

Bemerkung 3.19

- Für Matrizen: $A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$
- geometrische Vielfachheit von Eigenwert λ : $\dim \ker(A - \lambda \mathbb{1}) =: \text{geo}(\lambda)$
- $T = (T_1 \ T_2 \ \dots)$
 - (i) Falls $m_j = 1$, dann folgt $T_j = v_j$ mit v_j Eigenvektor zu λ_j .
 - (ii) Falls $m_j > 1$, so ist $T_j = \begin{pmatrix} v_j^0 & v_j^1 & \dots & v_j^{m_j-1} \end{pmatrix}$, mit den Hauptvektoren:

$$(A - \lambda_j \mathbb{1})v_j^k = v_j^{k-1}$$

Gut zur Bestimmung von Hauptvektoren aus Eigenvektor, falls die geometrische Vielfachheit gleich eins ist.

- Für alle j gilt: $m_j \leq \text{alg}(\lambda_j) - \text{geo}(\lambda_j) + 1$ mit Gleichheit falls $\text{geo}(\lambda_j) = 1$.

Korollar 3.20

Sei $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$, $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$e^{Ax} = T \bigoplus_j \left(e^{\lambda_j x} \underbrace{\sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{x^k}{k!} J_{m_j}^k}_{=: P_{m_j}(x)} \right) T^{-1}.$$

Bemerkung 3.21

(a)

$$P_1(x) = 1$$

$$P_\mu(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2! & x^3/3! & \dots & x^{\mu-1}/(\mu-1)! \\ 0 & 1 & x & x^2/2! & \dots & x^{\mu-2}/(\mu-2)! \\ 0 & 0 & 1 & x & \dots & x^{\mu-3}/(\mu-3)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Spezialfall $m_j = 1$ für alle j , also algebraische VFH gleich geometrische VFH für alle Eigenwerte:

$$e^{Ax} = T \text{diag}(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_k x}) T^{-1}$$

Beweis.

(von Kor. 3.20) Gemäß Übung gilt:

- $A = TBT^{-1} \implies e^A = Te^BT^{-1}$
- $e^{A \oplus B} = e^A \oplus e^B$, da $(A \oplus B)^k = A^k \oplus B^k$.
- $[A, B] = 0 \implies e^{A+B} = e^A e^B$
- $J_{m_j}^{m_j} = 0$

□

Alternative: Satz von Caley-Hamilton $\implies e^{Ax}$ ist Polynom in A vom Grad $\leq d-1$. Führt auf Algorithmus, der effizienter zu Berechnung, besonders, falls es einen Eigenwert mit $1 < \text{geo}(\lambda) < \text{alg}(\lambda)$ gibt.

Satz 3.22: Putzer-Algorithmus

Sei $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ und $\{\lambda_j\}_j$ die Menge der Eigenwerte gezählt mit der algebraischen Vielfachheit. Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$e^{Ax} = \sum_{k=1}^d p_k(x) M_{k-1},$$

wobei $p_k \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $M_{k-1} \in \mathbb{C}^{d \times d}$ für alle $k = 1, \dots, d$. p_k ist die Lösung von

$$\begin{cases} p'_1 = \lambda_1 p_1 \\ (0; 1) \end{cases}, \quad \text{für } k \geq 2 : \begin{cases} p'_k = \lambda_k p_k + p_{k-1} \\ (0; 0) \end{cases}$$

M_k erhält man rekursiv via

$$M_0 := \mathbb{1}, \quad M_k := M_{k-1}(A - \lambda_k \mathbb{1}) \text{ für } k = 1, \dots, d-1.$$

Beweis.

$x \mapsto e^{Ax}$ ist eindeutige Lösung des matrixwertigen Anfangswertproblems $\begin{cases} y' = Ay \\ (0; \mathbb{1}) \end{cases}$.

Zeige: $\Phi = \sum_{k=1}^d p_k M_{k-1}$ löst dieses Anfangswertproblem. Es gilt nach Caley-Hamilton:

$$M_d := \prod_{j=1}^d (A - \lambda_j \mathbb{1}) = 0.$$

Und für alle $k = 1, \dots, d$:

$$AM_{k-1} = M_k + \lambda_k M_{k-1} \quad (*)$$

(i) $\Phi(0) = p_1(0)M_0 = \mathbb{1}$

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \sum_{k=1}^d p'_k(x) M_{k-1} = \lambda_1 p_1(x) M_0 + \sum_{k=2}^d (\lambda_k p_k(x) + p_{k-1}(x)) M_{k-1} \\ &= \underbrace{(\lambda_1 M_0 + M_1)}_{(*) = AM_0(x)} p_1(x) + \sum_{k=2}^d \underbrace{(\lambda_k M_{k-1} + M_k)}_{(*) = AM_{k-1}(x)} p_k(x) = A \sum_{k=1}^d p_k(x) M_{k-1} = A\Phi(x) \end{aligned}$$

□

4 Phasenportraits und Flüsse

Phasenportraits und Flüsse liefern wertvolle qualitative Einsichten über das Verhalten von Lösungen autonomer DGL'en $y' = f(y)$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$.

Jargon: D heißt **Phasenraum** (bei autonomen DGL'n).

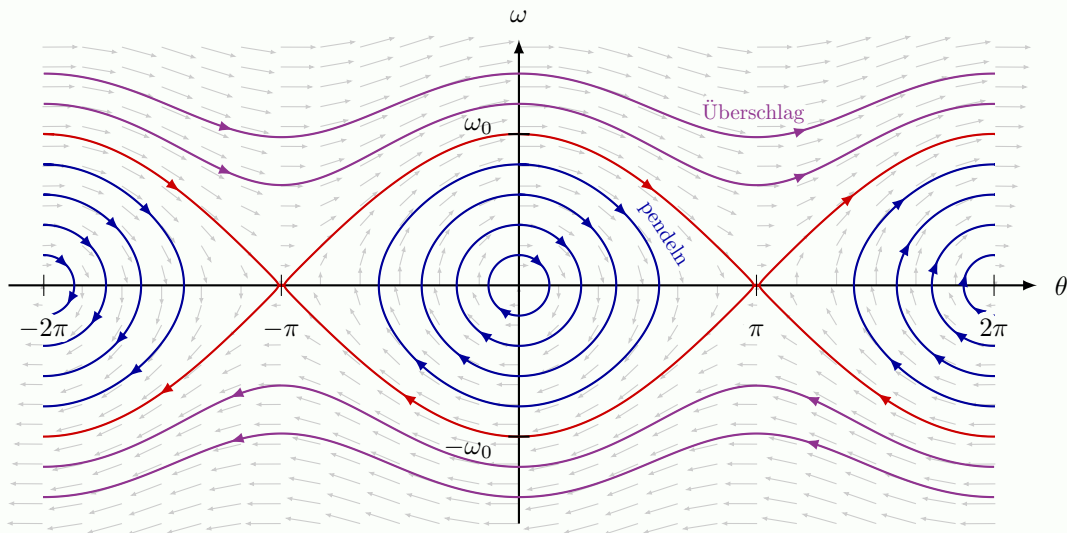
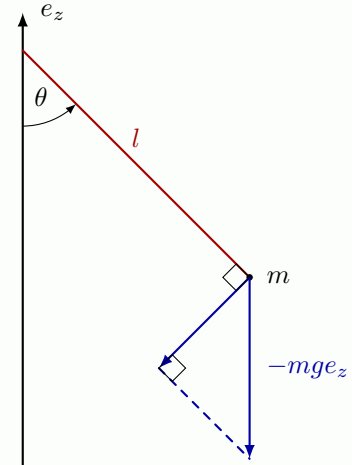
Idee: Die Richtung der Änderung der Variablen y im Phasenraum ist bestimmt durch die Richtung des Vektorfeldes f am Ort y .

Beispiel 4.1: Mathematisches Pendel

$$\begin{aligned}
l\ddot{\theta} + g \sin \theta &= 0 \\
\stackrel{\omega := \dot{\theta}}{\implies} \dot{\omega} + \frac{g}{l} \sin \theta &= 0 \\
\implies \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega \\ -\frac{g}{l} \sin \theta \end{pmatrix} =: f(\theta, \omega)
\end{aligned}$$

Setze $\omega_0 := 2\sqrt{g/l}$.

- Überschlag $\iff \frac{m}{2} l^2 \omega_0^2 > 2mgl$
- pendeln $\iff \frac{m}{2} l^2 \omega_0^2 \leq 2mgl$



Nützliche Begriffsbildungen in diesem Zusammenhang (auch für nicht-autonome DGLn):

Definition 4.2

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig und lokal Lipschitz. Für $(x_0, y_0) \in D$ sei $I_{\max}(x_0, y_0)$ das offene Lösungsintervall der (eindeutigen) maximalen Lösung $\phi_{\max}^{(x_0, y_0)} \in C^1(I_{\max}(x_0, y_0), \mathbb{R}^d)$ des AWP

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ (x_0; y_0) \end{cases} .$$

Sei

$$\mathcal{F} := \{(x, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times D : x \in I_{\max}(x_0, y_0)\} .$$

Dann heißt

$$\begin{aligned}
\Phi_{\bullet, \bullet}: \mathcal{F} &\rightarrow \mathbb{R}^d \\
(x, x_0, y_0) &\mapsto \Phi_{x, x_0}(y_0) := \phi_{\max}^{(x_0, y_0)}(x)
\end{aligned}$$

Fluss (allgemeine Lösung) der DGL $y' = f(x, y)$.

Im autonomen Fall: $f: \mathbb{R}^d \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^d$ gilt mit Lemma 1.8 (Translationsinvarianz autonomer DGL)

$$\Phi_{x, x_0}(y_0) = \Phi_{x-x_0, 0}(y_0) =: \Phi_{x-x_0}^{\text{aut}}(y_0)$$

auf

$$\mathcal{F} = \{(x, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times D : x - x_0 \in \underbrace{I_{\max}(0, y_0)}_{=: I_{\max}^{\text{aut}}(y_0)}\}.$$

Also:

$$\Phi_{\bullet}^{\text{aut}}: \mathcal{F}^{\text{aut}} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{F}^{\text{aut}} := \{(x, y_0) \in \mathbb{R} \times D : x \in I_{\max}^{\text{aut}}(y_0)\}$$

Konvention: Der Index „aut“ entfällt ab jetzt.

Bemerkung 4.3

Für eine lineare DGL $y' = A(x)y$ ist nach Kor 3.16

$$\Phi_{x, x_0}(y_0) = \underbrace{\Phi_{x, x_0} y_0}_{\text{Notation aus 3.8(b)}} = \overleftarrow{\exp} \left(\int_{x_0}^x A(x') dx' \right) y_0$$

Lemma 4.4

Unter den Voraussetzungen von Definition 4.2 gilt $\forall (x_0, y_0) \in D, \forall x_1 \in I_{\max}(x_0, y_0)$:

- $I_{\max}(x_1, \phi_{\max}^{(x_0, y_0)}(x_1)) = I_{\max}(x_0, y_0)$

- **Kozyklus-Eigenschaft:**

$$(\Phi_{x, x_1} \circ \Phi_{x_1, x_0})(y_0) = \Phi_{x, x_0}(y_0),$$

speziell für $x = x_0$:

$$(\Phi_{x_0, x_1} \circ \Phi_{x_1, x_0})(y_0) = y_0$$

Beweis.

$x_1 \in I_{\max}(x_0, y_0) \implies (x_1, \underbrace{\phi_{\max}^{(x_0, y_0)}(x_1)}_{=: y_1}) \in D$. Somit sind $\phi_{\max}^{x_0, y_0}$ und $\phi_{\max}^{x_1, y_1}$ maximale Lösungen, die in (x_1, y_1) übereinstimmen.

Sätze 2.17, 2.23

$$\begin{aligned} \Downarrow \\ \underbrace{\phi_{\max}^{x_0, y_0}}_{\Phi_{\bullet, x_0}(y_0)} &= \underbrace{\phi_{\max}^{x_1, y_1}}_{\Phi_{\bullet, x_1}(y_1)} \\ &= \Phi_{x_1, x_0}(y_0) \end{aligned}$$

Insbesondere $I_{\max}(x_0, y_0) = I_{\max}(x_1, y_1)$. □

Speziell für autonome Systeme:

Definition 4.5

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ lokal Lipschitz, d.h. $\forall y \in D \exists$ Umgebung U von $y \exists L \in]0, \infty[\forall y_1, y_2 \in U: |f(y_1) - f(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$.

- **Trajektorie (Orbit, Bahn)** durch $y \in D$:

$$\mathcal{T}(y) := \{\Phi_{x'}(y) : x' \in I_{\max}(y)\}$$

- **Trajektorie nach rechts (links)** durch $y \in D$:

$$\mathcal{T}^{\pm}(y) := \{\Phi_{x'}(y) : x' \in I_{\max}(y) \text{ und } x' \geq 0 \text{ } (\leq)\}$$

- **Singulärer Punkt** (oder **Gleichgewichts-** bzw. **Ruhelage**):

$$y \in D : f(y) = 0$$

In diesem Fall ist $\mathcal{T}(y) = \{y\}$.

- Eine Teilmenge $M \subseteq D$ heißt **invariant** gdw. $\forall y \in M: \mathcal{T}(y) \subseteq M$. M heißt **nach rechts (links)** invariant gdw. $\forall y \in M: \mathcal{T}^\pm(y) \subseteq M$.

Satz 4.6

Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ lokal Lipschitz. Dann erklärt

$$y_1 \sim y_2 : \iff y_2 \in \mathcal{T}(y_1)$$

eine Äquivalenzrelation auf D mit der Trajektorie $\mathcal{T}(y_1) = \mathcal{T}(y_2)$ als zugehörige Äquivalenzklasse.

Beweis.

Übung!

Korollar 4.7

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.6 gilt: Trajektorien schneiden und verzweigen sich nicht.

Folgender Satz liefert eine Klassifikation der Trajektorien:

Satz 4.8

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.6 trifft $\forall y \in D$ jeweils genau einer der drei folgenden Fälle zu:

- (1) $I_{\max}(y) = \mathbb{R}$ und $\forall x \in \mathbb{R}: \Phi_x(y) = y$, das heißt $\mathcal{T}(y) = \{y\}$, also ist y eine Ruhelage.
- (2) $I_{\max}(y) = \mathbb{R}$ und $\Phi_\bullet(y)$ ist periodisch und nicht konstant, das heißt $\mathcal{T}(y) \neq \{y\}$ ist eine geschlossene Kurve.
- (3) $\Phi_\bullet(y): I_{\max}(y) \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist injektiv, das heißt $\mathcal{T}(y)$ ist eine doppeltpunktfreie Kurve.

Beweis.

Folgt aus:

Behauptung: Ist eine maximale Lösung $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ nicht injektiv, so ist sie periodisch.

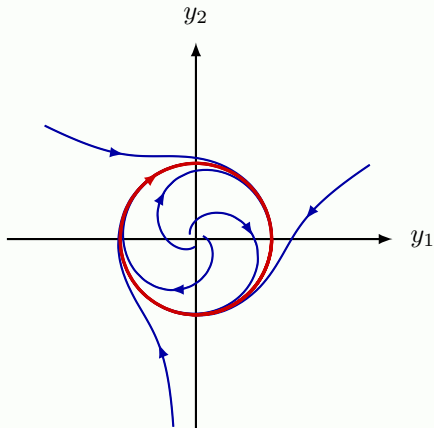
denn: Seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 \neq x_2$ und $\phi(x_1) = \phi(x_2)$. Setze

$$\psi: \begin{array}{ccc} I + (x_1 - x_2) & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto & \phi(x - x_1 + x_2) \end{array} .$$

- \implies
- ψ ist Lösung derselben DGL wie ϕ (autonom, 1.8)
 - $\psi(x_1) = \phi(x_2)$

$$\stackrel{2.23}{\stackrel{2.17}{\implies}} \phi = \psi \implies \begin{cases} I + (x_1 - x_2) = I \implies I = \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}: \phi(x) = \phi(x - x_1 + x_2), \text{ d.h. } \phi \text{ hat Periode } x_1 - x_2. \end{cases}$$

□

Beispiel 4.9

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix} + (1 - y_1^2 - y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine Ruhelage
- Der Einheitskreis ist der Orbit einer periodischen Lösung
- Alle anderen Trajektorien entsprechen Fall (3)

Der Einheitskreis „zieht Lösungen von innen und außen an“, er ist also ein Grenzyklus im folgenden Sinn:

Definition 4.10

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ lokal Lipschitz und Φ_\bullet der Fluss von $y' = f(y)$. Sei $y_0 \in D$.

- $y^* \in D$ heißt **ω -Grenzpunkt** von y_0 gdw.

$$\sup I_{\max}(y_0) = \infty, \quad \exists (x_k)_k \subset I_{\max}(y_0) \text{ mit } x_k \uparrow \infty \text{ und } y^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{x_k}(y_0).$$

Die **ω -Grenzmenge** von y_0 ist

$$\omega(y_0) := \{y^* \in D : y^* \text{ ist } \omega\text{-Grenzpunkt von } y_0\}$$

- $y_* \in D$ heißt **α -Grenzpunkt** von y_0 gdw.

$$\inf I_{\max}(y_0) = -\infty, \quad \exists (x_k)_k \subset I_{\max}(y_0) \text{ mit } x_k \downarrow -\infty \text{ und } y_* = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{x_k}(y_0).$$

Die **α -Grenzmenge** von y_0 ist

$$\alpha(y_0) := \{y_* \in D : y_* \text{ ist } \alpha\text{-Grenzpunkt von } y_0\}$$

- Eine Teilmenge $M \subset D$ heißt **Grenzmenge** gdw.

$$\exists y_0 \in D \setminus M : M = \omega(y_0) \vee M = \alpha(y_0)$$

- M ist ein **Grenzyklus** gdw. M eine Grenzmenge und eine geschlossene Trajektorie ist.

Bemerkung 4.11

- Existiert $y^* := \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_x(y_0) \in D$, so ist $\{y^*\} = \omega(y_0)$ und y^* ist eine Ruhelage (Übung!)
- $\forall \tilde{y}_0 \in \mathcal{T}(y_0) : \alpha(y_0) = \alpha(\tilde{y}_0) \wedge \omega(y_0) = \omega(\tilde{y}_0)$

Folgender Satz gibt eine Charakterisierung von Grenzmengen:

Satz 4.12

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ lokal Lipschitz, Φ_\bullet der Fluss von $y' = f(y)$ und $y_0 \in D$ mit

- $I_{\max}(y_0) \supseteq [0, \infty[$ bzw. $I_{\max}(y_0) \supseteq]-\infty, 0]$
- $\overline{\mathcal{T}^+(y_0)} \subseteq D$ bzw. $\overline{\mathcal{T}^-(y_0)} \subseteq D$.

Dann gilt

$$\omega(y_0) = \bigcap_{x \in [0, \infty[} \overline{\mathcal{T}^+(\Phi_x(y_0))} \quad \text{bzw.} \quad \alpha(y_0) = \bigcap_{x \in]-\infty, 0]} \overline{\mathcal{T}^-(\Phi_x(y_0))}.$$

Insbesondere, falls $\Phi_\bullet(y_0)$ periodisch ist, dann $\omega(y_0) = \alpha(y_0) = \mathcal{T}(y_0)$.

Beweis.

