

# 热力学与统计物理导论

原著：Herbert B. Callen 翻译：超理汉化组

2017 年 1 月 11 日

DRAFT TRANSLATION

## 前言

本书第一版完成于二十五年前，我深感荣幸地看到此书已成为热力学领域常用的参考文献，书中建立的具有探索性的新体系如今已被广泛接纳。然而第一版仍有许多值得改进之处，因而在之前的基础上加以延伸，推出了这一新版本。

首先，热力学在 19 世纪 60-70 年代有重要进展，特别是临界相变领域。尽管这些前沿进展远远超出了这本教材的范围，但我仍尽力描述这些问题的本质，在二阶相变的基础上介绍 critical exponents 与 scaling function。这一讲法生动简洁，并且替代了第一版当中有关二阶相变的相对复杂的理论（许多学生认为这是第一版中最难的章节）。

其次，部分内容进行教学法方面的改良，以使得它能胜任面向物理系大三、研一，物理学家，工程师和化学家的课程。我得到了许多教师与学生在这方面的建议。第二版简化了一些说明内容，并添加了大量有详细解答的例题。课后习题的数量有所增加，部分习题给出了答案或提示。

第三，添加了统计力学原理的介绍。该部分保持了第一版的风格，强调统计力学原理潜在的简洁性与逻辑思辨的培养，而不止着眼于统计力学的众多应用。为此本书避免直接从量子力学中的非对易问题入手，所需的先修知识只包括基本的量子论（例如熟悉有限系统的分立能级），这使得高年级本科生可以学习这些内容。同时更高年级的学生不难从教材的体系中导出非对易情形的理论。

第四，长期以来我对热力学基础中的一些潜在的概念性问题感到疑惑，这让我尝试建立热力学“含义”（“meaning”）的一种诠释。本书最后一章——教材的“诠释性结束语”——介绍一种热力学 & 统计力学源自基

本物理定律的对称性（而非热力学定律的定量描述）的理论。这部分只是定性的描述性内容，凭借直觉搭建起理论框架，使读者认识到热力学的自然与基本，进而体会科学理论的优美结构。

新版本包含热力学与统计力学，但本书并未完全分割它们，也没有将二者融为一体（不然题目就是“热物理学” (thermal physics) 了）。我认为这两种“极端”做法都有点跑偏。将热力学从它的统计力学基础中完全剥离出来的行为让热力学丧失其基本的物理起源。缺少统计力学视角的热力学只会停留在 19 世纪的宏观经验层次，而忽视了 19 世纪至今的科学进展。相对的，将热力学与统计力学合体为“热物理学”则会使热力学比重过低。宏大深邃的统计力学（与热力学相比）理论气息过浓<sup>1</sup>。“热物理学”课程往往忽视了宏观运行原理。<sup>1</sup> 此外，热力学与统计力学的融合与“物理理论的经济原则”相违背：理论预言应该从尽可能一般、尽可能少的假设中导出。热力学的基本理论完全可以避开统计力学特有的假设。把“热力学”当做从属的学科组织方式是难以与这种思维习惯兼容的<sup>2</sup>。

本书通过如下方式平衡热学的两大部分。首先在宏观层面上介绍公式化的热力学，由此热力学基本假设与统计力学定理可以精确而清楚地表述，同时这两大部分之间的联系也会经常提及。不过教师在授课时可以根据下文的顺序表在热力学章节中交错讲授统计力学部分，即便如此，热力学的宏观结构总是在统计因素之前引入的。这种分开、排序的方式保留与强调了科学的分层结构，将物理学按连贯的单元组织起来，并且各单元间的联系清晰而好记。与此相似的是经典力学，只有将它看成是量子力学的极限之后它才可以作为自洽的理论体系而深入理解。

下文的“菜单”是两种主要的授课顺序。一种选项是平推（菜单的 A 列上完再上 B 列）。另一种“交错”的选项是按菜单自上而下的顺序进行。第 15 章是简洁而基本的熵的统计诠释的内容，它可以在学完第 1, 4 或 7 章之后立即讲述。

第一条横线下面的章节是可选内容，为了平衡课程中的具体与抽象成分，教师可以讲述第 13 章（材料性能）的部分内容，或者第 21 章（对称性与概念基础）中的理论假设。

大三一学期课程（最少内容）包括本书前七章，时间充裕的话第 15、16 章也可加入。

*Philadelphia, Pennsylvania*

**Herbert B. Callen**

<sup>1</sup>美国物理学会委员会 (The American Physical Society Committee) 在 Applications of Physics [*Bulletin of the APS*, Vol 22 #10, 1233 (1971)] 工业研究领导人中的调查显示在所有本科物理系科目中热力学比起其他课程需要加深学习，然而热力学的重视程度近来不断降低。

<sup>1</sup> 原文为 The fundamental-ity and profundity of statistical mechanics are treacherously seductive, 这里译者斗胆进行自行理解的意译。

<sup>2</sup> 这句话的翻译来自超理论坛 @monad, 译者在此致谢。

#### 第四次重印前言

在第二版第四次重印发行时，承蒙出版社厚意得以更正一些印刷错误与“微小”误差。我深切认识到任何数字或文本的错误对读者的影响都不会是“微小”的。因此我深深感谢指出错误的大量读者，以及允许更正错误的靠谱的出版社。

1987 年 11 月

*Herbert B. Callen*

DRAFT TRANSLATION

1. 理论假设	
	15
2. 平衡态条件	
3. 形式关系与样例系统	
4. 可逆循环，引擎	
	15. 熵表象中的统计力学
5. Legendre 变换	
6. Legendre 变换表象的极值条件	
7. Maxwell 关系	
	15
	16. 正则形式
	17. 广义正则形式
8. 稳定性	
9. 一阶相变	
10. 临界现象	18. 量子流体
11. Nernst 假设	19. 涨落
12. 原理总结	20. 变分性质与平均场理论
13. 材料性能	
14. 不可逆热力学	
21. 假设：对称性与热力学概念基础	

# Contents

## I

## 经典热力学基本原理

1	热力学基本问题与假设 .....	5
1.1	宏观测量的时间性质	5
1.2	宏观测量的空间性质	6
1.3	热力学系统的组成	8
1.4	内能	9
1.5	热力学平衡态	10
1.6	壁与限制	11
1.7	能量的可测量性	12
1.8	热的定量定义	13
1.9	热力学基本问题	22
1.10	最大熵假设	23
2	平衡条件 .....	29
2.1	强度量	29
2.2	状态方程	31
2.3	熵表象下的强度量	34
2.4	热平衡态——温度	36
2.5	温度定义与直观概念的一致性	38

2.6	温度单位	38
2.7	力学平衡	40
2.8	存在物质交换时的平衡态	43
2.9	化学平衡	44
3	形式关系与样例系统 .....	47
3.1	热力学 Euler 方程	47
3.2	Gibbs-Duhem 关系	48
3.3	形式关系总结	50
3.4	单组分/多组分简单理想气体	51
3.5	理想 van der Waals 流体	51
3.6	黑体辐射系统	51
3.7	橡胶带系统	51
3.8	不可控变量；磁系统	51
3.9	摩尔热容与其他导出量	51
4	可逆过程和最大功定理 .....	53
4.1	可能和不可能过程	53



# I

# 经典热力学基本原理

<b>1</b>	<b>热力学基本问题与假设 .....</b>	<b>5</b>
1.1	宏观测量的时间性质	
1.2	宏观测量的空间性质	
1.3	热力学系统的组成	
1.4	内能	
1.5	热力学平衡态	
1.6	壁与限制	
1.7	能量的可测量性	
1.8	热的定量定义	
1.9	热力学基本问题	
1.10	最大熵假设	
<b>2</b>	<b>平衡条件 .....</b>	<b>29</b>
2.1	强度量	
2.2	状态方程	
2.3	熵表象下的强度量	
2.4	热平衡态——温度	
2.5	温度定义与直观概念的一致性	
2.6	温度单位	
2.7	力学平衡	
2.8	存在物质交换时的平衡态	
2.9	化学平衡	
<b>3</b>	<b>形式关系与样例系统 .....</b>	<b>47</b>
3.1	热力学 Euler 方程	
3.2	Gibbs-Duhem 关系	
3.3	形式关系总结	
3.4	单组分/多组分简单理想气体	
3.5	理想 van der Waals 流体	
3.6	黑体辐射系统	
3.7	橡胶带系统	
3.8	不可控变量；磁系统	
3.9	摩尔热容与其他导出量	
<b>4</b>	<b>可逆过程和最大功定理 .....</b>	<b>53</b>
4.1	可能和不可能过程	

DRAFT TRANSLATION

# 引言

## 热力学本质与统计力学基础

物理学家、化学家、生物学家或者工程师总是主要与自然界中宏观物质的性质打交道，宏观性质具有一般规律，而且具有严格的限制。表面上无关的各种性质实际有着微妙的联系。

这一潜在规律有着深远的含义。非常熟悉西方这一套理论的物理学家与化学家在处理新材料时不至于一无所知。Engineers are able to anticipate limit limitations to device designs predicated on creatively imagined (but yet undiscovered) materials with the requisite properties. 潜在规律的具体形式则是基本物理理论的深刻线索。

一些热力学的基本概念直观上非常容易感觉。例如在比较光滑的金属碗的边缘释放一个金属球，球在碗里来回滚动，每一次来回的动能与势能之和近似守恒。不过金属球总会在碗底停下，机械能似乎消失了，但球和碗有某种可观测的变化，它们“变热”了（尽管很轻微但能感觉到）。在学习热力学之前，我们就定性地认为机械能仅仅是转化成了另一种形式（而非消失），从而使得基本定律——能量守恒成立。并且还知道生理感觉的“热”与热力学概念“温度”有关。

上述实验观测模棱两可且未经定义，然而这仍揭示了热力学与经典物理其他分支明显的不同。力学与电磁学是经典物理的两大“元典”理论。前者描述力作用于质点的动力学，后者描述力的媒介——场的的动力学。它们各自有相应的基本“定律”——力学的 Newton 定律（或者 Lagrange 或 Hamilton 体系），电磁学的 Maxwell 方程组。这两门学科余下的内容无非是解释这些基本定律的作用。

热力学相当不一样。它没有特定的适用范围，也不引入像 Newton

<sup>3</sup> “宏观凝聚态系统”的原文为“macroscopic aggregation”而非“condensed matter system”，如果“aggregation”翻译为“凝聚态”不妥的话欢迎联系我指正。

<sup>4</sup> 原文：thermodynamics is the study of the restrictions on the possible properties of matter that follow from the symmetry properties of the fundamental laws of physics. 诚恐翻译有误不能将原著意思尽行传达故附原文。之后同理。

定律或 Maxwell 方程组那样的基本定律。与力学和电磁学的专一性相比，热力学的特点是普遍性 (generality)。普遍性首先是指热力学可以应用于所用宏观凝聚态系统<sup>3</sup>，第二层含义是热力学不预言可观测量的特定的数值结果，而是对允许进行的物理过程做出限制（通过不等式），这样在表面上无关的宏观性质之间建立联系。

热力学与其他学科对比产生的基本问题只在最后一章讨论。在那里我们会看到热力学并非以自然界新的或特定的定律为基础，而是反映所有基本定律的共有或普遍的特征。简言之，热力学是从物理学基本定律的对称性出发的，研究物质合理性质的限制条件的科学。<sup>4</sup>

基本定律的对称性与物质宏观性质之间的联系不那么明显，并且本书不试图从前者推导出后者，而是采用本书第一版探索性的热力学形式体系，在第 21 章才阐述性地讨论对称性根源。但是即使是热力学这一基础的初步断言也可以帮助读者了解热力学有点不常见的形式。But even the preliminary assertion of this basis of thermodynamics may help to prepare the reader for the somewhat uncommon form of thermodynamic theory. 热力学继承了它的普遍性，它的非度量性质 (nonmetric nature)，以及它对对称性起源的强调。

# 1. 热力学基本问题与假设

## 1.1 宏观测量的时间性质

宏观物质最显著的特征或许是难以置信的简单性——用很少的量即可表征。例如我们去药房买“一升乙醇”，这一信息量少的可怜的描述实际是足够的。但是从原子层面看，“一升乙醇”所指定的条件实在少得可怜，这个系统完整的数学描述包括指定所有乙醇分子的坐标、动量，以及描述每个分子内部状态的量——起码有  $10^{23}$  量级那么多物理量才能完整描述“一升乙醇”！如果一台电脑每 1 微秒在屏幕上打印一个坐标，那么 100 亿年（宇宙年龄的量级）才能打印完。神奇的是，在这  $10^{23}$  个原子坐标，或者它们的线性组合除了一小部分之外，在宏观上是相互独立的。那些宏观相关的一小部分称为“宏观量” (macroscopic coordinates)，或者“热力学量” (thermodynamic coordinates)<sup>1</sup>。

作为一门自然科学，热力学必须要预言某些实验观测的结果，热力学预期的是合适的描述性变量，这些变量规定了热力学的范围与结构。

描述宏观物质的简单性，以及选取热力学量的标准都与宏观测量的特性有关。宏观测量与原子时间尺度相比极其缓慢，与原子空间尺度相比十分粗糙。

进行宏观测量时，原子系统正在进行极度迅速而复杂的运动。设想一个通过单色光的干涉条纹测量细金属条长度的实验，干涉条纹在照相底片上记录下来，于是这一观测的持续时间与相机的快门速度有关——一般在  $10^{-2}$  秒的量级。而金属棒原子振动特征周期的量级为  $10^{-15}$  秒 ...

宏观测量不可能探测到无数个以原子周期时间尺度疯狂变化的微观量，只有一小部分原子坐标的特定组合才本质上不依赖时间，因而可以

<sup>1</sup> 为了与符合中文习惯，“atomistic coordinates”译作“原子坐标”，“macroscopic coordinates”，“thermodynamic coordinates”译作“宏观量”、“热力学量”。“coordinates”根据不同习惯译成“坐标”或“(物理)量”。

宏观测量。

“本质上”这个词是一个重要条件，实际上绝大多数（不是所有）可观测的宏观过程是不依赖时间的。稍微努力一点的话，人类可以观测时间尺度在  $10^{-7}$  s 或更短一点的过程，不过就算如此还是远大于原子时间尺度（ $\sim 10^{-15}$  秒）。因此首先考虑极限情况，建立有关不依赖时间的现象的理论是非常合理的。这个理论就是热力学。

根据定义，考虑到宏观测量的性质，热力学只描述宏观系统的静态。

2

在  $\sim 10^{23}$  个原子坐标或它们的线性组合当中，只有一小部分是与时间无关的。

守恒量是最明显的、与时间无关的热力学量：系统的能量，总动量（的分量），总角动量（的分量）。不过还有其他热力学量，为此需要讨论宏观测量的空间性质。

## 1.2 宏观测量的空间性质

宏观测量不仅与原子时间尺度相比及其缓慢，而且在原子空间尺度上十分粗糙。用来观测宏观物质的工具总是“钝”的。例如光学仪器的分辨能力与光波长（量级约 1000 个原子间距）有关，因此可分辨的最小体积含有大约  $10^9$  个原子…宏观测量只能检测到原子坐标的空间平均值。<sup>3</sup>

宏观测量暗含的时间空间上的两种平均大大减少了相关变量的数目：从开始的  $10^{23}$  个原子坐标减少为少数几个热力学量。这一减少的原理可以通过考虑如下的简单系统来扼要地解释。如图 1.1，模型系统由 9 个原子（不是  $10^{23}$  个）组成，它们只能在连线上做一维运动，相互之间通过线性回复力相互作用（就像连着弹簧那样）。

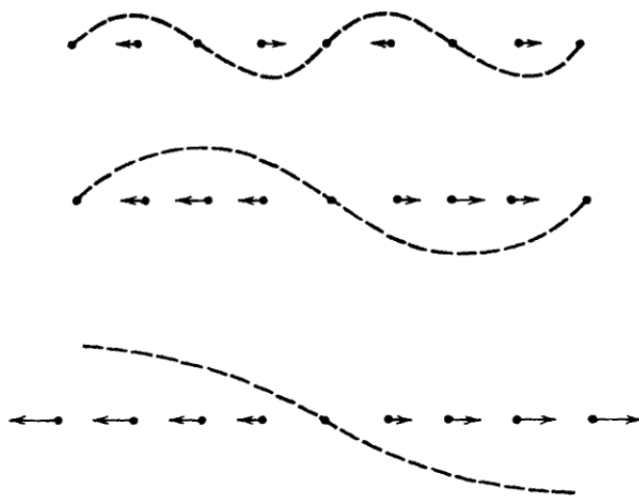


图 1.1: 9 个原子组成的一维原子链系统的三种简正模。三种模的波长自上而下依次是 4 个、8 个与 16 个原子间距。虚线表示原子纵向位移的大小。

各个原子之间相互耦合，全体原子具有的规则的运动模式称为简正模式 (normal modes)，简称简正模<sup>4</sup>。图 1.1 中显示了三种简正模的运动

<sup>2</sup> 原文: *By definition, suggested by the nature of macroscopic observations, thermodynamics describes only static states of macroscopic systems.*

<sup>3</sup> 原文: *Macroscopic observations sense only coarse spatial averages of atomic coordinates.*

<sup>4</sup> 简正模的概念参见任意一本理论力学教材，例如 Herbert Goldstein, *Classical Mechanics*, 3rd edition, Addison Wesley, §6.3, Page 252.

