اتحادهای جبری و تجزیه

جبر مقدماتی

آریا افروز

تابستان ۱۴۰۰

تعریف

برابری جبری که به ازای هر عدد در دامنه‌ی مورد بحث برقرار باشد.

مثال

$$a + b = b + a$$
$$a.a = a^{۲}$$
$$a^n = a^{n-۱}.a$$
$$\frac{a}{b}.b = a$$

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$
$$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$$

مثال

$$(x+۲)^۲ = x^۲ + ۴x + ۴$$
$$(x-۲)^۲ = x^۲ - ۴x + ۴$$
$$\left(a+\frac{۱}{a}\right)^۲ = a^۲ + ۲ + \frac{۱}{a^۲}$$
$$\left(a-\frac{۱}{a}\right)^۲ = a^۲ - ۲ + \frac{۱}{a^۲}$$

$$(a+b)(a-b) = a^۲ - b^۲$$

مثال

$$(x-۲)(x+۲) = x^۲ - ۴$$

$$(a-b)(a+b)\left(a^۲+b^۲\right) = \left(a^۲-b^۲\right)\left(a^۲+b^۲\right) = a^۴ - b^۴$$

$$(a+b+c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲bc + ۲ca$$

مثال

$$(a+b-c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab - ۲bc - ۲ca$$

$$(a-b-c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ - ۲ab + ۲bc - ۲ca$$

$$(-a-b-c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲bc + ۲ca$$

$$a^۳ + b^۳ = (a + b)\left(a^۲ - ab + b^۲\right)$$
$$a^۳ - b^۳ = (a - b)\left(a^۲ + ab + b^۲\right)$$

مثال

$$x^۳ + ۱ = (x + ۱)(x^۲ - x + ۱)$$
$$۲^۳ - ۱ = ۲^۲ + ۲ + ۱$$

$$(a+b)^{۳} = a^{۳} + ۳a^{۲}b + ۳ab^{۲} + b^{۳}$$
$$(a-b)^{۳} = a^{۳} - ۳a^{۲}b + ۳ab^{۲} - b^{۳}$$

مثال

$$(x+۱)^{۳} = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۳x + ۱$$
$$(x-۱)^{۳} = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۳x - ۱$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 + b^3 = ? \qquad a^3 - b^3 = ?$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3a^2b - 3ab^2 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (a+b)\big((a+b)^2 - 3ab\big)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\big(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab\big) = (a+b)\big(a^2 - ab + b^2\big)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) = (a-b)\big((a-b)^2 + 3ab\big)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)\big(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab\big) = (a-b)\big(a^2 + ab + b^2\big)$$

$$(x+a)(x+b) = x^۲ + (a+b)x + ab$$
$$(x+a)(x-b) = x^۲ + (a-b)x - ab$$
$$(x-a)(x+b) = x^۲ + (b-a)x - ab$$
$$(x-a)(x-b) = x^۲ - (a+b)x + ab$$

مثال

$$(۱+a)(۱+b) = ۱ + a + b + ab$$
$$(۱-a)(۱-b) = ۱ - a - b + ab$$

گاهی برای سادگی در نوشتن جمع‌هایی که الگو دارند از سیگما استفاده می‌کنیم.

مثال

$$\sum_{i=۱}^{n} a_i = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$$

$$\sum_{i=۱}^{n} ۲^i = ۲ + ۲^۲ + \cdots + ۲^n$$

$$\sum_{i=۱}^{n} a_i a_{i+۱} = a_۱ a_۲ + a_۲ a_۳ + \cdots + a_n a_{n+۱}$$

$$\sum_{i=۱}^{n} i = ۱ + ۲ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

متغیرها را روی دایره می‌چینیم و مجموع الگوها به صورت دوری را می‌نویسیم.

مثال

برای سه متغیر x, y, z داریم:

$$\sum_{\text{cyc}} xy = xy + yz + zx$$

برای چهار متغیر x, y, z, w داریم:

$$\sum_{\text{cyc}} xy = xy + yz + zw + wx$$

$$\sum_{\text{cyc}} xz = xz + yw$$

مجموع تمام جایگشت‌های بدون تکرار ممکن از یک الگو.