Wir zeigen die Behauptung nur für $\omega(y_0)$, denn der Beweis für $\alpha(y_0)$ funktioniert analog. Sei $x \geq 0$. Zunächst gilt:

$$\mathcal{T}^+(\Phi_x(y_0)) = \underbrace{\{\Phi_{x'}(\Phi_x(y_0)) : 0 \leq x' \in I_{\max}(\Phi_x(y_0))\}}_{\Phi_{x'+x}(y_0)} = \underbrace{\{\Phi_{x'}(y_0) : x' \in [x, \infty[\text{ n.V. } \supseteq]-x, \infty[\}}_{\iff x' \in [0, \infty[} \quad (*)$$

insbesondere: $0 \leq x_1 \leq x_2 \implies \mathcal{T}^+(\Phi_{x_1}(y_0)) \supseteq \mathcal{T}^+(\Phi_{x_2}(y_0))$

„ \subseteq “: Sei $y \in \omega(y_0)$, dann $\exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset]0, \infty[: x_k \uparrow \infty$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{x_k}(y_0) = y$. Sei $x \geq 0$. Dann $\exists k_0 = k_0(x) \in \mathbb{N} \forall k \geq k_0 : x_k \geq x$.

$$\stackrel{(*)}{\implies} \forall k \geq k_0 : \Phi_{x_k}(y_0) \in \mathcal{T}^+(\Phi_x(y_0)) \implies y \in \overline{\mathcal{T}^+(\Phi_x(y_0))}$$

„ \supseteq “: Sei $y \in \bigcap_{x \in [0, \infty[} \overline{\mathcal{T}^+(\Phi_x(y_0))}$. Dann insbesondere $\forall k \in \mathbb{N} : y \in \overline{\mathcal{T}^+(\Phi_k(y_0))}$.

$$\stackrel{(*)}{\implies} \forall k \in \mathbb{N} \exists x_k \geq k : |y - \Phi_{x_k}(y_0)| < \frac{1}{k} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty \text{ und } \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{x_k}(y_0) = y$$

o.E. kann dabei $x_{k+1} \geq x_k$ gewählt werden.

Im Spezialfall, dass $x \mapsto \Phi_x(y_0)$ periodisch ist: Sei $\xi \geq 0$ die Periode (falls y_0 eine Ruhelage ist (also $\Phi_\bullet(y_0)$ konstant), setze $\xi = 0$). Dann ist $\forall x \geq 0$

$$\mathcal{T}^+(\Phi_x(y_0)) = \{\Phi_{x'}(y_0) : x' \in [x, x + \xi]\} = \mathcal{T}(y_0)$$

kompakt in \mathbb{R}^d , da $\Phi_\bullet(y_0)$ stetig und $[x, x + \xi]$ kompakt.

$$\implies \bigcap_{x \in [0, \infty[} \underbrace{\overline{\mathcal{T}^+(\Phi_x(y_0))}}_{= \mathcal{T}^+(\Phi_x(y_0)), \text{ denn kompakt } \implies \text{abg.}} = \mathcal{T}(y_0)$$

□

Die Voraussetzung im nächsten Satz garantiert, dass $I_{\max}(y_0) \supseteq [0, \infty[$ (bzw. $\supseteq]-\infty, 0]$). (Beachte, dass stets $0 \in I_{\max}(y_0)$).

Satz 4.13

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ lokal Lipschitz, Φ_\bullet der Fluss von $y' = f(y)$ und $y_0 \in D$, sodass $\overline{\mathcal{T}^+(y_0)} \subset D$ kompakt (bzw. $\overline{\mathcal{T}^-(y_0)}$). Dann gilt:

- (a) $\omega(y_0)$ (bzw. $\alpha(y_0)$) ist nichtleer, kompakt in D , zusammenhängend und invariant.

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \text{dist}(\Phi_x(y_0), \omega(y_0)) = 0 \text{ bzw. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{dist}(\Phi_x(y_0), \alpha(y_0)) = 0$$

Beweis.

Wir betrachten nur den Fall der Trajektorie nach rechts (nach links analog).

- $\omega(y_0) \neq \emptyset$: Die Folge $(\Phi_k(y_0))_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}^+(y_0)$ ist beschränkt $\xrightarrow{\text{Bolzano-Weierstraß}} \exists$ Häufungspunkt

$$\implies \exists y^* \in \overline{\mathcal{T}^+(y_0)} \subset D \exists \text{Teilfolge } (k_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} : \lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_{k_j}(y_0) = y^* \implies \omega(y_0) \neq \emptyset$$

- (b): per Widerspruch: Angenommen

$$\exists \varepsilon > 0 \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset [0, \infty[: x_k \uparrow \infty \text{ und } \forall k \in \mathbb{N} : \text{dist}(\Phi_{x_k}(y_0), \omega(y_0)) \geq \varepsilon.$$

$(\Phi_{x_k}(y_0))_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}^+(y_0)$ beschränkt $\xrightarrow{\text{wie oben}} \exists y^* \in D \exists \text{TF } (k_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} : \lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_{x_{k_j}}(y_0) = y^*$, also $y^* \in \omega(y_0)$. Dann ist $0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \underbrace{|\Phi_{x_{k_j}}(y_0) - y^*|}_{\geq \text{dist}(\Phi_{x_{k_j}}(y_0), \omega(y_0))} \geq \varepsilon$ \nmid

$$\geq \text{dist}(\Phi_{x_{k_j}}(y_0), \omega(y_0)) \stackrel{n.A.}{\geq} \varepsilon$$

- $\omega(y_0)$ kompakt:

$$\omega(y_0) \stackrel{4.12}{=} \bigcap_{x \in [0, \infty[} \overline{\mathcal{T}^+(\Phi_x(y_0))}$$

ist abgeschlossen und, da $\subset \overline{\mathcal{T}^+(y_0)}$ beschränkt.

- $\omega(y_0)$ zusammenhängend: Angenommen, $\omega(y_0) =: \omega$ ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es $\omega_1, \omega_2 \neq \emptyset$ offen und abgeschlossen in der Relativtopologie von ω , sodass $\omega = \omega_1 \dot{\cup} \omega_2$. Es gilt

- $\omega_j, j = 1, 2$, ist kompakt, da $\omega_j \subset \omega$ und ω_j abgeschlossen (in \mathbb{R}^d), denn (o.E. nur für $j = 1$):

$$\mathbb{R}^d \setminus \omega_1 = \underbrace{(\mathbb{R}^d \setminus \omega)}_{\text{offen}} \cup \underbrace{\overbrace{\omega_2}^{O \cap \omega \text{ mit } O \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offen}}}_{\text{offen}} = \underbrace{(\mathbb{R}^d \setminus \omega) \cup O}_{\text{offen}}$$

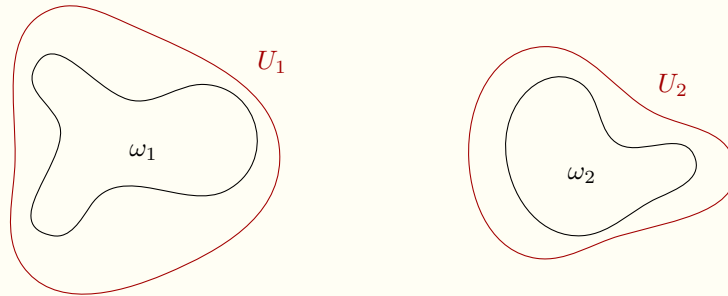
- $\text{dist}(\omega_1, \omega_2) > 0$, denn:

$$\begin{aligned} \omega_1 \times \omega_2 &\rightarrow [0, \infty[\\ (y_1, y_2) &\mapsto |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

ist stetig und $\omega_1 \times \omega_2$ ist kompakt. Somit wird das Minimum in $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ angenommen.

$$\implies \text{dist}(\omega_1, \omega_2) = \inf_{(y_1, y_2) \in \omega_1 \times \omega_2} |y_1 - y_2| = |\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2| \stackrel{\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset}{>} 0$$

$$\implies \text{für } j = 1, 2 \exists U_j \subset \mathbb{R}^d \text{ offen, } U_j \supset \omega_j \text{ und } U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$



$\omega \subset U_1 \cup U_2 \xRightarrow{(b)} \exists x^* > 0 \forall x \geq x^* : \Phi_x(y_0) \in U_1 \cup U_2$. Definiere

$$h: \begin{array}{ccc}]x^*, \infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & h(x) \end{array} := \begin{cases} -1, & \text{falls } \Phi_x(y_0) \in U_1 \\ 1, & \text{falls } \Phi_x(y_0) \in U_2 \end{cases}.$$

- für $j = 1, 2$ gilt: $\omega_j \neq \emptyset \implies \exists x_j > x^* : h(x_j) = (-1)^j$ (d.h. ± 1 werden beide angenommen).
- h ist stetig, denn für $V \subseteq \mathbb{R}$ offen gilt

$$h^{-1}(V) = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } \{-1, 1\} \cap V = \emptyset \\ (\Phi_{\bullet}(y_0))^{-1}(U_1) \cap]x^*, \infty[, & \text{falls } -1 \in V, 1 \notin V \\ (\Phi_{\bullet}(y_0))^{-1}(U_2) \cap]x^*, \infty[, & \text{falls } -1 \notin V, 1 \in V \\]x^*, \infty[, & \text{falls } \{-1, 1\} \subseteq V \end{cases}$$

Hierbei ist $(\Phi_{\bullet}(y_0))^{-1}(U_j)$ offen, da U_j offen und $\Phi_{\bullet}(y_0)$ stetig.

⚡ zum Zwischenwertsatz: $h \in C(]x^*, \infty[, \mathbb{R})$ muss auch alle Zwischenwerte von -1 und $+1$ annehmen.

- invariant: später, nach Bemerkung 5.3

□

5 Stabilität

Frage: Wie verändert sich die Lösung $\Phi_{x,x_0}(y_0)$ unter Variation des Anfangswertes y_0 ? Der nächste Abschnitt liefert die Antwort für beschränkte Zeiten x . Der Fall $x \rightarrow \infty$ wird in den darauffolgenden Abschnitten beleuchtet.

5.1 Stetigkeit und Differenzierbarkeit des Flusses

Wiederholung Definition 4.2:

$$\mathcal{F} := \{(x, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : (x_0, y_0) \in D, x \in I_{\max}(x_0, y_0)\}$$

$$\Phi_{\bullet, \bullet}: \begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ (x, x_0, y_0) & \mapsto & \Phi_{x, x_0}(y_0) \end{array} := \phi_{\max}^{(x_0, y_0)}(x)$$

Satz 5.1

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig und lokal Lipschitz-stetig. Dann gilt für den Fluss der DGL $y' = f(x, y)$:

- \mathcal{F} ist offen
- $\Phi_{\bullet, \bullet}: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist stetig

Beweis.

Die **Zylinder-Umgebung** mit $a, b > 0$ zu $(x, y) \in D$ ist:

$$Z_{a,b}(x, y) := [x - a, x + a] \times \overline{B_b(y)}$$

1. Behauptung: $\forall (x_0, y_0) \in D \exists a, b > 0 :$

(i) $Z_{a,2b}(x_0, y_0) \subset D$

(ii) $\forall (\tilde{x}, \tilde{y}) \in Z_{a,b}(x_0, y_0) :$

$$I_{\max}(\tilde{x}, \tilde{y}) \supset [x_0 - a, x_0 + a] \text{ und } \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a] : |\Phi_{x,\tilde{x}}(\tilde{y}) - y_0| < 2b$$

(i) klar, da D offen

(ii) Sei

$$M := \sup_{(x,y) \in Z_{a,2b}(x_0,y_0)} |f(x,y)| \stackrel{\substack{f \text{ stetig,} \\ Z \text{ kompakt}}}{\downarrow} < \infty \quad (0)$$

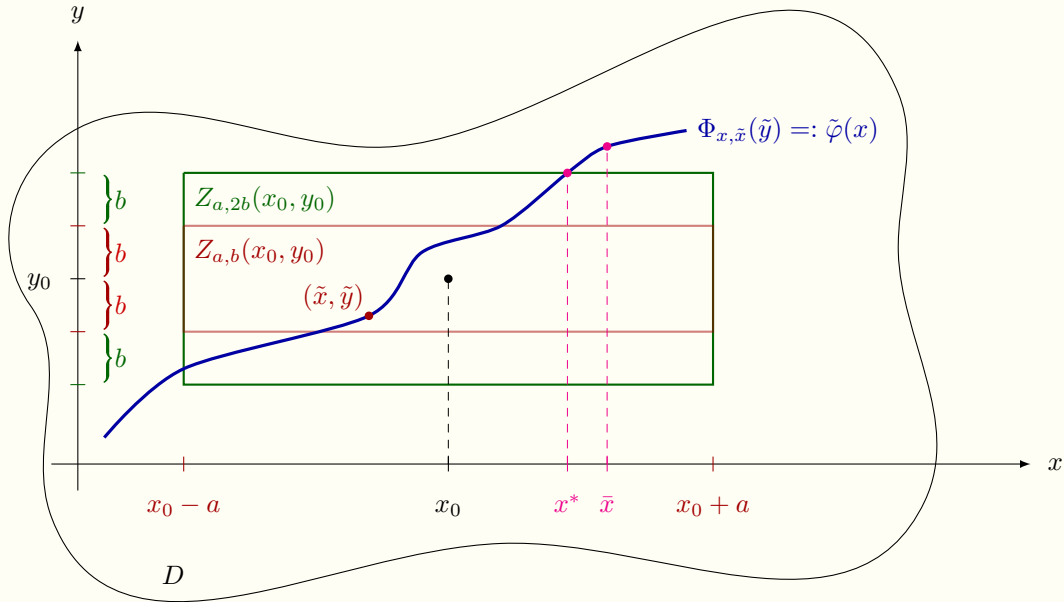
o.E. sei $2aM < b$ (durch Verkleinern von a stets möglich). Angenommen, (ii) gilt nicht. Dann $\exists (\tilde{x}, \tilde{x}, \tilde{y}) \in [x_0 - a, x_0 + a] \times Z_{a,b}(x_0, y_0)$ mit

$$|\Phi_{\tilde{x},\tilde{x}}(\tilde{y}) - y_0| \geq 2b. \quad (1)$$

(NB: falls $I_{\max}(\tilde{x}, \tilde{y})$ zu klein \implies Graph der Lösung muss zu Rand von $I_{\max}(\tilde{x}, \tilde{y})$ jedes Kompaktum verlassen \implies (1) gilt auch, insbesondere $I_{\max}(\tilde{x}, \tilde{y}) \supset [\tilde{x}, \tilde{x}]$ (o.E. sei von nun an $\tilde{x} > \tilde{x}$)).

Da $x \mapsto \Phi_{x,\tilde{x}}(\tilde{y})$ stetig $\implies \exists x^* \in]\tilde{x}, \tilde{x}[: |\tilde{\varphi}(x^*) - y_0| = 2b$ und

$$|\tilde{\varphi} - y_0| < 2b \quad \forall x \in [\tilde{x}, x^*[. \quad (2)$$



aber:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\varphi}(x^*) - y_0| &\leq \underbrace{|\tilde{\varphi}(x^*) - \tilde{y}|}_{\leq b} + |\tilde{y} - y_0| < 2b \quad \text{?} \\
 &\stackrel{\text{Volterra}}{\leq} \int_{\tilde{x}}^{x^*} |f(x', \tilde{\varphi}(x'))| dx' \\
 &\stackrel{(2),(0)}{\leq} 2aM
 \end{aligned}$$

2. Behauptung: $\forall (x_0, y_0) \in D \exists a, b > 0 :$

(iii) $\hat{Z}_{a,b}(x_0, y_0) := [x_0 - a, x_0 + a] \times Z_{a,b}(x_0, y_0) \subset \mathcal{F}$

(iv) $\Phi_{\bullet, \bullet}$ stetig auf $\hat{Z}_{a,b}(x_0, y_0)$

n.V. ist $(x_0, y_0) \in D$; wähle $a, b > 0$ gemäß 1. Behauptung $\stackrel{(ii)}{\implies}$ (iii) und

$$|\Phi_{x, \tilde{x}}(\tilde{y}) - y_0| < 2b \quad \forall (x, \tilde{x}, \tilde{y}) \in \hat{Z}_{a,b}(x_0, y_0) \quad (*)$$

Zu (iv):

Sei $(x^*, \tilde{x}, \tilde{y}) \in \hat{Z}_{a,b}(x_0, y_0)$ beliebig aber fest und $((x_j^*, \tilde{x}_j, \tilde{y}_j))_{j \in \mathbb{N}} \subset \hat{Z}_{a,b}(x_0, y_0)$ mit $(x_j^*, \tilde{x}_j, \tilde{y}_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} (x^*, \tilde{x}, \tilde{y})$. Zu zeigen:

$$\Phi_{x_j^*, \tilde{x}_j}(\tilde{y}_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \Phi_{x^*, \tilde{x}}(\tilde{y}) \quad (\text{in } \mathbb{R}^d)$$

dafür hinreichend:

$$\Phi_{x, \tilde{x}_j}(\tilde{y}_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \Phi_{x, \tilde{x}}(\tilde{y}) \quad \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a], \quad (3)$$

denn: $\forall x_1, x_2 \in [x_0 - a, x_0 + a] \forall (\tilde{x}, \tilde{y}) \in Z_{a,b}(x_0, y_0) :$

$$|\Phi_{x_j, \tilde{x}}(\tilde{y}) - \Phi_{x_1, \tilde{x}}(\tilde{y})| \stackrel{\text{Volterra}}{\leq} \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(x, \Phi_{x, \tilde{x}}(\tilde{y}))| dx \right| \stackrel{(0)}{\leq} M|x_2 - x_1| \quad (4)$$

Somit:

$$\begin{aligned}
 |\Phi_{x_j^*, \tilde{x}_j}(\tilde{y}_j) - \Phi_{x^*, \tilde{x}}(\tilde{y})| &\leq \underbrace{|\Phi_{x_j^*, \tilde{x}_j}(\tilde{y}_j) - \Phi_{x^*, \tilde{x}_j}(\tilde{y}_j)|}_{\stackrel{(4)}{\leq} M|x_j^* - x^*| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{|\Phi_{x^*, \tilde{x}_j}(\tilde{y}_j) - \Phi_{x^*, \tilde{x}}(\tilde{y})|}_{\stackrel{j \rightarrow \infty}{\underset{(3)}{\rightarrow} 0}}
 \end{aligned}$$

Beweis von (3) per Widerspruch:

Angenommen (3) ist falsch $\implies \exists \tilde{x} \in [x_0 - a, x_0 + a] \exists \varepsilon > 0 \exists \text{Teilfolgen } (\tilde{x}_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}, (\tilde{y}_{j_k})_{k \in \mathbb{N}} :$

$$\forall k \in \mathbb{N} : \underbrace{|\Phi_{\tilde{x}, \tilde{x}_{j_k}}(\tilde{y}_{j_k}) - \Phi_{\tilde{x}, \tilde{x}}(\tilde{y})|}_{=: g_k(\tilde{x})} \geq \varepsilon \quad (5)$$

Nun: $\{g_k : k \in \mathbb{N}\} \subset C([x_0 - a, x_0 + a])$ ist

- eine beschränkte Familie (wegen (*))

- gleichgradig stetig (wegen (4))

Arzelà-Ascoli $\xRightarrow{\text{Satz 2.10}} \overline{\{g_k : k \in \mathbb{N}\}}$ ist kompakt

$$\implies \exists g \in C([x_0 - a, x_0 + a]) \exists \text{Teilfolge } (g_{k_l})_{l \in \mathbb{N}} : \|g - g_{k_l}\|_{\infty} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0 \quad (6)$$

Wir zeigen $g = \Phi_{\bullet, \tilde{x}}(\tilde{y})$. Dann \nmid von (6) mit (5).