形式。图中的箭头方向表示原子位移方向，箭头长度表示位移大小。原子来回振动，每过半个周期图中的箭头反向。<sup>5</sup>

给出每个原子的位置即描述了系统的原子状态，但更方便的做法是给出各种简正模的瞬时振幅（二者在数学上等价）。这些振幅称为简正坐标 (normal coordinates)，且简正坐标的数量与原子坐标数目相等。

把 9 个原子组成的系统硬要说成“宏观系统”的话“宏观”与“原子”层面的观测就会没什么区别。为了说明，我们可以将用分辨率很低的“模糊的”仪器进行的观测作为这个系统的宏观测量。于是宏观测量的粗糙性可以类比为用分辨率低的模糊镜片的视野。这种模糊的观测无法分辨图 1.1 中的前两种模式的细节，这些模式不能分辨且宏观上无关。相对而言，第三种模式对应的是系统整体均匀的整体膨胀或收缩，与前两种不同，这种整体的均匀胀缩即使是“模糊镜片”也能观测到。这一模式的幅度与系统的长度有关（三维情形则为体积）。长度（体积）是一个热力学变量，空间均匀性（长波模式）结构使得它不会被宏观平均所抹除。<sup>6</sup>

宏观测量的时间平均效果与上述情形类似，系统的每一种简正模有相应的特征频率，长波模式的频率更低。图 1.1 第三种模式的频率是三者中最低的，如果系统原子数非常多，则长波模式的频率极低甚至趋于零（进一步讨论见 21 章）。故而高频的短波模式在时间平均后被抹除，而与“体积”有关的长波模式频率甚低，它在时间平均下“生存”下来，就像空间平均的情形那样。

上述简单例子的结论其实非常普遍，只有极少具有高度对称性的原子坐标才能在宏观测量的统计平均中生存下来，它们就是宏观热力学量。一些量是力学的：系统的体积、形状参量（如弹性应变）等等，还有的来自电磁学：系统的电或磁的偶极矩、多极矩什么的。力学（包括弹性力学）研究一部分“生存”的宏观量，电磁学（包括静电学、静磁学与铁磁学）研究另一部分宏观量。<sup>7</sup>

由于宏观测量的粗糙性，系统的宏观描述与大多数原子坐标不直接相关。热力学只关心大量原子坐标的平均后的宏观量。<sup>8</sup>

证明宏观系统有大量“隐藏的”原子模式的最有力证据是这些模式就像仓库一样储存能量，通过“力学模式”（即与宏观力学量有关）进行的能量传递称为机械功 (mechanical work)，通过“电磁模式”传递的能量称为电功 (electrical work)。前者的典型代表是  $-PdV$  ( $P$  为压强， $V$  为体积)，后者的代表为  $-E_e d\mathcal{P}$  ( $E_e$  为电场， $\mathcal{P}$  为电偶极矩)。这些能量传递的完整内容在力学与电磁学文献讨论。从宏观可观测模式到“隐藏”模式的能量传递同样可能进行。<sup>9</sup> 相应的能量传递称为热 (heat)。当然这只是热的形象化描述，在之后正式的体系中将会给出热的可操作的定量定义。

<sup>5</sup> 未来会不会有一天教科书可以播放 gif 动图？

<sup>6</sup> 原文: *The length (of volume) remains as a thermodynamic variable, undestroyed by the spatial averaging, because of its spatially homogeneous (long wavelength) structure.*

<sup>7</sup> 原文: *The study of mechanics (including elasticity) is the study of one set of surviving coordinates. The subject of electricity (including electrostatics, magnetostatics, and ferromagnetism) is the study of another set of surviving coordinates.*

<sup>8</sup> 原文: *Thermodynamics, in contrast, is concerned with the macroscopic consequences of the myriads of atomic coordinates that, by virtue of the coarseness of macroscopic observations, do not appear explicitly in a macroscopic description of a system.*

<sup>9</sup> 原文: *But it is equally possible to transfer energy via the hidden atomic modes of motion as well as via those that happen to be macroscopically observable.*



在进行上文的讨论后，下面建立理论所需的概念定义与惯例约定。

### 1.3 热力学系统的组成

热力学非常具有普遍性，它可以描述任意复杂体系的所有力学、电磁学与热力学性质。在一开始我们主要关注热学性质，因此系统的力学与电磁性质经常理想化或简化。这很合理，力学基本只考虑不带电而未极化的系统，而电磁学的系统没有弹性形变或其它复杂力学性质。这些学科的普遍性并未因此而降低，在各种性质分别研究透彻后，将它们结合起来处理复杂系统是比较容易的。热力学也一样，一开始我们只考虑力学、电磁学性质最平凡的系统，从而可以专注于热力学的本质内容，再之后容易结合各种理论处理复杂系统。强调一遍：接下来几章所考虑的简单系统不影响热力学的普遍性，只是为了研究方便。

我们（暂时）只考虑如下的简单系统：宏观均匀、各向同性且不带电，体积足够大可忽略边界效应，而且无外场（如电场磁场重力场）作用。<sup>10</sup>

这样一个简单系统没有宏观电磁学量：系统不带电、没有电磁二极四极与多极矩。也没有所有的弹性应变以及其他类似的复杂力学量。体积  $V$  是一个用得多的力学参量。此外，简单系统还需要一组参量描述其化学成分。当系统由多种物质组成时，可以用各组分的原子数作为描述化学成分的参量。为了让原子数参量的数值不那么大，我们采用参量摩尔数 (*mole numbers*)，定义为组分的原子数除以 Avogadro 常数  $N_A = 6.02217 \times 10^{23}$ 。

摩尔数由原子数定义，这超出了纯粹的宏观物理学范围，避免这一情况的等效定义是钦点 1 摩尔 C12 同位素的质量为 12 g。其它核素的摩尔质量按照 C12 的比例定义。表 1.1 列出了部分元素的摩尔质量。

表 1.1: 一些自然环境中元素（同位素混合）的摩尔质量（单位为 g）。数据来自 *the International Union of Pure and Applied Chemistry 1969* 年数据。

H	1.0080	F	18.9984
Li	6.941	Na	22.9898
C	12.011	Al	26.9815
N	14.0067	S	32.06
O	15.9994	Cl	35.453

若系统由  $r$  种化学成分混合而成，则这  $r$  种组分各自的摩尔分数 (*mole fractions*) 定义为  $N_k / (\sum_{j=1}^r N_j)$ , ( $k = 1, 2, \dots, r$ ), 其中  $N_i$  为第  $i$  种组分的摩尔数。所有组分的摩尔分数之和为 1。系统的摩尔体积 (*molar volume*) 定义为  $V / (\sum_{j=1}^r N_j)$ 。

宏观参量  $V, N_1, N_2, \dots, N_r$  有一个超级重要的性质，设想把两个完全相同的系统合体为一个系统，则大系统的体积是单个子系统体积的

<sup>10</sup> 原文: We (temporarily) restrict our attention to *simple systems*, defined as *systems that are macroscopically homogeneous, isotropic, and uncharged, that are large enough so that surface effects can be neglected, and that are not acted on by electric, magnetic, or gravitational fields*.



两倍，每种组分的摩尔数也是如此。若系统的某个物理量等于每个子系统的该物理量之和，则这个物理量称为广延量 (*extensive parameters*)。广延量在热力学理论中起到关键的作用。

## 1.4 内能

能量守恒是物理学最重要的结论之一，这一信念并非一日建成的，而是经历了两个半世纪缓慢而曲折的发展。它的首次提出是在 1693 年，Leibniz 指出地球附近重力场中质点的动能  $\frac{1}{2}mv^2$  与重力势能  $mgh$  之和才是守恒的。每当新的相互作用被引入，能量似乎就不守恒了，但是总可以添加新的数学项——一种“新能量”使得能量依然守恒。例如系统带电时，必须引入 Coulomb 相互作用能量（静电势能） $Q_1Q_2/r$  以及电磁场能量。1905 年，Einstein 将能量守恒扩展到相对论领域，引入了相对论性静质能。20 世纪 30 年代 Enrico Fermi 假设【原文缺失】，目的是保证核反应过程的能量守恒。现代物理中，能量守恒是物理学基本定律时间平移对称性（它是个假设）的体现，即物理学定律在过去未来从不改变，不在时间平移 ( $t \rightarrow t + \text{常数}$ ) 下变化，第 21 章进一步讨论能量守恒的这一基础。现在我们把能量守恒作为最基本、最普遍、最重要的物理定律就可以了。

宏观系统可以视为大量电子与原子核通过复杂但确定的相互作用（服从能量守恒）结合的整体，由此可推论宏观系统具有确定的能量值，服从确定的守恒定律<sup>11</sup>。也就是说，我们现在接受明确定义的热力学系统能量作为一种守恒定律的宏观表现形式而存在，它是一种经过高度发展之后的、经测试具有极度精确且明显完整普遍性的能量。<sup>12</sup>

下面论证热力学能量函数的存在性，论证方式与历史上的十分不同。因为热力学在原子学说被公认之前就已经蓬勃发展，宏观的能量守恒可以由纯粹的宏观方式验证。这方面的重大突破是 1798 年 Count Rumford 观察到火炮钻孔过程中的热效应。Sir Humphry Davy, Sadi Carnot, Robert Mayer, 以及最终的 (1840-1850 年间) James Joule 在 Rumford 的基础上形成了完整的论证体系。历史上热的概念的形成过程是科学理论曲折发展的经典案例，体现出新学说受到公认的巨大阻力，以及人类在处理精细抽象的问题时的智慧。对此感兴趣的读者可参考 D. Roller 的著作 *The Early Development of the Concepts of Temperature and Heat* (Harvard University Press, 1950)，或者阅读物理学史文献。

本书不利用 Rumford 与 Joule 的实验论证能量函数的存在性，但 1.7 节会通过这些实验讨论热力学能量的可测量性 (*measurability*)。

无论原子还是宏观层面，具有物理意义的只是能量的差值，而非绝对的值。因此通常选定某一特定状态作为基准态，其能量规定为零。其他状态相对于基准态的能量称为系统的热力学内能 (*internal energy*)，通

<sup>11</sup> 原文: *macroscopic systems have definite and precise energies, subject to a definite conservation principle.*

<sup>12</sup> 原文: *That is, we now accept the existence of a well-defined energy of a thermodynamic system as a macroscopic manifestation of a conservation law, highly developed, tested to an extreme precision, and apparently of complete generality at the atomic level.* 这句话来自百度人工翻译。从翻译质量上我能想象到接到订单的那位翻译蛋疼的神情

常记作  $U$ . 内能与体积、摩尔数一样是广延量。

## 1.5 热力学平衡态

宏观系统往往对演化历史有某种“记忆”作用。一杯搅拌过的茶还会旋转一会儿，冷加工过的钢材硬度增加。但记忆终将褪色，扰动总会衰减，内应变屈服成塑性流<sup>13</sup>，不均匀的浓度扩散成一致。系统倾向于演化到与特定的过往条件无关的简单状态。

某些情形中系统很快平息到简单态，另外一些情况的演化过程则慢得要命。但是所有系统都有向如下特征状态演化的趋势：由系统内部因素决定，与先前的外部影响无关。根据定义，这种简单的终态不依赖时间。这种状态称为平衡态。<sup>14</sup>

热力学致力于描述这种系统最终演化到的简单、静止的“平衡”状态。

为了将上面的定性陈述转化为定量的正式假设，我们将“简单”的标准设定为使用很少的热力学量即可描述系统。由此引出下面的假设，该假设还受到实验观测的启示，它所导出的理论的正确性验证了它自身的正确性。

### 假设 I.

任意简单系统存在宏观上由内能  $U$ 、体积  $V$  与各组分摩尔数  $N_1, N_2, \dots, N_r$  完全确定的宏观状态，称为平衡态。

### Postulate I.

There exist particular states (called equilibrium states) of simple systems that, macroscopically, are characterized completely by the internal energy  $U$ , the volume  $V$ , and the mole numbers  $N_1, N_2, \dots, N_r$  of the chemical components.

当考虑更一般的、具有更复杂力学电磁学性质的系统时，确定一个平衡态所需的参量也相应增加，例如系统的电偶极矩或弹性应变。新变量的形式体系与简单系统的体积  $V$  十分相似。

实验中经常要判断一个系统是否处于平衡态，因而是否可以用热力学进行分析。首先可以观察该系统是否不再活动、处于静态，但“不活动”不是平衡态的充分条件。平衡态由广延量  $U, V, N_1, N_2, \dots, N_r$  完全确定，故而与演化历史无关，这很难在实际中判断。而且许多系统的演化显然与历史有关，这些情形促使我们考虑平衡态的意义。例如，两块相同的钢材经历不同的冷加工、淬火和退火过程最终的性质可以十分不同，因而它们不处于平衡态。类似的，玻璃的性质取决于加工过程（如冷却速率），玻璃也不在平衡态。

<sup>13</sup> 原文: internal strains yield to plastic flow.

<sup>14</sup> 原文: in all systems there is a tendency to evolve toward states in which the properties are determined by intrinsic factors and not by previously applied external influences. Such simple terminal states are, by definition, time independent. They are called equilibrium states.

（基于平衡态的）热力学理论强行分析非平衡态系统就会在将来的报道上出现偏差，实验者根据理论失效（后验标准）判断系统处于非平衡态。

量子统计理论通常会对热力学失效的情形中系统为何不处于平衡态作出更深刻的解释。偶然出现的理论失效往往蕴藏着系统在微观层面未知的复杂过程。例如正氢 (orthohydrogen) 与仲氢 (parahydrogen)<sup>1</sup>的发现，及其微观机制的研究。

一个给定的宏观平衡态（因而给定了系统的边界条件）对应许多微观态，在原子层面上，处于平衡态的系统仍在对应的众多微观态中不断而迅速地转变。转变的速度往往很快，使得宏观测量过程中系统经历各种可能的微观态，这就是系统处于平衡的情况。然而在某些特殊情况下，各微观态的遍历机制失效，系统只能限制在某一特定的微观态的子集中演化转变。或者系统仍可遍历各态，但转变速度较慢，以至于宏观测量结果并非对所有微观态的平均。这些情况的系统都不是平衡态。容易看出，这些奇异情况更容易出现在固体，而非流体（液/气）系统，因为后者相对而言原子的移动性更强，原子随机碰撞强烈消除了微观态遍历限制。

实际上很少有系统处于绝对的平衡态。例如放射性物质的绝对平衡态要求完全衰变为最稳定的同位素，这需要宇宙年龄量级的时间，这种慢的要命的过程可以近似视为平衡态。完成了自发演化、可以用相对较少的参量描述的系统可认为处于亚稳态 (*metastable equilibrium*)。这种稍弱的平衡状态对热力学的应用而言是足够的。

综上，实践中的平衡态判据是循环的。若热力学理论成功描述了一个系统，则该系统就处于平衡态！<sup>15</sup>

应该指出，上述耍流氓的循环逻辑与力学的情形没有不同。例如力学预言质点在已知的引力场中沿特定轨迹运动，如果报道出了偏差，没人会因此否定力学，而是会推测质点受到其他的力。例如如果粒子带电，则考虑电磁力之后动力学预言才正确，这只有通过循环一圈（预言-出了偏差-加上电磁力-预言成功）才推论得知，因而不是先验的。力学系统模型（如质量、转动惯量、电荷、电偶极矩等等）与实验符合之后才是“正确”的。

<sup>15</sup> 原文: *Operationally, a system is in an equilibrium state if its properties are consistently described by thermodynamic theory!*

## 1.6 壁与限制

一个热力学系统需要一个“壁” (walls) 来将它从周围环境中隔离出来，并为它提供边界条件。通过对壁进行操作，可以改变系统的广延量，以及开始某些演化过程。

<sup>1</sup>正氢分子  $H_2$  两个氢核的角动量平行，仲氢的反平行。处于平衡态氢气系统的正氢/仲氢比例应该是定值，但热力学的预言失败了，这促使正氢、仲氢微观性质的研究。

通过对壁进行操作而开始的过程通常是某些物理量在不同系统或大系统的子体系之间的重新分布。由此可将热力学壁分为允许或禁止重新分布两种。例如，考虑一个刚性圆筒内部的活塞，如果活塞是固定的，则它是禁止两个子系统的体系重新分布的壁，若活塞可以活动，则允许体积重新分布。刚性圆筒与固定的活塞称为限制体积的壁，而可动活塞对体积是非限制的。一般的，将一个系统的某个广延量限制为特定值的壁称为对该广延量有限制，而允许该量自由改变的壁对该广延量是非限制的。

