آشنایی با توابع

جبر مقدماتی

آریا افروز

تابستان ۱۴۰۰

تعریف

تابع f از مجموعه A به مجموعه B، مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌هایی مانند (x, y) است به طوری که $x \in A$ و $y \in B$. همچنین به ازای هر $x \in A$ فقط و فقط یک $y \in B$ وجود دارد که $(x, y) \in f$.

تابع را به چند صورت می‌توان نشان داد. به طور مثال با استفاده از مجموعه و یا ضابطه

$$f : A \to B \quad f = \{(x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲), \ldots\}$$

$$f : A \to B \quad f(x) = y$$

مثال

$$f = \{(۱, ۵), (۲, -۲), (۳, ۵), (۴, ۵)\}$$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \quad f(x) = -x$$

چند تابع معروف

تابع ثابت:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad f(x)=c$$

تابع همانی:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad f(x)=x$$

تابع خطی:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad f(x)=ax+b$$

تابع هوموگرافیک:

$$f:\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}\to\mathbb{R}\qquad f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

تابع رادیکال:

$$f:\mathbb{R}^{+}\cup\{\circ\}\to\mathbb{R}\qquad f(x)=\sqrt{x}$$

تعریف

تابع $f: A \to B$ را درنظر بگیرید. به مجموعه A دامنه تابع گفته می‌شود و آن را با D_f نشان می‌دهیم. همین‌طور به مجموعه B هم‌دامنه تابع می‌گوییم. برد تابع به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$R_f = \{y \in B : y = f(x) \text{ به طوری که } x \in A \text{ وجود داشته باشد }\}$$

تعریف

تابع $f : A \to B$ را در نظر بگیرید.
اگر به ازای هر x, y که داشته باشیم $f(x) = f(y)$ بتوانیم نتیجه بگیریم $x = y$، آنگاه تابع f یک به یک است. هر خط موازی با محور x ها نمودار این تابع را در حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.
اگر به ازای هر $y \in B$ یک $x \in A$ وجود داشته باشد که $f(x) = y$، آنگاه تابع f پوشا است. برد این تابع با هم‌دامنه آن برابر است. $(R_f = B)$

تعریف

تابع $f : A \to B$ را در نظر بگیرید.
اگر به ازای هر $x > y$ داشته باشیم $f(x) \geq f(y)$، آنگاه تابع f صعودی است. اگر داشته باشیم $f(x) > f(y)$ آنگاه تابع f اکیدا صعودی است. اگر داشته باشیم $f(x) \leq f(y)$ آنگاه تابع f نزولی است. اگر داشته باشیم $f(x) < f(y)$ آنگاه تابع f اکیدا نزولی است.
تابع f یکنواست اگر صعودی یا نزولی باشد، اکیدا یکنواست اگر اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی باشد.

مثال

$$f(x) = c$$

تعریف

تابع $B \to A : f$ را در نظر بگیرید.
اگر به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم $f(x) = f(-x)$ تابع زوج است، اگر داشته باشیم $f(x) = -f(-x)$ تابع فرد است.
تابع زوج نسبت به محور y ها و تابع فرد نسبت به مبدا مختصات متقارن است.

تعریف

ضرب عدد در تابع: $f : A \to B$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

جمع دو تابع: $f : A \to B, g : A \to B$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

ضرب دو تابع: $f : A \to B, g : A \to B$

$$fg(x) = f(x)g(x)$$

ترکیب دو تابع: $f : B \to C, g : A \to B$

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$$

وارون تابع

تعریف

تابع $f : A \to B$ را در نظر بگیرید. اگر تابعی مانند $g : B \to A$ پیدا شود که

$$f \circ g(x) = g \circ f(x) = x$$

آنگاه تابع f وارون‌پذیر نامیده می‌شود و تابع g وارون تابع نامیده می شود و با f^{-1} آن را نشان می‌دهیم.