مثال

برای چهار متغیر x, y, z, w داریم:

$$\sum_{syc} xy = xy + xz + xw + yz + yw + zw$$

برای n متغیر $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ داریم:

$$\sum_{syc} a_i a_j = a_۱ a_۲ + a_۱ a_۳ + \cdots + a_۱ a_n$$

$$+a_۲ a_۳ + \cdots + a_۲ a_n + \cdots + a_{n-۱} a_n$$

$$\sum_{syc} a_i a_j = \sum_{i=۱}^{n-۱} \sum_{j=i+۱}^{n} a_i a_j$$

مشابه سیگما ولی برای حاصل‌ضرب.

مثال

$$\prod_{i=۱}^{n} a_i = a_۱ a_۲ \ldots a_n$$

$$\prod_{i=۱}^{n} ۲^i = ۲^۱ ۲^۲ \ldots ۲^n = ۲^{۱+۲+\cdots+n} = ۲^{\sum_{i=۱}^{n} i} = ۲^{\frac{n(n+۱)}{۲}}$$

یادآوری از ترکیبیات:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{n}a^n + \binom{n}{n-۱}a^{n-۱}b + \cdots + \binom{n}{۱}ab^{n-۱} + \binom{n}{۰}b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

مثال

$$(a+b)^۴ = a^۴ + ۴a^۳b + ۶a^۲b^۲ + ۴ab^۳ + b^۴$$

$$(a-b)^n = \sum_{i=۰}^{n} (-۱)^{n-i} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

$$(a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n)^۲ = a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_n^۲ + ۲a_۱a_۲ + ۲a_۱a_۳$$

$$+ \cdots + ۲a_۱a_n + ۲a_۲a_۳ + \cdots + ۲a_{n-۱}a_n$$

$$\left(\sum_{i=۱}^{n} a_i\right)^۲ = \sum_{i=۱}^{n} a_i^۲ + ۲\left(\sum_{i=۱}^{n-۱}\sum_{j=i+۱}^{n} a_ia_j\right) = \sum_{i=۱}^{n} a_i^۲ + ۲\sum_{syc} a_ia_j$$

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1}$$

اگر n فرد باشد:

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$a^n + b^n = (a+b)\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a^i b^{n-i-1}$$

مثال

$$2^n - 1 = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i$$

تعمیم اتحاد جمله مشترک

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^۳ + (a+b+c)x^۲ + (ab+bc+ca)x + abc$$

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^۳ - (a+b+c)x^۲ + (ab+bc+ca)x - abc$$

$$(x+a_۱)(x+a_۲)\ldots(x+a_n) =$$
$$x^n + \left(\sum_{syc} a_i\right) x^{n-۱} + \left(\sum_{syc} a_i a_j\right) x^{n-۲} + \cdots + a_۱ a_۲ \ldots a_n$$

$$(x-a_۱)(x-a_۲)\ldots(x-a_n) =$$
$$x^n + (-۱)^۱ \left(\sum_{syc} a_i\right) x^{n-۱} + (-۱)^۲ \left(\sum_{syc} a_i a_j\right) x^{n-۲} + \cdots + (-۱)^n a_۱ \ldots a_n$$

تعریف

تجزیه‌ی یک عبارت جبری به معنای تبدیل جمع تعدادی جمله جبری به ضرب تعدادی عبارت جبری تحویل‌ناپذیر است.
برای تجزیه کردن از روش‌های مختلفی از جمله فاکتورگیری، استفاده از اتحادها، دسته بندی جملات، کم و زیاد کردن جمله و ... استفاده می کنیم که به مرور آنها را یاد می‌گیریم.

مثال

$$a^۳ + b^۳ = (a + b)(a^۲ - ab + b^۲)$$

$$ax + bx + ay + by = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y)$$

$$x^۳ - x^۲ + x - ۱ = x^۲(x - ۱) + x - ۱ = (x - ۱)(x^۲ + ۱)$$

$$A = a^{۳} + b^{۳} + c^{۳} - ۳abc = ?$$

راهنمایی: از نتیجه ای که بدست آوردیم استفاده کنید

$$a^{۳} + b^{۳} = (a+b)^{۳} - ۳ab(a+b)$$

$$\begin{aligned} A &= (a+b)^{۳} + c^{۳} - ۳ab(a+b) - ۳abc \\ &= (a+b+c)^{۳} - ۳(a+b)c(a+b+c) - ۳ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)\big((a+b+c)^{۲} - ۳bc - ۳ca - ۳ab\big) \\ &= (a+b+c)\big(a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} - ab - bc - ca\big) \end{aligned}$$

$$a^۳ + b^۳ + c^۳ - ۳abc = (a + b + c)\big(a^۲ + b^۲ + c^۲ - ab - bc - ca\big)$$

$$a^۳ + b^۳ + c^۳ - ۳abc = \frac{۱}{۲}(a + b + c)\big((a - b)^۲ + (b - c)^۲ + (c - a)^۲\big)$$

