معادلات و دستگاه‌های معادلات

جبر مقدماتی

آریا افروز

تابستان ۱۴۰۰

مثال

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=1$$

$$\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2=1 \implies x+1+x-1+2\sqrt{(x+1)(x-1)}=1$$

$$\implies 2\sqrt{x^2-1}=1-2x \implies 4\left(x^2-1\right)=(1-2x)^2$$

$$\implies 4x^2-4=1-4x+4x^2 \implies x=\frac{5}{4}$$

جواب بدست آمده را در معادله می‌گذاریم و می‌بینیم که صدق نمی‌کند. پس معادله جوابی ندارد

مثال

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{b}+\sqrt{x-a}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{b}+\sqrt{x-a}}=\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$
$$\implies \sqrt{ab}+\sqrt{b(x-b)}=\sqrt{ab}+\sqrt{a(x-a)}$$
$$\implies \sqrt{b(x-b)}=\sqrt{a(x-a)} \implies b(x-b)=a(x-a)$$
$$\implies bx-b^{۲}=ax-a^{۲} \implies (a-b)(x-a-b)=۰$$

اگر $a \neq b$ جواب $x=a+b$ می باشد که در معادله هم صدق می‌کند. در غیر این صورت این یک اتحاد است و به ازای هر عدد حقیقی جواب دارد.

مثال

$$\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}=a+b+c$$

$$\left(\frac{x-ab}{a+b}-c\right)+\left(\frac{x-bc}{b+c}-a\right)+\left(\frac{x-ca}{c+a}-b\right)=۰$$

$$\Longrightarrow \frac{x-ab-bc-ca}{a+b}+\frac{x-ab-bc-ca}{b+c}+\frac{x-ab-bc-ca}{c+a}=۰$$

$$\Longrightarrow (x-ab-bc-ca)\left(\frac{۱}{a+b}+\frac{۱}{b+c}+\frac{۱}{c+a}\right)=۰$$

اگر $\frac{۱}{a+b}+\frac{۱}{b+c}+\frac{۱}{c+a}\neq ۰$ جواب معادله $x=ab+bc+ca$ می‌باشد. در غیر این صورت این یک اتحاد است و به ازای هر عدد حقیقی برقرار است.

مثال

$$\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ca}+\frac{x-c}{ab}=۲\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\right)$$

$$\left(\frac{x-a}{bc}-\frac{۱}{b}-\frac{۱}{c}\right)+\left(\frac{x-b}{ca}-\frac{۱}{c}-\frac{۱}{a}\right)+\left(\frac{x-c}{ab}-\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}\right)=۰$$

$$\Longrightarrow \frac{x-a-b-c}{bc}+\frac{x-a-b-c}{ca}+\frac{x-a-b-c}{ab}=۰$$

$$\Longrightarrow (x-a-b-c)\left(\frac{۱}{ab}+\frac{۱}{bc}+\frac{۱}{ca}\right)=۰$$

همانند مثال قبل اگر $\frac{۱}{ab}+\frac{۱}{bc}+\frac{۱}{ca}\neq ۰$ جواب معادله $x=a+b+c$ و در غیر این صورت این یک اتحاد است و برای هر عدد حقیقی برقرار است.

مثال

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ y+z+w=b \\ z+w+x=c \\ w+x+y=d \end{cases}$$

تمام معادلات را با هم جمع می‌زنیم.

$$۳(x+y+z+w)=a+b+c+d \implies x+y+z+w=\frac{۱}{۳}(a+b+c+d)$$

$$\implies \begin{cases} x=\frac{۱}{۳}(a+b+c+d)-b \\ y=\frac{۱}{۳}(a+b+c+d)-c \\ z=\frac{۱}{۳}(a+b+c+d)-d \\ w=\frac{۱}{۳}(a+b+c+d)-a \end{cases}$$

