

مقدمه‌ای بر محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته

حسین داودی یگانه

مرکز محاسبات کوانتومی آریاکوانتا

زمستان ۱۴۰۴

ویرایش اول

پیش‌گفتار

با شتاب فزاینده‌ای که فناوری‌های کوانتومی در سال‌های اخیر به خود دیده‌اند، نیاز به درک عمیق‌تر مفاهیم پایه‌ای این حوزه بیش از پیش احساس می‌شود. محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته به‌عنوان یکی از شاخه‌های امیدبخش و از نظر تجربی قابل‌دسترس، جایگاه ویژه‌ای در این منظره پیدا کرده است. برخلاف مدل متعارف کیوبیتی که بر حالت‌های گسسته تکیه دارد، این چارچوب از طبیعت پیوسته‌ی متغیرهای فیزیکی مانند دامنه و فاز میدان‌های نوری بهره می‌برد و دروازه‌ای طبیعی به سوی پیاده‌سازی الگوریتم‌های کوانتومی با استفاده از فناوری‌های اپتیک خطی گشوده است.

این درسنامه با هدف معرفی و درک عمیق محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته نگاشته شده است. مخاطب اصلی آن دانشجویان تحصیلات تکمیلی، پژوهشگران جوان و علاقه‌مندی است که می‌خواهند نه تنها فرمالیسم ریاضی، بلکه شهود فیزیکی و توان محاسباتی این رویکرد را درک کنند. در این مسیر، مفاهیم پایه‌ای از مکانیک کوانتومی و اپتیک کوانتومی مرور می‌شود و سپس به‌طور نظام‌مند به معرفی گیت‌های پایه، حالت‌های خاص (همچون حالت‌های چلانده و گاوسی)، الگوریتم‌های کوانتومی و مدل‌های متفاوت محاسبات (مبتنی بر گیت و مبتنی بر اندازه‌گیری) پرداخته می‌شود. ساختار درسنامه به گونه‌ای طراحی شده که خواننده پس از آشنایی با مبانی نظری، بتواند به‌طور مستقیم به مطالعه‌ی الگوریتم‌های شاخص، کاربردها همچنین چالش‌های پیش‌روی این حوزه بپردازد. کوشش بر آن بوده تا با ارائه‌ی مثال‌های عددی، برنامه‌نویسی کوانتومی درک شهودی تقویت شود.

در نهایت، امید داریم این مجموعه نه فقط به‌عنوان یک درسنامه، بلکه به‌عنوان مشوقی همراه در این حوزه عمل کند. سپاسگزار همه‌ی پیشگامانی هستیم که با کارهای بنیادین خود، مسیر این علم را هموار کرده‌اند، و امیدواریم این اثر، گامی هر چند کوچک در جهت گسترش مرزهای دانش و تربیت نسل آینده‌ی دانشمندان و مهندسان کوانتومی باشد. در پایان خاطر نشان می‌شود نسخه حاضر، ویرایش نخست می‌باشد و عاری از خطا نیست، خواهشمند است نظرات و پیشنهادات ارزشمند خود را با ما در میان بگذارید.

حسین داودی یگانه

زمستان ۱۴۰۴

فهرست مطالب

۱	پیش‌گفتار
۵	۱ مقدمه و پیش‌نیازها
۵	۱.۱ مروری بر نظریه اطلاعات کوانتومی
۶	۲.۱ سیستم‌های متغیر گسسته در مقابل سیستم‌های متغیر پیوسته
۶	۱.۲.۱ سیستم‌های متغیر گسسته
۷	۲.۲.۱ سیستم‌های متغیر پیوسته
۸	۳.۲.۱ اهمیت متغیرهای پیوسته در محاسبات کوانتومی
۹	۳.۱ پیش‌نیازهای ریاضیاتی
۹	۱.۳.۱ فضای هیلبرت
۱۰	۲.۳.۱ نظریه عملگرها
۱۲	۳.۳.۱ هندسه هم‌تافت
۱۴	۴.۳.۱ تابع ویگنر
۱۵	۲ اپتیک کوانتومی و سیستم‌های متغیر پیوسته
۱۶	۱.۲ کوانتش میدان الکترومغناطیسی
۱۸	۲.۲ حالت‌های فوک
۱۹	۳.۲ فضای فوک
۲۰	۴.۲ عملگرهای تربیعی (کوادراتور) میدان
۲۲	۵.۲ فضای فاز
۲۳	۶.۲ حالت‌های گاوسی