مثال

$$x^۳ + y^۳ + ۳xy - ۱ = (x + y - ۱)\big(x^۲ + y^۲ - xy + x + y + ۱\big)$$

$$a + b + c = ۰ \implies a^۳ + b^۳ + c^۳ = ۳abc$$

$$a = b = c \implies a^۳ + b^۳ + c^۳ = ۳abc$$

$$A = (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = ?$$

$$\begin{aligned} A &= (b+c)^3 + 3a(a+b+c)(b+c) - b^3 - c^3 \\ &= (b+c)^3 - b^3 - c^3 + 3a(a+b+c)(b+c) \\ &= 3a(b+c)(a+b+c) + 3bc(b+c) \\ &= 3(b+c)(a^2+ab+ac+bc) \\ &= 3(a+b)(b+c)(c+a) \end{aligned}$$

اتحاد مکعب سه‌جمله‌ای

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

اتحاد لاگرانژ

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$$

مثال

ثابت کنید:

$$(a^۲ - b^۲)^۲ + (۲ab)^۲ = (a^۲ + b^۲)^۲$$

$$(a^۲ - b^۲)^۲ + (۲ab)^۲ = a^۴ - ۲a^۲b^۲ + b^۴ + ۴a^۲b^۲ = a^۴ + b^۴ + ۲a^۲b^۲$$

$$\Longrightarrow (a^۲ - b^۲)^۲ + (۲ab)^۲ = (a^۲ + b^۲)^۲$$

مثال

ثابت کنید:

$$\left(a^۲+b^۲+c^۲\right)\left(x^۲+y^۲+z^۲\right)=(ax+by+cz)^۲ + (bx-ay)^۲+(cy-bz)^۲+(az-cx)^۲$$

$$\begin{aligned}&(ax+by+cz)^۲+(bx-ay)^۲+(cy-bz)^۲+(az-cx)^۲\\&=a^۲x^۲+b^۲y^۲+c^۲z^۲+۲axby+۲bycz+۲czax\\&+b^۲x^۲+a^۲y^۲-۲bxay+c^۲y^۲+b^۲z^۲-۲cybz+a^۲z^۲+c^۲x^۲-۲azcx\\&=a^۲x^۲+a^۲y^۲+a^۲z^۲+b^۲x^۲+b^۲y^۲+b^۲z^۲+c^۲x^۲+c^۲y^۲+c^۲z^۲\\&=a^۲\left(x^۲+y^۲+z^۲\right)+b^۲\left(x^۲+y^۲+z^۲\right)+c^۲\left(x^۲+y^۲+z^۲\right)\\&=\left(a^۲+b^۲+c^۲\right)\left(x^۲+y^۲+z^۲\right)\end{aligned}$$

مثال

فرض کنید $x = ۱ - \sqrt{۵}$ باشد. حاصل $x^۴ - ۴x^۳ + ۴x^۲$ را بدست آورید.

$$x^۴ - ۴x^۳ + ۴x^۲ = x^۲\left(x^۲ - ۴x + ۴\right) = x^۲(x-۲)^۲$$

$$= (۱ - \sqrt{۵})^۲\,(-۱ - \sqrt{۵})^۲ = \Big((۱ - \sqrt{۵})\,(-۱ - \sqrt{۵})\Big)^۲$$

$$= \Big((\sqrt{۵} - ۱)\,(\sqrt{۵} + ۱)\Big)^۲ = (۵ - ۱)^۲ = ۱۶$$

مثال

فرض کنید x, y دو عدد مثبت و $s = x + y$ و $p = xy$ باشد. حاصل عبارات زیر را بر حسب s و p بدست آورید.