مثال

$$\begin{cases} x^۲y + xy^۲ = ۳۰ \\ xy + x + y = ۱۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = xy \\ b = x + y \end{cases} \implies \begin{cases} ab = ۳۰ \\ a + b = ۱۱ \end{cases}$$

$$\implies b = \frac{۳۰}{a} \implies a + \frac{۳۰}{a} = ۱۱$$

$$\implies a^۲ - ۱۱a + ۳۰ = ۰ \implies (a - ۶)(a - ۵) = ۰$$

$$\implies \begin{cases} a = ۵, b = ۶ \\ a = ۶, b = ۵ \end{cases} \implies \begin{cases} x = ۱, y = ۵ \\ x = ۵, y = ۱ \\ x = ۲, y = ۳ \\ x = ۳, y = ۲ \end{cases}$$

مثال

$$\begin{cases} x - ۱ = yz \\ y - ۱ = zx \\ z - ۱ = xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x - ۱) = xyz \\ y(y - ۱) = xyz \\ z(z - ۱) = xyz \end{cases} \implies x^۲ - x = y^۲ - y = z^۲ - z$$

$$x^۲ - x = y^۲ - y \implies (x - y)(x + y - ۱) = ۰$$

$$x = y \implies \begin{cases} x - ۱ = xz \\ z - ۱ = x^۲ \end{cases}$$

مثال

$$\begin{cases} x - ۱ = yz \\ y - ۱ = zx \\ z - ۱ = xy \end{cases}$$

$$x - ۱ = xz \implies x = \frac{۱}{۱ - z} \implies z - ۱ = \frac{۱}{(۱ - z)^۲}$$
$$\implies (z - ۱)^۳ = ۱ \implies z = ۲$$

اگر جواب را در معادله دیگر بگذاریم به تناقض می‌خوریم پس $x \neq y$. به طریق مشابه می‌توان نتیجه گرفت هیچ دو متغیری با هم برابر نیستند و داریم:

$$\begin{cases} x + y = ۱ \\ y + z = ۱ \\ z + x = ۱ \end{cases} \implies x = y = z \implies (x, y, z) \in \varnothing$$

مثال

$$\begin{cases} x^۲ + y = xy^۲ \\ y^۲ + x = yx^۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x^۲ + y) = x^۲y^۲ \\ y(y^۲ + x) = x^۲y^۲ \end{cases} \implies x^۳ = y^۳ \implies x = y$$

$$\implies x^۲ + x = x^۳ \implies x(x^۲ - x - ۱) \implies \begin{cases} x = ۰ \\ x^۲ - x - ۱ = ۰ \end{cases}$$

$$\implies (x, y) \in \left\{(۰, ۰), \left(\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}, \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}\right), \left(\frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}, \frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲}\right)\right\}$$

مثال

$$\begin{cases} x = \frac{2y}{1-x^2} \\ y = \frac{2x}{1-y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = \frac{2y^2}{1-x^2} \\ xy = \frac{2x^2}{1-y^2} \end{cases} \Longrightarrow \frac{2y^2}{1-x^2} = \frac{2x^2}{1-y^2}$$

$$\Longrightarrow x^2(1-x^2) = y^2(1-y^2) \Longrightarrow x^4 - y^4 - (x^2 - y^2) = 0$$

$$\Longrightarrow (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x = y \implies x = \frac{۲x}{۱ - x^۲} \implies ۲x = x(۱ - x^۲)$$

$$\implies x(x^۲ + ۱) = ۰ \implies x = y = ۰$$

$$x = -y \implies x = \frac{-۲x}{۱ - x^۲} \implies -۲x = x(۱ - x^۲)$$

$$\implies x(x^۲ - ۳) = ۰ \implies \begin{cases} x = y = ۰ \\ x = -\sqrt{۳}, y = \sqrt{۳} \\ x = \sqrt{۳}, y = -\sqrt{۳} \end{cases}$$

$$x^۲ + y^۲ = ۱ \implies x = \frac{۲}{y} \implies xy = ۲$$

$$(x - y)^۲ = x^۲ - ۲xy + y^۲ = -۳$$

پس حالت سوم جوابی ندارد.