



احتمال و کاربرد

نیمسال دوم ۹۵-۹۶

استاد خزایی - طراح: الیاس حیدری

تمرین عملی

متغیرهای تصادفی گسسته

زمان تحویل: ۱۶ اردیبهشت ماه

- همفکری کنید و از منابع مختلف کمک بگیرید ولی پاسخ‌ها را باید به تنهایی بنویسید.
- مجموع نمرات ۱۱۰ نمره است. پاسخگویی به ۱۰۰ نمره از سوالات برای کسب نمره ی کامل کافی است و ۱۰ نمره اختیاری و نمره ی اضافی است.
- برای هر سوال باید یک برنامه به زبان matlab بنویسید که همه ی محاسبات مربوط را شامل میشود و فقط خروجی خواسته شده را چاپ میکند.
- پاسخ سوال ام‌i را در فایلی با نام StudentNumber-i.m ذخیره نمایید. به علاوه گزارش خود را در فرمت pdf با در فایلی با نام StudentNumber-report.pdf ذخیره نمایید. در نهایت یک فایل فشرده شامل همه ی فایل ها در درس افزار بارگذاری کنید.
- تنها فرمت PDF قابل قبول است. از ارسال فایل‌های تصویری و فشرده شده جدا خودداری کنید.
- ارسال پاسخ‌ها از طریق ایمیل قابل قبول نیست.
- مهلت تحویل پاسخ‌ها تا ساعت ۲۳:۵۵ تاریخ ذکر شده در صورت تمرین‌هاست.
- ارسال با تاخیر فقط تا یک هفته پس از موعد با کسر روزانه ۵٪ از نمره امکان‌پذیر است.
- سوالات خود پیرامون تمرین‌ها را با almasmadani@gmail.com یا salamatianbahar@gmail.com مطرح نمایید.

مسئله‌ی ۱. تطابق تولدها! (۱۰ نمره)

فرض کنید تمام سالها ۳۶۵ روز دارند! و فرض کنید تمام روزها برای تولد هم احتمال هستند می‌خواهیم ببینیم چقدر احتمال دارد:

۱. یکی از اعضای یک کلاس n نفره با شما در روز تولد یکی باشد
 ۲. چقدر احتمال دارد دو نفر در یک کلاس n نفره روز تولدشان یکی باشد؟
 ۳. چقدر احتمال دارد k نفر روز تولدشان یکی باشد؟
- موارد فوق را برای $n = ۲۰, ۲۰۰, ۲۰۰۰$ محاسبه کنید.
 حداقل n را بیابید که به ازای آن احتمال بیان شده در قسمتهای ۱ و ۲، ۹۰٪ باشد.
 پاسختان را برای سوالات روی نمودار ببرید.
 (توجه کنید که شما برای پاسخ به سوالات باید شبیه سازی را به گونه ای انجام دهید که تعدادی روز تولد اتفاقی تولید کنید و پیشامد هم تولد شدن را مد نظر قرار دهید و پاسخ نباید به صورت نظری محاسبه شده باشد.)

مسئله‌ی ۲. درهای جادویی (۱۵ نمره)

شما در یک برنامه تلویزیونی به غایت مسخره شرکت کرده اید. سه در روبروی شما است و پشت یکی از درها یک بز قرار دارد. دو در دیگر پوچ هستند. شما دری را انتخاب میکنید. مجری یک در از بین دو دری که انتخاب شما نبودند را پوچ میکند. آیا تصمیمتان را عوض خواهید کرد؟ در واقع شما باید شبیه سازی را اینگونه انجام دهید

۱. پشت یکی از درها به صورت اتفاقی جایزه بگذارید.
۲. به صورت اتفاقی یک در را انتخاب کنید.
۳. یکی از دو در باقیمانده که پوچ هستند را پوچ کنید.
۴. در هزار تلاش در را عوض کنید و در هزار تلاش دیگر در را همان انتخاب اول بگیرید.
۵. میزان موفقیت را در دو رویکرد بند چهارم مقایسه کنید.

