آشنایی با چندجمله‌ای‌ها

جبر مقدماتی

آریا افروز

تابستان ۱۴۰۰

تعریف

منظور از چندجمله‌ای عبارت جبری‌ای به شکل

$$a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰$$

می‌باشد که در آن $a_۰, \ldots, a_n$ ضرایب چندجمله‌ای نامیده می‌شوند. ضرایب چندجمله‌ای اعدادی حقیقی هستند و $a_n \neq ۰$ (به استثنای چندجمله‌ای ثابت صفر). همچنین n درجه‌ی چندجمله‌ای عددی صحیح نامنفی است. برای راحتی چندجمله‌ای‌ها را با حروف بزرگ نشان می‌دهیم.

$$P(x) = \sum_{i=۰}^{n} a_i x^i \qquad \deg(P) = n$$

به ضریب $a_۰$ ضریب ثابت چندجمله‌ای می‌گویند. اگر a_n برابر یک باشد چندجمله‌ای، چندجمله‌ای تکین نامیده می‌شود.

تعریف

دو چندجمله‌ای با هم برابرند اگر درجه‌ی آنها با هم برابر باشد و تک تک ضرایب نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

$$P(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \qquad Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

$$\left.\begin{aligned} \deg(P) &= \deg(Q) \\ a_i &= b_i,\ 0 \leq i \leq n \end{aligned}\right\} \iff P = Q$$

تعریف

به عددی مانند r که $P(r) = ۰$ شود، ریشه چندجمله‌ای P می‌گویند.
در واقع جواب‌های معادله $P(x) = ۰$ ریشه‌های چندجمله‌ای نام دارند.

مثال

$$P(x) = x^{۲} - \frac{۵}{۲}x + ۱ \implies P\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰$$

$$Q(x) = x^{۳} - ۳x + ۲ \implies Q(۱) = ۰$$

چندجمله‌ای‌های درجه صفر به فرم زیر می‌باشند

$$P(x) = a$$

که $a \neq \circ$ عددی ثابت می‌باشد. این چندجمله‌ای‌ها فاقد ریشه می‌باشند.

چندجمله‌ای‌های درجه یک به فرم

$$P(x) = ax + b$$

می باشد که $a \neq \circ, b$ ضرایب چندجمله‌ای می‌باشند. این چندجمله‌ای‌ها دارای یک ریشه هستند.

$$P(x) = \circ \implies ax + b = \circ \implies x = -\frac{b}{a}$$

به طور کلی این چندجمله‌ای‌ها به فرم $P(x) = ax^2 + bx + c$ می‌باشند که $a \neq 0$.
این چندجمله‌ای‌ها می‌توانند دارای صفر، یک و یا دو ریشه‌ی حقیقی باشند.

$$P(x) = 0 \implies ax^2 + bx + c = 0 \implies a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\implies a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\implies a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) = \frac{b^2}{4a} - c \implies a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

در ادامه ابتدا برای راحتی تغییر متغیر $\Delta = b^2 - 4ac$ را اعمال می‌کنیم

$$\implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

حال بسته به مقدار Δ صفر، یک و یا دو ریشه‌ی حقیقی را می‌یابیم

$$\begin{cases} \Delta > ۰ \implies x + \frac{b}{۲a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{۴a^۲}} \implies x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ \Delta = ۰ \implies x + \frac{b}{۲a} = ۰ \implies x = -\frac{b}{۲a} \\ \Delta < ۰ \implies x \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

مثال

$$P(x) = x^۲ - \frac{۳۱}{۴}x + \frac{۲۱}{۴} \qquad r_۱ = ۷, r_۲ = \frac{۳}{۴}$$

$$P(x) = ۲x^۲ + ۲۰x + ۵۰ \qquad r = -۵$$

$$P(x) = ۴x^۲ + x + ۱ \qquad r \notin \mathbb{R}$$

تعریف

ضرب عدد در چندجمله‌ای:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_n x^n \implies \lambda P(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_n x^n$$

در واقع ضرایب λ برابر می شوند.

جمع دو چندجمله‌ای: فرض کنید $n \geq m$

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\ Q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \end{array}\right\} \implies (P+Q)(x) = \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i) x^i$$

در واقع ضرایب هم‌درجه با هم جمع می‌شوند و بقیه ضرایب ثابت می‌مانند. درجه‌ی چندجمله‌ای حاصل حداکثر n می‌باشد.