۲۳	حالت گرمایی	۱.۶.۲
۲۴	حالت همدوس	۲.۶.۲
۲۸	حالت چلانده	۳.۶.۲
۲۹	محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته	۳
۳۰	گیت‌های کوانتومی	۱.۳
۳۰	گیت جابه‌جایی	۱.۱.۳
۳۴	گیت چرخشی	۲.۱.۳
۳۶	گیت چلانندگی	۳.۱.۳
۳۹	گیت فاز مکعبی	۴.۱.۳
۴۱	گیت کر	۵.۱.۳
۴۲	گیت شکافنده پرتو	۶.۱.۳
۴۴	گیت چلانندگی دومدی	۷.۱.۳
۴۵	گیت CX	۸.۱.۳
۴۶	گیت CZ	۹.۱.۳
۴۷	اندازه‌گیری‌های متغیر پیوسته	۲.۳
۴۷	تشخیص هموداین	۱.۲.۳
۵۰	تشخیص هتروداین	۲.۲.۳
۵۱	شمارش فوتون	۳.۲.۳
۵۲	درهم‌تنیدگی در سیستم‌های متغیر پیوسته	۳.۳
۵۲	ایجاد درهم‌تنیدگی	۱.۳.۳
۵۶	تشخیص درهم‌تنیدگی	۲.۳.۳
۵۶	معیار ترانهاده جزئی مثبت	۳.۳.۳
۵۷	معیار ون‌لوک-فوراساوا	۴.۳.۳
۵۹	فرابرد کوانتومی	۴.۳
۵۹	فرابرد کوانتومی در سامانه‌های متغیر گسسته	۱.۴.۳
۶۱	فرابرد کوانتومی در سامانه‌های متغیر پیوسته	۲.۴.۳

۶۸	الگوریتم‌ها و مدل‌های محاسباتی متغیر پیوسته	۴
۶۸	الگوریتم‌های کوانتومی	۱.۴
۷۰	کلاس‌های پیچیدگی کلاسیک	۱.۱.۴
۷۱	کلاس‌های پیچیدگی کوانتومی	۲.۱.۴
۷۲	طبقه‌بندی الگوریتم‌ها	۳.۱.۴
۷۵	الگوریتم‌های کوانتومی متغیر پیوسته	۲.۴
۷۵	الگوریتم گروور متغیر پیوسته	۱.۲.۴
۸۱	الگوریتم دویچ-جوزا متغیر پیوسته	۲.۲.۴
۸۵	الگوریتم‌های وردشی کوانتومی متغیر پیوسته	۳.۴
۸۷	الگوریتم‌های وردشی کوانتومی	۱.۳.۴
۹۰	انواع آنساز	۲.۳.۴
۹۷	گرادیان	۳.۳.۴
۹۸	بهینه‌سازی	۴.۳.۴
۹۹	کاربرد الگوریتم‌های وردشی کوانتومی	۵.۳.۴
۱۰۰	الگوریتم QAOA در سامانه متغیر پیوسته	۶.۳.۴
۱۰۸	مدل‌های محاسباتی متغیر پیوسته	۴.۴
۱۰۸	مدل محاسباتی متغیر پیوسته مبتنی بر گیت	۱.۴.۴
۱۰۹	محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته مبتنی بر اندازه‌گیری	۲.۴.۴
۱۱۵	محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته مبتنی بر حالت‌های خوشه‌ای	۳.۴.۴
۱۱۹	مدل محاسبات کوانتومی ترکیبی	۴.۴.۴
۱۲۰	پیوست: برنامه‌نویسی کوانتومی در سیستم‌های متغیر پیوسته	

فصل ۱

مقدمه و پیش نیازها

در این فصل به بررسی مفاهیم پایه‌ای ریاضیاتی و کوانتومی می‌پردازیم که در ادامه مسیر نقش مهمی را ایفا می‌کنند. هدف این فصل، ایجاد بنیانی نظری و محکم برای ورود به مباحث تخصصی‌تر در نظریه اطلاعات کوانتومی است. در ابتدا، نظریه اطلاعات کوانتومی را معرفی می‌کنیم؛ حوزه‌ای میان‌رشته‌ای که از تلفیق اصول مکانیک کوانتومی با مفاهیم بنیادی نظریه اطلاعات شکل گرفته است. این نظریه با بهره‌گیری از ویژگی‌هایی مانند برهم‌نهی، درهم‌تنیدگی و ناموضعیّت، امکان نمایش و پردازش اطلاعات را به شیوه‌ای فراتر از محدودیت‌های کلاسیک فراهم می‌سازد. در این چارچوب، اطلاعات نه تنها به صورت بیت‌های دودویی، بلکه به صورت کیوبیت‌هایی با حالت‌های ترکیبی نمایش داده می‌شوند. سپس به بررسی سیستم‌های متغیر پیوسته و گسسته می‌پردازیم. سیستم‌های پیوسته معمولاً با متغیرهایی مانند زمان، مکان یا انرژی سروکار دارند و رفتار آن‌ها با معادلات دیفرانسیل توصیف می‌شود. در مقابل، متغیرهای گسسته تنها می‌توانند مقادیر مشخص و جدا از هم مانند حالت‌های منطقی یا شمارش‌پذیر بگیرند. در ادامه، برخی پیش‌نیازهای ریاضیاتی مانند احتمال، جبر خطی و مفاهیم پایه‌ای نظریه اطلاعات مرور خواهند شد که در فصول بعدی به آن‌ها نیاز خواهیم داشت.