Also: $\forall l \in \mathbb{N}$ löst g_{k_l} das AWP $\left\{ \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ (\tilde{x}_{j_{k_l}}; \tilde{y}_{j_{k_l}}) \end{array} \right. \implies \text{erfüllt Volterra} \implies \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a] :$

$$\begin{aligned}
g_{k_l}(x) &= \tilde{y}_{j_{k_l}} + \int_{\tilde{x}_{j_{k_l}}}^x f(x', g_{k_l}(x')) dx' \\
&= \tilde{y}_{j_{k_l}} + \int_{\tilde{x}_{j_{k_l}}}^x \underbrace{f(x', g(x'))}_{\in D} dx' + \underbrace{\int_{\tilde{x}_{j_{k_l}}}^x [f(x', g_{k_l}(x')) - f(x', g(x'))] dx'}_{=: R_l}
\end{aligned} \tag{7}$$

1. Beh. (i)

$$\forall x' \in [x_0 - a, x_0 + a] : \left. \begin{aligned} &\xRightarrow{(6), (*)} \overbrace{(x', g(x')) \in Z_{a,2b}(x_0, y_0)} \\ &\xRightarrow{(*)} \overbrace{(x', g_{k_l}(x')) \in Z_{a,2b}(x_0, y_0)} \end{aligned} \right\} \xRightarrow{(0)} \begin{aligned} &\text{dom. Konvergenz anwendbar:} \\ &||[\dots]|| \leq 2M \quad \forall l \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} R_l = \int_{\tilde{x}}^x [\lim_{l \rightarrow \infty} f(x', g_{k_l}(x')) - f(x', g(x'))] dx' \stackrel{(6), f \text{ stetig}}{=} 0$$

$$\stackrel{l \rightarrow \infty}{\text{in (7)}} \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a] : g(x) = \tilde{y} + \int_{\tilde{x}}^x f(x', g(x')) dx'$$

$$\text{Eindeutigkeit der Lösung des AWP} \left\{ \begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ (\tilde{x}; \tilde{y}) \end{aligned} \right\} \implies \forall (x, \tilde{x}, \tilde{y}) \in \hat{Z}_{a,b}(x_0, y_0) : g(x) = \Phi_{x, \tilde{x}}(\tilde{y}).$$

Nun folgt der Satz aus:

3. Behauptung: $\mathcal{F} = V$, wobei

$$V := \{(x, x_0, y_0) \in \mathcal{F} : \exists \text{ in } \mathbb{R}^d \text{ offene Umgebung von } (x, x_0, y_0) \in U \subseteq \mathcal{F} \text{ mit } \Phi_{\bullet, \bullet}|_U \text{ stetig}\}$$

Klar: $V \subseteq \mathcal{F}$ und V offen, da:

„ $V \supseteq \mathcal{F}$ “: per Widerspruch: Angenommen $\exists (x_1, x_0, y_0) \in \mathcal{F} \setminus V$. O.E. sei $x_1 > x_0$ (Fall $x_1 < x_0$ analog; $x_1 = x_0$ nicht möglich gemäß 2. Behauptung, da $(x_0, x_0, y_0) \in V$).

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\text{Def. von } \mathcal{F}}{\implies} (x_0, y_0) \in D \text{ und } x_1 \in I_{\max}(x_0, y_0) \\
&\implies (x, x_0, y_0) \in \mathcal{F} \quad \forall x \in [x_0, x_1]
\end{aligned}$$

Sei $x^* := \inf\{x \in [x_0, x_1] : (x, x_0, y_0) \in \mathcal{F} \setminus V\}$. Dann

- $x^* \in]x_0, x_1]$ (wegen $(x_0, x_0, y_0) \in V$ und V offen)
- $(x, x_0, y_0) \in V \quad \forall x \in [x_0, x^*]$, also $(x^*, x_0, y_0) \in \mathcal{F} \setminus V$

Ziel: Zeige $(x^*, x_0, y_0) \in V$, also \nexists

Da $x^* \in I_{\max}(x_0, y_0)$, ist $(x^*, \Phi_{x^*, x_0}) \in D$. Aus der zweiten Behauptung mit $x_0 \rightsquigarrow x^*$ und $y_0 \rightsquigarrow \Phi_{x^*, x_0}(y_0)$:

$$\exists a, b > 0 : \hat{Z}_{a,b}(x^*, \Phi_{x^*, x_0}(y_0)) \subseteq \mathcal{F} \text{ und } \Phi_{\bullet, \bullet} \text{ dort stetig} \tag{8}$$

Definition von $\hat{Z} \implies \forall x \in [x^* - a, x^* + a]$:

$$\Phi_{\bullet, x} : [x^* - a, x^* + a] \times \overline{B_b(\Phi_{x^*, x_0}(y_0))} \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ stetig} \tag{9}$$

Nun fixiere $x \in]\max(x_0, x^* - a), x^*[$ mit

$$\Phi_{x, x_0}(y_0) \in B_b(\Phi_{x^*, x_0}(y_0)) \tag{10}$$

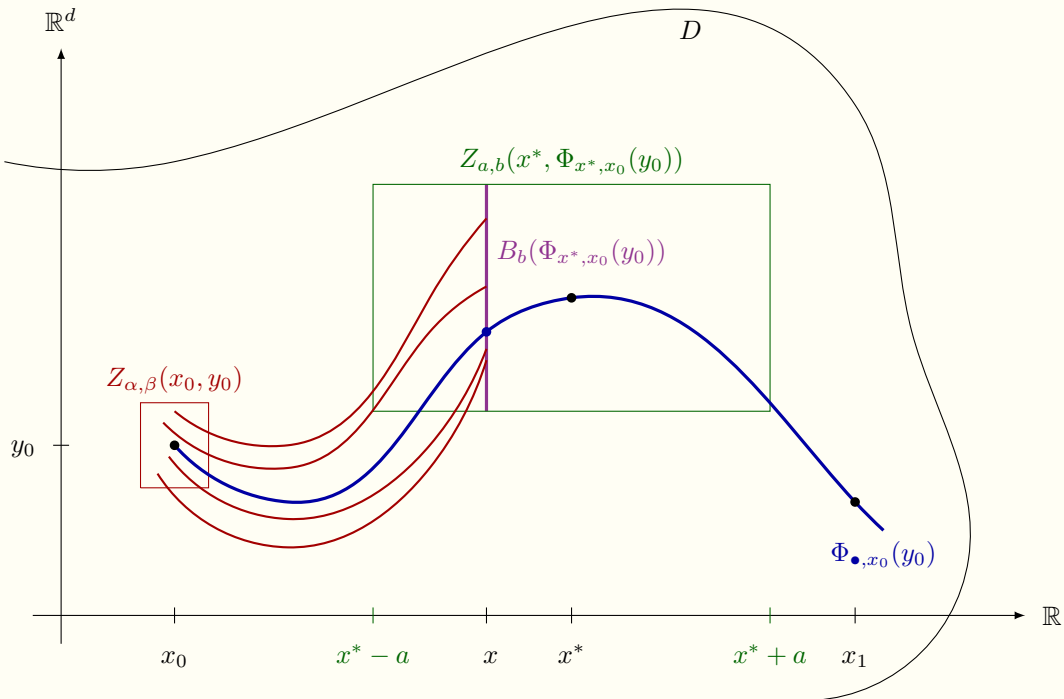
(möglich, da $\lim_{x \rightarrow x^*} \Phi_{x, x_0}(y_0) = \Phi_{x^*, x_0}(y_0)$). Da $x < x^* \implies (x, x_0, y_0) \in V \implies \Phi_{\bullet, \bullet}$ stetig auf offener Umgebung $U \subseteq \mathcal{F}$ von (x, x_0, y_0) . Insbesondere $\exists \alpha, \beta > 0 : \{x\} \times Z_{\alpha, \beta}(x_0, y_0) \subseteq U$

$$\begin{aligned}
&\implies \Phi_{x, \bullet} : Z_{\alpha, \beta}(x_0, y_0) \rightarrow \underbrace{B_b(\Phi_{x^*, x_0}(y_0))}_{\substack{\text{gewährleistet für } \alpha, \beta \\ \text{hinreichend klein wegen} \\ (10) \text{ und Stetigkeit}}} \text{ stetig}
\end{aligned} \tag{11}$$

Schließlich:

- $\forall (\tilde{x}, \tilde{y}) \in Z_{\alpha, \beta}(x_0, y_0) : I_{\max}(\tilde{x}, \tilde{y}) \stackrel{\substack{\text{Lemma 4.4} \\ x \in I_{\max}(\tilde{x}, \tilde{y})}}{=} I_{\max}(x, \Phi_{x, \tilde{x}}(\tilde{y})) \stackrel{(8)}{\supseteq} [x^* - a, x^* + a]$
 - $\Phi_{\bullet, \bullet} = \Phi_{\bullet, x} \circ \Phi_{x, \bullet} : \overbrace{[x^* - a, x^* + a] \times Z_{\alpha, \beta}(x_0, y_0)}^{\subseteq \mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig nach (9), (11).
- $\Rightarrow (x^*, x_0, y_0) \in V \nmid$

□



Speziell für die Variation des Startwerts y_0 gilt das Folgende:

Korollar 5.2

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig und lokal Lipschitz-stetig. Sei $(x_0, y_0) \in D$ und $[a, b] \ni x_0$ mit $[a, b] \subset I_{\max}(x_0, y_0)$. Dann gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in B_\delta(y_0) :$

- (i) $[a, b] \subset I_{\max}(x_0, y)$
- (ii) $|\Phi_{x, x_0}(y) - \Phi_{x, x_0}(y_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$

Beweis.

- (i) n.V. $\underbrace{[a, b] \times \{x_0\} \times \{y_0\}}_{\text{kompakt}} \subset \underbrace{\mathcal{F}}_{\text{offen}} \Rightarrow \exists \rho > 0 : [a, b] \times \{x_0\} \times \overline{B_\rho(y_0)} \subset \mathcal{F} \Rightarrow$ (i)

(ii) Satz 5.1 $\implies \Phi_{\bullet, x_0} : \underbrace{[a, b] \times \overline{B_\rho(y_0)}}_{\text{kompakt}} \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig \implies gleichmäßig stetig $\implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$$\begin{aligned} \forall x, \tilde{x} \in [a, b] \text{ mit } |x - \tilde{x}| < \delta \\ \forall y, \tilde{y} \in \overline{B_\rho(y_0)} \text{ mit } |y - \tilde{y}| < \delta \quad : \quad |\Phi_{x, x_0}(y) - \Phi_{\tilde{x}, x_0}(\tilde{y})| < \varepsilon \end{aligned}$$

\implies (ii) mit $\tilde{x} = x$ und $\tilde{y} = y_0$.

□

Bemerkung 5.3

Die lokale Lipschitz-Stetigkeit von f in y wurde im Beweis von Satz 5.1 und Korollar 5.2 nicht explizit genutzt. Sie wird nur gefordert, damit die Lösungen der DGL eindeutig sind und damit der Fluss wohldefiniert ist.

Nun der noch ausstehende Beweis:

Beweis.

(Invarianz von $w(y_0)$ in Satz 4.13(a))

Zu zeigen: $\forall y \in \omega(y_0) : \mathcal{T}(y) = \{\Phi_x(y) : x \in I_{\max}(y)\} \subseteq \omega(y_0)$

Sei also $y \in \omega(y_0)$ und $x \in I_{\max}(y)$.

$$\implies \exists (x_k)_k \subset [0, \infty[, x_k \uparrow \infty : y = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{x_k}(y_0)$$

Φ_x stetig nach
Satz 5.1

$$\implies \Phi_x(y) \stackrel{!}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_x(\Phi_{x_k}(y_0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{x_k+x}(y_0) \in \omega(y_0)$$

□

Als nächstes untersuchen wir die stetige Differenzierbarkeit des Flusses nach dem Anfangsort. Für weitergehende Differenzierbarkeitsaussagen, z.B. nach der Anfangszeit oder Vertauschbarkeit von Ableitungen, siehe z.B. Aulbach Kap. 7.3.

Satz 5.4

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig und zudem stetig differenzierbar in der zweiten Variablen, das heißt für alle $(x, y) \in D$ ist $\tilde{y} \mapsto f(x, \tilde{y})$ differenzierbar in \tilde{y} und $D \ni (x, y) \mapsto (D_y f)(x, y)$ ist stetig (\implies lokal Lipschitz). Sei $\Phi_{\bullet, \bullet} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^d$ der Fluss zur DGL $y' = f(x, y)$ und sei $(x, x_0, y_0) \in \mathcal{F}$. Dann ist $y \mapsto \Phi_{x, x_0}(y)$ stetig differenzierbar im Punkt y_0 mit dem Differential

$$(D_y \Phi_{x, x_0})(y_0) = \overleftarrow{\exp} \left(\int_{x_0}^x (D_y f)(x', \Phi_{x', x_0}(y_0)) dx' \right).$$

Der Beweis benötigt Stetigkeit der Lösung einer parameterabhängigen DGL im Parameter. Es genügt aber der lineare Fall. Wie sonst auch sei der Raum der Matrizen mit der Abbildungsnorm $\|\cdot\|$ versehen.

Lemma 5.5

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $n \in \mathbb{N}$, $\Xi \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $A : I \times \Xi \rightarrow \mathbb{C}^{d \times d}$ stetig. Dann ist für alle $x, x_0 \in I$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \Xi &\rightarrow \mathbb{C}^{d \times d} \\ \xi &\mapsto \overleftarrow{\exp} \left(\int_{x_0}^x A(x', \xi) dx' \right) \end{aligned}$$

stetig.

Beweis.

siehe Übung!

Beweis.

(von Satz 5.4)

Sei $(x, x_0, y_0) \in \mathcal{F}$ und $J := [\min(x, x_0), \max(x, x_0)] \implies J \times \{x_0\} \times \{y_0\} \subset \mathcal{F}$. \mathcal{F} offen $\implies \exists r > 0 : J \times \{x_0\} \times \overline{B_r(y_0)} \subset \mathcal{F}$. Wir zeigen zunächst die Linearisierbarkeit von $y \mapsto \Phi_{x, x_0}(y)$ um y_0 : Sei $h \in B_r(0) \setminus \{0\}$ und $v(x, h) := \Phi_{x, x_0}(y_0 + h) - \Phi_{x, x_0}(y_0) \in \mathbb{R}^d$.

Behauptung:

$$\exists C \in \mathbb{R}^{d \times d} : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} (v(x, h) - Ch) = 0 \quad (*)$$

Beweis: $\forall x' \in J$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} v(x', h) &= f(x', \Phi_{x', x_0}(y_0 + h)) - f(x', \Phi_{x', x_0}(y_0)) \stackrel{\text{mehrdim. HDI}}{=} \int_0^1 \underbrace{\frac{d}{ds} f(x', \Phi_{x', x_0}(y_0) + sv(x', h))}_{\parallel (D_y f)(x', \Phi_{x', x_0}(y_0) + sv(x', h))v(x', h)} ds \\ &=: A(x', h)v(x', h) \end{aligned}$$

und $J \times \overline{B_r(0)} \rightarrow \mathbb{C}^{d \times d}$
 $(x', h) \mapsto A(x', h)$ ist stetig, denn sei $((x_n, h_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset J \times \overline{B_r(0)}$ mit $(x_n, h_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x', h)$,
 so folgt:

$$\begin{aligned} \|A(x_n, h_n) - A(x', h)\| &\leq \int_0^1 \underbrace{\|(D_y f)(x_n, \Phi_{x_n, x_0}(y_0) + sv(x_n, h_n)) - (D_y f)(x', \Phi_{x', x_0}(y_0) + sv(x', h))\|}_{\substack{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall s \in [0, 1], \\ \text{da } \Phi \text{ stetig, } v \text{ stetig, } D_y f \text{ stetig} \\ \implies \text{beschr. auf Kompakta}}} ds \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \\ &\uparrow \\ &\text{dom. Kgz.} \end{aligned}$$

also: $v(x, h) = \overleftarrow{\text{exp}} \left(\int_{x_0}^x A(x', h) dx' \right) h$. Stetigkeit von A und Lemma 5.5 \implies

$$\frac{1}{|h|} \left| v(x, h) - \overleftarrow{\text{exp}} \left(\int_{x_0}^x A(x', 0) dx' \right) h \right| \leq \left\| \overleftarrow{\text{exp}} \left(\int_{x_0}^x A(x', h) dx' \right) - \overleftarrow{\text{exp}} \left(\int_{x_0}^x A(x', 0) dx' \right) \right\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

also

$$C = \overleftarrow{\text{exp}} \left(\int_{x_0}^x \underbrace{A(x', 0)}_{\parallel (D_y f)(x', \Phi_{x', x_0}(y_0))} dx' \right).$$

$$(*) \implies (D_y \Phi_{x, x_0})(y_0) = \overleftarrow{\text{exp}} \left(\int_{x_0}^x \underbrace{(D_y f)(x', \Phi_{x', x_0}(y_0))}_{=: \tilde{A}(x', y_0)} dx' \right).$$

Φ stetig und $D_y f$ stetig $\implies \tilde{A}: J \times B_r(y_0) \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ stetig \implies Lemma 5.5 für \tilde{A} :

$$\begin{aligned} B_r(y_0) &\rightarrow \mathbb{R}^{d \times d} \\ y &\mapsto (D_y \Phi_{x, x_0})(y) \quad \text{stetig.} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.6

Schmetterlingseffekt: Trotz stetiger Differenzierbarkeit von Φ im Anfangswert y_0 , können die Trajektorien (Lösungen) zu nahe gelegenen Anfangsbedingungen für lange Zeiten exponentiell schnell in der Zeit auseinanderlaufen (typisch für **chaotisches Verhalten**). E.N: Lorentz: „Flug eines Schmetterlings in Brasilien verursacht Tornado in Texas.“

5.2 Anwendung: allgemeine Formel von Liouville und Wiederkehrsatz von Poincaré

Eine direkte Konsequenz aus Satz 5.4:

Satz 5.7

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig und stetig differenzierbar in der zweiten Variablen. Sei $\Phi_{\bullet,\bullet}$ der zugehörige Fluss. Dann gilt:

(a) **Allgemeine Formel von Liouville:** $\forall (x, x_0, y_0) \in \mathcal{F}$:

$$\det \{(D_y \Phi_{x,x_0})(y_0)\} = \exp \left(\int_{x_0}^x \underbrace{(\vec{\nabla}_y \cdot f)(x', \Phi_{x',x_0}(y_0))}_{\substack{\uparrow \\ \text{Divergenz bzgl. } y \text{ (Skalarfeld)}}} dx' \right)$$

(b) **Satz von Liouville:** $\forall U \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar mit $\int_U dy$ und $\{x\} \times \{x_0\} \times U \subset \mathcal{F}$ gilt

$$\int_{\Phi_{x,x_0}(U)} dy = \int_U \exp \left(\int_{x_0}^x (\vec{\nabla}_y \cdot f)(x', \Phi_{x',x_0}(y)) dx' \right) dy .$$

Insbesondere ist der Fluss für divergenzfreie Vektorfelder ($\vec{\nabla}_y \cdot f = 0$) **volumentreu**, das heißt

$$\int_{\Phi_{x,x_0}(U)} dy = \int_U dy$$

Der Beweis verwendet die nützliche Formel:

Lemma 5.8

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in C(I, \mathbb{C}^{d \times d})$ und $x, x_0 \in I$. Dann gilt

$$\det \overleftarrow{\exp} \left(\int_{x_0}^x A(x') dx' \right) = \exp \left(\int_{x_0}^x \operatorname{tr} A(x') dx' \right)$$

Beweis.

siehe Anfang des Beweises von Satz 3.17.

Beweis.

(von Satz 5.7)

(a) Es gilt

$$(D_y f)_{jk} = \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \implies \operatorname{tr} D_y f = \vec{\nabla}_y \cdot f ,$$

daher folgt die Behauptung mit Lemma 5.8 und Satz 5.4.

(b) Idee: Substitution mit $\tilde{y} = \Phi_{x,x_0}(y) + \text{Trafosatz}$

Der Trafosatz ist anwendbar, da

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \Phi_{x,x_0}(U) \\ y &\mapsto \Phi_{x,x_0}(y) \end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus ist:

- Φ ist in y stetig differenzierbar (Satz 5.4)
- Φ_{x,x_0} ist invertierbar mit Inverser $\Phi_{x_0,x}$ (Lemma 4.4)
- $\det(D_y \Phi_{x,x_0})(y) > 0$ für alle $y \in U$ nach (a), daher ist die Umkehrabbildung diffbar (Ana 2)

Die Behauptung folgt daher mit dem Trafosatz und da die Determinante positiv ist (keine Beträge notwendig).