系统的某种化学组分不能渗透的壁限制了该组分的摩尔数；而可以透过的膜对摩尔数无限制。半透膜限制特定组分的摩尔数而对其他成分无影响；一个有孔的壁对任意组分的摩尔数都无限制。

要考虑限制能量的壁是否存在需要先解决能量的可测量性问题，下一节就讨论它。

### 1.7 能量的可测量性

基于原子层面的能量守恒可以推论出存在守恒的宏观能量函数。为了证明能量具有实际意义，必须说明它是可控制的 (*controllable*) 与可测量的 (*measurable*)。下面我们首先指出存在测量能量的定量方法，并据此导出热的定量的操作性定义。

论证能量可测量性的关键是绝热壁的存在。下述的简单实验表明存在这种绝热壁。

考虑盛有冰水混合物的容器。实验发现剧烈搅拌容器可使得冰迅速融化，搅拌过程向系统传递了机械功，由此可推论冰的融化与系统能量增加有关。将容器放在夏日的阳光下可以发现冰自然地迅速融化了，该过程外界并未对系统做功，因此可以认为能量通过传热的形式进入系统中。将容器壁从薄金属换成厚玻璃，再换成 Dewar 瓶壁（两层镀银的玻璃，中间抽真空）会发现冰融化的越来越慢，这强烈暗示金属、玻璃与 Dewar 壁的隔热性越来越好。机智的实验家可以制造性能超好的隔热壁使得冰的融化速度十分慢，这种壁是理想绝热壁在三次元现实的良好近似。

通常称不透热的壁为绝热的 (*adiabatic*)，而允许热传递的壁称为导热的 (*diathermal*)。如果系统的壁既不传递做功也不导热，则它可以限制系统的能量。若系统的壁限制能量、体积与所有组分的摩尔数，则称这个系统是封闭的 (*closed*)<sup>2</sup>。

利用上述几种壁可以论证宏观热力学能量的可控制性，比如可以用绝热壁关住能量，用透热壁使能量流动。再比如将系统用限制能量的壁

<sup>2</sup>本书的封闭性的定义与化学中的惯例不同，化学的封闭性只是限制系统组分的摩尔数不变。

封印起来的话, 该系统明天的能量也可以确定。没有这些壁的话, 热力学就成了空谈的纯理论了。

下面讨论能量的可测量性, 更确切的说, 是讨论 (具有物理意义的) 能量差的可测量性。被绝热壁包围的简单系统只可能通过做功的方式向它传递能量。机械功可根据力学理论计算。例如压缩活塞做的功等于力乘以位移, 用杆搅拌的功等于力矩乘以角位移。这种情况的功在力学里已经完备地讨论了定义与测量方法。由此可得, 如果系统被绝热壁包围, 并通过做机械功从一个状态达到另一个状态, 则这两个状态的能量差即为所做机械功的值。<sup>16</sup>

例: 考虑刚性绝热容器中达到平衡态的冰水混合物系统。在壁上开一个小洞穿过一个杆, 杆的一侧是桨, 另一侧是曲柄, 这样就能通过转动曲柄对系统做机械功, 机械功等于力矩乘以角位移。转一段时间后, 系统达到新的平衡态 (一些冰融化了)。系统末态减初态的能量差即为转动曲柄做的功。

还有一个问题。将系统由绝热壁包围<sup>17</sup>, 初状态任意, 它能否只通过做机械功达到任意指定的末态? 这要借助 Joule 完成的实验, 他的工作表明绝热系统摩尔数  $N_1, \dots, N_r$  相等的任意两个状态, 都存在力学过程将它们联系起来。<sup>18</sup> Joule 还发现给定 (绝热系统的) 两个状态 (记作  $A, B$ ) 后, 从  $A \rightarrow B$  或者  $B \rightarrow A$  的力学过程至少存在一个, 但其中的某一个 (比如  $A \rightarrow B$ ) 可能不存在。我们的目的是测量状态的能量差, 因此存在一个过程就够用了。综上, 借助机械功可以测量摩尔数相同的任意两个状态的能量差。

Joule 观察到的只有  $A \rightarrow B$  或  $B \rightarrow A$  一个过程存在的情形具有深刻意义。这两个状态的不对称性是不可逆性 (*irreversibility*) 概念的体现, 后面会深入讨论。

上述测量能量差的方法的唯一限制是初末状态摩尔数相同。这可以由如下方式解决: 考虑由挡板 (物质不可透过) 隔开的两个子系统, 它们的相对于基准态的能量可由上述方法测出。移除挡板, 子系统混合, 并且二者的总能量守恒。因此混合系统的终态能量等于两个子系统的初态能量之和。这样就可以测量摩尔数不同的状态间的能量差。

总结: 利用绝热壁与机械功可以测量热力学系统任意状态相对于基准态的能量。<sup>19</sup>

## 1.8 热的定量定义

利用任意两平衡态的能量差的可测量性, 可以对热进行定量定义: 系统在某一 (摩尔数不变) 过程中外界流入系统的热量定义为系统末态与初态的能量差减去外界对系统做的功。<sup>20</sup>

设系统经某一过程由初态  $A$  演化为末态  $B$ , 该过程中外界对系统

<sup>16</sup> 原文: we are able to measure the energy difference of two states provided that one state can be reached from the other by some mechanical process while the system is enclosed by an adiabatic impermeable wall.

<sup>17</sup> 如无特别说明, 本节涉及的壁都是不可透过物质的 (impermeable)。

<sup>18</sup> 原文: system enclosed by an adiabatic impermeable wall any two equilibrium states with the same set of mole numbers  $N_1, N_2, \dots, N_r$  can be joined by some possible mechanical process.

<sup>19</sup> 原文: by employing adiabatic walls and by measuring only mechanical work, the energy of any thermodynamic system relative to an appropriate reference state, can be measured.

<sup>20</sup> 原文: The heat flux to a system in any process (at constant mole numbers) is simply the difference in internal energy between the final and initial states, diminished by the work done in that process.

做的功以及外界传递给系统的热量是多少？前者根据力学理论不难计算。根据1.7节介绍的方法可得能量差  $U_B - U_A$ ，从能量差中减去机械功即可得该过程中传递给系统的热流。

应该指出，相同的初末状态对应的不同过程的做功大小可以不同，同样，传热大小也可以不同，但是做功与传热的和——能量差  $U_B - U_A$  在初末态给定后对所有过程都是相等的。计算能量差只需给定初末状态，而计算做功、传热大小必须给出联系初末态的特定过程。

外界对简单热力学系统通过改变体积所做的准静态功为：

$$\delta W_M = -PdV \quad (1.1)$$

其中  $P$  为系统压强。上式不难从力学导出，必须强调上式只适用于准静态过程 (*quasi-static processes*)。准静态过程的准确定义在??节讨论，这里只进行定性解释。考虑一个带有可移动活塞的气缸，气缸内封闭有一定气体。迅速压动活塞，则在活塞附近的气体立即获得动能，气体出现湍流，压强无法定义。这种过程不是准静态的，对系统做的功也不能由(1.1)式计算。如果以极其慢（准静态地）速率推动活塞，则系统在每一时刻都可视为处于静平衡态，(1.1)式可以使用。粗略地说，“无穷慢”即为准静态过程的本质。

(1.1)式的符号惯例值得注意。若系统的能量增加，则外界对系统做正功。若系统体积减少，则外界对系统做正功，使系统的能量增加，因此(1.1)式等号右侧有个负号。

利用准静态功的定量表述  $\delta W_M = -PdV$  可导出传热的定量公式，一个摩尔数不变的无穷小准静态过程中传递给系统的准静态热量 (*quasi-static heat*)  $\delta Q$  定义为：

$$\delta Q = dU - \delta W_M, \quad \text{摩尔数不变。} \quad (1.2)$$

或者：

$$\delta Q = dU + PdV, \quad \text{摩尔数不变。} \quad (1.3)$$

热量 (*heat*) 与热流 (*heat flux*) 这两个术语经常混用，因为热量就像功那样，是能量的传递 (*transfer*) 形式。能量被传入系统之后就不能分辨是通过做功还是传热传给系统的，尽管  $dU$  分为  $\delta Q$  与  $\delta W_M$  两部分，但能量  $U$  不能分为“做功”部分与“传热”部分。我们采用符号  $\delta$  表示无穷小做功与传热， $\delta Q$  与  $\delta W_M$  称为不完整微分 (*imperfect differentials*)。 $\delta W_M$  与  $\delta Q$  沿某一特定过程进行积分得到该过程的做功与传热值，而它们的和——能量差  $\Delta U$  与具体过程无关（只与初末状态有关）。

热量，功与能量的概念可通过如下的类比来说明。设一位农场主有个池塘，一条溪流注入池塘，另一条从池塘流出。池塘还通过降雨获得水分、通过蒸发流失水分（“负降雨”）。将池塘比作热力学系统，水量视为系统内能，溪流注入流出类比成做功，降雨蒸发当做传热。

首先，在任何时刻，池塘的水不能分成来自降水与来自溪流的部分。降雨只是水转移的形式。<sup>21</sup>

<sup>21</sup> 如同热是能量转移的形式。

然后考虑测量池塘水量的方法。可以使用流量计测量流入流出池塘的溪流量，但是对降雨而言没有那样的雨量计。为了测量降雨量，可以用防水布将池塘覆盖（类比绝热壁），使得降雨和蒸发不能改变水量。将一带刻度的长直杆垂直插入池塘以记录水位变化，通过在两条溪流筑坝即可控制池塘水位，结合流量计与刻度杆即可测定池塘水量 ( $U$ )。因此在防水布（绝热壁）的帮助下，池塘任意水位（状态）的水量（内能）都可测定<sup>22</sup>。

<sup>22</sup> 当然，就像1.7节只是测定系统任意状态相对于基准状态的能量那样，这里只测定池塘的任意水位相对于某一基准水位对应的水量。

把防水布撤去从而使降水可以影响池塘水量，要得到某一过程中降水导致的水量变化，可以通过如下间接方式。首先从刻度杆上读出水位的变化，从而水量的变化可以由上一段的方法得出。然后根据流量计测量溪流造成水量的变化。水量的变化减溪流造成的变化即为降水量。读者不难看出其中的类比关系。

因为做功与传热都是能量传递的形式，故功和热量的都是能量的单位。能量在 cgs 单位制<sup>23</sup>中的单位是 erg（尔格），在 mks 单位制<sup>24</sup>中为 joule（焦耳），记作 J，二者的关系为  $1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg}$ 。

<sup>23</sup>cgs: centimeter-gram-second 单位制，或者厘米-克-秒单位制，又称高斯单位制。

<sup>24</sup>mks: metre-kilogram-second 单位制，或者米-千克-秒单位制，又称国际单位制。

常用的能量单位还有 calorie（卡， $1 \text{ cal} = 4.1858 \text{ J}$ ）<sup>3</sup>。历史上，calorie 是在热与功的关系澄清之前所用的热量单位，直到现在，还有人只用 calorie 计量热量、用 joule 计量功。然而 calorie 与 joule 都是能量单位，它们描述功与热量都是可以的。

其他的能量单位制还有英国热量单位 (the British thermal unit, Btu)，升一大气压单位 (liter-atmosphere)，英尺-磅单位 (foot-pound) 与瓦特-时单位 (watt-hour)。各单位制能量单位间的转换参见本书封底。

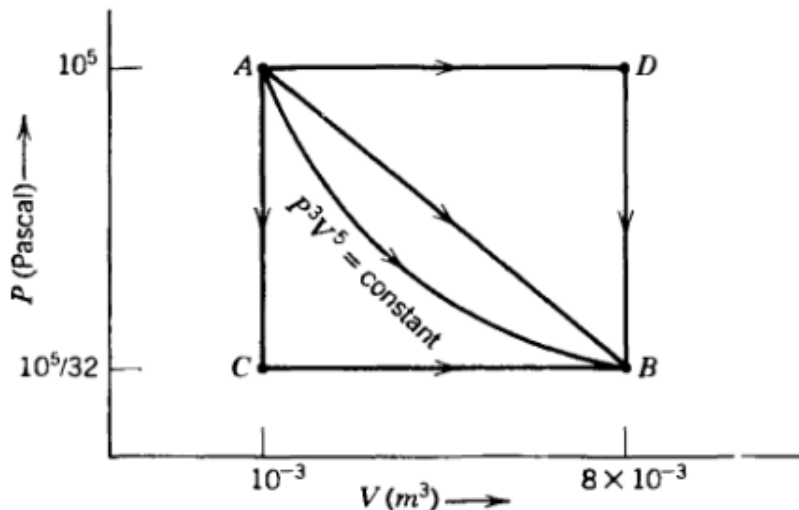
### 例 1

带有可移动活塞的气缸内封印着一定气体。通过观测发现，气体在绝热过程中满足：

$$P^3 V^5 = \text{constant}, \quad (\delta Q = 0)$$

- (a) 求下图  $ADB, ACB, A \xrightarrow{\text{直线}} B$  三个过程中外界对系统做的准静态功、外界传递给系统的热量。

<sup>3</sup>营养学家习惯把一千 calorie 简记为“Calorie”（这使得能量的数值合适不至于太大），但要命的是他们经常忘了大写字母 C，于是一千 calorie 成了一“calorie”！



在  $ADB$  过程中气体保持压强不变 ( $P = 10^5 \text{ Pa}$ ) 被加热, 从初始体积  $10^{-3} \text{ m}^3$  变为末态体积  $8 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ . 然后保持体积不变, 将气体冷却至压强降为  $10^5/32 \text{ Pa}$ . 同样, 其他过程 ( $ACB, AB$ ) 的具体内容由图不难看出。

- (b) 在系统内安装一个由发动机驱动的桨, 在发动机提供的力矩作用下桨以均匀角速度  $\omega$  转动, 观测到气体系统 (体积不变) 压强的变化率为:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{2}{3} \frac{\omega}{V} \times \text{力矩}$$

求证系统任意两个体积相等的状态的内能差可通过该过程计算。算出  $U_C - U_A$  和  $U_D - U_B$ .

这个过程只能单向进行 (只能从  $P-V$  图垂直向上而不能向下进行), 这是为啥?

- (c) 求证系统的任意两个平衡态 (即  $P-V$  图中的任意两点) 可通过 (a)、(b) 描述的两个过程联系起来。计算  $U_D - U_A$ .
- (d) 计算图中  $A \rightarrow D$  过程外界对系统做的功  $W_{AD}$  以及传递给系统的热  $Q_{AD}$ . 计算  $D \rightarrow B, C \rightarrow A$  过程同样的量, 并说明这些计算结果与 (a) 一致。

读者在参考下面的答案之前应该先尝试解答这些题目。

解答

- (a) 利用绝热条件  $Q = 0, \Delta U = W$  以及  $P^3 V^5 = \text{constant}$  ( $Q = 0$ ) 可得:

$$\begin{aligned} U_B - U_A &= W_{AB} = - \int_{V_A}^{V_B} P dV = -P_A \int_{V_A}^{V_B} \left( \frac{V_A}{V} \right)^{5/3} dV \\ &= \frac{3}{2} P_A V_A^{5/3} (V_B^{2/3} - V_A^{2/3}) \end{aligned}$$



$$= \frac{3}{2}(25 - 100) \text{ J} = -112.5 \text{ J}.$$

考虑  $ADB$  过程:

$$\begin{aligned} W_{ADB} &= - \int P dV = -10^5 \times (8 \times 10^{-3} - 10^{-3}) \text{ J} = -700 \text{ J} \\ U_B - U_A &= W_{ADB} + Q_{ADB} \\ Q_{ADB} &= (-112.5 + 700) \text{ J} = 587.5 \text{ J}. \end{aligned}$$

尽管能算出  $Q_{ADB}$ , 但不能分别得到  $Q_{AD}, Q_{DB}$ , 因为还不知道  $U_D - U_A$ .

其他过程的计算同理。答案是  $W_{ACB} = -21.9 \text{ J}, Q_{ACB} = -90.6 \text{ J}; W_{AB} = -360.9 \text{ J}, Q_{AB} = 248.4 \text{ J}$ .