۱.۱ مروری بر نظریه اطلاعات کوانتومی

نظریه اطلاعات کوانتومی شاخه‌ای از فیزیک نظری و علوم رایانه است که روش‌های استفاده از سیستم‌های مکانیک کوانتومی را برای نمایش، پردازش و انتقال اطلاعات مورد مطالعه قرار می‌دهد. این رشته اصول نظریه اطلاعات کلاسیک را که توسط کلود شانون در دهه ۱۹۴۰ مطرح شد، با پدیده‌های منحصر به فرد مکانیک کوانتومی مانند برهم‌نهی، درهم‌تنیدگی و ناموضعیّت ترکیب می‌کند. در تئوری اطلاعات کلاسیک، اطلاعات معمولاً به صورت دو دویی نمایش داده می‌شوند، جایی که بیت‌ها ۰ و ۱ هستند، این بیت‌ها را می‌توان از طریق عملگرهای منطقی مانند AND، OR، NOT که

اساس محاسبات کلاسیک را تشکیل می‌دهند، دستکاری کرد. در مقابل، نظریه اطلاعات کوانتومی از کیوبیت‌ها به عنوان واحد اساسی اطلاعات استفاده می‌کند. یک کیوبیت می‌تواند به طور همزمان در ترکیبی از حالت ۰ و ۱ قرار گیرد. توانایی کیوبیت‌ها در قرار گرفتن در حالت برهم‌نهی، به رایانه‌های کوانتومی این امکان را می‌دهد که برخی از مسائل محاسباتی را با سرعتی بسیار بیشتر از رایانه‌های کلاسیک حل کنند. برای نمونه، الگوریتم شور قادر است فاکتورگیری اعداد بزرگ را به صورت نمایی سریع‌تر از بهترین الگوریتم‌های کلاسیک انجام دهد. همچنین الگوریتم گروور امکان جستجوی غیرساختارمند در پایگاه داده‌ها را با کارایی بالاتری فراهم می‌سازد. با این حال، کاربردهای نظریه اطلاعات کوانتومی تنها به حوزه محاسبات محدود نمی‌شوند. این نظریه در زمینه‌هایی چون ارتباطات کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی (مانند توزیع کلید کوانتومی)، تصحیح خطای کوانتومی و توسعه پروتکل‌های امن نیز نقش مهمی ایفا می‌کند. این گستردگی کاربرد نشان‌دهنده ظرفیت بالای این حوزه برای تحول در فناوری‌های آینده است.

۲.۱ سیستم‌های متغیر گسسته در مقابل سیستم‌های متغیر پیوسته

در محاسبات کوانتومی، متغیرهای گسسته^۱ و پیوسته^۲ دو چارچوب متفاوت برای نمایش و پردازش اطلاعات کوانتومی ارائه می‌دهند. این تمایز نه تنها در نوع داده‌ها بلکه در ساختار فضای هیلبرت، نوع درهم‌تنیدگی، و روش‌های پیاده‌سازی الگوریتم‌ها تأثیرگذار است. انتخاب میان این دو مدل به ماهیت سیستم فیزیکی، نوع پردازش مورد نظر، و محدودیت‌های تجربی بستگی دارد. هر دو رویکرد در نظریه اطلاعات کوانتومی جایگاه ویژه‌ای دارند. مدل‌های گسسته برای طراحی الگوریتم‌های کوانتومی و پیاده‌سازی روی رایانه‌های کوانتومی مبتنی بر کیوبیت مناسب‌اند، در حالی که مدل‌های پیوسته در ارتباطات کوانتومی، رمزنگاری پیوسته، و شبیه‌سازی سیستم‌های فیزیکی پیچیده کاربرد دارند. در برخی موارد، ترکیب این دو مدل نیز ممکن است، مانند استفاده از گسسته‌سازی متغیرهای پیوسته برای پیاده‌سازی عملی در آزمایشگاه.

۱.۲.۱ سیستم‌های متغیر گسسته

در مدل‌های محاسبات کوانتومی مبتنی بر متغیرهای گسسته، اطلاعات کوانتومی در فضای هیلبرت با ابعاد محدود نمایش داده می‌شود. واحد پایه‌ای این مدل، کیوبیت است که در حالت‌های مجزای $|0\rangle$ ، $|1\rangle$ تعریف می‌شود. برخلاف بیت کلاسیک که فقط در یکی از این دو حالت قرار دارد، کیوبیت می‌تواند در ترکیبی از این دو حالت به صورت برهم‌نهی قرار گیرد. این ویژگی، همراه با امکان درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌ها، قدرت محاسباتی منحصر به فردی را فراهم می‌کند که در مدل‌های کلاسیک قابل دستیابی نیست. در این چارچوب، عملیات پردازشی با استفاده از گیت‌های کوانتومی گسسته

^۱ Discrete Variables (DV)

^۲ Continuous Variables (CV)