Beispiel 5.9: Autonome Hamiltonsche Flüsse sind volumentreu

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $H \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $q \in \Omega$ und $p \in \mathbb{R}^d$. Sei der Hamiltonsche Fluss, definiert durch:

$$\dot{q} = (\vec{\nabla}_p \cdot H)(q, p) \quad \wedge \quad \dot{p} = -(\vec{\nabla}_q H)(q, p) .$$

Wir setzen $y = (q, p)$ und $f = (\vec{\nabla}_p H, -\vec{\nabla}_q H)$, dann ist

$$\vec{\nabla}_y \cdot f = \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial p_j} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \stackrel{\text{Schwarz}}{=} 0 .$$

(Spezialfall, siehe Beispiel 1.6)

Für autonome, volumentreue Flüsse gilt:

Satz 5.10: Wiederkehrrsatz von Poincaré

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig diffbar mit $\vec{\nabla} \cdot f = 0$. Sei $S \subseteq D$ messbar mit $\bar{S} \subseteq D$ kompakt, sowie S rechtsinvariant unter dem zugehörigen Fluss, d.h. $\mathcal{T}^+(y) \subseteq S \forall y \in S$. Dann ist

$$I_{\max}(y) \supseteq [0, \infty[\quad \forall y \in S \quad (\implies \Phi_x(S) \subseteq S \quad \forall x \geq 0)$$

und $\forall M \subseteq S$ messbar und für Lebesgue-f.a. $y \in M$:

$$\exists (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset [0, \infty[\text{ mit } x_j \uparrow \infty : \Phi_{x_j}(y) \in M \quad \forall j \in \mathbb{N} .$$

Das heißt fast alle Anfangswerte in M kehren unendlich oft nach M zurück.

Der Beweis verwendet folgendes, allgemeines Resultat für messbare, dynamische Systeme:

Satz 5.11

Sei (S, \mathcal{A}, μ) ein endlicher Maßraum, $T: S \rightarrow S$ messbar und sei μ T -invariant, d.h. $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Sei $M \in \mathcal{A}$ und

$$M_0 := \{y \in M : \exists n \in \mathbb{N}_0 : T^n y \in M \text{ und } T^{n+j} y \notin M \quad \forall j \in \mathbb{N}\} .$$

Dann ist $\mu(M_0) = 0$.

Beweis.

Definiere

$$Q_0 := \{y \in M : T^j(y) \notin M \quad \forall j \in \mathbb{N}\}$$

und für $n \in \mathbb{N}$

$$Q_n := (T^n)^{-1}(Q_0) = \{y \in S : T^n(y) \in M \text{ und } T^{n+j} \notin M \forall j \in \mathbb{N}\}.$$

Dann ist

$$M_0 = M \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n.$$

Für $n \neq m$ ist $Q_n \cap Q_m = \emptyset$, also ist

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(Q_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu((T^n)^{-1}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(Q_0).$$

Da μ ein endliches Maß ist, muss $\mu(Q_0)$ daher gleich 0 sein. Somit ist auch $\mu(M_0) = 0$, denn $M_0 \subseteq \bigcup_n Q_n$. \square

Beweis.

(von Satz 5.10) Da \bar{S} kompakt ist, ist $\int_S dy < \infty$, daher ist (S, \mathcal{B}^d, dy) ein endlicher Maßraum. Für alle $y \in S$ ist $\mathcal{T}^+(y) \subseteq S \subseteq \bar{S}$ kompakt, aber $\{(y, \Phi_x(y)) : x \in [0, \infty[\}$ verlässt jedes Kompaktum in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ nach rechts. Also folgt $I_{\max}(y) \geq [0, \infty[$. Nach Voraussetzung ist Φ_\bullet volumentreu, also ist nach dem Satz von Liouville das Lebesguemaß invariant unter Φ_\bullet . Die Wahl $T = \Phi_1$ ist zulässig für Satz 5.11. Somit folgt Satz 5.10 aus Satz 5.11. \square

Beispiel 5.12: Hamiltonsches System mit kompakter Energieschale

Betrachte die DGL aus Beispiel 5.9: $H \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^d)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \end{aligned} \right\} \rightsquigarrow \text{Fluss } \Phi_t(q, p) =: \begin{pmatrix} q_t(q, p) \\ p_t(q, p) \end{pmatrix}$$

Sei $E \in \text{ran}(H) \subseteq \mathbb{R}$. Die **Energieschale** zur Energie E ist

$$S := S_E := H^{-1}(\{E\}) \subseteq \Omega \times \mathbb{R}^d.$$

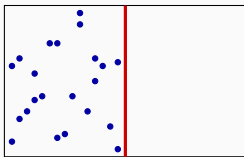
S ist abgeschlossen und invariant unter Φ_t , da $\forall (q, p) \in S \forall t \in I_{\max}(q, p)$

$$\frac{d}{dt} H(\Phi_t(q, p)) = \frac{\partial H}{\partial q}(q_t(q, p), p_t(q, p)) \cdot \dot{q}_t(q, p) + \frac{\partial H}{\partial p}(q_t(q, p), p_t(q, p)) \cdot \dot{p}_t(q, p) \stackrel{\text{DGL}}{=} 0.$$

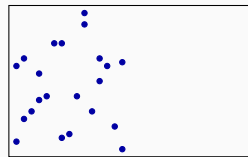
D.h. die Energie H ist eine Erhaltungsgröße. Falls S beschränkt, so ist S kompakt in $\Omega \times \mathbb{R}^d$ und somit ist der Wiederkehrsatz anwendbar. Dies trifft zum Beispiel zu für alle $E \geq 0$ in Beispiel 1.6 (harmonischer Oszillator).

Bemerkung 5.13: Maxwellscher Dämon

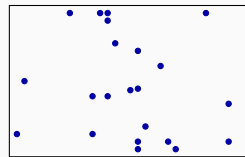
Betrachte ein Gas aus endlich vielen Teilchen (Hamiltonsches System) in einer Box.



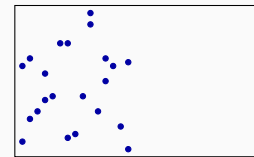
Präparation



Zeit=0



Zeit>0



Zeit=Wiederkehrzeit
(\gg Alter des Universums)

5.3 Stabilitätstheorie

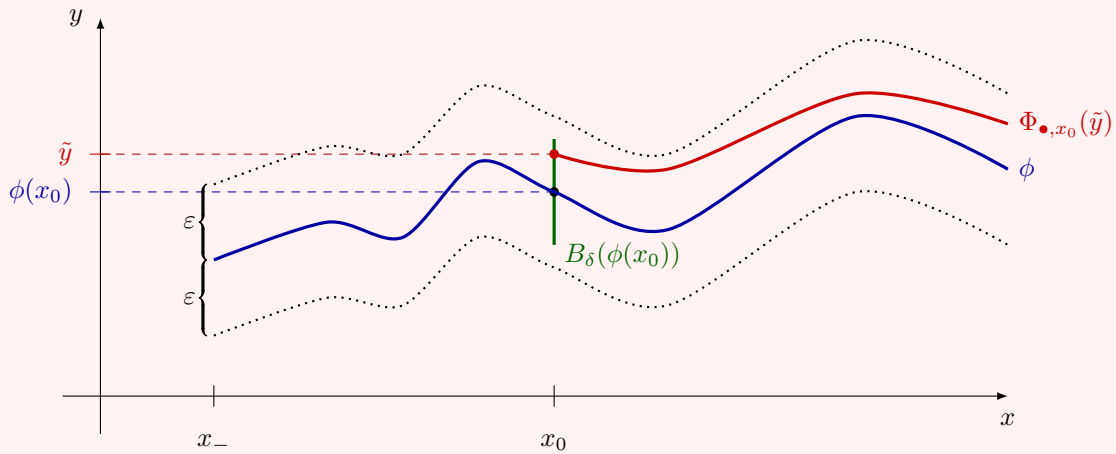
Generalvoraussetzung in diesem Abschnitt: $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig und in der zweiten Variablen lokal Lipschitz, $\Phi_{\bullet, \bullet}$ der Fluss zur DGL $y' = f(x, y)$

Definition 5.14

Sei $x_- \in \mathbb{R}$ und sei $\phi \in C^1([x_-, \infty[)$ eine Lösung der DGL $y' = f(x, y)$.

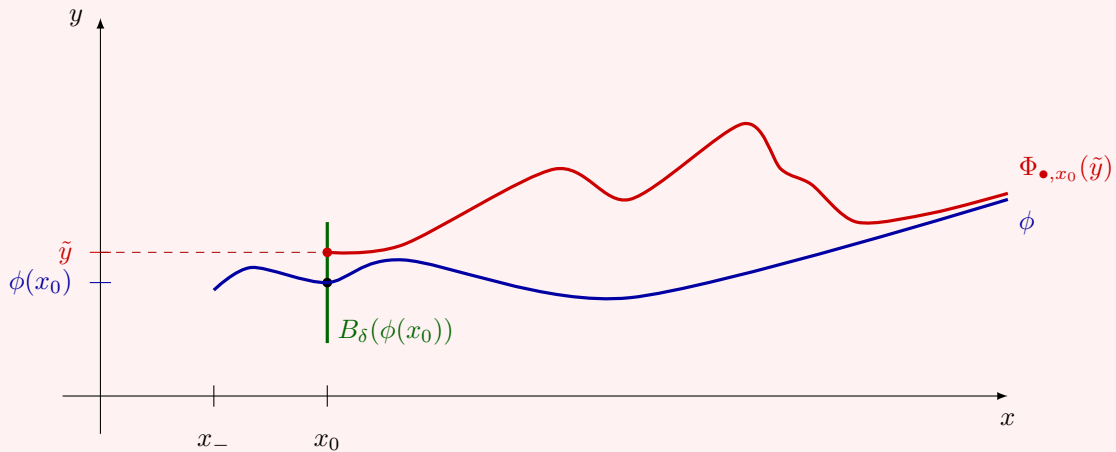
- ϕ heißt **stabil** gdw.

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x_0 > x_- \exists \delta > 0 \forall \tilde{y} \in B_\delta(\phi(x_0)) : I_{\max}(x_0, \tilde{y}) \supseteq [x_0, \infty[\text{ und } \sup_{x \geq x_0} |\Phi_{x, x_0}(\tilde{y}) - \phi(x)| < \varepsilon$$



- ϕ heißt **instabil** gdw. ϕ nicht stabil ist.
- ϕ heißt **attraktiv** gdw.

$$\forall x_0 > x_- \exists \delta > 0 \forall \tilde{y} \in B_\delta(\phi(x_0)) : I_{\max}(x_0, \tilde{y}) \supseteq [x_0, \infty[\text{ und } \lim_{x \rightarrow \infty} |\Phi_{x, x_0}(\tilde{y}) - \phi(x)| = 0.$$



Der **Einzugsbereich** von ϕ ist

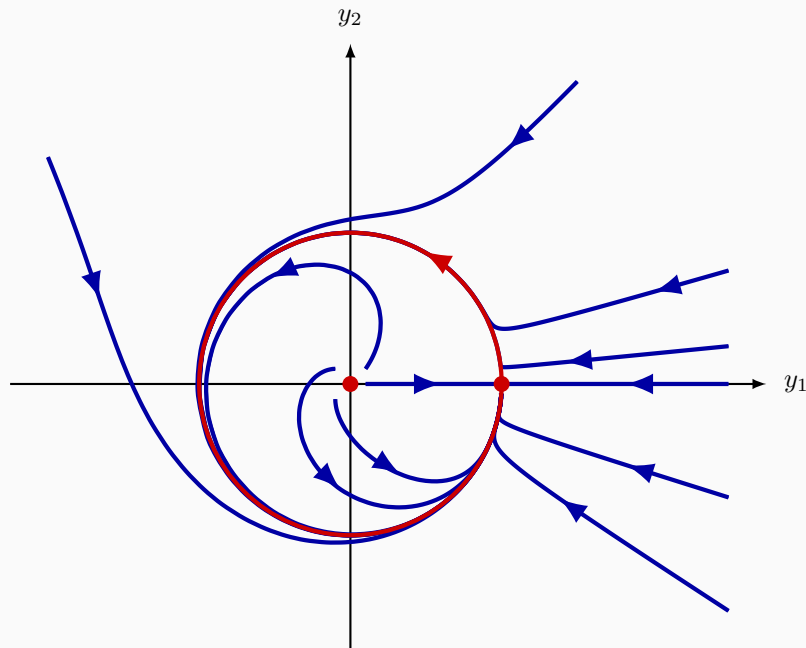
$$\{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in]x_-, \infty[\times \mathbb{R}^d : I_{\max}(\tilde{x}, \tilde{y}) \supseteq [\tilde{x}, \infty[\text{ und } \lim_{x \rightarrow \infty} |\Phi_{x, \tilde{x}}(\tilde{y}) - \phi(x)| = 0\}$$

- ϕ heißt **asymptotisch stabil** gdw. ϕ stabil und attraktiv ist.

Bemerkung 5.15

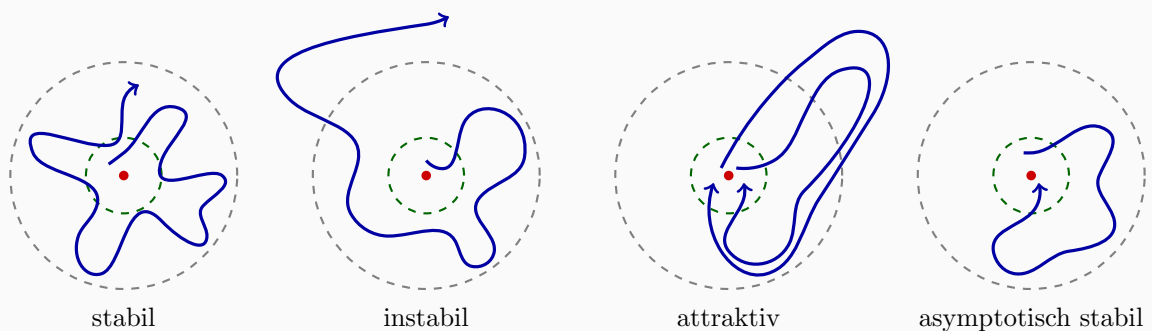
- (a) Die Stetigkeit von $\Phi_{\bullet, \bullet}$ impliziert, dass der Allquantor vor $x_0 > x_-$ in der Definition von stabil bzw. attraktiv durch einen Existenzquantor ersetzt werden kann. Beweis: Übung!
- (b) *Warnung 1:* attraktiv impliziert nicht stabil (außer in $d = 1$)

Beispiel: autonomes System in $d = 2$ in Polarkoordinaten: $\dot{r} = r(1 - r)$, $\dot{\theta} = \sin^2 \theta/2$



Die Ruhelage $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist instabil, aber attraktiv.

- (c) *Warnung 2:* Phasenraumportraits sind nicht geeignet, um Aussagen über die Stabilität einer Lösung ϕ zu treffen (da die Information über die zeitliche Belegung der Trajektorie fehlt). Ausnahme: ϕ ist eine Ruhelage:



Die Transformation auf eine Ruhelage ist nützlich:

Satz 5.16

Sei $\phi \in C^1([x_-, \infty[, \mathbb{R}^d)$ eine Lösung der DGL $y' = f(x, y)$. Dann gilt für $\psi \in C^1([x_-, \infty[, \mathbb{R}^d)$:

(a) ψ ist eine Lösung der DGL

$$z' = f(x, z + \phi(x)) - f(x, \phi(x)) \quad (*)$$

gdw. $\phi + \psi$ eine Lösung der DGL $y' = f(x, y)$ ist.

(b) $(*)$ hat die triviale Lösung auf $]x_-, \infty[$ und diese ist stabil/ attraktiv/ asymptotisch stabil gdw. ϕ die jeweilige Eigenschaft hat.

(Nebenbemerkung: $(*)$ ist nicht autonom, auch wenn $f(x, y) = f(x)$.)

Beweis.

$$(a) \text{ „} \implies \text{“: } (\psi + \phi)'(x) = \psi'(x) + \phi'(x) = f(x, \psi(x) + \phi(x)) + \underbrace{\phi' - f(x, \phi(x))}_{\stackrel{\text{n.v.}}{=} 0}$$

$$\text{„} \impliedby \text{“: } \psi'(x) = (\psi + \phi)'(x) - \phi'(x) = f(x, \psi(x) + \phi(x)) - f(x, \phi(x))$$

(b) Klar: Die Nullfunktion löst $(*)$ auf $]x_-, \infty[$. Sei $\Phi_{\bullet, \bullet}$ der Fluss zu $(*)$.

$$\begin{aligned} (a) \implies \Phi_{x, x_0}(z_0) + \phi(x) &= \Phi_{x, x_0}(z_0 + \phi(x_0)) \\ \implies \boxed{\Phi_{x, x_0}(z_0) - 0} &= \boxed{\Phi_{x, x_0}(y_0) - \phi(x)} \text{ mit } y_0 = z_0 + \phi(x_0) \\ \implies (b) \end{aligned}$$

□

Die Stabilität linearer Systeme ist auch später wichtig für nicht-lineare Systeme.

Satz 5.17

Sei $A \in C([x_-, \infty[, \mathbb{R}^{d \times d})$ und $b \in C([x_-, \infty[, \mathbb{R}^d)$. Dann gilt: Eine beliebige, und damit alle Lösungen von $y' = A(x)y + b(x)$ sind stabil/ attraktiv/ asymptotisch stabil gdw. 0 eine stabile/ attraktive/ asymptotisch stabile Lösung von $y' = A(x)y$ ist.

Beweis.

Sei ϕ eine Lösung von $y' = A(x)y + b(x)$. Dann lautet $(*)$:

$$z' = \underbrace{f(x, z + \phi(x))}_{A(x)(z + \phi(x)) + b(x)} - \underbrace{f(x, \phi(x))}_{A(x)\phi(x) + b(x)} = A(x)z$$

Somit folgt die Behauptung mit Satz 5.16.

□

Satz 5.17 rechtfertigt das Jargon „stabiles/ instabiles/ asymptotisch stabiles lineares System“. Der Grund warum „attraktiv“ nicht mehr separat aufgeführt wurde ist (c) im folgenden Satz:

Satz 5.18

Das lineare System aus Satz 5.17 ist

$$(a) \text{ stabil} \iff \forall x_0 > x_- \exists r \in]0, \infty[: \sup_{x \geq x_0} \|\Phi_{x, x_0}\| \leq r$$

$$(b) \text{ attraktiv} \iff \forall x_0 > x_- : \lim_{x \rightarrow \infty} \|\Phi_{x, x_0}\| = 0$$

$$(c) \text{ asymptotisch stabil} \iff \text{attraktiv}$$

Gemäß Bemerkung 5.15(a) darf man den Allquantor durch einen Existenzquantor ersetzen.

Beweis.

(a) und (b) \implies (attraktiv \implies stabil), also (c).

Satz 5.17 \implies für (a) und (b) ist das Verhalten der trivialen Lösung maßgeblich unter $y' = A(x)y$.

(a) „ \Leftarrow “: klar, da $\forall \varepsilon > 0 \forall \tilde{y} \in B_{\varepsilon/r}(0)$: (d.h. wähle $\delta = \varepsilon/r$)

$$|\Phi_{x,x_0}\tilde{y}| \leq \underbrace{\|\Phi_{x,x_0}\|}_{\leq r} \underbrace{|\tilde{y}|}_{< \varepsilon/r} < \varepsilon \quad \forall x \geq x_0$$

„ \implies “: Sei $\phi = 0$ stabil $\implies \forall x_0 > x_- \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$:

$$\begin{aligned} & \forall \tilde{y} \in B_1(0) : \sup_{x \geq x_0} |\Phi_{x,x_0}\delta\tilde{y}| < \varepsilon \\ \implies & \sup_{x \geq x_0} \|\Phi_{x,x_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \end{aligned}$$

(b) „ \Leftarrow “: klar, da $\forall \tilde{y} \in \mathbb{R}^d \forall x \geq x_0$:

$$|\Phi_{x,x_0}\tilde{y}| \leq \|\Phi_{x,x_0}\| \underbrace{|\tilde{y}|}_{< \infty} \xrightarrow[n.V.]{x \rightarrow \infty} 0,$$

d.h. 0 attraktiv.