$$x^۲ + y^۲, x - y, x^۲ - y^۲, x^۳ + y^۳, x^۳ - y^۳, \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$x^۲ + y^۲ = (x + y)^۲ - ۲xy = s^۲ - ۲p$$

$$(x - y)^۲ = x^۲ + y^۲ - ۲xy = s^۲ - ۴p \implies x - y = \pm\sqrt{s^۲ - ۴p}$$

$$x^۲ - y^۲ = (x + y)(x - y) = \pm s\sqrt{s^۲ - ۴p}$$

$$x^۳ + y^۳ = (x + y)^۳ - ۳xy(x + y) = s^۳ - ۳ps$$

$$x^۳ - y^۳ = (x - y)^۳ + ۳xy(x - y) = \pm\sqrt{(s^۲ - ۴p)^۳} \pm ۳p\sqrt{s^۲ - ۴p}$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^۲ = x+y-۲\sqrt{xy} = s-۲\sqrt{p} \implies \sqrt{x}-\sqrt{y} = \pm\sqrt{s - ۲\sqrt{p}}$$

مثال

$$\sqrt[۳]{۸+۳\sqrt{۲۱}}+\sqrt[۳]{۸-۳\sqrt{۲۱}}=?$$

$$x=\sqrt[۳]{۸+۳\sqrt{۲۱}}, y=\sqrt[۳]{۸-۳\sqrt{۲۱}} \implies x^۳+y^۳=۱۶, xy=-۵$$

$$x^۳+y^۳=۸+۳\sqrt{۲۱}+۸-۳\sqrt{۲۱}=۱۶$$

$$xy=\sqrt[۳]{\left(۸+۳\sqrt{۲۱}\right)\left(۸-۳\sqrt{۲۱}\right)}=\sqrt[۳]{۶۴-۱۸۹}=-۵$$

$$x^۳+y^۳=(x+y)^۳-۳xy(x+y)\xrightarrow{a=x+y} a^۳+۱۵a=۱۶$$

$$\implies \sqrt[۳]{۸+۳\sqrt{۲۱}}+\sqrt[۳]{۸-۳\sqrt{۲۱}}=۱$$

مثال

عبارت زیر را تجزیه کنید:

$$(a+b+c)^۳-(a+b-c)^۳-(b+c-a)^۳-(c+a-b)^۳$$

$$\left.\begin{aligned} x &= a+b-c \\ y &= b+c-a \\ z &= c+a-b \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x+y+z=a+b+c$$

$$\Longrightarrow (a+b+c)^۳-(a+b-c)^۳-(b+c-a)^۳-(c+a-b)^۳$$

$$=(x+y+z)^۳-x^۳-y^۳-z^۳=۳(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$=۳(۲b)(۲c)(۲a)=۲۴abc$$

مثال

فرض کنید

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = n\sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

ثابت کنید

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\sum_{syc} a_i a_j = 0$$

$$\Longrightarrow (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\sum_{syc} a_i a_j = \sum_{syc}(a_i - a_j)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

مثال

عبارت زیر را تجزیه کنید

$$(a-b)^۳+(b-c)^۳+(c-a)^۳$$

$$\left.\begin{array}{l} x=a-b \\ y=b-c \\ z=c-a \end{array}\right\} \Longrightarrow x+y+z=۰ \Longrightarrow x^۳+y^۳+z^۳=۳xyz$$

$$\Longrightarrow (a-b)^۳+(b-c)^۳+(c-a)^۳=۳(a-b)(b-c)(c-a)$$

مثال

دو عبارت زیر را تجزیه کنید

$$a^4 + 4b^4$$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4$$

$$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2$$
$$= (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$$

$$a^4+a^2b^2+b^4 = a^4+a^2b^2+b^4+a^2b^2-a^2b^2 = a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$$
$$= (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = (a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$$

مثال

عبارت زیر را تجزیه کنید:

$$x^6 - y^6$$

$$x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$$

$$\implies x^6 - y^6 = (x - y)(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^6 - y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$$

$$\implies x^6 - y^6 = (x - y)(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$$

مثال

عبارت زیر را تجزیه کنید:

$$x^5+x+1$$

$$x^5+x+1=x^5-x^2+x^2+x+1=x^2(x^3-1)+x^2+x+1$$

$$\Longrightarrow\ x^5+x+1=x^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)+x^2+x+1$$

$$\Longrightarrow\ x^5+x+1=\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right)$$

$$x^5+x+1=x^5+x^3+x-x^3+1=x\left(x^4+x^2+1\right)-(x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

$$\Longrightarrow\ x^5+x+1=x\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)-(x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

$$\Longrightarrow\ x^5+x+1=\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right)$$