مانند Hadamard، Pauli-X، CNOT و T انجام می‌شود. این گیت‌ها تبدیل‌هایی واحدی روی فضای هیلبرت گسسته اعمال می‌کنند و امکان طراحی الگوریتم‌های کوانتومی را فراهم می‌سازند. الگوریتم‌هایی مانند الگوریتم شور برای فاکتورگیری، الگوریتم گروور برای جستجوی سریع، و الگوریتم‌های تصحیح خطای کوانتومی همگی در چارچوب DV توسعه یافته‌اند و نقش کلیدی در پیشرفت رایانش کوانتومی ایفا کرده‌اند. پیاده‌سازی فیزیکی مدل DV در بسترهای متنوعی انجام شده است؛ از جمله یون‌های به دام افتاده، مدارهای ابررسانا، نقاط کوانتومی، و اسپین‌های الکترونی. هر یک از این بسترها امکان تعریف حالت‌های گسسته و کنترل دقیق بر گیت‌های کوانتومی را فراهم می‌کنند. به‌ویژه، نقاط کوانتومی به دلیل سازگاری با فناوری‌های نیمه‌رسانا و قابلیت مجتمع‌سازی در مقیاس بالا، توجه ویژه‌ای را در سال‌های اخیر به خود جلب کرده‌اند. با وجود مزایای مدل DV چالش‌هایی مانند حفظ هم‌دوسی، مقابله با نویز محیطی، و طراحی سیستم‌های تصحیح خطا همچنان مطرح‌اند. با این حال، توسعه سخت‌افزارهای پایدار، پیشرفت در الگوریتم‌های مقاوم به خطا، و طراحی معماری‌های مقیاس‌پذیر باعث شده‌اند که مدل DV به‌عنوان ستون فقرات رایانش کوانتومی مدرن شناخته شود و در بسیاری از پروژه‌های صنعتی و تحقیقاتی مورد استفاده قرار گیرد. با توجه به اینکه در این نسخه به محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته پرداخته می‌شود از وارد شدن به جزئیات سیستم‌های متغیر گسسته صرف‌نظر می‌شود، علاقه‌مندان می‌توانند به مراجع دیگر مراجعه نمایند.

۲.۲.۱ سیستم‌های متغیر پیوسته

در مقابل سیستم‌های CV از حالت‌های کوانتومی تعریف شده بر روی طیف‌های پیوسته بجای سطوح گسسته استفاده می‌کنند. رایج‌ترین مثال‌ها در این زمینه سیستم‌های مبتنی بر حالات کوانتومی نور، به ویژه کوادراتورهای^۳ میدان الکترومغناطیس هستند. این کوادراتورها که معادل عملگرهای مکان و تکانه \hat{p}, \hat{x} هستند، برخلاف نتایج دو دویی در سیستم‌های DV می‌توانند هر مقدار حقیقی را داشته باشند. اطلاعات کوانتومی CV معمولاً با استفاده از حالت‌های هم‌دوس^۴ نور، حالت‌های چلانده^۵ و سایر حالت‌های گاوسی نمایش داده می‌شود. فرمالیسم محاسبات کوانتومی CV عمیقاً در تئوری نوسانگرهای هارمونیک ریشه دارد، جایی که اطلاعات کوانتومی با استفاده از عملیات روی این طیف‌های پیوسته پردازش می‌شود. مزیت اصلی سیستم‌های CV این است که می‌توان آن‌ها را به راحتی با فناوری نوری موجود پیاده سازی کرد که این امکان را فراهم می‌کند که با استفاده از اپتیک خطی، تشخیص هم‌داین^۶ و سایر تکنیک‌های به خوبی تثبیت شده، حالات کوانتومی به خوبی دستکاری شوند. اطلاعات کوانتومی CV معمولاً با استفاده از حالت‌های هم‌دوس

^۳ Quadrature

^۴ Coherent states

^۵ Squeezed States

^۶ Homodyne measurement

نور، حالت‌های چلانده و سایر حالت‌های گاوسی نمایش داده می‌شود. فرمالیسم محاسبات کوانتومی CV عمیقاً در تئوری نوسانگرهای هارمونیک ریشه دارد، جایی که اطلاعات کوانتومی با استفاده از عملیات روی این طیف‌های پیوسته پردازش می‌شود. مزیت اصلی سیستم‌های CV این است که می‌توان آن‌ها را به راحتی با فناوری نوری موجود پیاده سازی کرد که این امکان را فراهم می‌کند که با استفاده از اپتیک خطی، اندازه‌گیری هموداین و سایر تکنیک‌های به خوبی تثبیت شده، حالات کوانتومی به خوبی دستکاری شوند.

۳.۲.۱ اهمیت متغیرهای پیوسته در محاسبات کوانتومی

اهمیت سیستم‌های متغیرهای پیوسته در محاسبات کوانتومی هم در پتانسیل نظری آن‌ها و هم در کاربردهای عملی شان نهفته است. چندین عامل به اهمیت آن‌ها کمک می‌کند:

- مقیاس پذیری و پیاده سازی: یکی از بزرگترین چالش‌ها در محاسبات کوانتومی DV افزایش تعداد کیوبیت‌ها، با حفظ هم‌دوسی و کنترل خطاها است. سیستم‌های CV به ویژه آن‌هایی که مبتنی بر پلت فرم‌های نوری است راه حل مقیاس پذیری را ارائه می‌دهند. برای مثال، حالت‌های درهم‌تنیده بزرگ (معروف به حالت خوشه‌ای) که برای محاسبات کوانتومی لازم هستند، می‌توان با استفاده از نوسان سازهای پارامتری نوری که به طور تجربی در دسترس هستند، تولید کرد
- سازگاری با اپتیک کلاسیک: سیستم‌های CV به شدت با سیستم‌های ارتباط نوری کلاسیک سازگار هستند که آن‌ها را برای شبکه‌های ارتباطات کوانتومی مناسب می‌سازد. این سازگاری ادغام شبکه‌های کوانتومی با زیرساخت‌های فیبر نوری موجود را تسهیل می‌کند و امکان ارتباطات کوانتومی در فواصل طولانی را فراهم می‌کند.
- تصحیح خطای کوانتومی: تصحیح خطای کوانتومی برای هر سیستم محاسباتی کوانتومی به منظور عملی بودن آن ضروری است سیستم‌های CV می‌توانند از کدهای خاصی مانند کد گوتسمن کیتایف-پرسکیل (GKP) استفاده کنند که مخصوصاً برای اطلاعات کوانتومی CV مناسب هستند. این کدها از حالت‌های شبکه در فضای فاز برای محافظت از اطلاعات کوانتومی خطاهای جابه‌جایی کوچک استفاده می‌کنند که یک نوع رایج نویز در سیستم‌های CV است.
- پتانسیل برای محاسبات کوانتومی مقاوم به خطا: ترکیب عملیات‌های گاوسی و غیرگاوسی در سیستم‌های CV امکان محاسبات کوانتومی جهان‌شمول را فراهم می‌کند علاوه بر این با توسعه پروتکل‌های مقاوم به خطا که به طور خاص برای سیستم‌های CV، مانند کدهای بوزونی، طراحی شده‌اند، پتانسیل قابل توجهی برای رایانه‌های