- (b) 电动机的力矩使桨旋转角度  $d\theta$  传递给系统的能量<sup>4</sup>为  $dU = \text{力矩} \times d\theta$ , 另外  $d\theta = \omega dt$ , 因此

$$\begin{aligned} dP &= \frac{2}{3} \frac{1}{V} \cdot \text{力矩} \cdot \omega dt \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{V} dU \end{aligned}$$

整理得

$$dU = \frac{3}{2} V dP$$

$dU = \text{力矩} \times d\theta \rightarrow dU \geq 0$  ( $d\theta$  与力矩符号相同), 再结合  $V > 0$  可得  $dP \geq 0$ , 因此该过程只能向压强增大的方向单向进行。

$$\begin{aligned} U_A - U_C &= \frac{3}{2} V (P_A - P_C) = \frac{3}{2} \times 10^{-3} \times \left( 10^5 - \frac{1}{32} \times 10^5 \right) = 143.5 \text{ J} \\ U_D - U_B &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

- (c) 任意给定  $P-V$  图上两点, 为了将它们联系起来, 过其中任意一点画一条绝热线 (绝热过程对应的线), 再过另一点画等容线 ( $V = \text{常数}$ ), 这两条线相交, 于是两个过程联系起来。

前面已经利用绝热过程求出  $U_B - U_A = -112.5 \text{ J}$ , 利用不可逆的搅拌过程求出  $U_D - U_B = 1162.5 \text{ J}$ 。因此  $U_D - U_A = 1050 \text{ J}$ 。等

<sup>4</sup>注意电动机传递能量给系统既不是做功也不是传热的方式——这是一种非准静态 (*non-quasi-static*) 的能量传递。

价地, 可以将状态  $A$  设为基准态, 则

$$U_A = 0, \quad U_B = -112.5 \text{ J}, \quad U_C = -145.3 \text{ J}, \quad U_D = 1050 \text{ J}.$$

任意状态的内能  $U$  都可以求出。

(d) 已经计算出了  $U_D - U_A$  以及  $W_{AD}$ , 由此可得  $Q_{AD}$ :

$$U_D - U_A = W_{AD} + Q_{AD}$$

$$1050 \text{ J} = -700 \text{ J} + Q_{AD}$$

$$Q_{AD} = 1750 \text{ J}$$

同样

$$U_B - U_D = W_{DB} + Q_{DB}$$

$$-1162.5 \text{ J} = 0 + Q_{DB}.$$

为了检验, 计算  $Q_{AD} + Q_{DB} = 587.5 \text{ J}$ , 等于在 (a) 中计算的  $Q_{ADB}$ , nice!

<sup>25</sup> 译者水平有限只敢列出原文有答案的习题的解题过程……(没答案的不知道对错不敢放上去)

### 习题<sup>25</sup>

1.8-1. 计算本节例 1 中系统状态 ( $P = 5 \times 10^4 \text{ Pa}$ ,  $V = 8 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ ) 对应的内能。

以状态  $A$  为参考状态, 即设  $U_A = 0$ .

记 ( $P = 5 \times 10^4 \text{ Pa}$ ,  $V = 8 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ ) 为状态  $E$ . 因  $V_B = V_E$ , 故可通过例 1(b) 描述的不可逆搅拌过程从  $E$  演化到  $B$  态:

$$E \xrightarrow{\text{不可逆搅拌}} B$$

$$\begin{aligned} U_B - U_E &= \frac{3}{2} V_E (P_B - P_E) \\ &= \frac{3}{2} \times 8 \times 10^{-3} \times \left( \frac{1}{32} \times 10^5 - 5 \times 10^4 \right) \text{ J} \\ &= -562.5 \text{ J}. \end{aligned}$$

由例 1(c), 以  $A$  为参考态时,  $U_B = -112.5 \text{ J}$ , 故

$$U_E = (-112.5 - (-562.5)) \text{ J} = 450 \text{ J}.$$

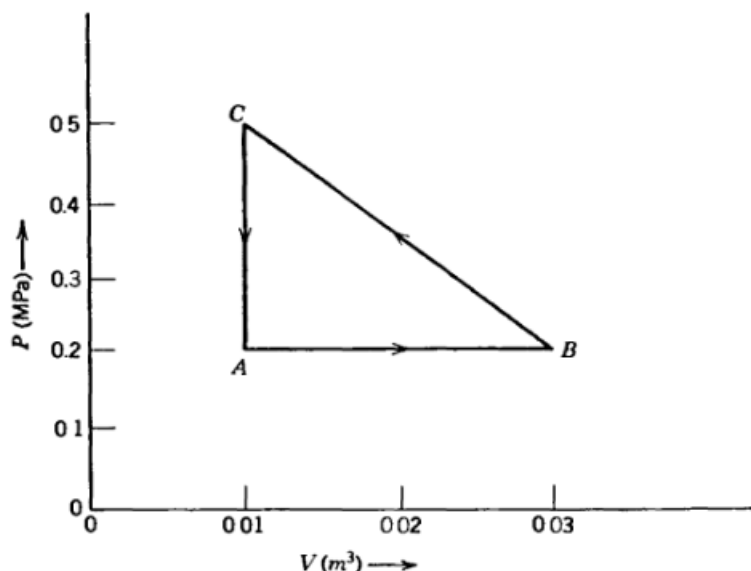
1.8-2. 还是例 1 的条件。记上一问的状态 ( $P = 5 \times 10^4 \text{ Pa}$ ,  $V = 8 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ ) 为  $X$ , 计算系统从状态  $A$  沿  $P-V$  图的直线演化到状

态  $X$  过程中吸收的热量。

1.8-3. 某一气体系统的能量为：

$$U = 2.8PV + \text{constant}.$$

系统的初始状态为  $P = 0.2 \text{ MPa}$  ( $10^6 \text{ Pa}$ ),  $V = 0.01 \text{ m}^3$ , 对应下图中的  $A$  点。系统经历图中的循环过程 ( $A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow A$ )。计算每个过程中系统的吸热量  $Q$  与外界对系统做的功  $W$ 。



以  $B \rightarrow C$  过程为例 (答案只给了  $BC$  过程的……)

状态  $B$ :  $V = 0.03 \text{ m}^3, P = 0.2 \text{ MPa}$ .

状态  $C$ :  $V = 0.01 \text{ m}^3, P = 0.5 \text{ MPa}$ .

直线  $BC$ :  $P = (-15 \text{ MPa m}^{-3})V + 0.65 \text{ MPa}$ .

$$W_{BC} = - \int_{V_B}^{V_C} P dV = - \int_{0.03}^{0.01} (-15V + 0.65) dV = 7 \times 10^3 \text{ J}.$$

$$U_C - U_B = 2.5(P_C V_C - P_B V_B) = 2.5(0.5 \times 0.01 - 0.2 \times 0.03) \text{ MJ} = -2.5 \times 10^3 \text{ J}.$$

$$Q_{BC} = (U_C - U_B) - W_{BC} = (-2.5 \times 10^3 \text{ J}) - 7 \times 10^3 \text{ J} = -9.5 \times 10^3 \text{ J}.$$

1.8-4. 求习题 1.8-3 中的系统在绝热过程中的  $P-V$  曲线, 即求  $P = P(V)$

使得沿这条线的过程满足  $\delta Q = 0$ 。

外界对系统做的功为

$$W = - \int_{V_0}^V P(V') dV'.$$

绝热过程中系统吸热  $Q = 0$ , 故内能变化量  $U = W$ 。由 1.8-3 中条件<sup>26</sup>可知, 初末状态的内能差为:

$$U = 2.5(PV - P_0V_0).$$

联立得

$$\begin{aligned} 2.5(PV - P_0V_0) &= - \int_{V_0}^V P(V') dV' \\ &= 2.5 \left( P + \frac{dP}{dV} V \right) = -P(V) \\ \frac{dP}{dV} &= -\frac{7}{5} \frac{P(V)}{V} \\ &\rightarrow P \propto V^{-7/5} \\ &\rightarrow P^5 V^7 = \text{constant}. \end{aligned}$$

1.8-5 单位摩尔数物质的某系统的内能为

$$U = AP^2V.$$

其中  $A$  是正的常数, 量纲为  $[P]^{-1}$ . 求  $P - V$  图绝热线的形式。

1.8-6 实验观测发现某系统保持体积  $V_0$  不变, 压强从  $P_0$  变化到任意值  $P'$  时, 系统吸收的热量为

$$Q' = A(P' - P_0) \quad (A > 0).$$

此外, 系统在绝热过程满足:

$$PV^\gamma = \text{constant} \quad (\gamma \text{ 是正的常数})$$

求任意状态的内能  $U(P, V)$ . (用已知量  $P_0, V_0, A, U_0 \equiv U(P_0, V_0)$  与  $\gamma$ , 当然还有自变量  $P, V$  表示)

$$A : (V_0, P_0), \quad B : (V_0, P_B), \quad C : (V, P).$$

构造如下状态使得系统从初态  $A$  演化到末态（任意状态） $C$ ：

$$A \xrightarrow{\text{定容过程}} B \xrightarrow{\text{绝热过程}} C.$$

$$A \xrightarrow{\text{定容过程}} B:$$

$$W_{AB} = 0, Q_{AB} = A(P_B - P_0),$$

$$U_B - U_A = W_{AB} + Q_{AB} = A(P_B - P_0).$$

$$B \xrightarrow{\text{绝热过程}} C:$$

$$Q_{BC} = 0.$$

$$PV^\gamma = P_B V_0^\gamma \rightarrow P = \frac{P_B V_0^\gamma}{V^\gamma}.$$

$$W_{BC} = - \int_{V_0}^V \frac{P_B V_0^\gamma}{V'^\gamma} dV' = -P_B V_0^\gamma \frac{V^{-\gamma+1} - V_0^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}.$$

$$U - U_B = Q_{BC} + W_{BC} = -P_B V_0^\gamma \frac{V^{-\gamma+1} - V_0^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}.$$

因此初末状态内能差为

$$\begin{aligned} U - U_0 &= (U - U_B) + (U_B - U_A) \\ &= -P_B V_0^\gamma \frac{V^{-\gamma+1} - V_0^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} + A(P_B - P_0). \end{aligned}$$

将  $P_B = PV^\gamma/V_0^\gamma$  带入得

$$\begin{aligned} U - U_0 &= -PV^\gamma \frac{V^{-\gamma+1} - V_0^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} + A\left(\frac{PV^\gamma}{V_0^\gamma} - P_0\right) \\ &= A(PV^\gamma - P_0) + PV \frac{1 - r^{\gamma-1}}{\gamma-1}. \quad (r \equiv \frac{V}{V_0}) \end{aligned}$$

1.8-7 实验观测发现，某具有 2 摩尔单一组分的系统内能  $U$  与压强、体积的关系为：

$$U = APV^2. \quad (N = 2)$$

注意，如果把系统的体积、内能与摩尔数均变为原来的两倍，压强不会改变。求任意摩尔数  $N$  的  $U = U(P, V, N)$ 。

## 1.9 热力学基本问题

现在准备工作已经完成，可以开始讨论热力学的基本问题以及它的解了。

回顾准备过程，我们发现仅仅选择了热力学变量就可以得到大量有意义的结果，热力学变量的选择标准揭示了测量的作用，宏观变量与杂乱的微观变量之间的区别体现出功与热的不同，热力学变量能否完整描述系统定义了平衡态。现在，热力学变量可以为热力学基本问题的解决提供框架。

实际上，有一个中心问题定义了热力学理论的核心，所有热力学的结果都可以从该问题的答案演化产生。

这独一无二、无所不包的热力学核心问题是——在移动一个封闭的复合系统的内部限制之后，确定系统最终演化到的平衡态。<sup>27</sup>

考虑封闭气缸内由活塞分隔的两个简单系统。设气缸壁与活塞刚性、绝热、不能透过物质，并且活塞被固定住，每个系统都是封闭的。如果去掉活塞的固定，一般情况下活塞会移动到新平衡位置。同理，去掉固定住的活塞绝热的限制，两个系统间的能量会重新分布。如果在活塞上打孔，则两系统的物质会重新分布（从而能量也会）。上述几种情形中，限制条件的去除使某些自发演化过程开始，当两个系统进入新平衡态之后，它们由热力学量  $U^{(1)}, v^{(1)}, N_1^{(1)}, \dots$  以及  $U^{(2)}, V^{(2)}, N_1^{(2)}, \dots$  描述。热力学的基本问题就是计算这些参量的值。

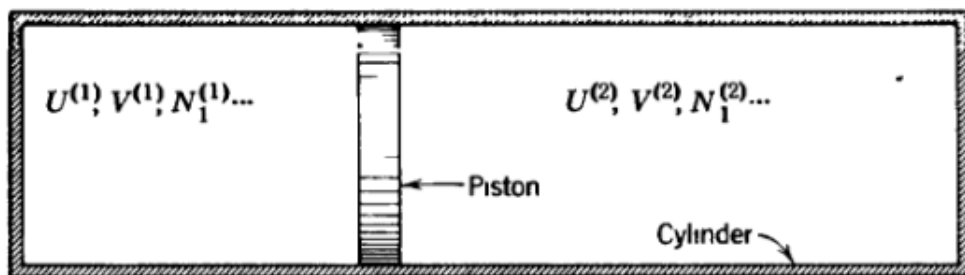


图 1.2

在下一节讲述解决此问题的定量方法之前，我们用更一般的方式重述基本问题，无需借助气缸与活塞。给定两个或多个简单系统，它们整体可以视为一个复合 (composite) 系统。封闭的复合系统被限制总能量、总体积与总摩尔数的壁包围，而封闭复合系统的简单子系统无需是封闭的，比如复合系统内部的活塞可以透热或者有个洞。复合系统的内部 (internal) 限制阻止了各简单系统之间的能量、体积或物质重新分布。一个封闭的复合系统在某一内部限制下达到平衡态，若将该内部限制去掉，则之前禁止的某些状态现在可能达到。这一过程使系统达到新平衡态。热力学的基本问题就是预言这一新平衡态。

<sup>27</sup> 原文: The single, all-encompassing problem of thermodynamics is the determination of the equilibrium state that eventually results after the removal of internal constraints in a closed, composite system.

## 1.10 最大熵假设

由热力学的中心原理出发可解决热力学基本问题，而从实验观测归纳出中心原理的过程相当微妙。这一人类智慧的杰作在历史上最终由 Caratheodory 分析完成。以 Josiah Willard Gibbs 为先驱的统计力学方法需要熟练的归纳性灵感。The symmetry-based foundations to be developed in Chapter 21 will provide retrospective understanding and interpretation, but they are not yet formulated as a deductive basis. 因此我们仅仅将热力学基本问题的解决方法以一系列后验性的<sup>28</sup>假设给出，而非以先验的证据的形式。实际上在考虑到基本问题最简单的形式解之后，这些假设是非常自然的。On this basis alone the problem *might* have been solved; 将一个问题的最简形式解作为试探性的假设是理论物理学常见而管用的套路。

<sup>28</sup> 意思是假设的正确性由它导出的结论的正确性（后验性地）验证。

平衡态最简单而又靠谱的判断标准是什么？物理学的人生经验告诉我们——平衡的黄金准则是让某个量取极值。亦即，我们猜想，处于平衡终态系统的各广延量 ( $U, V, N, \dots$ ) 使得某个函数取最大值<sup>5</sup>。再（乐观地）假设这个函数有非常好的数学性质<sup>29</sup>，这样能保证所导出的理论的简洁性。如前述，下面提出一系列（三个，1.5节还有一个）假设以解决热力学基本问题。

<sup>29</sup> 数学家眼中搞物理的要流氓系列

**假设 II.** 任意复合系统的平衡态都存在一个广延量的函数（称为熵，记作  $S = S(U, V, N_1, \dots, N_r)$ ），熵在系统处于任意平衡态时定义为有如下性质：

在系统的广延量没有内部限制时，平衡态对应的广延量使得熵函数取最大值。

原文：There exists a function (called the entropy  $S$ ) of the extensive parameters of any composite system, defined for all equilibrium states and having the following property: The values assumed by the extensive parameters in the absence of an internal constraint are those that maximize the entropy over the manifold of constrained equilibrium states.