„ \implies “: Sei $\phi \equiv 0$ attraktiv $\implies \forall x_0 > -x_- \exists \delta > 0 : \forall \tilde{y} \in B_\delta(0)$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\Phi_{x,x_0}\tilde{y}| = 0$$

Wähle $\tilde{y} := \frac{\delta}{2}e_j, j = 1, \dots, d$ ($e_j \in \mathbb{R}^d$: j -ter kanonischer Einheitsvektor)

$$\begin{aligned} \implies & \lim_{x \rightarrow \infty} \overbrace{\Phi_{x,x_0}e_j}^{j\text{-te Spalte der Matrix } \Phi_{x,x_0}} = \frac{2}{\delta} \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_{x,x_0} \frac{\delta}{2}e_j = 0 \\ \implies & \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_{x,x_0} = 0 \text{ als Matrix bzgl. Abbildungsnorm (alle Normen äquivalent!)} \end{aligned}$$

□

Satz 5.18 legt für **autonome** homogene Systeme eine Charakterisierung durch Eigenwerte nahe.

Satz 5.19

Sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}, b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$. Das System $y' = Ay + b(x)$ ist

- (a) stabil gdw. \forall Eigenwerte λ_j von A gilt: $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$ und, falls $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$, zusätzlich $\operatorname{alg}(\lambda_j) = \operatorname{geo}(\lambda_j)$ (Jargon in diesem Fall: „Eigenwert λ_j ist **halbeinfach**“).
- (b) asymptotisch stabil gdw. \forall Eigenwerte λ_j von A gilt: $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$

Beweis.

Nach Korollar 3.20 gilt

$$e^{Ax} = T \bigoplus_j \left(e^{\lambda_j x} \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{x^k}{k!} J_{m_j}^k \right) T^{-1} \quad (*)$$

$$\implies \|e^{Ax}\| \leq \|T\| \|T^{-1}\| \max_j \underbrace{\left(e^{x \operatorname{Re} \lambda_j} \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{|x|^k}{k!} \|J_{m_j}\|^k \right)}_{=: \gamma_j(x)} \quad (**)$$

(a) „ \Leftarrow “: Sei $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$ und λ_j halbeinfach falls $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ (in diesem Fall: $m_j = 1$). Dann ist $\max_j \sup_{x \geq 0} \gamma_j(x) < \infty \Rightarrow$ Behauptung mit Satz 5.18(a)

(b) „ \Leftarrow “: $\operatorname{Re} \lambda_j < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \max_j \gamma_j(x) = 0 \Rightarrow$ Behauptung mit Satz 5.18(b)

Zu „ \Rightarrow “ in (a) und (b): Mit $v_j := \begin{cases} 1 \in \mathbb{R}, & m_j = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_j}, & m_j > 1 \end{cases}$ gilt:

$$\begin{aligned} \max_j \left\| e^{\lambda_j x} \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{x^k}{k!} J_{m_j}^k \right\| &\stackrel{(*)}{\leq} \|T^{-1}\| \|e^{Ax}\| \|T\| \\ &= e^{(\operatorname{Re} \lambda_j)x} \left\| \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{x^k}{k!} J_{m_j}^k \right\| \\ &\geq \left| \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{x^k}{k!} J_{m_j}^k v_j \right| \\ &= \delta_{m_j,1} + (1 - \delta_{m_j,1}) \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \begin{pmatrix} 1+x \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right| \\ &\Rightarrow \max_j \left\{ e^{(\operatorname{Re} \lambda_j)x} \left(\delta_{m_j,1} + (1 - \delta_{m_j,1}) \frac{1}{2} \sqrt{(1+x)^2 + 1} \right) \right\} \leq \|T^{-1}\| \|e^{Ax}\| \|T\| \\ &\Rightarrow \text{Behauptung mit Satz 5.18(a) bzw. (b).} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.20

Im Fall von (b) folgt aus (**) im Beweis:

$$\forall -s \in]\max_j \operatorname{Re} \lambda_j, 0[\exists C \in]0, \infty[\forall x \geq 0 : \|e^{Ax}\| \leq C e^{-sx}$$

Stabilitätseigenschaften von Fixpunkten nicht-linearer Gleichungen folgen aus denen der durch Linearisierung erhaltenen zugehörigen linearen Gleichungen. Ohne Einschränkung sei der Fixpunkt der Ursprung in \mathbb{R}^d und das Vektorfeld f differenzierbar nach y im Punkt $y = 0$ mit x -unabhängigen Differential A , das heißt $f(x, y) = Ay + o_x(y)$ für $y \rightarrow 0$.

Satz 5.21: Stabilitätskriterium

Sei $r > 0$, $D \supseteq [0, \infty[\times B_r(0)$ und $g: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig und lokal Lipschitz mit $\lim_{|y| \rightarrow 0} |y|^{-1} g(x, y) = 0$ gleichmäßig in $x \in [0, \infty[$ ($\Rightarrow g(x, 0) = 0$). Sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mit $\operatorname{Re} \lambda < 0$ für alle Eigenwerte λ . Dann ist der Fixpunkt 0 der DGL

$$y' = Ay + g(x, y) =: f(x, y)$$

asymptotisch stabil.

Beweis.

Nach Voraussetzung und Bemerkung 5.20 $\exists C, s \in]0, \infty[$:

$$\forall \lambda \in \operatorname{spec}(A) : \operatorname{Re} \lambda < -s \wedge \forall x \geq 0 : \|e^{Ax}\| \leq C e^{-sx}$$

O.E. sei $C \geq 1$. N.V. $\exists \eta \in]0, r[\forall |y| \leq \eta \forall x \geq 0$:

$$|g(x, y)| \leq \frac{s}{2C} |y|. \quad (1)$$

Da f stetig und lokal Lipschitz auf $[0, \infty) \times \overline{B_\eta(0)}$ ist, folgt die Existenz und Eindeutigkeit maximaler Lösungen; daher ist der Fluss wohldefiniert.

Der Satz folgt aus folgender Behauptung:

$$\forall \delta \in]0, \eta/C[\forall \tilde{y} \in B_\delta(0) \forall x \geq 0 : |\Phi_{x,0}(\tilde{y})| \leq C\delta e^{-sx/2}$$

Beweis: $\Phi_{\bullet,0}$ genügt der Integralgleichung $\forall x \geq 0$:

$$\Phi_{x,0}(\tilde{y}) = e^{Ax} \tilde{y} + \int_0^x e^{A(x-x')} g(x', \Phi_{x',0}(\tilde{y})) dx', \quad (2)$$

denn:

$$\frac{d}{dx} \Phi_{x,0}(\tilde{y}) = f(x, \phi_{x,0}(\tilde{y})) = A\Phi_{x,0}(\tilde{y}) + \underbrace{g(x, \Phi_{x,0}(\tilde{y}))}_{b(x)}$$

\implies (2) aus Variation der Konstanten (Satz 3.9)

$$\stackrel{(2)}{\implies} |\Phi_{x,0}(\tilde{y})| \leq Ce^{-sx} |\tilde{y}| + \int_0^x Ce^{-s(x-x')} |g(x', \Phi_{x',0}(\tilde{y}))| dx' \quad \forall x \in I_{\max}(0, \tilde{y}) \quad (3)$$

Sei nun $|\tilde{y}| < \delta$ und $x_+ := \sup\{x \in I_{\max}(0, \tilde{y}) \mid |\Phi_{x',0}(\tilde{y})| < \eta \quad \forall x' \in [0, x]\} \stackrel{\Phi_{\bullet,0}(\tilde{y}) \text{ stetig}}{\downarrow} 0$ (evtl. $x_+ = \infty$).

$$\begin{aligned} \stackrel{(1),(3)}{\implies} |\Phi_{x,0}(\tilde{y})| &\leq Ce^{-sx} \delta + \int_0^x Ce^{-s(x-x')} \frac{s}{2C} |\Phi_{x',0}(\tilde{y})| dx' \quad \forall x \in [0, x_+[\\ \implies \gamma(x) := e^{sx} |\Phi_{x,0}(\tilde{y})| &\leq C\delta + \frac{s}{2} \int_0^x \gamma(x') dx' \quad \forall x \in [0, x_+[\\ \stackrel{\text{Gronwall Satz 2.21(b)}}{\implies} \gamma(x) &\leq C\delta e^{\frac{sx}{2}} \quad \forall x \in [0, x_+[\\ \implies |\Phi_{x,0}(\tilde{y})| &\leq C\delta e^{-\frac{sx}{2}} < \eta e^{-\frac{sx}{2}} \quad \forall x \in [0, x_+[\end{aligned} \quad (4)$$

Annahme: $x_+ < \sup I_{\max}(0, \tilde{y}) \stackrel{\text{Per Def } \Phi_{\bullet,0} \text{ stetig}}{\implies} \lim_{x \uparrow x_+} |\Phi_{x,0}(\tilde{y})| = \eta \nmid$ zu (4), also $x_+ = \sup I_{\max}(0, \tilde{y})$.

Annahme: $\sup I_{\max}(0, \tilde{y}) < \infty$, dann ist

$$\{(x, \Phi_{x,0}(\tilde{y})) : x \in \overbrace{I_{\max}^+(0, \tilde{y})}^{=: I_{\max}(0, \tilde{y}) \cap [0, \infty[}\} \supseteq \overline{I_{\max}^+(0, \tilde{y})} \times \overline{B_\eta(0)} \text{ kompakt.}$$

\nmid da eine maximale Lösung jedes Kompaktum nach rechts verlässt $\implies \sup I_{\max}^+(0, \tilde{y}) = \infty$ □

Bemerkung 5.22

Die Voraussetzungen von Satz 5.21 sind im autonomen Fall erfüllt, falls $f: B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig diffbar ist und $\operatorname{Re} \lambda < 0$ für alle Eigenwerte λ von $Df(0)$.

Satz 5.23: Instabilitätskriterium

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 5.21 mit einer Modifikation: $\exists \lambda \in \text{spec}(A)$: $\text{Re } \lambda > 0$. Dann ist der Fixpunkt 0 der DGL $y' = Ay + g(x, y)$ instabil.

Beweis.

Jordan-Normalform (Satz 5.18): $\exists T \in \mathbb{C}^{d \times d}$ invertierbar:

$$\tilde{B} = T^{-1}AT \text{ mit } \tilde{B} := \bigoplus_j (\lambda_j \mathbf{1}_{m_j} + J_{m_j})$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j}$$

Für $\zeta > 0$ sei $Z := \text{diag}(\zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^d)$, dann ist

$$B := Z^{-1}\tilde{B}Z = \bigoplus_j \begin{pmatrix} \lambda_j & \zeta & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \zeta \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix} \quad (\implies \text{spec}(B) = \text{spec}(A))$$

Sei $\Sigma_- := \{\lambda \in \text{spec}(A) : \text{Re } \lambda \leq 0\}$, $\Sigma_+ := \{\lambda \in \text{spec}(A) : \text{Re } \lambda > 0\}$. Fixiere

$$\zeta \in \left]0, \frac{1}{6} \min_{\lambda \in \Sigma_+} \text{Re } \lambda \right[. \quad (1)$$

$$\text{Sei } u := Z^{-1}T^{-1}y \implies u' = Z^{-1}T^{-1} \overbrace{y'}^{Ay+g(x,y)} = \underbrace{Z^{-1}T^{-1}ATZ}_{=:B} + \underbrace{Z^{-1}T^{-1}g(x, TZu)}_{=:h(x,u)}, \text{ also}$$

$$u' = Bu + h(x, u). \quad (2)$$

n.V. gilt analog zu (1) im Beweis vom Satz 5.21:

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon \in]0, r[\forall |y| \leq \|TZ\| \varepsilon \forall x \geq 0: |g(x, y)| &\leq \frac{\zeta}{\|Z^{-1}T^{-1}\| \|TZ\|} |y| \\ \implies |h(x, u)| &\leq \zeta |u| \quad \forall x \geq 0 \forall |u| < \varepsilon; \end{aligned} \quad (3)$$

also Existenz und Eindeutigkeit maximaler Lösungen mit $D \supset [0, \infty[\times \overline{B_\varepsilon(0)} \implies$ Fluss wohldefiniert.

Sei

$$P_+ := \bigoplus_j (1_{]0, \infty[}(\text{Re } \lambda_j) \mathbf{1}_{m_j}) \text{ bzw. } P_- := \bigoplus_j (1_{]-\infty, 0[}(\text{Re } \lambda_j) \mathbf{1}_{m_j}).$$

Der Satz folgt nun aus

Behauptung: Sei $\psi \in C^1(I_{\max}(0, \tilde{u}), \mathbb{C}^d)$ eine Lösung von (2) mit $\psi(0) = \tilde{u} \in \mathbb{C}^d$ und $\tilde{u} \cdot P_+ \tilde{u} > \tilde{u} \cdot P_- \tilde{u}$. Dann $\exists 0 \leq x_+ \in I_{\max}(0, \tilde{u}) : |\psi(x_+)| = \varepsilon$.

Denn: Behauptung \implies Ursprung instabil bzgl. (2), da $\forall \tilde{u} \in \mathbb{C}^d$ (beliebig klein) $\xRightarrow{\text{Übung}}$ instabil bzgl. (1).

Beweis der Behauptung: o.E. sei $|\psi(0)| < \varepsilon$ (sonst nichts zu zeigen!)

Hilfsfunktionen: $a_\pm := \bar{\psi} \cdot P_\pm \psi \in C^1(I_{\max}(0, \tilde{u}), \mathbb{R})$

$$\implies a'_\pm = 2 \text{Re}(\bar{\psi} \cdot P_\pm \underbrace{\psi'}_{B\psi + h(x, \psi)})$$

Nebenrechnung: Sei $v \in \mathbb{C}^{m_j}$, dann

$$Q_j := \operatorname{Re} \bar{v} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_j & \zeta & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \zeta \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix} v = \operatorname{Re} \lambda_j \sum_{k=1}^{m_j} |v_k|^2 + \zeta \sum_{k=1}^{m_j-1} \bar{v}_k v_{k+1}$$

$$\implies \bullet Q_j \leq \operatorname{Re} \lambda_j |v|^2 + \zeta |v|^2 \quad (4)$$

$$\bullet Q_j \geq \operatorname{Re} \lambda_j |v|^2 - \zeta |v|^2 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \implies \bullet a'_+ &= 2 \operatorname{Re} \{ \bar{\psi} \cdot P_+(B\psi + h(x, \psi)) \} \stackrel{(5),(1)}{\geq} 10\zeta \bar{\psi} \cdot P_+ \psi + 2 \operatorname{Re} \bar{\psi} \cdot P_+ h(\bullet, \psi) \\ &\geq 10\zeta a_+ - 2 \underbrace{|P_+ \psi|}_{\sqrt{a_+}} \underbrace{|h(\bullet, \psi)|}_{\substack{(3), \text{ falls } |\psi| < \varepsilon \\ \downarrow \\ \leq \zeta}} \\ &\quad \underbrace{\sqrt{a_+ + a_-}}_{\substack{|\psi| \\ \sqrt{a_+ + a_-}}} \\ &\geq 10\zeta a_+ - 2\zeta \sqrt{a_+} \sqrt{a_+ + a_-} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \bullet a'_- &= 2 \operatorname{Re} \{ \bar{\psi} \cdot P_-(B\psi + h(\bullet, \psi)) \} \stackrel{(4)}{\leq} 2\zeta \underbrace{\bar{\psi} \cdot P_- \psi}_{a_-} + 2 \operatorname{Re} \bar{\psi} \cdot P_- h(\bullet, \psi) \\ &\quad \underbrace{\leq |P_- \psi| |h(\bullet, \psi)|}_{\substack{(3), \text{ falls } |\psi| < \varepsilon \\ \downarrow \\ \leq 2\sqrt{a_-} \zeta}} \\ &\leq 2\zeta a_- + 2\sqrt{a_-} \zeta \sqrt{a_+ + a_-} \end{aligned} \quad (7)$$

Nun: Sei

$$x_+ := \inf \{ x \in \underbrace{I_{\max}^+(0, \tilde{u})}_{:= I_{\max}(0, \tilde{u}) \cap [0, \infty[} : a_+(x) \leq a_-(x) \text{ oder } |\psi(x)| \geq \varepsilon \}.$$

(NB: $x_+ > 0$, da die Bedingung für $x = 0$ verletzt und ψ stetig ist). Auf $[0, x_+[$ gilt nach (6), (7):

$$\begin{aligned} (a_+ - a_-)' &\geq 10\zeta a_+ - 2\zeta \sqrt{a_+} \underbrace{\sqrt{a_+ + a_-}}_{\leq 2\sqrt{a_+}} - 2\zeta \underbrace{a_-}_{\leq a_+} - 1 \underbrace{a_-}_{\leq \sqrt{a_+}} \zeta \underbrace{\sqrt{a_+ + a_-}}_{\leq 2\sqrt{a_+}} \geq 0 \\ \implies a_+(x) - a_-(x) &= a_+(0) - a_-(0) + \int_0^x \underbrace{(a'_+(x') - a'_-(x'))}_{\geq 0} dx' \geq \tilde{u} \cdot (P_+ - P_-) \tilde{u} > 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\stackrel{a_{\pm} \text{ stetig}}{\implies} x_+ = \inf \{ x \in I_{\max}^+(0, \tilde{u}) : |\psi(x)| \geq \varepsilon \} \quad (9)$$

$\forall x \in [0, x_+[$ gilt nach (9), (6):

$$\begin{aligned} a'_+(x) &\geq 10\zeta a_+(x) - 2\zeta \sqrt{a_+(x)} \underbrace{\sqrt{a_+(x) + a_-(x)}}_{2\sqrt{a_+(x)}} \geq 6\zeta a_+(x) \\ \implies a_+(x) &= a_+(0) + \int_0^x a'_+(x') dx' \geq a_+(0) + 6\zeta \int_0^x a_+(x') dx' \end{aligned}$$

Nun wende die Gronwall-Ungleichung (Satz 2.21) auf $-a_+$ an:

$$|\psi(x)|^2 \geq a_+(x) \geq \underbrace{a_+(0)}_{\substack{\bar{u} \cdot P_+ \tilde{u} \stackrel{\text{n.v.}}{>} 0}} e^{6\zeta x} \quad \forall x \in [0, x_+ [\quad (10)$$

Beweis der Behauptung mit Fallunterscheidung:

Fall 1: $S := \sup I_{\max}^+(0, \tilde{u}) = \infty$

$$\stackrel{(10),(9)}{\implies} x_+ < \infty$$

und die Behauptung folgt.

Fall 2: $S < \infty$, dann ist $x_+ \in]0, S[$, denn andernfalls ist

$$\{(x, \psi(x)) : x \in I_{\max}^+(0, \tilde{u})\} \supset [0, S] \times \overline{B_\varepsilon(0)} \text{ kompakt}$$

⚡ da eine maximale Lösung jedes Kompaktum nach rechts verlässt, also folgt die Behauptung. \square

Für autonome Systeme existiert ein wesentlich tiefer reichender Zusammenhang zu dem durch Linearisierung von einem Fixpunkt resultierenden linearen System.