چه نتیجه ای میگیرید؟

مسئله‌ی ۳. علی بیکار و سکه های پرتاب شونده (۱۰ نمره)

علی که بیکار شده، سر کوچه شان ایستاده و پشت سر هم سکه می اندازد و این کار را در روز ۵۰ بار انجام میدهد. قلی برادر علی که ریاضیدان قهاری است، دوست دارد ببیند میانگین طولانی ترین زیردنباله ای که شیر پشت سر هم می آید چقدر است. برای اینکار ۱۰۰۰ روز متوالی تلاش برادرش را زیر نظر میگیرد و مقادیر را حساب میکند میانگین میگیرد. حدس شما (به صورت نظری) برای این مقدار چیست؟ حدس خود را با شبیه سازی محک بزنید.

مسئله‌ی ۴. امید دگرگون (۲۰ نمره)

به رابطه زیر نگاهی بیندازید

$$E[X] = \sum_{i=1}^{i=\infty} P(i \leq X)$$

که در رابطه فوق X یک متغیر تصادفی گسسته است. آیا میتوانید درستی آن را به صورت نظری اثبات کنید؟ در یک تلاش عملی آن را بررسی کنید. به این صورت که فرض کنید X یک متغیر

۱. با توزیع یکنواخت با دامنه مقادیر ۱ تا ۱۰۰
۲. با توزیع پواسون و پارامتر ۱۰
۳. با توزیع دوجمله ای با تعداد تلاشهای ۱۰۰ و احتمال موفقیت ۲۰.

باشد.

در ۱۰۰۰ بار شبیه سازی متغیر X برای هر یک از موارد فوق، رابطه داده شده را محک بزنید.

مسئله‌ی ۵. غارهای شرطی (۱۵ نمره)

یک غار داریم که دور آن ۴ در وجود دارد. یکی از درها، خروجی است و هر یک از درهای دیگر دوباره به یک در تصادفی (با احتمال برابر) داخل غار برمیگردند. وارد هر یک از سه در دیگر به جز در خروجی بشویم به ترتیب ۲،۳

و ۵ روز طول میکشد تا دوباره به غار برگردیم و هر دفعه از یک در تصادفی به غار بازمیگردیم. همه درها نسبت به هم متقارن اند. اگر شخص هر دفعه به صورت تصادفی و یکنواخت واردی یکی از درها شود، به طور میانگین چقدر طول میکشد تا شخص از غار خارج شود؟

مسئله ۶. توزیع مشترک دوگانه (۳۰ نمره)

الف) به رابطه زیر نگاهی بیاندازید

$$E[h(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n} P((X_1, X_2, \dots, X_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)) h(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

که در آن X_i ها متغیرهای تصادفی گسسته هستند و h تابعی است از این متغیرهای تصادفی به مقادیر طبیعی. آیا میتوانید رابطه فوق را اثبات کنید؟
به عنوان یک تلاش برای شبیه سازی عملی رابطه فوق در نظر بگیرید داشته باشیم

• X_1 یک متغیر تصادفی یکنواخت با دامنه مقادیر ۱ تا ۱۰۰

• X_2 یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر ۱۰

• X_3 مجموع X_1 و X_2

• $Z = X_1^2 + 2X_2 + X_3/4$

باشند.

با شبیه سازی یک بار مقدار سمت چپ معادله داده شده را محاسبه کنید و بار دیگر سمت راست معادله را محاسبه کنید. آیا این دو مقدار به هم نزدیک اند؟ (برای تولید میانگین، ۱۰۰۰ بار نمونه بگیرید)

ب) برای متغیرهای تصادفی قسمت قبل تابع توزیع جرم احتمال را روی یک نمودار رسم کنید.

مسئله ۷. مجموع (۱۰ نمره)

فرض کنید X_1, X_2, \dots متغیرهای تصادفی یکنواخت و مستقل روی مجموعه $\{1, 2, \dots, 6\}$ باشند. متغیر تصادفی S_n مجموع X_1 تا X_n باشند. با شبیه سازی، تابع جرم احتمال S_n را برای $n = 1, 2, \dots, 36$ تخمین بزنید و رسم کنند.