کوانتومی مبتنی بر CV وجود دارد که بتوانند در سناریوهایی که نويز یک نگرانی اصلی است، از سیستم‌های مبتنی بر DV بهتر عمل کنند

در مجموع متغیرهای پیوسته یک چارچوب قوی و همه جانبه برای پردازش اطلاعات کوانتومی ارائه می‌دهد. سازگاری آن با تکنولوژی‌های موجود، پتانسیل برای مقیاس پذیری و نقش آن‌ها در تصحیح خطای کوانتومی، آن‌ها را به یک حوزه تحقیقاتی مهم در مسیر دستیابی به سیستم‌های عملی محاسبات و ارتباطات کوانتومی تبدیل کرده است. با ادامه توسعه این زمینه‌ها، محاسبات کوانتومی CV احتمالاً نقش اساسی در آینده فناوری‌های کوانتومی ایفا می‌کند.

۳.۱ پیش‌نیازهای ریاضیاتی

برای درک موثر حوزه اطلاعات کوانتومی متغیر پیوسته، داشتن پایه‌ای قوی در چندین حوزه ریاضیاتی ضروری است. این بخش به مفاهیم کلیدی ریاضیاتی که در اینجا استفاده خواهد شد، می‌پردازد: فضای هیلبرت، نظریه عملگرها، هندسه هم‌تافت^۷ و تابع ویگنر^۸.

۱.۳.۱ فضای هیلبرت

در مکانیک کوانتومی و نظریه اطلاعات کوانتومی، فضاهای هیلبرت ساختارهای ریاضی اصلی هستند که برای توصیف حالات کوانتومی استفاده می‌شوند. فضای هیلبرت که با \mathcal{H} نشان داده می‌شود، یک فضای برداری کامل است که به یک ضرب داخلی مجهز شده است. این ضرب داخلی امکان تعریف زوایا و فاصله‌ها بین بردارها را فراهم می‌کند و اهمیت زیادی دارد، زیرا محاسبه احتمالات و تکامل حالات کوانتومی در زمان را ممکن می‌سازد.

تعریف و ویژگی‌ها

برای هر دو بردار $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ در فضای هیلبرت \mathcal{H} ، ضرب داخلی $\langle\psi|\phi\rangle$ یک عدد مختلط است که دارای ویژگی زیر است:

$$\langle\psi|\phi\rangle = \overline{\langle\phi|\psi\rangle}$$

^۷ Symplectic Geometry

^۸ Wigner function

این ویژگی تضمین می‌کند که ضرب داخلی همواره متقارن است، علاوه بر این حاصل ضرب داخلی در آرگومان دوم خود خطی است:

$$\langle \psi | (a | \phi \rangle + b | \chi \rangle) = a \langle \psi | \phi \rangle + b \langle \psi | \chi \rangle$$

که در اینجا a و b اعداد مختلط هستند نرم یک بردار $|\psi\rangle$ در فضای هیلبرت H به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$$

اگر $\|\psi\| = 1$ باشد، آنگاه بردار $|\psi\rangle$ نرمال شده است. هر بردار $|\psi\rangle$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه نوشت:

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |e_i\rangle$$

که در آن بردارهای $|e_i\rangle$ تشکیل دهنده یک پایه متعامد-نرمال هستند، یعنی: $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$ که دلتای کرونکر است و برابر 1 است اگر $i = j$ و برابر 0 اگر $i \neq j$. در نتیجه، داریم:

$$\|\psi\|^2 = \langle \psi | \psi \rangle = \sum_i |a_i|^2$$

در سیستم‌های متغیر پیوسته، فضای هیلبرت معمولاً بی نهایت بعدی هستند. به عنوان مثال، حالت یک مد واحد از میدان الکترومغناطیسی در فضای هیلبرت $\mathcal{H} = L^2(R)$ نمایش داده می‌شود جایی که عملگرهای کوادراتور \hat{x} و \hat{p} به ترتیب به عنوان عملگرهای مکان و تکانه عمل می‌کند این فضای هیلبرت، فضایی از توابع مجذور انتگرال پذیر است و پایه‌ای برای تحلیل حالات کوانتومی نور تشکیل می‌دهد

۲.۳.۱ نظریه عملگرها

نظریه عملگرها چارچوب ریاضی است که برای توصیف مشاهده پذیرهای فیزیکی و دینامیک سیستم‌های کوانتومی استفاده می‌شود. عملگرها توابعی هستند که بردارها را از یک فضای برداری به فضای برداری دیگر نگاشت می‌کنند و در مکانیک کوانتومی برای نمایش اندازه گیری‌ها، تبدیلات و تکامل زمان ضروری هستند.

