اتحادهای جبری

آریا افروز

تابستان ۱۴۰۰

۱. اتحاد مربع دوجمله‌ای

$$(a \pm b)^{۲} = a^{۲} \pm ۲ab + b^{۲}$$

۲. اتحاد مزدوج

$$(a - b)(a + b) = a^{۲} - b^{۲}$$

۳. اتحاد مربع چندجمله‌ای

$$(a + b + c)^{۲} = a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} + ۲ab + ۲bc + ۲ca$$

$$(a_{۱}+a_{۲}+\cdots+a_n)^{۲} = a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+\cdots+a_n^{۲}+۲a_{۱}a_{۲}+۲a_{۱}a_{۳}+\cdots+۲a_{۱}a_n+۲a_{۲}a_{۳}+\cdots+۲a_{n-۱}a_n$$

$$\left(\sum_{i=۱}^{n} a_i\right)^{۲} = \sum_{i=۱}^{n} a_i^{۲} + ۲\left(\sum_{i=۱}^{n-۱}\sum_{j=i+۱}^{n} a_i a_j\right) = \sum_{i=۱}^{n} a_i^{۲} + ۲\sum_{\text{syc}} a_i a_j$$

۴. اتحاد فیل و فنجون

$$a^{۳} \pm b^{۳} = (a \pm b)\left(a^{۲} \mp ab + b^{۲}\right)$$

۵. تعمیم اتحاد فیل و فنجون

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-۱} + a^{n-۲}b + \cdots + ab^{n-۲} + b^{n-۱}\right)$$

اگر n فرد باشد:

$$a^n + b^n = (a + b)\left(a^{n-۱} - a^{n-۲}b + \cdots - ab^{n-۲} + b^{n-۱}\right)$$

۶. اتحاد مکعب دوجمله‌ای

$$(a \pm b)^{۳} = a^{۳} \pm ۳a^{۲}b + ۳ab^{۲} \pm b^{۳}$$

نتیجه‌ای مهم از اتحاد مکعب دوجمله‌ای

$$a^{۳} \pm b^{۳} = (a \pm b)^{۳} \mp ۳ab(a \pm b)$$

۷. اتحاد مکعب سه‌جمله‌ای

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

۸. بسط دوجمله‌ای نیوتون

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$$

$$(a-b)^n = (-1)^0\binom{n}{0}a^n + (-1)^1\binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}ab^{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}b^n$$

$$(a-b)^n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$$

۹. اتحاد جمله مشترک

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$
$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$$

۱۰. تعمیم اتحاد جمله مشترک

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x + (ab+bc+ca)x + abc$$

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n) = x^n + \left(\sum_{\text{syc}} a_i\right)x^{n-1} + \left(\sum_{\text{syc}} a_i a_j\right)x^{n-2} + \cdots + a_1a_2\ldots a_n$$

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) =$$
$$x^n + (-1)^1\left(\sum_{\text{syc}} a_i\right)x^{n-1} + (-1)^2\left(\sum_{\text{syc}} a_i a_j\right)x^{n-2} + \cdots + (-1)^n(a_1a_2\ldots a_n)$$

۱۱. اتحاد اویلر

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$$

۱۲. اتحاد لاگرانژ

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$$