必须强调，上面的假设只定义了熵在系统处于平衡态的性质，丝毫未涉及非平衡态。没有内部限制的系统可以处于任何状态，而其中每个状态都可以当存在某些限制时达到。这种有限制的平衡态的熵在上面已经被定义，且其中某一平衡态的熵最大。在没有限制的情况下，系统的平衡态就是该最大熵对应的平衡态。

设想两个被透热壁分隔的子系统，总能量  $U$  在两个子系统之间如何分配？首先考虑将透热壁换为绝热壁的复合系统，子系统的能量分别为  $U^{(1)}, U^{(2)}$ （当然  $U^{(1)} + U^{(2)} = U$ ）。每个有限制的平衡态<sup>30</sup>( $U^{(1)}, U^{(2)}$ )

<sup>30</sup> 也许指复合系统的总能量  $U$  被限制。

<sup>5</sup>其实取最小值也可以，假设取最大值只是惯例，两个选项只差一个负号，不影响理论的逻辑结构。

对应一个熵，熵在某个特定的  $U^{(1)*}, U^{(2)*}$  处取最大值。因此当绝热的限制去掉，即子系统由透热壁分隔时，复合系统的平衡态对应的能量分配为  $U^{(1)*}, U^{(2)*}$ 。

热力学的所有问题都可以从1.9节介绍的基本问题导出。若系统的熵关于广延量的函数关系已知，则基本问题就可迎刃而解。熵关于广延量的函数关系式称为热力学基本关系 (*fundamental relation*)。因此若系统的基本关系已知，则该系统所有热力学信息都可从中得出。

上文陈述的内容极其重要。基本关系包含了系统所有的热力学信息——它等价于系统所有的数据、图表等任何描述热力学性质的内容。若系统的基本关系已知，则任何热力学性质都可精确求出。

**假设 III.** 复合系统的熵等于所有子系统的熵之和，即熵具有可加性。

熵是连续、可微，且关于内能单调递增的函数。

由该假设立即可导出一些熵的数学性质。熵具有可加性，即复合系统的熵  $S$  是各子系统的熵  $S^{(\alpha)}$  之和：

$$S = \sum_{\alpha} S^{(\alpha)}. \quad (1.4)$$

每个子系统的熵是各自的广延量的函数：

$$S^{(\alpha)} = S^{(\alpha)}(U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)}, N_1^{(\alpha)}, \dots, N_r^{(\alpha)}). \quad (1.5)$$

将可加性应用于空间上分开的几个子系统，可得熵的如下性质：简单系统的熵是广延量的一阶齐次函数。也就是说，将系统的所有广延量变为  $\lambda$  倍，则熵也变为  $\lambda$  倍，用公式表示为：

$$S(\lambda U, \lambda V, \lambda N_1, \dots, \lambda N_r) = \lambda S(U, V, N_1, \dots, N_r). \quad (1.6)$$

熵关于内能单调递增意味着偏导数大于零：

$$\left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V, N_1, \dots, N_r} > 0. \quad (1.7)$$

下一章会看到，上式左侧的倒数即为温度  $T$  的定义，因此根据该假设，温度是非负的<sup>6</sup>。

熵的连续、可微性以及关于内能的单调性意味着熵函数可以转化为

<sup>6</sup>这个偏导数为负数（即温度为负数）可能性的讨论可见 N F Ramsey, *Phys. Rev.* 103, 20 (1956). 负温度的真实系统并非处于平衡态，因此与(1.7)式不矛盾。这种状态只能在非常特殊的系统（例如孤立自旋系统）中实现，并且很快就衰变掉了。然而这种负温度状态的研究具有统计力学意义，例如阐明统计力学中温度的概念。



内能关于  $S, V, N_1, \dots, N_r$  的单值、连续以及可微的函数，即：

$$S = S(U, V, N_1, \dots, N_r) \quad (1.8)$$

可以唯一地解出具有如下形式的内能函数  $U$ ：

$$U = U(S, V, N_1, \dots, N_r). \quad (1.9)$$

(1.8)与(1.9)式是基本关系的两种形式，它们中的每一个都包含了系统的所有热力学信息。

熵的广延性表明  $N$  摩尔物质的系统的熵等于 1 摩尔系统的熵的  $N$  倍，这用基本关系表示为：

$$S(U, V, N_1, \dots, N_r) = N S\left(\frac{U}{N}, \frac{V}{N}, \frac{N_1}{N}, \dots, \frac{N_r}{N}\right). \quad (1.10)$$

上式即为(1.6)式中的因子  $\lambda$  取  $1/N \equiv 1/\sum_k N_k$  的结果。对于单一组分的简单系统有：

$$S(U, V, N) = N S\left(\frac{U}{N}, \frac{V}{N}, 1\right), \quad (1.11)$$

$U/N$  是单位摩尔数的内能，将它记作  $u$ ：

$$u \equiv \frac{U}{N}, \quad (1.12)$$

同样，单位摩尔数对应的体积  $V/N$  记作  $v$ ：

$$v \equiv \frac{V}{N}. \quad (1.13)$$

因此  $S(U/N, V/N, 1) \equiv S(u, v, 1)$  是单位摩尔粒子数的系统的熵，记作  $s(u, v)$ ：

$$s(u, v) \equiv S(u, v, 1). \quad (1.14)$$

于是(1.11)式写为

$$S(U, V, N) = N s(u, v). \quad (1.15)$$

假设 IV. 在

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V, N_1, \dots, N_r} = 0 \quad (\text{即温度为零})$$

的状态下，任何系统的熵为零。

后面会看到，偏导数  $(\partial U/\partial S)_{V,N_1,\dots,N_r} = 0$  等价于温度  $T = 0$ 。因此假设 IV 的内容是温度为零意味着熵为零。

应该指出，该假设表明熵  $S$  有确定的零点（就像  $V$  和  $N$  那样，而不像  $U$ ）。

假设 IV 是 Planck 对 *Nernst* 假设或称为热力学第三定律的拓展。它是历史上最晚提出的热力学假设，并且它与经典统计力学不一致，只有在量子统计的框架下才能被接受。大部分热力学内容不需要该假设，我们在第十章才开始用到它。然而它仍然是不可或缺的基本假设之一。

以上所述的四个假设就是建立热力学的逻辑基础。根据这些假设，我们简要地重述1.9节讲过的热力学基本问题的求解方法。给定一个复合系统，各子系统的基本方程原则上是已知的。子系统处于平衡态时，由基本方程可以算出对应的熵。若复合系统在某些限制下达到平衡态，则每个子系统的广延量会取特定的值以使得总体的熵最大（总熵 = 各子系统熵之和），总系统的熵是各子系统广延量的函数，对基本方程<sup>31</sup>求偏导数以计算熵的极值，再利用二阶偏导将极值点分为极大值、极小值与驻点。在（后文）定义必要的物理概念之后，我们可以将平衡态根据稳定性 (*stability*) 分类。注意，在引入稳定性的概念后，平衡态的定义会有所变化：上面说的“平衡态”今后专指“稳定平衡态”<sup>32</sup>，而“不稳定平衡态”则表示熵函数极大值之外的极值点。

应该指出，尽管所有热力学问题原则上都可以按上述套路求解，但有些情况存在着其他更便利的方法，后面的章节会一一介绍。例如，有时求  $U(S, V, N_1, \dots, N_r)$  的极小值要比求  $S(U, V, N_1, \dots, N_r)$  的极大值更简单，这两种方法对应的平衡态是相同的，就像“给定面积的使得周长最小”或“给定周长使得面积最大”所得图形都是圆一样。在后面的章节中我们会引入更多特征函数，将它们极小化等价于将能量极小化或将熵极大化。

基本方程有能量或熵两种形式，极值原理可以是能量取极小值或者熵取极大值，这使得极值假设看起来更加靠谱。在电磁学和力学中，能量是电磁学/力学参数的函数（忽略热效应），平衡条件是能量取极小值。例如一个侧躺的圆锥体比倒放的情况更稳定，因为前者的重力势能更低。考虑热效应之后，能量不仅仅是力学量的函数，然而根据基本方程的变体<sup>33</sup>，能量的自变量仅仅增加了一个（熵）。将熵引入自变量后最小能量原理就能从力学扩展到热学领域，这样就能得到热力学与力学的对应原理——当热效应可忽略时，热平衡态条件退化到力学平衡条件。

数学告诉我们  $S(U, V, N_1, \dots, N_r)$  的极大值点对应  $U(S, V, N_1, \dots, N_r)$  极小值点的条件是  $(\partial S/\partial U)_{V,N_1,\dots,N_r} > 0$ 。这是引入假设 III 的动机之一——最大熵原理对应（基本方程为  $U(S, V, N, \dots)$  的）最小能量原理。

<sup>31</sup> 熵 = 熵（广延量），即  $S = S(U, V, N_1, \dots, N_r)$ 。

<sup>32</sup> 稳定平衡态对应于熵的极大值点。

<sup>33</sup>  $U = U(S, V, N_1, \dots, N_r)$ 。

第 II 部分和第 III 部分将从对称性根源与统计力学意义上深入探讨熵的概念，但现在就开始的话会脱离正轨。接下来首先要从简单的基本假设出发，导出经典热力学的丰富结论，之后再做深入讨论。

## 习题

DRAFT TRANSLATION

DRAFT TRANSLATION

## 2. 平衡条件

### 2.1 强度量

无论出于实际还是理论需要，基本方程的微分形式总是有用的。将基本方程写为

$$U = U(S, V, N_1, \dots, N_r). \quad (2.1)$$

计算一阶微分：

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N_1, \dots, N_r} dS + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, N_1, \dots, N_r} dV + \sum_{j=1}^r \left( \frac{\partial U}{\partial N_j} \right)_{S, V, \dots, N_r} dN_j. \quad (2.2)$$

上式出现的偏导数十分常用，值得用特定符号标记它们。它们称为强度量 (*intensive parameters*)，记作<sup>1</sup>：

$$\left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N_1, \dots, N_r} \equiv T, \quad \text{温度} \quad (2.3)$$

$$- \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, N_1, \dots, N_r} \equiv P, \quad \text{压强} \quad (2.4)$$

$$\left( \frac{\partial U}{\partial N_j} \right)_{S, V, \dots, N_k, \dots} \equiv \mu_j, \quad \text{第 } j \text{ 种组分的电化学势} \quad (2.5)$$

这样(2.2)式写为

$$dU = TdS - PdV + \sum_{j=1}^r \mu_j dN_j. \quad (2.6)$$

<sup>1</sup> 这里的“温度”、“压强”、“电化学势”只是起了个名字，但本章后面就会看到这些定义合理之处。

稍后就会看到这样定义的温度与生理上冷热感觉的定性概念相符合，没人愿意采用与经验相冲突的定义。不过现在暂时把温度当做一个数学定义就行了。

类似地，后面会证明这样定义的压强与力学里的压强是一回事。人们一般对电化学势没什么直观印象，因此最后一个定义（(2.5)式）不难接受。

电化学势通常简称为化学势 (*chemical potential*)，这两个词语我们都采用<sup>1</sup>。

根据(1.1)式，(2.6)式的  $-PdV$  项即为（外界对系统做的）准静态功  $\delta W_M$ 。

摩尔数不变的情况下，(2.6)式化为

$$TdS = dU - \delta W_M, \quad \text{若 } dN_1 = dN_2 = \cdots = dN_r = 0. \quad (2.7)$$

利用准静态过程热流的定义<sup>2</sup>，或者比较(2.7)式与(1.2)式可得， $TdS$  即为准静态热流：

$$\delta Q = TdS. \quad (2.8)$$

流入系统的准静态热流与系统熵的增加相联系。<sup>3</sup>

(2.6)式余下的一项与系统加入物质后的内能变化有关。这种能量流动在热力学之外很少讨论（尽管容易想象），因而没有通用的名字。我们称  $\sum_j \mu_j dN_j$  为准静态化学功 (*quasi-static chemical work*)，记作  $\delta W_c$ ：

$$\delta W_c \equiv \sum_{j=1}^r \mu_j dN_j. \quad (2.9)$$

因此

$$dU = \delta Q + \delta W_M + \delta W_c. \quad (2.10)$$

(2.6)式中的每一项—— $TdS$ ,  $-PdV$ ,  $\mu_j dN_j$  都具有能量量纲。2.6节具体讨论单位的事情。这里应该指出，由于尚未指定熵的量纲与单位，故而温度的量纲仍悬而未决。化学势  $\mu$  的单位与能量相同（因为粒子数是无量纲的）。根据定义，压强的单位与力学中的一样，不同单位制的转换参见本书封底。

<sup>1</sup>注意，有些情形（特别是固体理论领域）的“化学势”定义为电化学势  $\mu$  减去分子静电能量。

<sup>2</sup> $\delta Q \equiv dU - \delta W$ .

<sup>3</sup>原文: *quasi-static flux of heat into a system is associated with an increase of entropy of that system.*

## 2.2 状态方程

温度、压强和化学势都是基本方程对自变量  $S, V, N_1, \dots, N_r$  的偏导数, 因此它们也是  $S, V, N_1, \dots, N_r$  的函数, 即

$$T = T(S, V, N_1, \dots, N_r) \quad (2.11)$$

$$P = P(S, V, N_1, \dots, N_r) \quad (2.12)$$

$$\mu_j = \mu_j(S, V, N_1, \dots, N_r) \quad (2.13)$$

上面这样将强度量用广延量表示的方程称为状态方程 (*equations of state*)。

单个状态方程并不包含系统所有的热力学信息, 后面会看到, 全体状态方程才与基本方程一样完备描述热力学系统。

由基本方程的一阶齐次性可直接导出状态方程是零阶齐次的 (*homogeneous zero order*), 也就是说将系统所有广延量变化  $\lambda$  倍, 强度量仍不变:

$$\begin{aligned} T(\lambda S, \lambda V, \lambda N_1, \dots, N_r) &= \frac{\partial U(\lambda S, \lambda V, \lambda N)}{\partial(\lambda S)} \\ &= \frac{\partial[\lambda U(S, V, N)]}{\lambda \partial S} \quad (\text{基本方程的一阶齐次性}) \\ &= \frac{\partial U(S, V, N)}{\partial S} = T(S, V, N) \\ T(\lambda S, \lambda V, \lambda N_1, \dots, N_r) &= T(S, V, N_1, \dots, N_r). \end{aligned} \quad (2.14)$$

可见同一系统部分与整体的温度相等, 这符合温度的直观感觉。压强与化学势同样具有(2.14)式的性质。

可以用更简明的符号简化上述式子。将广延量  $V, N_1, \dots, N_r$  统一记作  $X_1, X_2, \dots, X_t$ , 于是基本方程写为

$$U = U(S, X_1, X_2, \dots, X_t). \quad (2.15)$$

强度量为:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{X_1, X_2, \dots, X_t} &\equiv T = T(S, X_1, X_2, \dots, X_t) \quad (2.16) \\ \left( \frac{\partial U}{\partial X_j} \right)_{S, \dots, X_k, \dots} &\equiv P_j = P_j(S, X_1, X_2, \dots, X_t), \quad j = 1, 2, \dots, t. \end{aligned} \quad (2.17)$$

基本方程的微分形式为

$$dU = TdS + \sum_{j=1}^t P_j dX_j. \quad (2.18)$$

<sup>4</sup> 负号的麻烦源于压强  $P$  是力学中早已定义好了的。

注意(2.4)式有负号, 但(2.17)式没有。按照热力学的体系, 与强度量  $T, \mu_j$  地位相同的量是压强的  $-1$  倍<sup>4</sup>:  $-P$ , (2.17)式中某个  $P_j$  代表的是  $-P$ 。

对于单组分简单系统, 各方程经常用单位摩尔数的物理量表示。类似(1.11)与(1.15)式的关系那样, 单位摩尔数的内能为

$$u = u(s, v), \quad (2.19)$$

其中

$$s = \frac{S}{N}, \quad v = \frac{V}{N} \quad (2.20)$$

$$u(s, v) = \frac{1}{N} U(S, V, N). \quad (2.21)$$

(2.19)式等号两侧微分:

$$du = \frac{\partial u}{\partial s} ds + \frac{\partial u}{\partial v} dv, \quad (2.22)$$

再结合

$$\left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)_v = \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)_{V, N} = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, N} = T \quad (2.23)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_s = -P \quad (2.24)$$

可得

$$du = Tds - Pdv. \quad (2.25)$$

## 习题

2.2-1 某系统的基本方程为

$$U = \left( \frac{v_0 \theta}{R^2} \right) \frac{S^3}{NV}.$$

(括号里的一坨都是常数, 下同)

求相应的三个状态方程, 并验证它们是零阶齐次的。

2.2-2 条件同 2.2-1 题, 用  $T, V, N$  表示  $\mu$ .

2.2-3 画出 2.2-1 题的系统在恒温条件下压强关于体积的变化曲线(等温线)。画两条温度不同的等温线, 指出哪一条温度更高。



2.2-4 某系统的基本方程为

$$u = \left(\frac{\theta}{R}\right) s^2 - \left(\frac{R\theta}{v_0^2}\right) v^2,$$

求三个状态方程, 并证明对于该系统有  $\mu = -u$ .

2.2-5 条件同 2.2-4 问, 求  $\mu$  关于  $T, P$  的函数关系。

2.2-6 某系统的基本方程为

$$u = \left(\frac{v_0\theta}{R}\right) \frac{s^2}{v} e^{s/R}.$$

求三个状态方程。

2.2-7 观测到某系统具有如下关系:

$$u = Av^{-2}e^{s/R}.$$

$N$  摩尔该物质组成的系统, 初始温度  $T_0$ , 初始压强  $P_0$ , 经历等熵膨胀 ( $S = \text{常数}$ ) 过程, 终态压强为  $P_0/2$ , 求终态的温度  $T_f$ 。

$$\text{答案: } T_f = 2^{-2/3}T_0 = 0.63T_0.$$

解:

$$\begin{aligned} U &= Nu = NAv^{-2}e^{s/R} \\ &= A \frac{N^3}{V^2} e^{S/(NR)} \\ P &= - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,N} = 2AN^3 \frac{1}{V^3} e^{S/(NR)}. \end{aligned}$$

等熵膨胀过程初末状态的熵相等:  $S_f = S_0 \equiv S$ .