عملگر خطی

یک عملگر خطی \hat{A} روی یک فضای هیلبرت \mathcal{H} به صورت زیر تعریف می‌شود که برای هر بردار $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ در \mathcal{H} و هر عدد a و b داریم:

$$\hat{A}(a|\psi\rangle + b|\phi\rangle) = a\hat{A}|\psi\rangle + b\hat{A}|\phi\rangle$$

عملگرهای خطی اجزای اساسی مکانیک کوانتومی هستند، زیرا نماینده گیت‌ها و تبدیلات کوانتومی هستند

عملگرهای خودالحاقی

عملگرهای خودالحاقی که به عنوان عملگرهای هرمیتی نیز شناخته می‌شوند، بسیار مهم هستند؛ زیرا به مقادیر قابل مشاهده فیزیکی مربوط می‌شوند. یک عملگر \hat{A} خودالحاقی است اگر

$$\langle\psi|\hat{A}\phi\rangle = \langle\hat{A}\psi|\phi\rangle$$

به ازای همه بردارهای $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ در \mathcal{H} . عملگرهای خودالحاقی دارای ویژه مقادیر حقیقی هستند که با نیاز به اینکه مقادیر مشاهده پذیرها (مانند مکان، تکانه و انرژی) باید عددهای واقعی باشند، سازگار است.

عملگرهای یکانی

عملگرهای یکانی در مکانیک کوانتومی اهمیت زیادی دارند، زیرا تکامل زمانی سیستم‌های کوانتومی را توصیف می‌کنند، یک عملگر U یکانی است اگر

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I$$

که در آن I عملگر واحد است. عملگر واحد ضرب داخلی را تغییر نمی‌دهد و فرم بردارها و در نتیجه احتمالات را حفظ می‌کند و تغییر نمی‌دهد

جابه‌جاگرها و اصل عدم قطعیت

جابه‌جایی دو عملگر \hat{A} و \hat{B} به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

اصل عدم قطعیت هایزنبرگ که یک نتیجه اساسی از مکانیک کوانتومی است، از عدم جابه‌جایی عملگرهای مکان و تکانه به وجود می‌آید.

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

این رابطه نشان می‌دهد که نمی‌توان مکان و تکانه یک ذره را با هم و با دقت دلخواه اندازه‌گیری کرد. اصل عدم قطعیت نتیجه مستقیم نظریه عملگرها در مکانیک کوانتومی است. در اطلاعات کوانتومی متغیر پیوسته، نظریه عملگرها برای تحلیل رفتار عملگرهای تربیعی (کوادراتوری) که معادل مکان و تکانه در فضای فاز هستند به کار می‌رود. این عملگرها نقش مهمی در تعریف حالات و دینامیک سیستم‌های CV دارند.

۳.۳.۱ هندسه همتافت

هندسه همتافت یکی از بخش‌های مهم ریاضیات است که چارچوبی ریاضی برای توصیف فضای فاز در مکانیک کلاسیک و کوانتومی فراهم می‌کند. این حوزه به ویژه در مطالعه سیستم‌های کوانتومی متغیر پیوسته در نظریه اطلاعات کوانتومی اهمیت زیادی دارد، زیرا به ما کمک می‌کند تا تبدیلات و ناوردایی‌ها در فضای فاز را درک کنیم.

فضای برداری همتافت

فضای برداری همتافت یک فضای برداری حقیقی است \mathcal{V} که با یک فرم دو جمله‌ای غیرتبهگن^۹ و نامتقارن^{۱۰} که به عنوان فرم همتافت شناخته می‌شود تجهیز شده است.

$$\omega : \mathcal{V} * \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

^۹ non degenerate

^{۱۰} Skew-symmetric

در زمینه مکانیک کوانتومی، فرم همتافت روابط جایگشتی بین مختصات کانونیکال، مانند مکان و تکانه را رمزگذاری می‌کند. برای یک فضای برداری $V = \mathbb{R}^{2n}$ فرم همتافت می‌تواند با ماتریس J نمایش داده شود،

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix}$$

که در آن \mathbb{I}_n ماتریس واحد $n \times n$ است.

تبدیلات همتافت

یک تبدیل خطی $S : V \rightarrow V$ همتافت نامیده می‌شود اگر فرم همتافت را حفظ کند؛ به این معنا که:

$$J = S^T J S$$

در مکانیک کوانتومی متغیر پیوسته، تبدیلات همتافت، با عملیات‌های گاوسی مانند چلانگی، جابجایی و دوران مرتبط هستند که جزو موارد پایه‌ای و بنیادی در دستکاری حالت‌های کوانتومی هستند.