مثال

فرض کنید $a+b+c=0$ ثابت کنید

$$(a^2+b^2+c^2)^2 = 2(a^4+b^4+c^4)$$

$$2(a^4+b^4+c^4)-(a^2+b^2+c^2)^2 = a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$$

$$= a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2+2c^2a^2-4c^2a^2$$

$$= (a^2-b^2+c^2)^2-4c^2a^2 = (a^2+c^2-2ca-b^2)(a^2+c^2+2ca-b^2)$$

$$= ((a-c)^2-b^2)((a+c)^2-b^2) = 0$$

مثال

$2n$ عدد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ و $b_1, b_2, \ldots, b_n$ داده شده است. به ازای $1 \leq i \leq n$ تعریف کنید:

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_i = s_i$$

ثابت کنید:

$$(a_1 - a_2)s_1 + (a_2 - a_3)s_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)s_n + a_n s_n$$
$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$(a_1 - a_2)s_1 + \cdots + a_n s_n = a_1 s_1 + a_2(s_2 - s_1) + \cdots + a_n(s_n - s_{n-1})$$

$$\xRightarrow[s_1 = b_1]{s_i - s_{i-1} = b_i} (a_1 - a_2)s_1 + \cdots + a_n s_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

مثال

ثابت کنید از برابری

$$(y-z)^۲+(z-x)^۲+(x-y)^۲ = (y+z-۲x)^۲+(z+x-۲y)^۲+(x+y-۲z)^۲$$

نتیجه می‌شود:

$$x = y = z$$

$$(y+z-۲x)^۲+(z+x-۲y)^۲+(x+y-۲z)^۲-(y-z)^۲-(z-x)^۲-(x-y)^۲ = ۰$$

$$\Longrightarrow ۴x^۲ + ۴y^۲ + ۴z^۲ - ۴xy - ۴yz - ۴zx = ۰$$

$$\Longrightarrow ۲\big((x-y)^۲ + (y-z)^۲ + (z-x)^۲\big) = ۰$$

$$\Longrightarrow x = y = z$$

مثال

ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۱}\cdot\frac{۱}{۲n-۱}+\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۲n-۳}+\cdots+\frac{۱}{۲n-۱}\cdot\frac{۱}{۱}$$
$$=\frac{۱}{n}\left(\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۲n-۱}\right)$$

$$\frac{۱}{۱}\cdot\frac{۱}{۲n-۱}+\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۲n-۳}+\cdots+\frac{۱}{۲n-۱}\cdot\frac{۱}{۱}$$
$$=\frac{۱}{۲n}\left(\frac{۲n}{۱\times(۲n-۱)}+\frac{۲n}{۳\times(۲n-۳)}+\cdots+\frac{۲n}{(۲n-۱)\times ۱}\right)$$
$$=\frac{۱}{۲n}\left(\frac{(۲n-۱)+۱}{۱\times(۲n-۱)}+\frac{(۲n-۳)+۳}{۳\times(۲n-۳)}+\cdots+\frac{۱+(۲n-۱)}{(۲n-۱)\times ۱}\right)$$

مثال

ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۱}\cdot\frac{۱}{۲n-۱}+\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۲n-۳}+\cdots+\frac{۱}{۲n-۱}\cdot\frac{۱}{۱}$$
$$=\frac{۱}{n}\left(\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۲n-۱}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲n}\left(\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲n-۱}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲n-۳}+\cdots+\frac{۱}{۲n-۱}+\frac{۱}{۱}\right)$$
$$=\frac{۱}{۲n}\left(\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۲n-۱}+\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۲n-۱}\right)$$
$$=\frac{۱}{n}\left(\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۲n-۱}\right)$$

مثال

ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲n-۱}-\frac{۱}{۲n}$$
$$=\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\cdots+\frac{۱}{۲n}$$

$$\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲n-۱}-\frac{۱}{۲n}$$
$$=\left(\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۲n-۱}\right)-\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲n}\right)$$

عبارت زیر را به سمت چپ اضافه و کم می‌کنیم:

$$۲\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲n}\right)$$

مثال

ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲n-۱}-\frac{۱}{۲n}$$
$$=\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\cdots+\frac{۱}{۲n}$$

داریم:

$$=\left(\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۲n-۱}\right)+\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲n}\right)$$

$$-۲\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲n}\right)=\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{۲n}$$

$$-\left(\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{n}\right)=\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\cdots+\frac{۱}{۲n}$$