مثال

تمام چندجمله‌ای‌های P را بیابید که $P(۳x) = ۳P(x)$

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_۰ \implies \begin{cases} P(۳x) = a_n(۳x)^n + \cdots + a_۰ \\ ۳P(x) = ۳a_n x^n + \cdots + ۳a_۰ \end{cases}$$

$$\xRightarrow{P(۳x)=۳P(x)} a_n ۳^n x^n = ۳a_n x^n \implies n = ۱$$

$$\xRightarrow{P(x)=ax+b} a(۳x) + b = ۳ax + ۳b \implies b = ۰$$

پس جواب‌ها به فرم $P(x) = ax$ هستند که $a \in \mathbb{R}$ عددی ثابت است.

تعریف

ضرب دو چندجمله‌ای: اگر درجه‌ی چندجمله‌ای اول n و درجه‌ی چندجمله‌ای دوم m باشد. آنگاه درجه‌ی چندجمله‌ای حاصل جمع برابر $m+n$ می شود

$$\left.\begin{array}{l} P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\ Q(x)=\sum_{i=0}^{m} b_i x^i \end{array}\right\} \Longrightarrow (P.Q)(x)=\sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i$$

ضرایب چندجمله‌ای حاصل از رابطه‌ی زیر بدست می‌آیند

$$c_k=\sum_{i+j=k} a_i b_j$$

تعریف

تقسیم دو چندجمله‌ای: دوچندجمله‌ای P, Q را در نظر بگیرید. با فرض $Q \neq ۰$ ، می‌توان چندجمله‌ای P را بر Q تقسیم کرد و خواهیم داشت:

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$$

در عبارت بالا S خارج قسمت و R باقی‌مانده می‌باشد، هر دو منحصر به فرد هستند و داریم:

$$\deg(R) < \deg(Q)$$

در حالت خاصی که $R = ۰$ باشد، می‌گوییم P بر Q بخش‌پذیر است.
به عنوان تمرین ثابت کنید S, R یکتا هستند.

مثال

$$x^۳ + ۲x^۲ + ۵x + ۱ = (x^۲ + x + ۲)(x + ۱) + (۲x - ۱)$$

قضیه

باقی‌مانده چندجمله‌ای P بر $x-c$ برابر است با $P(c)$.

اثبات.

کافیست رابطه‌ی تقسیم چندجمله‌ای P بر $x-c$ بنویسیم:

$$P(x) = (x-c)S(x) + R(x)$$

با توجه به رابطه‌ی بین درجه چندجمله‌ای‌ها، می‌توان تحقیق کرد که درجه‌ی R صفر است.

$$P(x) = (x-c)S(x) + k$$

و در نهایت اگر در معادله‌ی بالا به جای x ، c قرار دهیم خواهیم داشت

$$P(c) = (c-c)S(c) + k = k$$

$\square$

قضیه

باقی‌مانده چندجمله‌ای P بر $x - c$ برابر است با $P(c)$.

نتیجه

اگر r ریشه چندجمله‌ای P باشد، آنگاه P بر $x - r$ بخش‌پذیر است

$$P(r) = ۰ \implies P(x) = (x - r)Q(x)$$

مثال

عبارت زیر را تجزیه کنید

$$x^۴ - ۵x^۲ + ۴$$

به راحتی می‌توان دید $P(۱) = P(-۱) = ۰$ پس

$$x^۴ - ۵x^۲ + ۴ = (x - ۱)(x + ۱)(x^۲ - ۴) = (x - ۱)(x + ۱)(x - ۲)(x + ۲)$$

مثال

ثابت کنید چندجمله‌ای زیر بر $(x-a)^{۲}$ بخش‌پذیر است

$$x\left(x^{n-۱}-na^{n-۱}\right)+a^{n}(n-۱)$$

$$x\left(x^{n-۱}-na^{n-۱}\right)+a^{n}(n-۱)=x^{n}-a^{n}-nxa^{n}+na^{n}$$

$$=\left(x^{n}-a^{n}\right)-na^{n-۱}(x-a)=(x-a)\left(x^{n-۱}+ax^{n-۲}+\cdots+a^{n-۱}-na^{n-۱}\right)$$

کافیست ثابت کنیم $P(x)=x^{n-۱}+ax^{n-۲}+\cdots+a^{n-۱}-na^{n-۱}$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است. برای این کار از قضیه بزو استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم $P(a)=۰$

$$P(a)=a^{n}n-۱+aa^{n-۲}+\cdots+a^{n-۱}-na^{n-۱}=na^{n-۱}-na^{n-۱}=۰$$

پس

$$x\left(x^{n-۱}-na^{n-۱}\right)+a^{n}(n-۱)=(x-a)^{۲}Q(x)$$

قضیه

هر چند جمله‌ای از درجه n دقیقا n ریشه دارد.(لزوما همه ریشه‌ها حقیقی نیستند)

نتیجه

تنها چندجمله‌ای که دارای نامتناهی ریشه می‌باشد چندجمله‌ای صفر می‌باشد.

