



دانشکده‌ی علوم ریاضی

موعد تحویل: ۱۹ تیرماه ۱۳۹۶

احتمال و کاربرد

پروژه شبیه‌سازی

دستیاران آموزشی: علی ناصری صدر، بهار سلامتیان

مدرس: دکتر شهرام خزائی

- همفکری کنید و از منابع مختلف کمک بگیرید اما پاسخ را باید به تنهایی بنویسید.
- مجموع نمرات ۱۱۰ نمره است. پاسخگویی به ۱۰۰ نمره‌ی این تمرین برای گرفتن نمره‌ی کامل کافی است و ۱۰ نمره‌ی آن اختیاری است.
- پاسخ هر سوال باید یک برنامه به زبان MATLAB باشد که همه‌ی محاسبات مربوط را شامل باشد و فقط خروجی خواسته شده را چاپ کند.
- پاسخ سوال i ام را در فایلی با نام StudentNumber-i.m ذخیره نمایید. به علاوه گزارش خود را در فرمت PDF در فایلی با نام StudentNumber-report.pdf ذخیره نمایید. در نهایت یک فایل فشرده شامل همه‌ی فایل‌ها در درس افزار بارگذاری کنید.
- سوالات خود پیرامون مسائل را با salamatianbahar@gmail.com و ali.naserisadr@gmail.com مطرح نمایید.
- این پروژه فقط یک ددلاین دارد و ارسال با تاخیر مجاز نیست.

۱. ۲۰ امتیاز

توزیع لاپلاس به شکل زیر است:

$$f_X(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{b}\right)$$

(آ) متغیر تصادفی X را با توزیع لاپلاس به ازای $b = 1$ و $\mu = 1$ تولید کنید.

(ب) $E\left[\frac{1}{|X|+1}\right]$ را با استفاده از قانون قوی اعداد بزرگ بدست آورید.

(ج) X_n به ازای $n = 1, 2, \dots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع گفته شده به ازای مقادیر گفته شده در قسمت الف هستند. دو احتمال $P\left[\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{50}}{50} - 1\right| < 0.05\right]$ و $P\left[\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{100}}{100} - 1\right| < 0.05\right]$ را تقریب زده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

(د) دو احتمال گفته شده در قسمت قبل را با استفاده از قانون حد مرکزی بدست آورید و مقادیر بدست آمده را با قسمت قبل مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲ ۲۰ امتیاز

(آ) دو متغیر گوسی توام با مشخصات زیر تولید کنید:

$$\mu_X = \mu_Y = 1, \quad \sigma_X = \sigma_Y = 1, \quad \rho = 0.5$$

(ب) مقدار تقریبی $E[X | |Y - 1| < 1]$ را بدست آورده و رسم کنید.

(ج) قرار می‌دهیم: $X_n = E[X | |Y - 1| < n]$. توزیع تقریبی $E[(E[X] - X_n)^2]$ را به ازای $n = 1, 5, 10$ بدست آورده و باهم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳ ۱۵ امتیاز

مقدار تقریبی انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$ را با استفاده از قانون قوی اعداد بزرگ بدست آورید.

۴ ۲۰ امتیاز

شما میدانید که اگر n داده y_1, y_2, \dots, y_n را از یک توزیع دلخواه که دارای امید ریاضی و واریانس متناهی باشد جمع آوردی کرده باشیم میانگین این اعداد با بزرگ تر شدن n به مقدار امید ریاضی میل میکند. در این شرایط به میانگین این اعداد یک تخمین گر سازگار یا برآوردگر سازگار می‌گوییم. فرض کنید توزیع $N(50, 35)$ به شما داده شده است. با نمونه گیری از این توزیع به صورت تجربی (بدون اثبات ریاضی) به سوالات زیر پاسخ دهید.

(آ) از این توزیع i بار (برای $1 \leq i \leq 1000$ یعنی شما باید ۱۰۰۰ بار نمونه گیری کنید و هر بار i تا نمونه بگیرید.) نمونه بگیرید. سپس برای هر بار نمونه گیری میانگین نمونه‌ها را بدست بیاورید. نمودار این میانگین‌ها را بر حسب تعداد نمونه‌ها رسم کنید.

(ب) این بار بجای میانگین مقدار $\bar{y} + \frac{100}{\log(n)}$ را بدست بیاورید و نمودار مربوط را رسم کنید.

(ج) کدام یک از این دو با توجه به نمودار، تخمین گر سازگار هستند؟ چرا؟

۵ ۱۵ امتیاز

درون یک بیضی به معادله $x^2 + 4y^2 \leq 1$ نقاط یکنواخت تولید کنید. (یکنواخت از نظر مساحت) سپس با تولید تعداد زیادی نقطه تصویر دو بعدی آن را رسم کنید.

این مساله یکی از مسائل بسیار معروف علم احتمال است و طبق معمول در قمارخانه‌ها می‌گذرد! در این سوال از شما می‌خواهیم فضای قمارخانه‌ی زیر را شبیه‌سازی کنید: قماربازی i تومان پول دارد. او هر بار قماری انجام می‌دهد و به احتمال p برنده و به احتمال $1 - p$ بازنده می‌شود. به ازای برنده شدن ۱ تومان به دارایی‌اش اضافه می‌شود و به ازای شکست ۱ تومان از دارایی او کسر می‌شود. احتمال اینکه دارایی او زودتر از اینکه به صفر برسد به مقدار N برسد چقدر است؟ (طبیعتاً مقدار N بزرگتر از i است) فرض کنید قمار باز به اندازه ی ۳ رقم آخر شماره دانشجوییتان به علاوه ی ۷۵ در ابتدای بازی پول دارد حال مساله را برای مقادیر مختلف N و p ، چندین بار شبیه‌سازی کنید و مقدار این احتمال را بصورت تقریبی به دست آورید و نتایج را گزارش دهید. مقدار دقیق این احتمال را می‌توانید با جستجو در اینترنت بیابید. آیا مقادیر گزارش شده توسط شما با این مقدار مطابقت دارد؟