由已知条件  $P_f = \frac{1}{2}P_0$ , 联立得

$$\begin{aligned} 2AN^3 \frac{1}{V_f^3} e^{S/(NR)} &= \frac{1}{2} \left( 2AN^3 \frac{1}{V_0^3} e^{S/(NR)} \right) \\ \rightarrow V_f &= 2^{1/3}V_0. \\ T &= \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,N} = \frac{AN^2}{RV^2} e^{S/(NR)} \\ T_f &= \frac{AN^2}{RV_f^2} e^{S/(NR)} \\ &= \frac{AN^2}{RV_0^2} e^{S/(NR)} \frac{1}{2^{2/3}} \quad (V_f = 2^{1/3}V_0) \\ &= 2^{-2/3}T_0 = 0.63T_0. \end{aligned}$$

2.2-8 类似(2.25)式, 证明由  $r$  种组分组成的系统满足:

$$du = Tds - Pdv + \sum_{j=1}^{r-1} (\mu_j - \mu_r) dx_j.$$

其中  $x_j \equiv N_j/N$ , 是第  $j$  种组分的摩尔分数。

2.2-9 某单组分系统在绝热过程中满足  $PV^k = \text{constant}$ , 其中  $k$  为正的常数, 求证系统的内能为:

$$U = \frac{1}{k-1} PV + Nf(PV^k/N^k).$$

其中  $f$  为任意函数。

提示: 由条件知  $PV^k$  是  $S$  的函数, 且  $(\partial U/\partial V)_S = g(S)V^{-k}$ , 其中  $g(S)$  是任意函数。

### 2.3 熵表象下的强度量

前两节的基本方程形式为  $U = U(S, \dots, X_j, \dots)$ , 内能  $U$  是因变量。基本方程还有另一种以熵  $S$  为因变量的形式, 可以按照与前面相似的步骤建立另一种形式, 将  $U$  记作  $X_0$ , 基本方程写为

$$S = S(X_0, X_1, \dots, X_t). \quad (2.26)$$

上式取微分:

$$dS = \sum_{k=0}^t \frac{\partial S}{\partial X_k} dX_k. \quad (2.27)$$

偏导数  $\partial S/\partial X_k$  记作  $F_k$ :

$$F_k \equiv \frac{\partial S}{\partial X_k}. \quad (2.28)$$

$F_k$  与(2.16)、(2.17)式定义的偏导数  $P_j$  当然有关系, 具体为:

$$F_0 = \frac{1}{T}, \quad F_k = \frac{-P_k}{T} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.29)$$

读者在辨明求偏导数过程中哪些变量保持不变之后不难证明上式, 相关的微积分内容可参见附录 A。上式也可通过将(2.18)式变形为  $dS$  的显式形式进而比较得出。

尽管  $F_k$  与  $P_k$  关系密切, 但原则上它们是截然不同的。 $P_k$  是微分一个关于  $S, \dots, X_j, \dots$  的函数得到的, 因而  $P_k$  是  $S, \dots, X_j, \dots$  的函数。同理,  $F_k$  是  $U, \dots, X_j, \dots$  的函数。前一种情况里熵  $S$  是独立变量

中的一个, 后者当中内能  $U$  是独立变量。在热力学的推导/计算过程中必须明确选定其中一种独立变量的集合, 并且从一而终不能改变。同一问题混用两套独立变量是许多疑难的万恶之源。

如果选择熵  $S$  为因变量, 因而内能为独立变量, 基本方程为  $S = S(U, \dots, X_k, \dots)$ , 则称为在熵表象 (*entropy representation*) 下分析问题。如果选择能量为因变量, 熵为独立变量, 基本方程  $U = U(S, \dots, X_k, \dots)$ , 则称为在能量表象 (*energy representation*) 下分析。

热力学的标准理论在两种表象下都可以建立, 但特定问题在某一表象下可能大大简化。因此我们平行发展两套表象理论, 而且在一种表象下详细讨论之后, 转化到另一套表象是比较容易的。

- 关系式  $S = S(X_0, \dots, X_j, \dots)$  称为熵的热力学基本关系 (*entropic fundamental relation*),
- 独立变量集合  $X_0, \dots, X_j, \dots$  称为熵的广延量 (*entropic extensive parameters*),
- $F_0, \dots, F_j, \dots$  称为熵的强度量 (*entropic intensive parameters*)。

类似地,

- 关系式  $U = U(S, X_1, \dots, X, \dots)$  称为能量的热力学基本关系 (*energetic fundamental relation*),
- $S, X_1, \dots, X, \dots$  称为能量的广延量 (*energetic extensive parameters*),
- $T, P_1, \dots, P_j, \dots$  称为能量的强度量 (*energetic intensive parameters*)。

## 习题

2.3-1. 某系统的基本方程为

$$u = \left( \frac{v_0^{1/2} \theta}{R^{3/2}} \right) \frac{s^{5/2}}{v^{1/2}}.$$

求熵表象下的三个状态方程。

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \frac{2}{5} \left( \frac{v_0^{1/2} \theta}{R^{3/2}} \right)^{-2/5} \frac{v^{1/5}}{u^{3/5}} \\ \frac{\mu}{T} &= -\frac{2}{5} \left( \frac{v_0^{1/2} \theta}{R^{3/2}} \right)^{-2/5} u^{2/5} v^{1/5} \end{aligned}$$

2.3-2. 作出压强恒定条件下温度随体积的关系曲线 (等压线), 画出两条压强不同的等压线, 指出哪条的压强更大。

2.3-3. 某系统的基本方程为

$$u = \left(\frac{\theta}{R}\right) s^2 e^{-v^2/v_0^2}$$

求熵表象下的三个状态方程。

2.3-4. 某系统的基本方程为

$$S = AU^n V^m N^r$$

其中  $A$  是正的常数。热力学基本假设要求  $n, m, r$  必须满足什么条件？如果要求在  $N$  一定的条件下  $P$  关于  $U/V$  单调递增（这个条件是稳定性条件的要求，见第 8 章），则  $n, m, r$  必须满足什么条件？明确起见，能量的零点规定在零温状态。

2.3-5. 某系统的基本方程为

$$\frac{S}{R} = \frac{UV}{N} - \frac{N^3}{UV}.$$

- (a) 验证熵表象下的三个状态方程是零阶齐次的。
- (b) 求证温度是正的。
- (c) 求“力学状态方程”  $P = P(T, v)$ .
- (d) 求  $P - v$  平面上绝热线（即等熵线）的形式。

## 2.4 热平衡态——温度

下面讨论关于熵的极值原理的一些 interesting 的东西。考虑一个封闭的简单复合系统，它的两个子系统由固定且不可透过物质的透热壁分隔，因此子系统的体积与摩尔数恒定，但内能  $U^{(1)}, U^{(2)}$  可变，复合系统的封闭性要求

$$U^{(1)} + U^{(2)} = \text{常数}. \quad (2.30)$$

如何求出平衡状态下子系统的内能  $U^{(1)}, U^{(2)}$ ？根据基本假设，平衡态对应的  $U^{(1)}, U^{(2)}$  使复合系统的熵取极大值<sup>5</sup>。根据极值条件，平衡状态下子系统之间无穷小的能量传递不改变复合系统的熵，即

$$dS = 0. \quad (2.31)$$

由熵的可加性，复合系统的熵即为两个子系统熵之和：

$$S = S^{(1)}(U^{(1)}, V^{(1)}, \dots, N_j^{(1)}, \dots) + S^{(2)}(U^{(2)}, V^{(2)}, \dots, N_j^{(2)}, \dots). \quad (2.32)$$

<sup>5</sup> 一直以来原文采用的都是 maximize（最大化），但使用的数学条件是极大值条件  $dS = 0, d^2S < 0$ 。因此这里译作极大值。

$U^{(1)}, U^{(2)}$  的微小变化造成熵的变化为

$$dS = \left( \frac{\partial S^{(1)}}{\partial U^{(1)}} \right)_{V^{(1)}, \dots, N_j^{(1)}, \dots} dU^{(1)} + \left( \frac{\partial S^{(2)}}{\partial U^{(2)}} \right)_{V^{(2)}, \dots, N_j^{(2)}, \dots} dU^{(2)} \quad (2.33)$$

利用温度的定义，上式化为

$$dS = \frac{1}{T^{(1)}} dU^{(1)} + \frac{1}{T^{(2)}} dU^{(2)}. \quad (2.34)$$

由能量守恒 ((2.30)式) 可得

$$dU^{(2)} = -dU^{(1)}. \quad (2.35)$$

故而

$$dS = \left( \frac{1}{T^{(1)}} - \frac{1}{T^{(2)}} \right) dU^{(1)}. \quad (2.36)$$

平衡条件(2.31)式要求  $dU^{(1)}$  取任意值都有  $dS = 0$ ，因此

$$\frac{1}{T^{(1)}} = \frac{1}{T^{(2)}}. \quad (2.37)$$

这就是平衡态条件。如果各子系统的基本方程已知，则  $1/T^{(1)}$  是关于  $U^{(1)}$  的已知函数<sup>6</sup>，同样， $1/T^{(2)}$  也是  $U^{(2)}$  的已知函数。方程  $1/T^{(1)} = 1/T^{(2)}$  是关于  $U^{(1)}, U^{(2)}$  的等式。守恒条件  $U^{(1)} + U^{(2)} = \text{常数}$  提供第二个等式，这样  $U^{(1)}, U^{(2)}$  原则上即可解出。给出基本方程的特定形式后就能解出  $U^{(1)}, U^{(2)}$  的值。在实际应用中系统的基本方程可以通过经验观测（测量方式见后文）或者统计力学模型导出。这样热力学理论就能给出确定的定量预言。

<sup>6</sup> 当然还有  $V^{(1)}, N_k^{(1)}, \dots$ ，不过它们都是常数。

(2.37)式可以写为  $T^{(1)} = T^{(2)}$ ，前面将它写成  $1/T^{(1)} = 1/T^{(2)}$  是为了强调分析过程是在熵表象下进行的<sup>7</sup>， $1/T^{(1)}$  意味着它是  $U^{(1)}, V^{(1)}, \dots$  的函数，而  $T^{(1)}$  是  $S^{(1)}, V^{(1)}, \dots$  的函数。不过(2.37)式的物理意义仍然是两个子系统在平衡态下的温度相等。

<sup>7</sup> 能量  $U$  作为独立变量之一。

这个问题的二阶内容是研究平衡态的稳定性。上面的平衡态只利用了极值条件  $dS = 0$ ，但基本假设的内容是熵取极大值。极大值的条件除了  $dS = 0$  之外还有

$$d^2S < 0. \quad (2.38)$$

这一条件与平衡态的稳定性有关，具体内容在第 8 章讨论。

## 2.5 温度定义与直观概念的一致性

上一节的例子表明两个由透热壁分隔的系统达到平衡态时它们的温度相等，这是温度的定义与直观概念相符合的几个证据之一。

进一步考虑上面的例子。假设初始时两个被绝热壁分隔的子系统有微小的温度差，不妨设

$$T_0^{(1)} > T_0^{(2)}. \quad (2.39)$$

由绝热壁的限制，初始时系统处于平衡态。移除内部的绝热壁限制后系统不再是平衡态，子系统之间有热量流动，复合系统的熵增加。系统最终的平衡态为  $T^{(1)} = T^{(2)}$ ，或者复合系统的熵取（相应限制之下的）极大值。末态与初态熵的差值记作  $\Delta S$ ，则

$$\Delta S > 0. \quad (2.40)$$

但是根据(2.36)式，

$$\Delta S \approx \left( \frac{1}{T_0^{(1)}} - \frac{1}{T_0^{(2)}} \right) \Delta U^{(1)}. \quad (2.41)$$

其中  $T_0^{(1)}, T_0^{(2)}$  是温度的初始值。根据条件  $T_0^{(1)} > T_0^{(2)}$  可得

$$\Delta U^{(1)} < 0. \quad (2.42)$$

这意味着热量从系统 1 传递到系统 2。由此推论热量从温度高的系统流向温度低的系统。这再次与温度的直观概念相符。应该注意，这个结论不依赖于  $T^{(1)}, T^{(2)}$  相差很小的假设，这个假设只是为了计算简明，一般情况进行积分即可。

基于生理学冷热的温度的直观概念有两个基本特征。第一，温度是强度量，系统部分与整体的温度相等。第二，热量从高温系统向低温系统传递。这些特征要求平衡状态下温度相等且具有均匀性。温度的定量定义符合上述要求。

## 2.6 温度单位

温度的单位是能量单位除以熵的单位，熵的单位尚未指定，实际上熵的单位怎样都可以。因为熵乘以任意有量纲常量所得具有新量纲的函数满足同样的极值原理——因此与熵等价。为了消除这个任意性，我们指定熵是无量纲的<sup>8</sup>。因而温度的量纲与能量相同。注意，就像力矩和功量纲相同但性质不同、单位也不同<sup>9</sup>那样，温度与能量也要清楚区分。能量与温度的量纲 (*dimensions*) 都是 [质量·(长度)<sup>2</sup>/(时间)<sup>2</sup>]。能量的单位

<sup>8</sup> 从后面的统计力学的角度可见这个选择非常具有物理意义。

<sup>9</sup> 力矩：牛顿·米 (N·m)，功：焦 (J)

(units) 是焦耳、尔格和卡路里什么的。温度的单位下面讨论。

第 4 章会介绍 Carnot 热机，那里会证明一台与两个热力学系统接触而做功的热机的最大效率由两系统温度的比值完全确定。因此热力学理论提供了测量任意两个热力学系统温度比值的实验方法。

二系统温度比值的可测量性有许多直接推论。首先温度的零点是唯一确定的，不能任意钦点或“移动”。其次，我们可以自由地指定任一状态的能量为某个定值，然后其它所有状态的温度都因之确定下来。

同样，温度的计量标准（简称温标，就是温度单位）在指定参考系统某一标准状态的温度之后就完全确定。

不同标准状态的不同钦点温度造成了不同的热力学温标，但是所有热力学温标在  $T = 0$  处都是一致的。此外，根据(1.7)式，系统的温度不能低于 0。热力学温度内禀的非负性与所有观测高度一致。

国际单位制 (Système International (SI) system) 中的温标为 Kelvin 温标，指定纯水、冰与水蒸气的三相平衡态的温度为 273.16，该参考状态称为“三相点 (triple points)”。相应的温度单位称为 kelvin，记作 K。

同一量纲的两个单位——kelvin 与 joule(焦耳)之间的比值为  $1.3806 \times 10^{-23} \text{ joule kelvin}^{-1}$ 。这个比值称为 Boltzmann 常数，记作  $k_B$ ，因此  $k_B T$  是一个能量值。

Rankine 温标将水的三相点温度钦点为  $\frac{9}{5} \times 273.16 = 491.688^\circ\text{R}$ 。Kelvin 温度乘以  $\frac{9}{5}$  就等于 Rankine 温度。

实际应用的“国际 Kelvin 温标”与上文的“绝对”Kelvin 温标关系密切，国际 Kelvin 温标在不同的温度范围利用特定系统分别进行定义，并且保证与（绝对）Kelvin 温标尽量接近。它的优点是提供不同范围内可重复的温度测量实验标准。然而从热力学观点看，它并非真实的热力学温标，因为它与 Kelvin 温标稍有偏差，使得温度之比不符合热力学理论。

日常生活中的温度无论用 Kelvin 还是 Rankine 温标表示数值都很大。例如室温大约是 300 K 或  $540^\circ\text{R}$ 。因此为了方便，人们又定义了两种衍生温标。Celsius 温标<sup>10</sup>定义为

$$T(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273.15. \quad (2.43)$$

其中  $T(^{\circ}\text{C})$  称为“Celsius 温度”<sup>11</sup>，单位称为“Celsius 度（摄氏度）”，记作  $^{\circ}\text{C}$ 。Celsius 温标的零点不同于热力学温度的零点，因此 Celsius 温标不是热力学温标。存在零下的 Celsius 温度，零 Celsius 度可以达到，Celsius 温度的比值不符合热力学理论。只有 Celsius 温度差才有热力学意义。

根据定义，水的三相点的温度为  $0.01^{\circ}\text{C}$ 。压强保持 1 atm 不变的冰水混合物系统温度更接近  $0^{\circ}\text{C}$ ，小数点后第三位才非零。1 atm 下沸腾的

<sup>10</sup> 通译为摄氏温标，本文统一采用英文名称。

<sup>11</sup> 通译为摄氏温度。

水温度非常接近  $100^{\circ}\text{C}$ . 这两个巧合源自 Celsius 温标的历史进程<sup>2</sup>. 在意识到温度的零点唯一之前, 人们确定温标需要指定两个特定温度 (而非一个). Anders Celsius 在 1742 年将  $0^{\circ}\text{C}$ ,  $100^{\circ}\text{C}$  指定为上述两个状态。

<sup>12</sup> 通译为华氏温标。

实践中常用的还有 Fahrenheit 温标<sup>12</sup>, 定义为

$$T(^{\circ}\text{F}) \equiv T(^{\circ}\text{R}) - 459.67 = \frac{9}{5}T(^{\circ}\text{C}) + 32. \quad (2.44)$$

1 atm 下冰水混合物的 Fahrenheit 温度大约是  $32^{\circ}\text{F}$ . 1 atm 下沸水约为  $212^{\circ}\text{F}$ , 室温在  $70^{\circ}\text{F}$  左右. Fahrenheit 温标的“巧合”在于 1 atm 下冰与盐水混合物为  $0^{\circ}\text{F}$  附近, 奶牛的体温 (直肠温度) 大概是  $100^{\circ}\text{F}$ .