نتیجه

به راحتی با چند بار استفاده از قضیه بزو، برای هر چندجمله‌ای درجه n می‌توان نوشت:

$$P(x) = c(x - r_۱)(x - r_۲)\dots(x - r_n) = c\prod_{i=۱}^{n}(x - r_i)$$

مثال

دو چندجمله‌ای P, Q را در نظر بگیرید. به ازای هر عدد طبیعی مانند n داریم

$$P(n) = Q(n)$$

ثابت کنید

$$P = Q$$

چندجمله‌ای جدید R را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$R(x) = P(x) - Q(x)$$

مطابق فرض مسئله هر عدد طبیعی ریشه‌ی چندجمله‌ای R می‌شود. پس طبق قضیه اساسی جبر داریم

$$R = ۰ \implies P = Q$$

با استفاده از دانسته‌های فعلی می‌دانیم که هر چندجمله‌ای درجه n را می توان به دو صورت نوشت:

$$P(x) = c\prod_{i=1}^{n}(x - r_i) = \sum_{i=0}^{n} a_n x^n$$

حال با استفاده از تعمیم اتحاد جمله مشترک و برابر قرار دادن ضرایب به اتحاد ویت می‌رسیم:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1} + r_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ r_1r_2 + \cdots + r_1r_n + r_2r_3 + \cdots + r_2r_n + \cdots + r_{n-1}r_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \quad\vdots \\ r_1r_2\ldots r_n = (-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

به عبارت دیگر مجموع تمام حاصل‌ضرب‌های k تایی n ریشه برابر است با $(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$.

اگر $P(x) = ax + b$ باشد خواهیم داشت

$$r = -\frac{b}{a}$$

اگر $P(x) = ax^۲ + bx + c$ باشد خواهیم داشت

$$\begin{cases} r_۱ + r_۲ = -\frac{b}{a} \\ r_۱ r_۲ = \frac{c}{a} \end{cases}$$

اگر $P(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ باشد خواهیم داشت

$$\begin{cases} r_۱ + r_۲ + r_۳ = -\frac{b}{a} \\ r_۱ r_۲ + r_۲ r_۳ + r_۳ r_۱ = \frac{c}{a} \\ r_۱ r_۲ r_۳ = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

مثال

تمام جواب‌های دستگاه معادلات زیر را بدست آورید

$$\begin{cases} a+b+c=۶ \\ a^۲+b^۲+c^۲=۱۴ \\ abc=۶ \end{cases}$$

$$(a+b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲bc+۲ca \implies ab+bc+ca=۱۱$$

حال می‌توان a, b, c را ریشه‌های چندجمله‌ای درجه سه در نظر گرفت که ضرایب این چندجمله‌ای را با استفاده از اتحاد ویت داریم

$$P(x)=x^۳-۶x^۲+۱۱x-۶=(x-۱)(x-۲)(x-۳)$$

$$(a, b, c)\in\{(۱,۲,۳),(۱,۳,۲),(۲,۱,۳),(۲,۳,۱),(۳,۱,۲),(۳,۲,۱)\}$$

تعریف

چندجمله‌هایی که ضرایب آنها اعداد صحیح باشند

قضیه

فرض کنید P چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد و m, n دو عدد صحیح باشند. آنگاه:

$$m - n \mid P(m) - P(n)$$

اثبات.

$$P(m) - P(n) = a_k(m^k - n^k) + \cdots + a_1(m - n)$$

$$P(m) - P(n) = (m - n)\sum_{i=1}^{k} a_i \frac{m^k - n^k}{m - n} \implies m - n \mid P(m) - P(n)$$

□

مثال

ثابت کنید چندجمله‌ای با ضرایب صحیح وجود ندارد که برای $x = ۱۹$ مقدارش برابر واحد و برای $x = ۶۲$ مقدارش ۲ شود.

فرض کنید P چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد. از قضیه اسلاید قبل می‌دانیم:

$$۶۲ - ۱۹ | P(۶۲) - P(۱۹) \implies ۴۳ | ۱$$

که تناقض است پس هیچ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح نمی‌توان پیدا کرد.