Satz 5.24: Grobman-Hartman

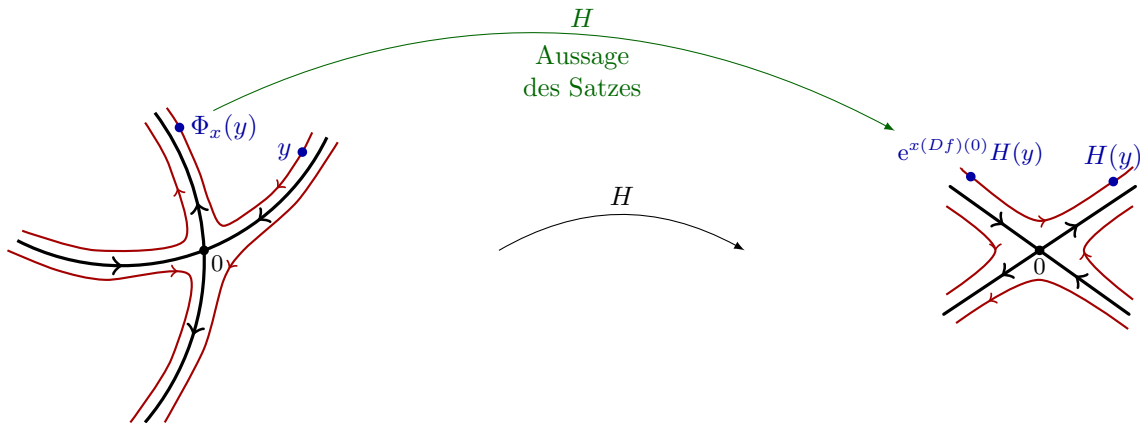
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$ und $0 \in D$ eine **hyperbolische Ruhelage**, das heißt $f(0) = 0$ und $\operatorname{Re} \lambda \neq 0 \forall \lambda \in \operatorname{spec}((Df)(0))$. Dann existieren offene Umgebungen U, V von 0 , ein Homöomorphismus $H: U \rightarrow V$ mit $H(0) = 0$ und für alle $y \in U$ ein Intervall $I_0(y) \ni 0$, sodass $\Phi_x(y) \in U$, $e^{x(Df)(0)}H(y) \in V$ und

$$H(\Phi_x(y)) = e^{x(Df)(0)}H(y) \quad \forall x \in I_0(y).$$

Beweis.

siehe z.B. Teschl

Illustration für $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $(Df)(0)$ hat die Eigenwerte $\lambda_{1/2} \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \lambda_{1/2} \gtrless 0$:



Bzw. als kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} y & \xrightarrow{\Phi_x} & \Phi_x(y) \\ \downarrow H & & \uparrow H^{-1} \\ H(y) & \xrightarrow{e^{x(Df)(0)}} & e^{x(Df)(0)}H(y) \end{array}$$

5.4 Lyapunov-Funktionen

Lyapunov-Funktionen sind nützlich für

- die Identifikation von invarianten Mengen und Grenzmengen
- (In-)Stabilitätskriterien („direkte Methode“)

Generalvoraussetzung für diesen Abschnitt: $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ lokal Lipschitz, die betrachtete DGL ist $y' = f(y)$.

Definition 5.25

Sei $V \in C^1(D, \mathbb{R})$. V heißt **Lyapunov-Funktion** zur DGL $y' = f(y)$, gdw.

$$\dot{V} := \underbrace{\vec{\nabla} V \cdot f}_{\in C(D, \mathbb{R})} \leq 0$$

Bemerkung 5.26

(a) Sei $\phi \in C^1(I, D)$ eine Lösung der DGL $y' = f(y)$. Dann folgt

$$\frac{d}{dx}(V \circ \phi)(x) = (\vec{\nabla} V)(\phi(x)) \cdot \phi'(x) = (\vec{\nabla} V \cdot f)(\phi(x)) = \dot{V}(\phi(x)) \leq 0$$

Falls sogar $\dot{V} = 0$ auf D , so ist V eine Erhaltungsgröße längs Trajektorien.

(b) Mit V ist auch $V + \text{const}$ eine Lyapunov-Funktion.

Beispiel 5.27: Lyapunov-Funktionen für Gradientenfelder

Sei $y' = f(y)$ mit $f = -\vec{\nabla} V$, dann ist V eine Lyapunov-Funktion, da

$$\dot{V} = \vec{\nabla} V \cdot f = -|\vec{\nabla} V|^2 \leq 0 \text{ auf } D.$$

Jenseits von Spezialfällen existiert keine allgemeine Regel oder Rezept zum Auffinden von Lyapunov-Funktionen; dies erfordert Geschick und Intuition! Manchmal fungieren Erhaltungsgrößen ungestörter Systeme als Lyapunov-Funktion gestörter Systeme.

Beispiel 5.28: Mathematisches Pendel mit Reibung

- ungestört (ohne Reibung): Hamiltonsch

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\sin q = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \quad \text{mit } H(q, p) := p^2/2 - \cos q$$

Die Hamiltonfunktion ist eine Lyapunov-Funktion:

$$\vec{\nabla} H \cdot f = \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_q H \\ \vec{\nabla}_p H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_p H \\ -\vec{\nabla}_q H \end{pmatrix} = 0$$

Nach Beispiel 5.12 ist H eine Erhaltungsgröße, also ist $H = H \circ \Phi_t \forall t \in \mathbb{R}$.

- gestört (mit Reibung):

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\sin q - g(p) \end{aligned} \quad \text{mit } g(0) = 0, pg(p) \geq 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}.$$

Setze $V(q, p) := H(q, p)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \dot{V}(q, p) &= (\vec{\nabla} V)(q, p) \cdot \underbrace{f(q, p)}_{\substack{= \begin{pmatrix} \sin q \\ p \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} p \\ -\sin q - g(p) \end{pmatrix}}} = -pg(p) \leq 0 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Also ist V eine Lyapunov-Funktion.

Satz 5.29

Sei V eine Lyapunov-Funktion zur DGL $y' = f(y)$ und $v \in \mathbb{R}$. Dann ist ihre **Subniveaumenge**

$$\mathcal{N}_v = \{y \in D : V(y) \leq v\}$$

rechtsinvariant unter dem zugehörigen Fluss.

Beweis.

Sei $y \in \mathcal{N}_v$ und $x \in I_{\max}(y)$, $x \geq 0$. Dann gilt

$$V(\Phi_x(y)) = V(y) + \underbrace{\int_0^x \frac{d}{dx'} V(\Phi_{x'}(y)) dx'}_{\substack{\leq 0 \\ \uparrow \\ \text{Bemerkung 5.26}}} \stackrel{x \geq 0}{\leq} V(y) \stackrel{\text{n.V.}}{\leq} v$$

$$\implies \Phi_x(y) \in \mathcal{N}_v$$

□

Satz 5.30: Invarianzprinzip

Sei V eine Lyapunov-Funktion zur DGL $y' = f(y)$. Dann gilt $\forall y_0 \in D$:

$$\omega(y_0) \subseteq \{y \in D : \dot{V}(y) = 0\}$$

Bemerkung 5.31

Eine typische Anwendung des Invarianzprinzips: Falls $\mathcal{T}^+(y_0)$ beschränkt und $\overline{\mathcal{T}^+(y_0)} \subseteq D$, so ist $\omega(y_0) \subseteq M$, wobei M die größte invariante Teilmenge von $\dot{V}^{-1}(\{0\})$ ist. Zudem gilt (vgl. Satz 4.13(a)):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \text{dist}(\Phi_x(y_0), M) = 0$$

Beweis.

Ohne Einschränkung sei $\omega(y_0) \neq \emptyset$ (ansonsten nichts zu zeigen). Zu zeigen ist:

$$\forall y^* \in \omega(y_0) : \dot{V}(y^*) = 0$$

Per Widerspruch: Angenommen, $\exists y^* \in \omega(y_0)$ mit $\dot{V}(y^*) < 0$ (> 0 geht nicht, da V Lyapunov-Funktion). Für $y \in D$ sei

$$g_y : \begin{array}{ccc} I_{\max}(y) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & V(\Phi_x(y)) \end{array} ,$$

dann ist $g_y \in C^1(I_{\max}(y))$ mit Ableitung $g'_y(x) = \dot{V}(\Phi_x(y)) \leq 0 \quad \forall x \in I_{\max}(y)$. Somit ist g_y antiton (monoton fallend). Da insbesondere $g'_{y^*}(0) = \dot{V}(y^*) \stackrel{\text{n.V.}}{<} 0$:

$$\stackrel{g \in C^1}{\implies} \exists x^* > 0 : g_{y^*}(x^*) < g_{y^*}(0) \quad (1)$$

Da $y^* \in \omega(y_0)$, gibt es eine Folge $(x_k)_k \subset [0, \infty)$ mit $x \uparrow \infty$ mit $y^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{x_k}(y_0)$.

$$\begin{aligned} \implies g_{y^*}(x^*) &\stackrel{V, \Phi \text{ stetig}}{=} V(\Phi_{x^*}(y^*)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{V(\Phi_{x^*+x_k}(y_0))}_{g_{y_0}(x^*+x_k)} \\ &\stackrel{(1)}{\implies} \lim_{k \rightarrow \infty} g_{y_0}(x^*+x_k) < g_{y^*}(0) \end{aligned} \quad (2)$$

Andererseits gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$g_{y_0}(x^* + x_k) \stackrel{g_{y_0} \text{ antiton}}{\geq} \lim_{j \rightarrow \infty} g_{y_0}(x_j) \stackrel{V \text{ stetig}}{=} V(\underbrace{\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_{x_j}(y_0)}_{=y^*}) = g_{y^*}(0).$$

↯ zu (2)

□

Beispiel 5.32: Mathematisches Pendel mit Reibung (vgl. Beispiel 5.28)

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\sin q - g(p) \end{aligned} \quad \text{mit } g(p) = \xi p|p|^\alpha, \xi > 0, \alpha \geq 0$$

(hier spezieller als in 5.28).

(Übung: Was ändert sich im Phasenportrait gegenüber Beispiel 4.1?)

Die Menge der Ruhelagen ist

$$\mathcal{R} := \{(k\pi, 0) \in \mathbb{R}^2 : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Behauptung: Jede Lösung konvergiert für $t \rightarrow \infty$ gegen eine Ruhelage.

Beweis: Sei $y_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Lyapunov-Funktion (Beispiel 5.28): $V(q, p) = p^2/2 - \cos q$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{V}(q, p) &= \begin{pmatrix} \sin q \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ -\sin q - g(p) \end{pmatrix} = -pg(p) \\ \stackrel{\text{Satz 5.30}}{\Rightarrow} \omega(y_0) &\subseteq \dot{V}^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R} \times \{0\} \end{aligned}$$

Zudem ist $\mathcal{T}^+(y_0)$ beschränkt in \mathbb{R}^2 (warum?), daher folgt mit Satz 4.13(a):

- $\omega(y_0)$ invariant, also $\omega(y_0) \subseteq \mathcal{R}$, da \mathcal{R} die größte invariante Teilmenge von $\mathbb{R} \times \{0\}$ ist. (Denn $f(q, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin q \end{pmatrix}$ treibt für $q \neq k\pi$ den Anfangswert aus der q -Achse raus!)
- $\omega(y_0)$ ist zusammenhängend, also $\exists k_{y_0} \in \mathbb{Z} : \omega(y_0) = \{(k_{y_0}\pi, 0)\}$ und nach Satz 4.13(b):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(y_0) = (k_{y_0}\pi, 0),$$

da $\omega(y_0)$ einpunktig.

Satz 5.33: Stabilität - direkte Methode

Sei $0 \in D$, $f(0) = 0$ und V eine Lyapunov-Funktion zur DGL $y' = f(y)$. Dann gilt:

V hat ein striktes lokales Minimum bei 0 \implies Die Ruhelage 0 ist stabil

Beweis.

Ohne Einschränkung sei $V(0) = 0$ (Bemerkung 5.26(b)). Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_\varepsilon(0)} \subseteq D$ und $m := m_\varepsilon := \min_{|y|=\varepsilon} V(y) \stackrel{\text{n.V.}}{>} 0$.

$$\stackrel{V \text{ stetig}}{\implies} \exists \delta \in]0, \varepsilon[\forall \tilde{y} \in B_\delta(0) : V(\tilde{y}) \in \left[0, \frac{m}{2}\right]$$

Wir widerlegen nun folgende Annahme:

$$\exists \tilde{y} \in B_\delta(0) \exists \bar{x} \in I_{\max}^+(\tilde{y}) : |\Phi_{\bar{x}}(\tilde{y})| = \varepsilon$$

Dann wäre

$$\begin{array}{ccc} \text{Def. von } m & & \dot{V} \leq 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ m \leq V(\Phi_x(\tilde{y})) & \leq & V(\tilde{y}) \leq m/2 \quad \text{da } m > 0 \end{array}$$

Daher ist die Negation wahr, also

$$\forall \tilde{y} \in B_\delta(0) \quad \forall x \in I_{\max}^*(\tilde{y}) : |\Phi_x(\tilde{y})| < \varepsilon .$$

Wegen $|\tilde{y}| < \varepsilon$ und $\Phi_0(\tilde{y})$ stetig ist $|\Phi_x(\tilde{y})| > \varepsilon$ nicht möglich. Es folgt

$$\{(x, \Phi_x(\tilde{y})) : x \in I_{\max}^+(\tilde{y})\} \subseteq I_{\max}^+(\tilde{y}) \times \overline{B_\varepsilon(0)} .$$

Somit ist $I_{\max}^+(\tilde{y}) = [0, \infty[$, denn ansonsten verlässt die Lösung das Kompaktum nicht nach rechts. Also ist 0 stabil. \square

Beispiel 5.34: Harmonischer Oszillator

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -q = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \quad \text{mit Hamilton-Funktion } H(p, q) := p^2/2 + q^2/2.$$

Die Hamiltonfunktion ist eine Erhaltungsgröße, also insbesondere eine Lyapunov-Funktion. H hat ein eindeutiges, absolutes Minimum bei $(0, 0)$ auf \mathbb{R}^2 .

$\implies (0, 0)$ ist stabil (aber nicht attraktiv!)

\implies Das Beispiel lehrt, dass ein hinreichendes Kriterium für asymptotische Stabilität schärfer sein muss!

Satz 5.35: Asymptotische Stabilität - direkte Methode

Sei $0 \in D$, $f(0) = 0$ und V eine Lyapunov-Funktion zur DGL $y' = f(y)$. Dann gilt:

$$\left. \begin{array}{l} V \text{ hat striktes lokales Minimum bei } 0 \text{ und} \\ \dot{V} \text{ striktes lokales Maximum bei } 0 \\ \text{d.h. } \dot{V}(0) = 0 \text{ (Ruhelage!) und } \dot{V}|_{B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}} < 0 \text{ für ein } \varepsilon > 0 \end{array} \right\} \implies \text{Ruhelage } 0 \text{ ist asymptotisch stabil}$$

Zudem: Falls 0 sogar das eindeutige globale Minimum von V und $\mathcal{N}_v \subseteq D$ kompakt für $v \in \mathbb{R}$ mit $\dot{V}|_{\mathcal{N}_v \setminus \{0\}} < 0$, dann gilt

$$\forall \tilde{y} \in \mathcal{N}_v : I_{\max}^+(\tilde{y}) = [0, \infty) \wedge \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_x(\tilde{y}) = 0 ,$$

das heißt, \mathcal{N}_v ist Teil des Einzugsbereichs der attraktiven Ruhelage 0.

Beweis.

o.E. sei $V(0) = 0$.

1. Schritt: Wir zeigen unten:

Sei $\phi \in C^1([0, \infty[, \mathbb{R}^d)$ eine Lösung der DGL $y' = f(y)$, sodass \exists kompakte Umgebung $K \subset D$ von 0 mit $\{\phi(x) : x \geq 0\} \subset K$, $V|_{K \setminus \{0\}} > 0$ und $\dot{V}|_{K \setminus \{0\}} < 0$. Dann ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 0$.

(*)

2. Schritt: (*) \implies 0 asymptotisch stabil, denn:

- Satz 5.33 \implies 0 stabil
- Wähle $\varepsilon > 0$, sodass $K := \overline{B_\varepsilon(0)} \subset D$, $V|_{K \setminus \{0\}} > 0$, $\dot{V}|_{K \setminus \{0\}} < 0$ (geht n.V.)

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{stabil}}{\implies} \exists \delta > 0 \quad \forall \tilde{y} \in B_\delta(0) : I_{\max}(\tilde{y}) \supseteq [0, \infty[\text{ und } \Phi_x(\tilde{y}) \in B_\varepsilon(0) \quad \forall x \geq 0 \\ &\stackrel{(*)}{\implies} \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_x(\tilde{y}) = 0, \text{ also attraktiv} \end{aligned}$$

Beweis 1. Schritt: Sei $y_0 := \phi(0)$.

$$V^* := \lim_{x \rightarrow \infty} V(\phi(x)) \quad (1)$$

existiert, denn $V(\phi(x))$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt.

Behauptung:

$$V^* = 0 \quad (2)$$

Denn angenommen $V^* > 0$ ($V^* < 0$ wegen $V|_K \geq 0$ nicht möglich), dann

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 : B_\delta(0) \subset K \text{ und } 0 \leq V(y) < V^* \quad \forall y \in B_\delta(0) \\ V(\phi(x)) \geq V^* &\implies \forall x \geq 0 : \phi(x) \in \underbrace{K \setminus B_\delta(0)}_{\text{kompakt} \wedge \dot{V} \text{ stetig}} \\ &\implies \mu := \max_{y \in K \setminus B_\delta(0)} \{V(y)\} \text{ existiert und } < 0 \text{ n.V.} \\ &\stackrel{(3)}{\implies} \dot{V}(\phi(x)) \leq \mu < 0 \quad \forall x \geq 0 \\ &\implies V(\phi(x)) - V(y_0) = \int_0^x \underbrace{\dot{V}(\phi(x'))}_{\leq \mu} dx' \leq \mu x \quad \forall x \geq 0 \\ &\implies \lim_{x \rightarrow \infty} V(\phi(x)) = -\infty \quad \nmid \text{ zu } V|_K \geq 0, \text{ also } V^* = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Nun: (1) \wedge (2) \implies (*), denn:

Annahme: $\exists \varepsilon > 0 \exists (x_k)_k \subset [0, \infty[$ $x_k \uparrow \infty$ mit $|\phi(x_k)| \geq \varepsilon$

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} V(\phi(x_k)) \geq \inf_{y \in \underbrace{K \setminus B_\varepsilon(0)}_{\text{kompakt}}} \overbrace{V(y)}^{V \text{ stetig u. } > 0} > 0 \quad \nmid \text{ zu (2) ,}$$

also $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 0$.

3. Schritt: $\mathcal{N}_v \subset D$ gehört nun zum Einzugsgebiet von 0, denn: o.E. sei $v > 0$, also $\mathcal{N}_v \supsetneq \{0\}$ (sonst nichts zu zeigen). Satz 5.29 $\implies \mathcal{N}_v$ rechtsinvariant $\implies \forall y_0 \in \mathcal{N}_v : \sup I_{\max}(y_0) = \infty$, denn andernfalls ist

$$\{(x, \Phi_x(y_0)) : 0 \leq x \in I_{\max}(y_0)\} \subseteq \underbrace{[0, \sup I_{\max}(y_0)] \times \mathcal{N}_v}_{\text{kompakt} \nmid}$$

$$\begin{aligned} \Phi_x(y_0) \in \mathcal{N}_v &\implies \text{erfüllt die Voraussetzungen von (*) mit } K = \mathcal{N}_v \\ &\implies \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_x(y_0) = 0 \end{aligned}$$

□

Satz 5.36: Instabilität - direkte Methode

Sei $0 \in D$, $f(0) = 0$ und V eine Lyapunov-Funktion zur DGL $y' = f(y)$. Dann gilt:

$$\left. \begin{aligned} \exists \varepsilon > 0 : \overline{B_\varepsilon(0)} \subseteq D \text{ und } \dot{V}|_{\overline{B_\varepsilon(0)} \setminus \{0\}} < 0 \\ \text{und } \forall \delta \in]0, \varepsilon[\exists y_0 \in B_\delta(0) \text{ mit } V(y_0) < V(0) \end{aligned} \right\} \implies \text{Ruhelage } 0 \text{ ist instabil}$$

Beweis.

Angenommen, 0 ist stabil. Das heißt

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) \forall \tilde{y} \in B_\delta(0) : I_{\max}(\tilde{y}) \supseteq [0, \infty[\text{ und } |\Phi_x(\tilde{y})| < \epsilon \quad \forall x \geq 0 \quad (1)$$

Wähle $\epsilon = \varepsilon$ und $\delta = \delta(\epsilon)$ gemäß (1). N.V. $\exists y_0 \in B_\delta(0)$, sodass $V(y_0) < V(0)$.

$$\xRightarrow{V \text{ stetig}} \exists \eta \in]0, \delta[\forall \tilde{y} \in B_\eta(0) : V(y_0) < V(\tilde{y}) \quad (2)$$

$$\xRightarrow{\frac{d}{dx}(V \circ \Phi_x)(y) \leq 0} \forall x \geq 0 : V(\Phi_x(y_0)) \leq V(y_0)$$

$$\xRightarrow{(1),(2)} \eta \leq |\Phi_x(y_0)| < \varepsilon \quad \forall x \geq 0$$

$$\xRightarrow{} \mu := \max\{\dot{V}(y) : \eta \leq |y| \leq \varepsilon\} \stackrel{\text{n.V.}}{<} 0 \quad (\dot{V} \text{ stetig auf Kompaktum})$$

$$\xRightarrow{} \dot{V}(\Phi_x(y_0)) \leq \mu \quad \forall x \geq 0$$

$$\xRightarrow{} V(\Phi_x(y_0)) = V(y_0) + \int_0^x \dot{V}(\Phi_{x'}(y_0)) dx' \leq V(y_0) + x\mu \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty,$$

aber

$$\inf\{V(\Phi_x(y_0)) : x \geq 0\} \geq \inf\{V(y) : \underbrace{\eta \leq |y| \leq \varepsilon}_{\text{kompakt in } D}\} \stackrel{V \text{ stetig}}{>} -\infty$$

Ein Widerspruch ζ

□

5.5 Verzweigungen

- synonym: **Bifurkation**
- Instabilität in parameterabhängigen, autonomen Differentialgleichungen $y' = f(y, \alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ als Funktion von α . (Bedeutung von α : Steuer-/Kontrollparameter in Modellierungsfragen \rightsquigarrow wichtig für Anwendungen!)