尽管前面已经利用热力学基本关系的偏导数正式定义了温度, 我们现在简要回顾引入温度概念的通常方法 (由 Kelvin 和 Caratheodory 建立). 热流  $\delta Q$  按照前面能量守恒的方法定义.  $\delta Q$  乘以积分因子  $1/T$  之后成为完整微分 (记作  $dS$ ).

$$dS = \frac{1}{T}\delta Q. \quad (2.45)$$

于是温度、熵的概念从积分因子的存在性可以导出. The temperature and the entropy thereby are introduced by analysis of the existence of integrating factors in particular types of differential equations called Pfaffian forms.

## 2.7 力学平衡

<sup>13</sup> 如果没有特别说明, 本节的壁都是不可透过物质的。

本节利用最大熵原理导出更为简单的一个结论. 考虑一个封闭的复合系统, 它的两个子系统由可移动的透热壁分隔<sup>13</sup>, 子系统的摩尔数是定值, 但各自的内能  $U^{(1)}, U^{(2)}$  可以改变, 系统的封闭性要求

$$U^{(1)} + U^{(2)} = \text{常数}. \quad (2.46)$$

体积  $V^{(1)}, V^{(2)}$  也可变, 封闭性也要求

$$V^{(1)} + V^{(2)} = \text{常数}. \quad (2.47)$$

熵的极值原理要求无穷小的传热或无穷小的体积改变造成的熵变均为零, 即

$$dS = 0. \quad (2.48)$$

<sup>2</sup>这方面的历史可见 E. R. Jones, Jr., The Physics Teacher 18, 594 (1980).



其中

$$\begin{aligned}
 dS = & \left( \frac{\partial S^{(1)}}{\partial U^{(1)}} \right)_{V^{(1)}, \dots, N_k^{(1)}, \dots} dU^{(1)} + \left( \frac{\partial S^{(1)}}{\partial V^{(1)}} \right)_{U^{(1)}, \dots, N_k^{(1)}, \dots} dV^{(1)} \\
 & + \left( \frac{\partial S^{(2)}}{\partial U^{(2)}} \right)_{V^{(2)}, \dots, N_k^{(2)}, \dots} dU^{(2)} + \left( \frac{\partial S^{(2)}}{\partial V^{(2)}} \right)_{U^{(2)}, \dots, N_k^{(2)}, \dots} dV^{(2)}
 \end{aligned} \quad (2.49)$$

由封闭性条件可得

$$dU^{(2)} = -dU^{(1)} \quad (2.50)$$

$$dV^{(2)} = -dV^{(1)} \quad (2.51)$$

于是

$$dS = \left( \frac{1}{T^{(1)}} - \frac{1}{T^{(2)}} \right) dU^{(1)} + \left( \frac{P^{(1)}}{T^{(1)}} - \frac{P^{(2)}}{T^{(2)}} \right) dV^{(1)} = 0 \quad (2.52)$$

因  $dU^{(1)}, dV^{(1)}$  任意取值, 故而相应系数为零, 即

$$\frac{1}{T^{(1)}} - \frac{1}{T^{(2)}} = 0 \quad (2.53)$$

$$\frac{P^{(1)}}{T^{(1)}} - \frac{P^{(2)}}{T^{(2)}} = 0 \quad (2.54)$$

上两式是熵表象下平衡态条件的标准形式, 它们可以化为更直接的形式:

$$T^{(1)} = T^{(2)} \quad (2.55)$$

$$P^{(1)} = P^{(2)} \quad (2.56)$$

温度相等正是上一节导出的透热壁平衡态的条件。新条件——压强相等对应于壁的可移动特征, 压强相等也是力学的平衡条件, 由此可见我们定义的压强与力学中压强的一致性。

在熵表象中,  $1/T^{(1)}$  是  $U^{(1)}, V^{(1)}$  的函数<sup>14</sup> (即熵的状态方程), 因此(2.53)式是  $U^{(1)}, V^{(1)}, U^{(2)}, V^{(2)}$  之间的方程。同样,  $P^{(1)}/T^{(1)}$  是  $U^{(1)}, V^{(1)}$  的函数, (2.54)式是  $U^{(1)}, V^{(1)}, U^{(2)}, V^{(2)}$  之间的方程。再加上两个守恒方程(2.46), (2.47)式就构成了四个方程, 可以求解四个未知函数  $U^{(1)}, V^{(1)}, U^{(2)}, V^{(2)}$ 。这就是热力学理论解决这类问题的基本框架, 在给定具体的基本方程或状态方程之后即可求解。

子系统由可移动的绝热壁 (而非透热壁) 分隔的情形十分微妙, 我们在进一步学习热力学体系之后再考虑, 习题 2.7-3 初步介绍了微妙之处, 习题 5.1-2 深入讨论。

<sup>14</sup> 当然还有摩尔数  $N$ , 不过它们都是常数。

## 例 1

如图，三个圆柱体的横截面积相同，由活塞封印着一定气体（气体的组分不必相同）。活塞通过刚性杠杆连接，它们的“力臂”（即连接点到支点的距离）之比为 1 : 2 : 3。圆柱体放置在质量可忽略的传热板上，板的唯一作用是使三个圆柱体系统可以传热，其它物理效果可忽略。整个大系统是孤立的，活塞不受外部压强影响。求平衡态下三个圆柱体的压强之比与温度之比。

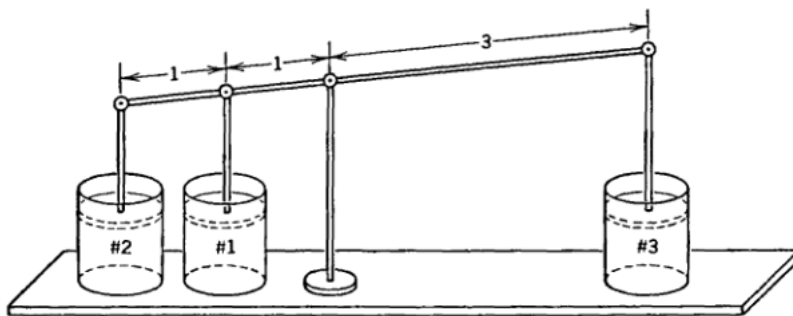


图 2.1: 例 2.7-1 图：三个体积耦合的系统。

解

封闭性条件要求总能量守恒：

$$\delta U^{(1)} + \delta U^{(2)} + \delta U^{(3)} = 0.$$

活塞之间通过杠杆连接，使得三个圆柱体体积变化的关系为

$$\delta V^{(2)} = 2\delta V^{(1)}$$

$$\delta V^{(3)} = -3\delta V^{(1)}$$

于是熵的极值条件可化为

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{T^{(1)}}\delta U^{(1)} + \frac{1}{T^{(2)}}\delta U^{(2)} + \frac{1}{T^{(3)}}\delta U^{(3)} + \frac{P^{(1)}}{T^{(1)}}\delta V^{(1)} \\ &\quad + \frac{P^{(2)}}{T^{(2)}}\delta V^{(2)} + \frac{P^{(3)}}{T^{(3)}}\delta V^{(3)} = 0 \\ \delta S &= \left(\frac{1}{T^{(1)}} - \frac{1}{T^{(3)}}\right)\delta U^{(1)} + \left(\frac{1}{T^{(2)}} - \frac{1}{T^{(3)}}\right)\delta U^{(2)} \\ &\quad + \left(\frac{P^{(1)}}{T^{(1)}} + 2\frac{P^{(2)}}{T^{(2)}} - 3\frac{P^{(3)}}{T^{(3)}}\right)\delta V^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

$\delta U^{(1)}, \delta U^{(2)}, \delta V^{(1)}$  相互独立，可任意取值，因此上式意味着它们的系数

均为零。 $\delta U^{(1)}$  的系数为零可得  $T^{(1)} = T^{(3)}$ ,  $\delta U^{(2)}$  可得  $T^{(2)} = T^{(3)}$ ,  $\delta V^{(1)}$  的系数为零结合三个系统温度相等可得

$$P^{(1)} + 2P^{(2)} = 3P^{(3)}.$$

考虑到力学中的杠杆平衡原理, 上面的平衡条件在意料之中。若已知状态方程就可将上式化为三个系统体积的等式。

## 2.8 存在物质交换时的平衡态

化学势的含义要从存在物质流动的情况考虑。设想由不可移动的透热壁分隔的两个简单系统, 且第  $\alpha$  种物质组分<sup>15</sup>可以透过壁, 其他组分  $N_\beta, \dots$  不可透过, 这个复合系统的平衡态条件是参量  $U^{(1)}, U^{(2)}, N_\alpha^{(1)}, N_\alpha^{(2)}$ , 复合系统熵的微分为

$$dS = \frac{1}{T^{(1)}} dU^{(1)} - \frac{\mu_\alpha^{(1)}}{T^{(1)}} dN_\alpha^{(1)} + \frac{1}{T^{(2)}} dU^{(2)} - \frac{\mu_\alpha^{(2)}}{T^{(2)}} dN_\alpha^{(2)} \quad (2.57)$$

封闭性条件为

$$dU^{(2)} = -dU^{(1)} \quad (2.58)$$

$$dN_\alpha^{(2)} = -dN_\alpha^{(1)} \quad (2.59)$$

于是

$$dS = \left( \frac{1}{T^{(1)}} - \frac{1}{T^{(2)}} \right) dU^{(1)} - \left( \frac{\mu_\alpha^{(1)}}{T^{(1)}} - \frac{\mu_\alpha^{(2)}}{T^{(2)}} \right) dN_\alpha^{(1)}. \quad (2.60)$$

对任意  $dU^{(1)}, dN_\alpha^{(1)}$  有  $dS = 0$ , 因此平衡条件为

$$\frac{1}{T^{(1)}} = \frac{1}{T^{(2)}} \quad (2.61)$$

$$\frac{\mu_\alpha^{(1)}}{T^{(1)}} = \frac{\mu_\alpha^{(2)}}{T^{(2)}}, \quad (\text{因此 } \mu_\alpha^{(1)} = \mu_\alpha^{(2)}) \quad (2.62)$$

就像温度可以看做热流的“势”, 压强为体积变化的“势”那样, 化学势可以视为物质流动的“势”。化学势的差值是造成物质流动的“广义力”。

物质流动的方向与化学势的关系可以用2.5节分析热流的方法导出。设子系统温度相等  $T^{(1)} = T^{(2)}$ , (2.60)式化为

$$dS = \frac{\mu_\alpha^{(2)} - \mu_\alpha^{(1)}}{T} dN_\alpha^{(1)} \quad (2.63)$$

如果  $\mu_\alpha^{(1)} > \mu_\alpha^{(2)}$ , 则由于  $dS > 0$ , 故而  $dN_\alpha^{(1)} < 0$ , 即物质从高化学势流向低化学势的地方。

<sup>15</sup> 为避免与子系统编号 (1), (2) 混淆, 本节用希腊字母  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  标记不同的物质组分, 而非采用原书的数字下标。

之后会看到化学势除了提供物质流动的“广义力”之外，还与物质相变以及化学反应有关，“化学势”的名字正是源自它在理论化学中的重要地位。

化学势的单位是 Joule 每摩尔（或任意的能量单位每摩尔）。

## 2.9 化学平衡

发生化学反应的系统的热力学描述与前面的复合系统相似，它的平衡条件仍然由化学势  $\mu$  的方程表示——这也是化学势名字的来源。

在化学反应过程中，系统物质组分的摩尔数发生变化，有些增加有些减少。摩尔数之间的变化关系由化学反应方程决定，例如



再比如



第一个方程里，氢分子、氧分子与水分子变化量之比为  $-2 : -1 : +2$ 。一般形式是，对于  $r$  种物质参与的化学反应有：

$$0 \rightleftharpoons \sum_j \nu_j A_j. \quad (2.66)$$

其中  $\nu_j$  称为“计量系数 (stoichiometric coefficients)”，例子中氢分子、氧分子与水分子的计量系数分别为  $-2, -1, +2$ 。  $A_j$  表示化学势，上例中  $A_1 = \text{H}_2, A_2 = \text{O}_2, A_3 = \text{H}_2\text{O}$ 。如果从反方向考虑化学反应（例如水离解成氢气氧气），则  $\nu_j$  反号。 $\nu_j$  没有绝对的正负性，只有相对的正负才有意义。

系统的基本方程为

$$S = S(U, V, N_1, N_2, \dots, N_r). \quad (2.67)$$

假设整个反应体系处于封闭的刚性绝热容器中，系统的总能量  $U$ ，总体积  $V$  不变。<sup>16</sup>

化学反应造成的熵变为

$$dS = - \sum_{j=1}^r \frac{\mu_j}{T} dN_j. \quad (2.68)$$

<sup>16</sup> 这当然不是化学反应最一般的边界条件，一般情况下容器是开放的，可以与外界交换能量，体积也可改变。我们在 6.4 节讨论这种开放条件下的反应。

注意，摩尔数的改变与计量系数  $\nu_j$  成正比，设比例系数为  $d\bar{N}$ ，则

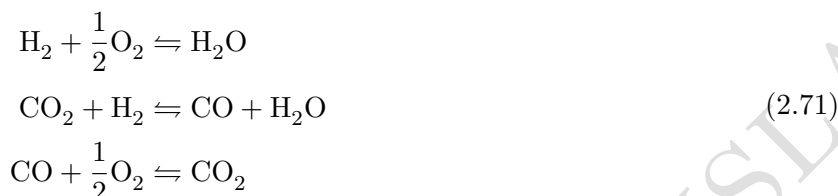
$$dS = -\frac{d\bar{N}}{T} \sum_{j=1}^r \mu_j \nu_j \quad (2.69)$$

因而熵的极值原理表明平衡条件为

$$\sum_{j=1}^r \mu_j \nu_j = 0. \quad (2.70)$$

若系统的状态方程已知，则由平衡条件(2.70)式可以解出平衡状态下各组分的摩尔数。

下面举一个例子。设一个封闭容器内有氢气、氧气与二氧化碳，并进行如下反应：



平衡条件为

$$\begin{aligned} \mu_{\text{H}_2} + \frac{1}{2}\mu_{\text{O}_2} &= \mu_{\text{H}_2\text{O}} \\ \mu_{\text{CO}_2} + \mu_{\text{H}_2} &= \mu_{\text{CO}} + \mu_{\text{H}_2\text{O}} \\ \mu_{\text{CO}} + \frac{1}{2}\mu_{\text{O}_2} &= \mu_{\text{CO}_2} \end{aligned} \quad (2.72)$$

上面只有两个独立方程（第一个方程是后两个方程的和，第一个化学反应是后两个反应的净结果）。开始反应时氢气、氧气与二氧化碳物质的量之比（可人为控制任意改变）提供另外三个条件。于是有五个未知量（ $\text{H}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{CO}$  的量），五个方程，原则上可以解出。

通常情况在开放容器中的化学反应终态的温度与压强均为定值。因此尽管未知量增加了两个（能量与体积），但  $T$  与  $P$  的关系提供了两个新条件，问题同样可以求解。

关于化学反应更详尽的讨论见 6.4 节。现在只需要记住化学势在物质流动和化学反应中的角色就像温度在热量流动、压强在体积变化中一样。

DRAFT TRANSLATION

## 3. 形式关系与样例系统

### 3.1 热力学 Euler 方程

上一章从基本假设出发解出了平衡态条件，下面深入探究基本方程的数学特征。

基本方程的一阶齐次性使得它可以写成更方便的形式，称为 Euler 形式。

从一阶齐次性的定义出发，对任意常数  $\lambda$  都有：

$$U(\lambda S, \lambda X_1, \dots, \lambda X_t) = \lambda U(S, X_1, \dots, X_t). \quad (3.1)$$

等式两侧对  $\lambda$  求导：

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(\dots, \lambda X_k, \dots)}{\partial(\lambda S)} \frac{\partial(\lambda S)}{\partial \lambda} + \frac{\partial U(\dots, \lambda X_k, \dots)}{\partial(\lambda X_j)} \frac{\partial(\lambda X_j)}{\partial \lambda} \\ + \dots = U(S, X_1, \dots, X_t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(\dots, \lambda X_k, \dots)}{\partial(\lambda S)} S + \sum_{j=1}^t \frac{\partial U(\dots, \lambda X_k, \dots)}{\partial(\lambda X_j)} X_j \\ = U(S, X_1, \dots, X_t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

方程对任意  $\lambda$  都成立，取  $\lambda = 1$  可得：

$$\left( \frac{\partial U}{\partial S} \right) S + \sum_{j=1}^t \frac{\partial U}{\partial X_j} X_j + \dots = U \quad (3.4)$$

$$U = TS + \sum_{j=1}^t P_j X_j \quad (3.5)$$

对于简单系统，上式写为

$$U = TS - PV + \mu_1 N_1 + \cdots + \mu_r N_r \quad (3.6)$$

<sup>1</sup> 若函数  $f(x, y, \dots)$  满足  $f(\lambda x, \lambda y, \dots) = \lambda^n f(x, y, \dots)$ , 则  $f$  称为  $n$  阶齐次的。齐次函数 Euler 定理为  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots = n f$ .