ماتریس‌های کوواریانس

در مطالعه حالت‌های گاوسی ماتریس کوواریانس σ ، یک کمیت کلیدی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{ij} = \langle \{\Delta R_i, \Delta R_j\} \rangle$$

که در آن $\Delta R_i = R_i - \langle R_i \rangle$ عملگرهای کوادراتور متمرکز شده هستند؛ ماتریس کوواریانس باید شرط عدم قطعیت را برآورده کند.

$$\sigma + \frac{i\hbar}{2} J > 0$$

که بازتابی از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ است که به ساختار همتافت فضای فاز اعمال می‌شود. هندسه همتافت ابزارهای لازم برای تحلیل و دستکاری سیستم‌های متغیر پیوسته را فراهم می‌کند و برای فهم رفتار حالت‌های کوانتومی در فضای فاز ضروری است.

۴.۳.۱ تابع ویگنر

توزیع شبه احتمال ویگنر نوعی توزیع شبه احتمالی است. این توزیع برای اولین بار توسط ویگنر در سال ۱۹۳۲ معرفی شد تا اصلاحات کوانتومی مکانیک آماری کلاسیک را مورد بررسی قرار دهد. هدف اصلی این بود که تابع موجی را که در معادله شرودینگر ظاهر می‌شود، به یک توزیع احتمال در فضای فاز مرتبط کنیم. این توزیع به عنوان یک تابع مولد برای تمام توابع خود همبستگی یک تابع موج کوانتومی مشخص، عمل می‌کند. این توزیع در واقع ماتریس چگالی کوانتومی را از طریق تبدیل ویگنر-ویل به یک تابع در فضای فاز حقیقی نگاشت می‌کند، که تجسم این عملگر در فضای فاز است. مفهوم نگاشت بین توابع فضای فاز حقیقی و عملگرهای هرمیتی اولین بار توسط هرمان ویل در سال ۱۹۲۷ در زمینه‌ای مرتبط با نظریه نمایش در ریاضیات معرفی شد. در سال ۱۹۴۸ ژان ویل این توزیع را مجدداً به عنوان یک نمایش مربعی از انرژی زمان-فرکانس محل یک سیگنال استنباط کرد و در واقع یک طیف نگار ایجاد کرد. بعدها در سال ۱۹۴۹ خوزه انریکه مویال به طور مستقل این تابع را به عنوان تابع مولد ممان‌های کوانتومی شناسایی کرد که مبنای رمزگذاری تمام مقادیر انتظاری کوانتومی در فضای فاز را فراهم می‌کند. در نتیجه توزیع ویگنر نقش مهمی در مکانیک آماری، شیمی کوانتومی، اپتیک کوانتومی، تحلیل سیگنال و... دارد. در مکانیک کلاسیک، یک ذره دارای مکان و تکانه مشخصی است که توسط یک نقطه در فضای فاز نمایش داده می‌شود. برای یک مجموعه (آنسامبل) از ذرات، احتمال یافتن یک ذره در یک مکان خاص در فضای فاز با یک توزیع احتمال مشخص می‌شود که به آن چگالی لیوول گفته می‌شود. اما این تفسیر برای ذرات کوانتومی به دلیل اصل عدم قطعیت صدق نمی‌کند. توزیع شبه احتمال ویگنر نقش مهمی را در مکانیک کوانتومی ایفا می‌کند، اما تمام خواص یک توزیع احتمال متعارف را ندارد. در واقع این توزیع می‌تواند مقادیر منفی بگیرد که معمولاً با اثرات تداخل کوانتومی مرتبط هستند و معادل کلاسیک ندارند. توزیع ویگنر برای یک حالت خالص به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x+y) \psi(x-y) e^{-2ipy/\hbar} dy$$

که در اینجا ψ تابع موج و x و p مکان و تکانه هستند. برای یک حالت کوانتومی که با ماتریس چگالی ρ توصیف می‌شود، تابع ویگنر $W(x, p)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-2ipy/\hbar} \langle x+y|\rho|x-y \rangle$$

فصل ۲

اپتیک کوانتومی و سیستم‌های متغیر پیوسته

در این فصل ابتدا مروری بر مفاهیم پایه اپتیک کوانتومی و سیستم‌های متغیر پیوسته داریم. اپتیک کوانتومی شاخه‌ای از فیزیک کوانتومی است که به بررسی رفتار نور در سطح کوانتومی می‌پردازد؛ به‌ویژه در شرایطی که خواص موجی و ذره‌ای نور به‌طور هم‌زمان نقش ایفا می‌کنند. سیستم‌های متغیر پیوسته نیز چارچوبی هستند که در آن مشاهده‌پذیرهایی مانند مکان و تکانه (یا به‌طور معادل، دامنه‌های میدان الکترومغناطیسی) به‌جای متغیرهای گسسته، به‌صورت پیوسته تعریف می‌شوند و در فضای فاز تحلیل می‌گردند.

همواره یکی از راهکارهای ما برای گذار از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتومی، تبدیل مشاهده‌پذیرهای ذرات به عملگرهای هرمیتی است. این عملگرها در فضای هیلبرت تعریف می‌شوند و به‌جای مقادیر عددی قطعی، طیفی از مقادیر ممکن را ارائه می‌دهند که وابسته به حالت کوانتومی سیستم هستند. این گذار مفهومی، پایه‌گذار بسیاری از پدیده‌های غیرکلاسیکی مانند درهم‌تنیدگی، تداخل کوانتومی، و عدم قطعیت است.