Definition 5.37

- **Verzweigung** bei $\alpha_0 \in \mathcal{A} : \iff$ qualitative Änderung im Phasenportrait bei Variation von α im Punkt $\alpha = \alpha_0$.
- **lokale Verzweigung** in $y_0 \in D : \iff \forall$ Umgebungen $U \subseteq D$ von y_0 : Anzahl der Fixpunkte in U ändert sich als Funktion von α bei $\alpha = \alpha_0$.
- **globale Verzweigung** : \iff keine lokale Verzweigung
- **Verzweigungsdiagramm** : \iff um $\alpha \in \mathcal{A}$ erweitertes Phasenportrait in $D \times \mathcal{A}$.

Abwesenheitskriterium für lokale Verzweigung:

Satz 5.38

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ offen, $(y_0, \alpha_0) \in D \times \mathcal{A}$ und $f \in C^1(D \times \mathcal{A}, \mathbb{R}^d)$ mit $f(y_0, \alpha_0) = 0$ und $D_y f(y_0, \alpha_0)$ invertierbar. Dann liegt keine lokale Verzweigung in y_0 bei α_0 vor.

Beweis.

Satz über implizite Funktionen: Es gibt Umgebungen $U \subseteq D$ von y_0 und $A \subseteq \mathcal{A}$ von α_0 und es gibt $g \in C^1(A, U)$, sodass

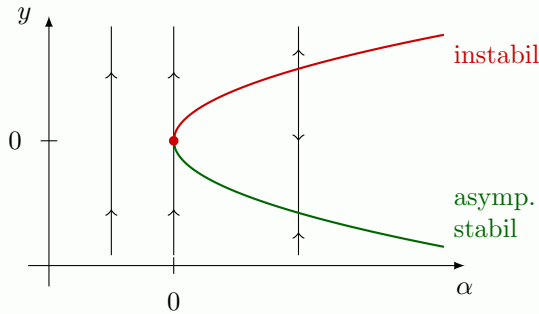
$$f(g(\alpha), \alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in A.$$

Zudem : Ist $f(y, \alpha) = 0$ für ein $(y, \alpha) \in U \times A$, so ist $y = g(\alpha)$. D.h. $\forall \alpha \in A \exists_1$ Ruhelage in U bei $g(\alpha)$. Somit ist y_0 keine lokale Verzweigung.


Beispiel 5.39: Lokale Verzweigungen

(a) *Sattel-Knoten-Verzweigung*: $D = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathbb{R}$, $y' = y^2 - \alpha$

Verzweigungsdiagramm:



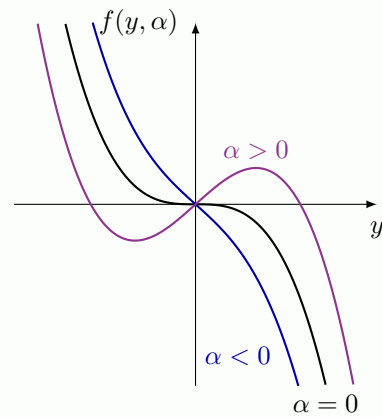
$$f(y, \alpha) = y^2 - \alpha$$

$$0 \stackrel{!}{=} f(y, \alpha) \Rightarrow y_{\pm} = \pm\sqrt{\alpha}$$

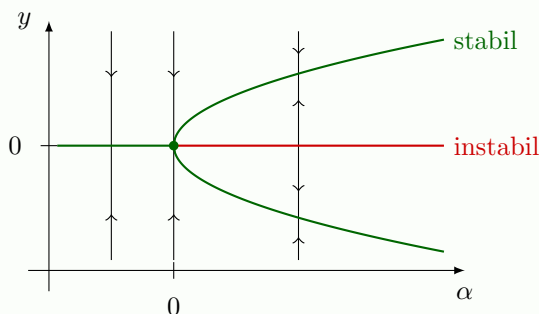
$(D_y f)(y, \alpha) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, \alpha) = 2y$ verschwindet im Verzweigungspunkt $y = 0$ bei $\alpha = 0$.

(b) *Heugabel-Verzweigung*: $D = \mathcal{A} = \mathbb{R}$, $y' = -y^3 + \alpha y = -y(y^2 - \alpha)$

Vektorfeld: $f(y, \alpha) = -y^3 + \alpha y$



Verzweigungsdiagramm:



$(D_y f)(y, \alpha) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, \alpha) = -3y^2 + \alpha$ verschwindet im Verzweigungspunkt $y = 0$ bei $\alpha = 0$.

Das Kriterium in Satz 5.38 ist nur hinreichend, nicht notwendig, denn $D_y f$ verschwindet z.B. auch für $y = 1$ und $\alpha = 3$, dort liegt jedoch keine Verzweigung vor.

(c) *(Poincaré -Andronov-)Hopf-Verzweigung*:

$$D = \mathbb{R}^2, \mathcal{A} = \mathbb{R}, y' = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} y - |y|^2 y \quad (*)$$

In Polarkoordinaten: $y_1 = r \cos \varphi$, $y_2 = r \sin \varphi$:

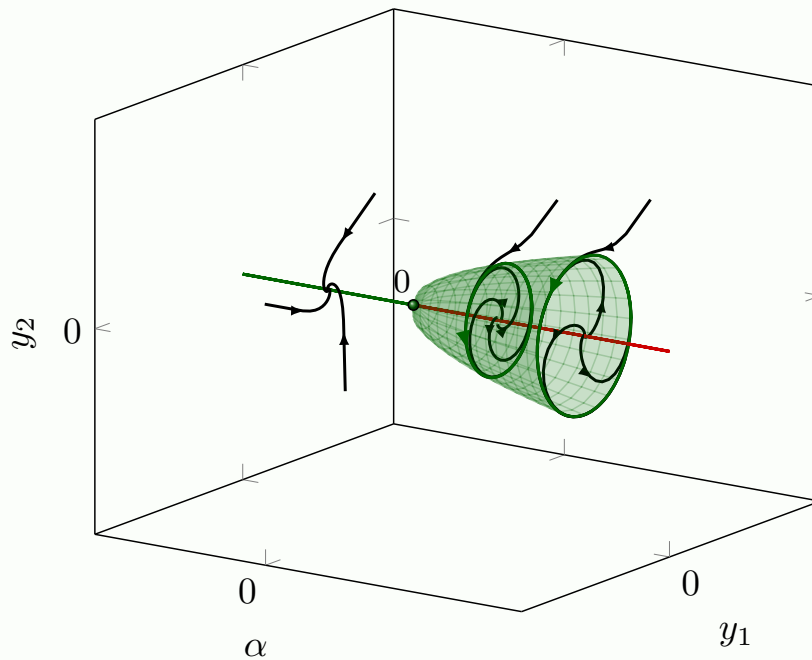
$$\begin{pmatrix} r' \cos \varphi - r \sin \varphi \varphi' \\ r' \sin \varphi + r \cos \varphi \varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - r^2 & -1 \\ 1 & \alpha - r^2 \end{pmatrix} r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} (\alpha - r^2) \cos \varphi - \sin \varphi \\ \cos \varphi + (\alpha - r^2) \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{I})$$

$$\begin{cases} \text{I} \cdot \cos \varphi + \text{II} \cdot \sin \varphi : & r' = (\alpha - r^2)r \\ -\text{I} \cdot \sin \varphi + \text{II} \cdot \cos \varphi : & r \varphi' = r \end{cases} \iff \begin{cases} r' = (\alpha - r^2)r \\ \varphi' = 1 \end{cases} \quad (\text{II})$$

Die Radialgleichung hat eine Heugabel-Verzweigung in $r = 0$ bei $\alpha = 0$. Bedeutung für (*):

- Der Ursprung ist ein attraktiver Fixpunkt für $\alpha \leq 0$ und ein instabiler Fixpunkt für $\alpha > 0$.
- Zudem gibt es für alle $\alpha > 0$ einen attraktiven Grenzzyklus $G_\alpha := \{y \in \mathbb{R}^2 : |y| = \sqrt{\alpha}\}$, an welchen der Ursprung seine Stabilität verliert.

\implies Die Anzahl der Fixpunkte von (*) ändert sich nicht bei $\alpha = 0$ (aber die Stabilität des Fixpunkts ändert sich), daher liegt keine lokale Verzweigung in unserem Sinne vor.



$$(D_y f)(0, \alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \text{ invertierbar } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \text{ denn } \det = \alpha^2 + 1$$

Insbesondere ist $(D_y f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar (hat Eigenwerte $\pm i$)

Bemerkung 5.40

(a) Es gibt andere Definitionen in der Literatur für eine lokale Verzweigung:

- Die Anzahl der Fixpunkte ändert sich oder die Stabilitätseigenschaften der Fixpunkte ändern sich.
- $\text{spec}((D_y f)(y_0, \alpha_0)) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$ (nur für $D \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$)

(b) Globale Verzweigungen:

- Verzweigungen von Grenzzyklen
- Verzweigungen des Phasenraums (Definitionsbereich von f)

6 Ein Blick ins Chaos

Deterministische Zeitentwicklung für alle Zeiten, aber sehr sensitiv: kleinste Abweichungen der Anfangsbedingungen führen zu völlig unterschiedlichem Verhalten für große Zeiten. Problem: nur bedingt zugänglich für numerische Berechnungen, da Rundungsfehler.

Besserer Name: **deterministisches Chaos** (da prinzipielle Vorhersagbarkeit)

Bislang: Fluss einer autonomen DGL erzeugte Dynamik auf dem Phasenraum (in „stetiger“ Zeit $x \in \mathbb{R}$).

Ab jetzt zur technischen Vereinfachung:

Definition 6.1

- **Diskretes dynamisches System** (M, f) : M metrischer Raum, $f \in C(M, M)$ und

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \times M &\rightarrow M \\ (n, x) &\mapsto x_n := f^n(x) := \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{n\text{-mal}}(x) \end{aligned}$$

M entspricht dem Phasenraum, n der „diskreten Zeit“ und $(n, x) \mapsto x_n$ dem Fluss.

- **(Rechts-)Trajektorie(Orbit)** von $x \in M$: $\mathcal{T}^+(x) := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$
- $U \subseteq M$ heißt **(rechts-)invariant** : $\iff f(U) \subseteq U$.
- $U \subseteq M$ heißt **stabil** : $\iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta := \{y \in M : \text{dist}(y, U) < \delta\} \\ \forall n \in \mathbb{N} : \text{dist}(f^n(x), f^n(U)) < \varepsilon \end{cases}$
- $U \subseteq M$ heißt **instabil** : $\iff U$ nicht stabil
- $U \subseteq M$ heißt **attraktiv** : $\iff \exists$ Umgebung $V \supset U$ mit $\text{dist}(f^n(x), f^n(U)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in V$
- $U \subseteq M$ heißt **asymptotisch stabil** : $\iff U$ stabil und attraktiv
- (M, f) hängt **sensibel** von den Anfangsbedingungen ab : $\iff \forall x \in M : \{x\}$ ist instabil

Bemerkung 6.2

- Obige Definitionen lassen sich auf **topologische, dynamische Systeme** (das heißt M topologischer Raum) übertragen, wenn zusätzlich U invariant vorausgesetzt wird.
- Beispiel: $M =]0, \infty[$ und $f(x) = 2x$. Dann ist $f^n(x) = 2^n x$. Somit hängt (M, f) sensibel von den Anfangsbedingungen ab, aber entspricht nicht den Erwartungen für deterministisches Chaos. Es bedarf also mehr.

Definition 6.3

Sei (M, f) ein diskretes dynamisches System.

$$(M, f) \text{ ist } \mathbf{topologisch transitiv} : \iff \forall \{\emptyset\} \not\supseteq U, V \subseteq M \text{ offen } \exists n \in \mathbb{N} : f^n(U) \cap V \neq \emptyset$$

Kurz: f topologisch transitiv.

„Anfangsbedingungen in einer Umgebung explorieren den ‚ganzen‘ Phasenraum im Laufe der Zeit.“

Dichter Orbit \implies topologisch transitiv:

Lemma 6.4

Sei (M, f) ein diskretes, dynamisches System, M zusammenhängend und $\exists x \in M$ mit $\overline{\mathcal{T}^+(x)} = M$. Dann ist f topologisch transitiv.

Beweis.

Vorbemerkung: $\overline{\mathcal{T}^+(x)} = M \implies \forall n \in \mathbb{N} : \overline{\mathcal{T}^+(x_n)} = M$, denn:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(x_n) \cup \underbrace{\{x\}}_{x_0}, x_1, \dots, x_{n-1} &\implies M = \underbrace{\overline{\mathcal{T}(x_n)}}_{\neq \emptyset \text{ und abg.}} \cup \underbrace{\{x_0, \dots, x_{n-1}\}}_{\neq \emptyset \text{ und abg.}} \\ \implies \text{falls } \overline{\mathcal{T}(x_n)} \subsetneq M : &\nexists \text{ zu } M \text{ zusammenhängend} \end{aligned}$$

Sei $\emptyset \neq U \subseteq M$ offen. Nach Voraussetzung gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0 : x_n \in U$. Daher folgt $\overline{\mathcal{T}^+(U)} \supseteq \overline{\mathcal{T}^+(x_n)} = M$. □

Bemerkung 6.5

- (a) Falls f bijektiv, würde im Lemma auch Dichtheit von $\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ ausreichen.
- (b) Das Beispiel aus Bemerkung 6.2(b) ist nicht topologisch transitiv.
- (c) Topologisch transitiv allein, entspricht nicht der Vorstellung einer chaotischen Dynamik.

Beispiel: $M := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und $f : z \mapsto e^{i\gamma}z$ mit $\gamma > 0$ und $\gamma/2\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Mit einer Übungsaufgabe folgt: $\overline{\mathcal{T}(z)} = M \forall z \in M$. Mit Lemma 6.4 und Bemerkung 6.5(a) schließen wir, dass (M, f) topologisch transitiv ist. Aber: $\forall z \in M : \{z\}$ stabil!

- (d) Weiterer Versuch für die Definition einer chaotischen Dynamik:

topologisch transitiv *und* sensible Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen

Diese Definition existiert in der Literatur, der Nachteil ist jedoch, dass diese nicht topologisch invariant ist, aufgrund der sensiblen Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen (d.h. verletzbar unter Homöomorphismen). Die Eigenschaft ist von der Wahl der Metrik abhängig (vgl. Bemerkung 6.2(a))

Wünschenswert: Für diskrete dynamische Systeme (M_j, f_j) , $j = 1, 2$ und einen Homöomorphismus $H : M_1 \rightarrow M_2$ mit

$$H \circ f_1 = f_2 \circ H \quad (\text{topologisch konjugiert})$$

sollte gelten: (M_1, f_1) chaotisch $\iff (M_2, f_2)$ chaotisch.

Gegenbeispiel: $M_1 = M_2 =]0, \infty[$, $f_1(x) := 2x$, $f_2(x) = \frac{1}{2}x$. Betrachte $H : M_1 \rightarrow M_2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Offensichtlich ist H ein Homöomorphismus. Es gilt $H \circ f_1 = f_2 \circ H$ (sprich: „ (M_1, f_1) und (M_2, f_2) sind topologisch konjugiert.“) Aber (M_1, f_1) hängt sensibel von den Anfangsbedingungen ab (Beispiel 6.2(b)), (M_2, f_2) nicht (jeder Punkt stabil).

Ausweg: Betrachte periodische Orbits:

Definition 6.6

Sei (M, f) ein diskretes dynamisches System.

- $p \in M$ ist ein **periodischer Punkt** : $\iff \exists n \in \mathbb{N} : f^n(p) = p$ und $f^m(p) \neq p \forall m < n$. n heißt

Periode von p . Spezialfall: $n = 1$, dann ist p ein Fixpunkt. Weiter sei

$$\text{Per}(f) := \{p \in M : p \text{ periodischer Punkt}\}.$$

- Der **periodische Orbit** vom periodischen Punkt $p \in M$ mit Periode $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$\mathcal{T}^+(p) = \{p, f(p), \dots, f^{n-1}(p)\}$$

Satz 6.7

Sei (M, f) ein diskretes dynamisches System, $M \subseteq \mathbb{R}$, $p \in M$ mit $f(p) = p$ und f diffbar in p . Dann gilt

- (a) $|f'(p)| < 1 \implies \{p\}$ stabil

Zusatz: Falls zudem $f'(p) \neq 0$, dann ist $\{p\}$ asymptotisch stabil.

- (b) $|f'(p)| > 1 \implies \{p\}$ instabil

Illustration:

???

Beweis.

O.E. sei $p = 0$ (sonst verschiebe M und f). Da f diffbar in 0 ist, folgt $\forall x \in M$:

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + f'(0)x + o(x) \quad (*)$$

- (a) $(*) \implies \exists \bar{\varepsilon} > 0 \forall x \in M$ mit $|x| \leq \bar{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} f'(0) + \frac{o(x)}{x} &\in]-1, 1[\\ \xrightarrow{x \neq 0} f(x) &= x \left(\underbrace{f'(0) + \frac{o(x)}{x}}_{\in]-1, 1[} \right) \\ \implies |f(x)| &< |x| \end{aligned}$$

Nun wähle in der Definition von Stabilität:

$$\delta := \begin{cases} \varepsilon, & \text{falls } \varepsilon \leq \bar{\varepsilon} \\ \bar{\varepsilon}, & \text{falls } \varepsilon > \bar{\varepsilon} \end{cases}$$

- (b) $(*) \implies \exists \varepsilon > 0 \forall x \in M$ mit $|x| \leq \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{|f'(0)| - 1}{2}}_{=: \eta > 0} + \text{sgn } f'(0) \frac{o(x)}{x} &\geq 0 \\ \implies f(x) &= \text{sgn } f'(0)x \left(\underbrace{1 + 2\eta + \text{sgn } f'(0) \frac{o(x)}{x}}_{\geq 1 + \eta} \right) \\ \implies |f(x)| &\geq (1 + \eta)|x| \end{aligned}$$

$\implies \forall x \in B_\varepsilon(0) \exists n \in \mathbb{N}_0 : f^n(x) \in B_\varepsilon(0)$ und $f^{n+1}(x) \notin B_\varepsilon(0)$, also 0 instabil.

Zusatz: Übung!

□

Beispiel 6.8: Logistik-Abbildung

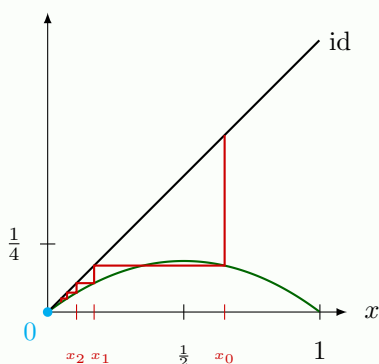
$$M = [0, 1], \alpha \in [0, 4], L_\alpha: \begin{array}{ccc} M & \rightarrow & M \\ x & \mapsto & \alpha x(1-x) \end{array}.$$

Fixpunkte:

$$\begin{aligned} x &= L_\alpha(x) \\ \implies x &= 0 \vee x = 1 - \frac{1}{\alpha} \quad (\text{für } \alpha > 1) \end{aligned}$$

Die Ableitung ist $L'_\alpha(x) = \alpha(1 - 2x)$.