(3.5)或(3.6)式是齐次函数 Euler 定理<sup>1</sup>的一阶齐次情形在热力学理论的应用。公式的推导过程即为齐次定理的证明过程。(3.5)或(3.6)式称为(热力学) Euler 关系。

类似地，熵表象下 Euler 关系的形式为

$$S = \sum_{j=0}^t F_j X_j \quad (3.7)$$

$$S = \left(\frac{1}{T}\right) U + \left(\frac{P}{T}\right) V - \sum_{k=1}^r \left(\frac{\mu_k}{T}\right) N_k. \quad (3.8)$$

## 习题

3.1-1. 写出习题 1.10-1 当中具有物理意义的基本方程的 Euler 形式。

## 3.2 Gibbs-Duhem 关系

第二章导出了用温度、压强和化学势表示的平衡条件。这些强度量的引入过程比较相似，事实上，它们的形式体系也是对称的。尽管号称有对称性，但我们对温度与压强有着非常直观的感受，而对化学势就差了一点。有趣的是，这些强度量之间不是完全独立的，它们之间存在函数关系，例如单组分系统的化学势  $\mu$  可表示为  $T, P$  的函数。

这种关系是基本方程一阶齐次性的结果。考虑某一单组分系统，基本方程可写为  $u = u(s, v)$  (即(2.19)式)；三个强度量也都是  $s, v$  的函数，原则上这三个状态方程

$$T = T(u, v)$$

$$P = P(u, v)$$

$$\mu = \mu(u, v)$$

可消去  $u, v$  形成一个关于  $T, P, \mu$  的方程。

容易推广到一般情况，关键还是数清楚变量与方程的数目。设基本方程具有  $t+1$  个广延量：

$$U = U(S, X_1, X_2, \dots, X_t). \quad (3.9)$$



由此产生  $t + 1$  个状态方程:

$$P_k = P_k(S, X_1, X_2, \dots, X_t). \quad (3.10)$$

令(2.14)式中的任意参量  $\lambda$  为  $\lambda = 1/X_t$ , 可得

$$P_k = P_k\left(\frac{S}{X_t}, \frac{X_1}{X_t}, \dots, \frac{X_{t-1}}{X_t}, 1\right). \quad (3.11)$$

可见这  $t + 1$  个强度量都是关于  $t$  个变量的函数, 从  $t + 1$  个方程中消去  $t$  个变量就得到强度量之间的关系。

知道基本方程的具体形式就能求出强度量之间关系的具体形式。给定基本方程之后的套路即为 (3.9) ~ (3.11) 式的过程。

这种关系的微分形式(称为 **Gibbs-Duhem 关系**)可以从 Euler 关系直接导出。对(3.5)式微分得到

$$dU = TdS + SdT + \sum_{j=1}^t P_j dX_j + \sum_{j=1}^t X_j dP_j. \quad (3.12)$$

由(2.6)式可得

$$dU = TdS + \sum_{j=1}^t P_j dX_j. \quad (3.13)$$

以上两式相减即得到 Gibbs-Duhem 关系:

$$SdT + \sum_{j=1}^t X_j dP_j = 0. \quad (3.14)$$

对于单组分简单系统有

$$SdT - VdP + Nd\mu = 0. \quad (3.15)$$

或者

$$d\mu = -sdT + vdP \quad (3.16)$$

可见化学势的变化与温度及压强的变化有关, 而非独立变化, 并且  $\mu, T, P$  三者中已知任何两个的变化就能确定其余一个的变化。

Gibbs-Duhem 关系是强度量之间关系的微分形式, 将该式积分即得到显式形式, 这是从 (3.9) ~ (3.11) 式的另一种计算套路。Gibbs-Duhem

关系的积分：

$$\int S(T, P_1, \dots, P_t) dT + \sum_{j=1}^t \int X_j(T, P_1, \dots, P_t) dP_j = 0$$

<sup>2</sup> 状态方程：强度量 = 强度量  
(广延量)

需要知道各广延量  $X_j$  用强度量  $P_j$  表示的形式，这可以从状态方程<sup>2</sup>解出。因此积分 Gibbs-Duhem 关系必须知道系统的状态方程。

系统可独立变化的强度量个数称为系统的热力学自由度 (*thermodynamic degrees of freedom*)。一个具有  $r$  种组分的简单系统的热力学自由度为  $r + 1$ 。

熵表象下的 Gibbs-Duhem 关系相似：

$$\sum_{j=0}^t X_j dF_j = 0 \quad (3.17)$$

$$Ud\left(\frac{1}{T}\right) + Vd\left(\frac{P}{T}\right) - \sum_{k=1}^r N_k d\left(\frac{\mu_k}{T}\right) = 0 \quad (3.18)$$

## 习题

3.2-1. 某系统的基本方程为

$$U = \left(\frac{v_0^2 \theta}{R^3}\right) \frac{S^4}{NV^2}$$

求  $T, P, \mu$  之间的函数关系。

## 3.3 形式关系总结

现在总结一下能量表象的热力学体系结构。简明起见，考虑单组分的简单系统，它的基本方程

$$U = U(S, V, N) \quad (3.19)$$

包含了该系统所有的热力学信息。定义了温度  $T \equiv \partial U / \partial S$  等强度量之后，从基本方程可以导出三个状态方程：

$$T = T(S, V, N) = T(s, v) \quad (3.20)$$

$$P = P(S, V, N) = P(s, v) \quad (3.21)$$

$$\mu = \mu(S, V, N) = \mu(s, v) \quad (3.22)$$

- 3.4 单组分/多组分简单理想气体
- 3.5 理想 van der Waals 流体
- 3.6 黑体辐射系统
- 3.7 橡胶带系统
- 3.8 不可控变量；磁系统
- 3.9 摩尔热容与其他导出量

DRAFT TRANSLATION

DRAFT TRANSLATION

## 4. 可逆过程和最大功定理

### 4.1 可能和不可能过程

一名工程师常会需要通过设计一个装置来完成某个任务——例如让一个电梯升到高楼上。因此他就得弄出一个联动装置，或者“引擎”，来可控的将能量从火炉里转移到电梯上；如果火炉里的热量通过数个活塞、杠杆和凸轮转换成了电梯上升所需要的能量。但谋事在人，成事由“天”（例如，物理定律）<sup>1</sup>——这件事到底是能办成呢，还是设备干脆就停着不动，没有热量从火炉里出来，电梯也没上升一丝一毫。结果得取决于两点。其一是引擎得要满足力学定律（自然包括能量守恒），其二，这个过程必须最大化地使熵增加。<sup>2</sup>

专利局里充满了各路在逻辑上无可挑剔的（如果 A 发生那么 B 一定发生）失败发明——这些天才般的设计满足所有力学定律，但依旧固执的停在那儿，默默地拒绝熵的减小。其他的一些能动起来，但会产生一些意料之外的结果，比发明者预料中更有效的使熵增加。

如果，虽然如此，这个网络被在保证总能量不变的前提下最大可行的增加总的熵，那么将不会有什么基本定律来否决掉这样一个恰当的过程的存在。尽管实现这样适当的引擎可能需要相当的天才成分，但它起码在原则上来讲是可行的。

■ **Example 4.1** 一个约束系统具有确定摩尔数和体积，则其不能对外界做功。另外，这个系统的热容是常数  $C$ 。则这个系统的基本方程是  $S = S_0 + C \ln(U/U_0)$ ，其中  $U = CT$ 。

两个具有相同热容量的此类系统，初态分别具有温度  $T_{10}$  和  $T_{20}$ ，其中  $T_{10} < T_{20}$ 。一个用于升降电梯的引擎（即对一个纯力学系统做功），从这两个热力学系统中获取能量。它们最大能获得多少功？

<sup>1</sup> 原文为 "But 'nature' (i.e. the law of physics) exercise the crucial decision"

<sup>2</sup> 此处存疑，热力学过程只需满足熵增即可，略微偏离平衡区的线性系统才存在有最大熵产生定理。

求解：

这两个热力学系统最终会达到相同的温度  $T_f$ 。其能量的总改变量为

$$\Delta U = 2CT_f - C(T_{10} + T_{20})$$

而力学系统（“电梯”）所获得的功为  $W = -\Delta U$ ，即

$$W = C(T_{10} + T_{20} - 2T_f)$$

熵的总改变量为两个热力学系统的改变量之和，为

$$\Delta S = C \ln \frac{T_f}{T_{10}} + C \ln \frac{T_f}{T_{20}} = 2C \ln \frac{T_f}{\sqrt{T_{10}T_{20}}}$$

为了使  $W$  最大，我们自然希望  $T_f$  最小（从第二式容易看出），根据第三式我们知道这意味着要使  $\Delta S$  取极小。而  $\Delta S$  最小就只能是零了，对应着一个可逆过程。这样最优的引擎能得到

$$T_f = \sqrt{T_{10}T_{20}}$$

和

$$W = C(T_{10} + T_{20} - 2\sqrt{T_{10}T_{20}})$$

■

作为补充，我们需要注意到假设两个热力学系统最后到达一个相同的温度是不必要的； $W$  可以分别对  $T_{1f}$  和  $T_{2f}$  作优化，最后能得到同样的结果。对于末温相同这个简化假设，我们可以用自洽性来论证：如果末温不同，那么我们可以通过这个办法来继续获取更多的能量。

■ **Example 4.2** 例4.1的一个有趣的变体是三物体（每一个都是例4.1中描述的类型，有  $U = CT$ ）初始温度分别为300 K、350 K、400 K。其需求是尽可能高的提高一个物体的温度，而不论其他两个物体怎么样（并且不改变任何外部系统的状态）。那么这里一个物体最高能到多高温度？

求解：

将三个初始温度用  $T_1, T_2, T_3$  标记，单位取作100 K（ $T_1 = 3, T_2 = 3.5$  以及  $T_3 = 4$ ）。类似的，令单个物体能达到的最高温度记做  $T_h$ 。可以推断剩下两个物体的末温都是  $T_c$ （否则，我们可以用例4.1的办法来对外做功，然后将功转换为热物体上的热）。能量守恒要求

$$T_h + 2T_c = T_1 + T_2 + T_3 = 10.5$$

总的熵增为

$$\Delta S = C \ln \frac{T_c^2 T_h}{T_1 T_2 T_3}$$

熵增为正要求

$$T_c^2 T_h \geq T_1 T_2 T_3 \quad (= 42)$$

利用能量守恒式消去  $T_c$

$$(5.25 - \frac{T_h}{2})^2 T_h \geq 42$$

方程左端对  $T_h$  作图。绘图范围从 0 到 10.5，上界是为了保证  $T_c$  为正。图像表明使纵坐标大于 42 的最大  $T_h$  值是

$$T_h = 4.095 \quad (\text{或 } T_h = 409.5 \text{ K})$$

这个值使不等式取等，即对应可逆过程。 ■

这道题的另一个解法见习题 4.6-7。

### 习题

- 4.1-1. 一摩尔单原子理想气体和一摩尔  $c = 3/2$  的理想 van der Waals 流体 (3.5 节) 分别装在体积为  $v_1$  和  $v_2$  的容器里。理想气体的温度为  $T_1$  而 van der Waals 流体是  $T_2$ 。我们希望将理想气体的温度变成  $T_2$  而保持总的能量不变。那么 van der Waals 流体的末温是多少？各参数 ( $T_1, T_2, a, b, v_1, v_2$ ) 之间需要满足什么关系才能实现这样一个温度转换 (总是假定在过程中外界不发生改变)？
- 4.1-2. 一个橡胶带 (3.7 节) 初始温度为  $T_B$ ，长度为  $L_B$ 。一摩尔单原子理想气体初温为  $T_G$ ，体积为  $V_G$ 。理想气体经历一个定容升温过程达到温度  $T'_G$ 。其所需要的能量全都从橡胶带中获得。那么橡胶带的长度是否需要改变？如果是的话，改变多少？

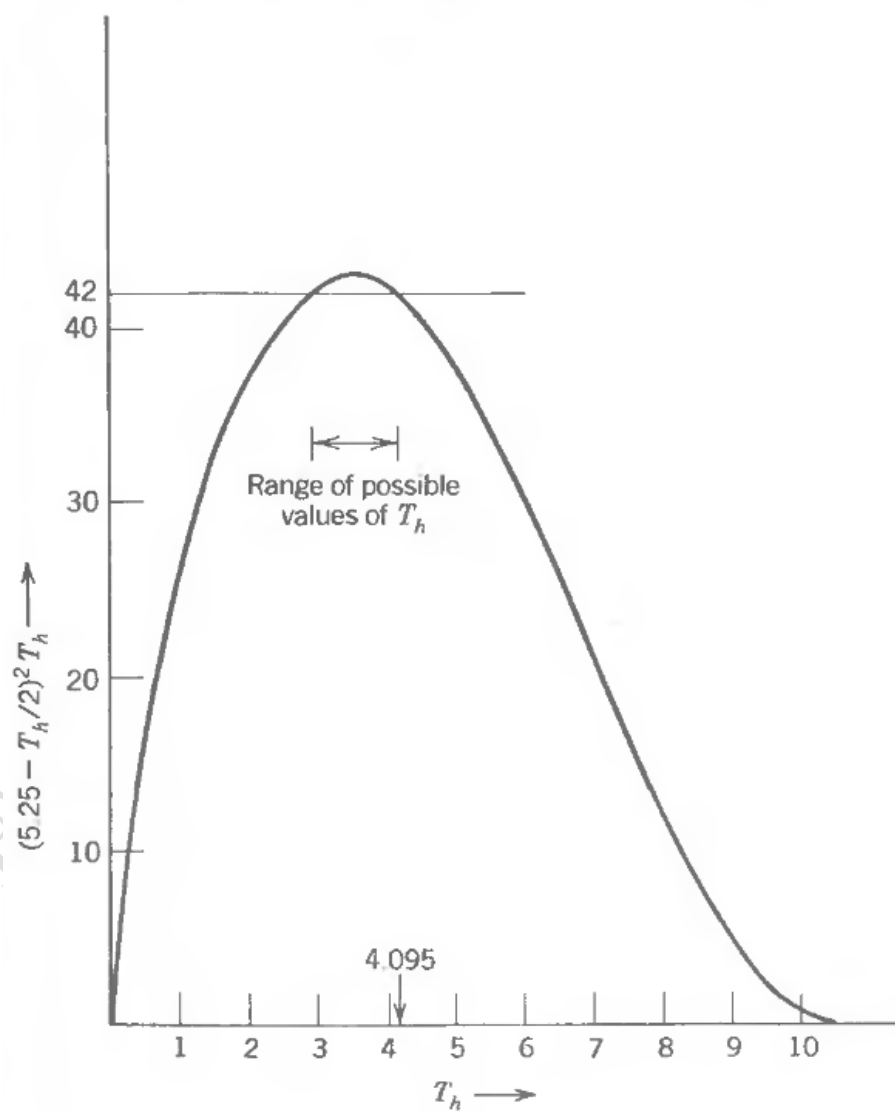
答案：

若  $l = L_B - L_0$ ,

$$l^2 - (l')^2 \geq 2b^{-1}cL_0(L_1 - L_0) \ln \left( 1 - \frac{3R}{2RL_0} \frac{T'_G - T_G}{T_B} \right) + 3Rb^{-1}(L_1 - L_0) \ln(T'_G/T_G)$$

- 4.1-3. 假设例 4.1 中的两个系统热容具有形式  $C(T) = DT^n$ ，其中  $n > 0$ ：

1. 证明这样的系统内能  $U = U_0 + DT^{n+1}/(n+1)$  以及熵  $S = S_0 + DT^n/n$ 。系统的基本方程是什么？





2. 如果其初始温度分别为  $T_{10}$  和  $T_{20}$ , 最大可输出功为多少 (两系统最后处于相同温度)?

答案:

对于  $n = 2$ :

$$W = \frac{D}{3} \left[ T_{10}^3 + T_{20}^3 - \frac{1}{\sqrt{2}} (T_{10}^2 + T_{20}^2)^{3/2} \right]$$

DRAFT TRANSLATION