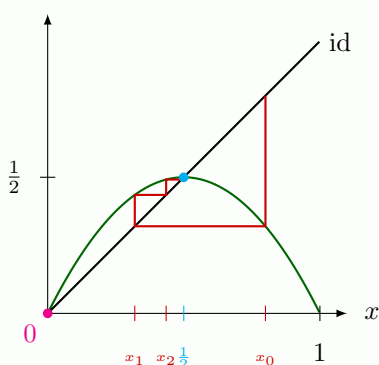
$L_\alpha(x)$ $\alpha \in]0, 1]$



- Der Fixpunkt 0 ist asymptotisch stabil, denn:

- $\forall x \in [0, 1]: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, da $L_\alpha(x) \leq \alpha x \implies L_\alpha^n(x) \leq \alpha^n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (für $\alpha < 1$)
- oder mit Satz 6.7(a): $|L'_\alpha(0)| = \alpha \implies$ asymptotisch stabil für $\alpha \in]0, 1[$.

$L_2(x)$ $\alpha = 2$



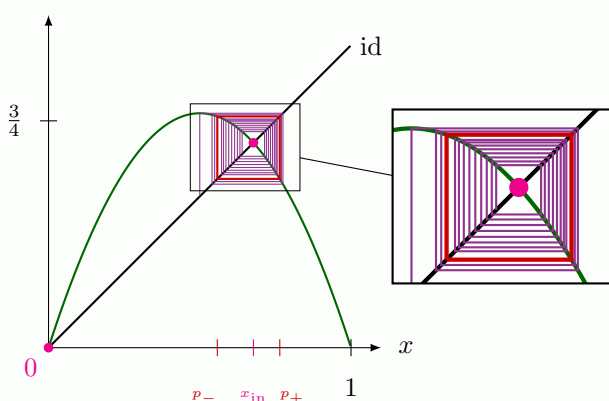
- Der Fixpunkt 0 ist instabil, denn:

- $\forall x \in]0, 1[: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{\alpha}$
- oder mit Satz 6.7(b): $|L'_2(0)| = \alpha = 2 > 1$

- Der Fixpunkt $\frac{1}{2}$ ist asymptotisch stabil, denn:

- siehe oben
- oder mit Satz 6.7(a): $|L'_2(\frac{1}{2})| = 0 < 1 \implies$ stabil

$L_\alpha(x)$ $\alpha \in]3, 1 + \sqrt{6}[$

**Periodenverdopplung:**

\exists periodischer Orbit $\{p_-, p_+\}$ der Periode 2 und vier Lösungen der Gleichung $L_\alpha^2(x) = x$:

- 0 und x_{in} sind Fixpunkte, aber instabil.
- p_- und p_+ sind keine Fixpunkte, aber der periodische Orbit $\{p_-, p_+\}$ ist asymptotisch stabil.

Hinweise auf komplexe Struktur bei $\alpha = 4$:

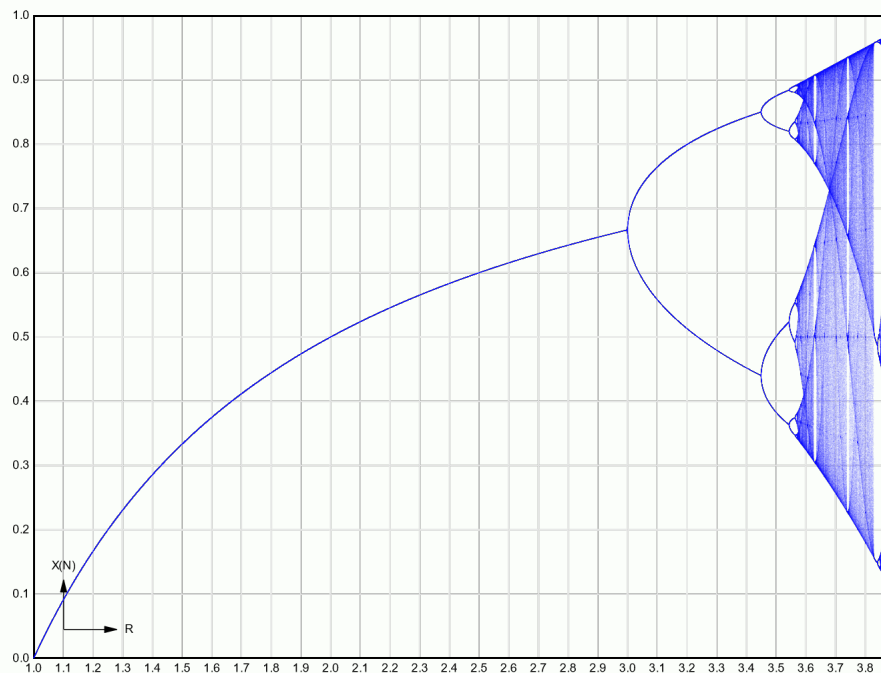
- Existenz eines periodischen Orbits der Periode 3: $\{s_1^2, s_2^2, s_4^2\}$ mit $s_k := \sin \frac{k\pi}{9}$ für $k \in \mathbb{N}$ denn

$$- L_4(s_k^2) = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{9} \cos^2 \frac{k\pi}{9} = \underbrace{\left(2 \sin \frac{k\pi}{9} \cos \frac{k\pi}{9} \right)^2}_{=\sin^2 \frac{2k\pi}{9}} = s_{2k}^2$$

$$- s_8 = \sin \underbrace{\frac{8\pi}{9}}_{\pi - \frac{\pi}{9}} = \sin \pi/9 = s_1$$

- folgender Satz:

Bifurkationsdiagramm für die logistische Gleichung:



Quelle: <http://walter.bislins.ch/blog/index.asp?page=Feigenbaum%2DDiagramm+erzeugen+und+analysieren>

Satz 6.9: Spezialfall des Satzes von Sarkovskij

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und (M, f) ein diskretes dynamisches System. Dann gilt:

$$\exists \text{ periodeischer Orbit der Periode } 3 \implies \forall n \in \mathbb{N} \exists \text{ periodischer Orbit der Periode } n$$

Beweis.

Hilfsbehauptung 1: Seien I, J kompakte Intervalle, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(J) \supseteq I$. Dann \exists kompaktes Intervall $J' \subseteq J$ mit $f(J') = I$.

Beweis: Setze

$$X_{\pm} := \left\{ x \in J : f(x) = \max_{\min} I \right\} = f^{-1} \left(\underbrace{\left\{ \max_{\min} I \right\}}_{\text{kompakt}} \right) \cap J.$$

X_{\pm} ist kompakt, da J kompakt und f stetig. Sei $x_0 := \inf(X_- \cup X_+) \stackrel{\text{kompakt}}{=} \min(X_- \cup X_+)$. O.E. sei $x_0 \in X_-$.

$$x_+ := \min\{X_+ \cap [x_0, \max J]\}$$

$$x_- := \sup\{X_- \cap [x_0, x_+]\} = \max\{X_- \cap [x_0, x_+]\} \in [x_0, x_+]$$

$$\text{Da } (X_- \cup X_+) \cap]x_-, x_+[= \emptyset \implies f(\underbrace{[x_-, x_+]}_{=: J' \text{ kompakt}}) \subseteq I$$

$$\text{Da } f(x_{\pm}) = \max_{\min} I \xrightarrow{\text{Zwischenwertsatz}} f(J') = I$$

Hilfsbehauptung 2: Sei J ein kompaktes Intervall und $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(J) \supseteq J$, dann hat f einen Fixpunkt in J .

Beweis: n.V. $\exists x_{\pm} \in J: f(x_{\pm}) = \max_{\min} J$. Setze $g := f - \text{id}$.

$$\implies g(x_{\pm}) = \max_{\min} J - x_{\pm} \gtrless 0$$

$$\xrightarrow{\text{Bolzano}} \exists x_0 \in [\min(x_+, x_-), \max(x_+, x_-)] : g(x_0) = 0$$

Beweis des Satzes: Sei $\{a, b, c\} \subset M$, $a < b < c$ ein Orbit mit Periode 3. O.E. sei $f(a) = b$ ($\implies f(b) = c, f(c) = a$). Fall $f(a) = c$ analog! Sei $I := [a, b]$, $J := [b, c]$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt:

$$f(I) \supseteq J \tag{0}$$

$$f(J) \supseteq I \cup J \tag{1}$$

Setze $J_0 := J$

$$\xrightarrow{(1)} f(J_0) \supseteq J_0 \tag{2}$$

Periode $n = 1$: (2) und HB 2 $\implies f$ hat Fixpunkt in J_0 .

Periode $n \geq 2$: iteratives Vorgehen:

$$(2) \xrightarrow{\text{HB 1 mit } I=J_0} \exists \text{ kompaktes Intervall } J_1 \subseteq J_0 : f(J_1) = J_0 \supseteq J_1$$

$$\xrightarrow{\text{HB 1 mit } I=J_1} \exists \text{ kompaktes Intervall } J_2 \subseteq J_1 : f(J_2) = J_1 \supseteq J_2$$

usw.

Das heißt:

$$\forall k \in \{0, \dots, n-2\} \exists \text{ kompaktes Intervall } J_{k+1} \subseteq J_k : f(J_{k+1}) = J_k \tag{3}$$

Damit:

$$f^{n-1}(J_{n-2}) = f(\underbrace{f^{n-2}(J_{n-2})}_{\stackrel{(2)}{=} J_0}) \stackrel{(1)}{\supseteq} I$$

$$\xrightarrow{\text{HB 1 mit } f^{n-1}, J=J_{n-1}, I} \exists \text{ kompaktes Intervall } J_{n-1} \subseteq J_{n-2} : f^{n-1}(J_{n-1}) = I \tag{4}$$

$$\implies f^n(J_{n-1}) = f(f^{n-1}(J_{n-1})) \stackrel{(4)}{=} I \stackrel{(0)}{\supseteq} J_0$$

$$\xrightarrow{\text{HB 1 mit } f^n, J=J_{n-1}, I=J_0} \exists \text{ kompaktes Intervall } J_n \subseteq J_{n-1} : f^n(J_n) = J_0 \supseteq J_n$$

$$\xrightarrow{\text{HB 2 mit } f^n} f^n \text{ hat Fixpunkt } x \in J_n$$

Behauptung: $\{x, f(x), \dots, f^{n-2}(x), f^{n-1}(x)\}$ ist periodischer Orbit der Periode n .

- $x, f(x), \dots, f^{n-2}(x) \in J_0$, wegen (3)
- $f^{n-1}(x) \in I \setminus \{b\}$, wegen (4) und angenommen $f^{n-1}(x) = b$, dann ist $a = f^2(b) = f^{n+1}(x) = f(\underbrace{f^n(x)}_x) \in J_0 \nmid$

Daher: $J \cap I \setminus \{b\} = \emptyset \implies$ alle n Punkte sind verschieden.

□

Von nun an sei $|M| = \infty$ (um auszuschließen, dass es einen periodischen Orbit gibt, der ganz M umfasst).

Definition 6.10

Sei (M, f) ein diskretes dynamisches System.

$$(M, f) \text{ chaotisch} \iff (M, f) \text{ topologisch transitiv und } \overline{\text{Per}(f)} = M$$

Kurz: „ f chaotisch“

Bemerkung 6.11

Wenn (M_1, f_1) topologisch konjugiert zu (M_2, f_2) , so ist:

$$(M_1, f_1) \text{ chaotisch} \iff (M_2, f_2) \text{ chaotisch}$$

Satz 6.12

Sei (M, f) ein diskretes dynamisches System. Dann gilt:

$$(M, f) \text{ chaotisch} \implies (M, f) \text{ hängt sensitiv von den Anfangsbedingungen ab}$$

Beweis.

Sei $x \in M$. Zu zeigen ist: $\{x\}$ ist instabil.

Es gibt ein $\varepsilon > 0$ und einen periodischen Punkt $p \in M$, sodass $\text{dist}(x, \mathcal{T}^+(p)) < 4\varepsilon$, denn:

- *Fall 1:* x kein periodischer Punkt. Wähle periodischen Punkt $p \in M$, dann ist $\text{dist}(x, \mathcal{T}^+(p)) > 0$.
- *Fall 2:* x ist ein periodischer Punkt. Da $|M| = \infty$, ist $M \setminus \mathcal{T}^+(x) \neq \emptyset$. Wähle daraus einen periodischen Punkt (Dichtheit von $\text{Per}(f)$).

Setze $\varepsilon := \frac{1}{5} \min_{\tilde{p} \in \mathcal{T}^+(p)} d(\tilde{p}, x) > 0$. Sei $\delta \in]0, \varepsilon[$. Weil $\text{Per}(f)$ dicht in M ist, finden wir einen periodischen Punkt $y_1 \in B_\delta(x) \setminus \{x\}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ die Periode von y_1 . Setze

$$V := \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(B_\varepsilon(f^j(p))) .$$

V ist eine offene Umgebung von p und es gilt $f^j(V) \subseteq B_\varepsilon(f^j(p)) \quad \forall j = 0, \dots, n-1$. Wegen der topologischen Transitivität gibt es ein $y_2 \in B_\delta(x)$ und ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $f^k(y_2) \in V$. Weiterhin $\exists_1 j_0 \in \{0, \dots, n-1\}$, sodass $k + j_0$ ein ganzzahliges Vielfaches von n ist. Dann gilt

- $f^{k+j_0}(y_1) = y_1$
- $f^{k+j_0}(y_2) = f^{j_0}(\underbrace{f^k(y_2)}_{\in V}) \in B_\varepsilon(f^{j_0}(p))$

Also:

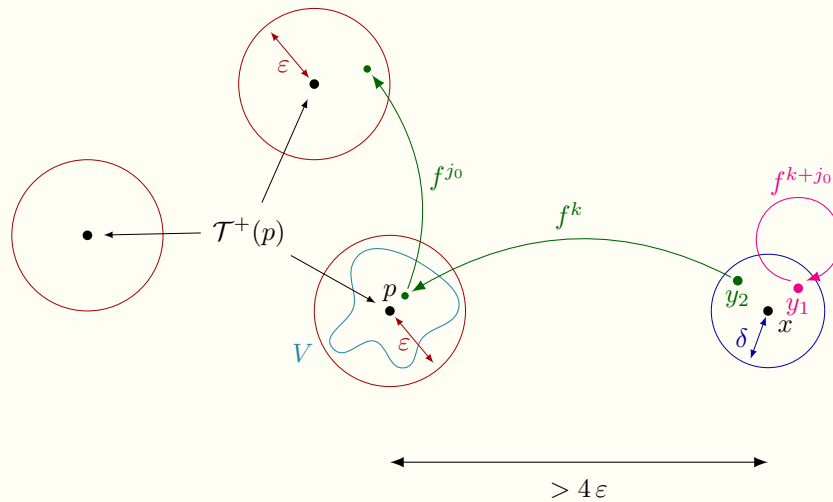
$$\begin{aligned} d(\underbrace{f^{k+j_0}(y_1)}_{=y_1}, f^{k+j_0}(y_2)) &\geq \underbrace{d(x, f^{j_0}(p))}_{>4\varepsilon} - \underbrace{d(x, y_1)}_{<\delta<\varepsilon} - \underbrace{d(f^{k+j_0}(y_2), f^{j_0}(p))}_{<\varepsilon} > 2\varepsilon \\ &\stackrel{(*)}{\implies} \max_{\nu=1,2} d(f^{k+j_0}(x), f^{k+j_0}(y_\nu)) > \varepsilon, \end{aligned}$$

Da $\delta \in]0, \varepsilon[$ beliebig und $y_1, y_2 \in B_\delta(x)$, ist $\{x\}$ instabil.

Nebenrechnung:

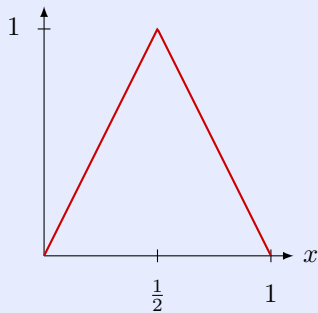
$$2\varepsilon < d(z_1, z_2) \leq d(z_1, \xi) + d(z_2, \xi) \implies \max_{\nu=1,2} d(z_\nu, \xi) > \varepsilon \quad (*)$$

□



Beispiel eines chaotischen Systems:

Lemma 6.13

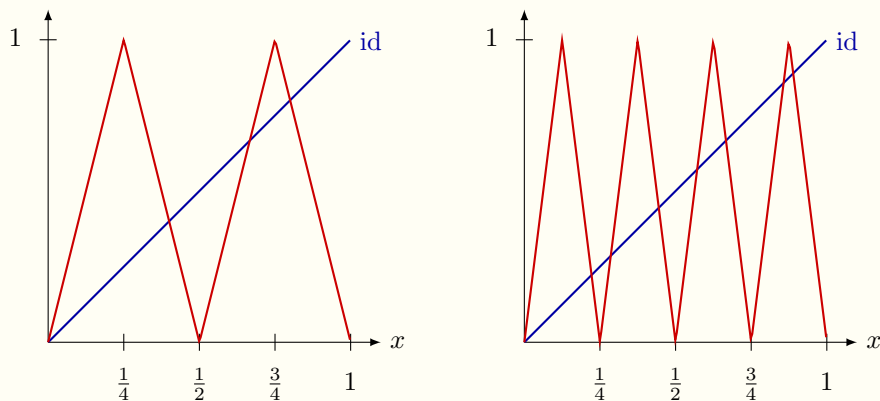


Sei $M = [0, 1]$, $\alpha \in (0, 2]$ und

$$T_\alpha: \begin{array}{ccc} M & \rightarrow & M \\ x & \mapsto & \frac{\alpha}{2}(1 - |2x - 1|) \end{array}$$

die **Zeltabbildung**. Dann ist T_2 chaotisch.

Beweis.



Für T^n , $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- Der Graph hat 2^{n-1} „Spitzen“
- T^n besitzt 2^n Fixpunkte; in jedem Intervall $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$ genau einen.
- $\{x \in [0, 1] : T_2^n(x) = x\} \subseteq \text{Per}(f) \forall n \in \mathbb{N} \implies \overline{\text{Per}(f)} = [0, 1] = M$

- Seien $U, V \subseteq [0, 1]$ offen.

$$U \text{ offen} \implies \exists n \in \mathbb{N} \exists k \in \{0, \dots, 2^n - 1\} : U \supseteq \left] \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right[\\ \implies T_2^n(U) \supseteq T_2^n \left(\left] \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right[\right) =]0, 1[$$

Da V offen, ist $T_2^n(U) \cap V \neq \emptyset$, also ist das System topologisch transitiv.

□

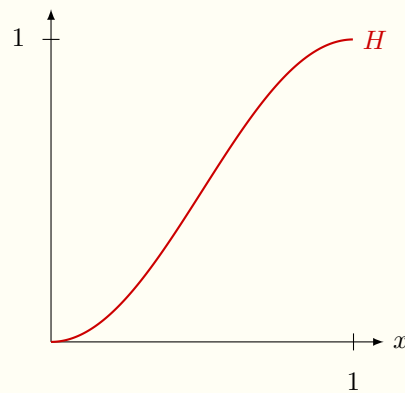
Lemma 6.14

L_4 ist chaotisch.

Beweis.

Wir zeigen, dass L_4 topologisch konjugiert zu T_2 ist, mit dem Homöomorphismus

$$H: [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$



$\forall x \in [0, 1]$ gilt:

- $(L_4 \circ H)(x) = L_4(H(x)) = 4H(x)(1 - H(x)) = 4 \sin^2(\frac{\pi}{2}) \cos^2(\frac{\pi}{2}) = \sin^2(\pi x)$
 - $(H \circ T_2)(x) = \sin^2(\pi/2 T_2(x)) = \begin{cases} \sin^2(\pi x), & x \in [0, 1/2] \\ T_2 \sin^2(\pi - \pi x), & x \in [1/2, 1] \end{cases} = \sin^2(\pi x)$
- $$\underbrace{1 - |2x - 1|}_{\substack{2x, \quad x \in [0, 1/2] \\ 2 - 2x, \quad x \in [1/2, 1]}}$$

$$\implies L_4 \circ H = H \circ T_2.$$

□