بحث را با کوانتش میدان الکترومغناطیسی آغاز می‌کنیم. در ابتدا هدف ما این است که نشان دهیم میدان‌های الکترومغناطیس چیزی جز نوسانات هماهنگ ساده نیستند. به‌عبارت دیگر، هر مد مستقل از میدان را می‌توان به‌صورت یک نوسان‌گر هماهنگ مدل کرد که در چارچوب کوانتومی با اپراتورهای آفرینش و نابودی توصیف می‌شود. این دیدگاه به ما اجازه می‌دهد تا رفتار نور را نه‌تنها به‌عنوان موج کلاسیکی، بلکه به‌عنوان مجموعه‌ای از فوتون‌ها در حالت‌های کوانتومی مختلف تحلیل کنیم. در ادامه، با استفاده از این مدل نوسان‌گر هماهنگ، به معرفی حالت‌های کوانتومی نور، توزیع‌های شبه‌احتمالی در فضای فاز، و ابزارهای ریاضیاتی مانند تابع ویگنر و ماتریس کواریانس خواهیم پرداخت.

۱.۲ کوانتش میدان الکترومغناطیسی

دو صفحهٔ رسانای نامتناهی که به موازات یکدیگر قرار گرفته‌اند را در نظر بگیرید. فرض کنید هیچ بار یا جریان الکتریکی در محیط وجود ندارد ولی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بتوانند بین این دو صفحه وجود داشته باشند. در غیاب منابع (بار و جریان) معادلات ماکسول عبارت‌اند از:

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \cdot E = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (1.2)$$

با کمی ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{or} \quad \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

ساده‌ترین جواب‌های این معادلات را می‌توان با استفاده از تکنیک جداسازی متغیرها و برگزیدن جواب‌های موج تخت برای بخش فضایی بدست آورد. با فرض اینکه قطبش میدان‌ها مشخص باشد و همچنین اعمال شرایط مرزی به راحتی می‌توانیم میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را به شکل زیر بدست آوریم

$$E_{(z,t)} = \hat{x} A_t \sin(kz)$$

$$B_{(z,t)} = \hat{y} \frac{\mu_0 \epsilon_0}{k} \dot{A}_t \cos(kz)$$

با توجه به رابطه انرژی کل الکترومغناطیسی، داریم

$$U = \frac{1}{2} \int_v (\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}) dv$$

$$U = \frac{V \epsilon_0}{4} (A^2 + \frac{\mu_0 \epsilon_0}{k} \dot{A}^2)$$

با استفاده از رابطه‌ی پاشندگی $\omega = kc$ و اندکی جبر ساده می‌توان رابطه‌ی بالا را به شکل زیر بازنویسی کرد

$$U = \frac{V\epsilon_0}{2m\omega^2} \left(\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 + \frac{1}{2}m\dot{A}^2 \right) \quad (۲.۲)$$

که m مقدار ثابتی است که در صورت و مخرج ضرب شده است. حال اگر متغیر q را که بعد مکان دارد به صورت $q^2 = \frac{V\epsilon_0}{2m\omega^2} A^2$ تعریف کنیم و از آن کمیتی از جنس تکانه خطی $p \equiv m\dot{q}$ بسازیم، انرژی الکترومغناطیس شبیه به انرژی یک نوسانگر هماهنگ ساده خواهد شد

$$U = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (۳.۲)$$

اکنون وقت آن رسیده که انرژی نوسانگر هماهنگ ساده فوق کوانتیزه شود. برای این منظور به هر متغیر مشاهده‌پذیر در کلاسیک یک عملگر خطی و هرمیتی نسبت داده می‌شود. متغیرهای مشاهده‌پذیر ما در این مسئله عبارتند از: مکان، تکانه و انرژی. بنابراین:

$$q \rightarrow \hat{q} \quad , \quad p \rightarrow \hat{p} \quad , \quad U \rightarrow \hat{H}$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{q}^2$$

پس موج الکترومغناطیس یک سیستم از میدان‌های الکترومغناطیسی نوسان کننده هست. سیستم‌های نوسانگر هماهنگ توسط فرکانس‌های مشخص خود تفکیک می‌شوند، به هر فرکانس متمایز یک «مد» می‌گوییم. بنابراین موج الکترومغناطیسی می‌تواند به مد‌های نوسان تجزیه شود که بسته به هر مد یک عملگر خلق و فنا داریم. عملگرهای خلق و فنا متناظر با سیستم نوسانگر هماهنگ، در تحلیل هر پتانسیل بسیار مهم هستند. این عملگرها را می‌توان برحسب عملگرهای مکان و تکانه به شکل زیر نمایش داد

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} + i\hat{p}) \quad (۴.۲)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} - i\hat{p}) \quad (۵.۲)$$

که در این جا ω فرکانس زاویه‌ای متناظر با نوسانگر است.

۲.۲ حالت‌های فوک

حالت‌های فوک که به عنوان حالت‌های عددی نیز شناخته می‌شوند، حالت‌های کوانتومی یک سامانه را با تعداد مشخصی از ذرات توصیف می‌کنند. در زمینه اپتیک کوانتومی این ذرات معمولاً فوتون‌ها هستند. یک حالت فوک $|n\rangle$ به عنوان حالتی تعریف می‌شود که دقیقاً n ذره (مثلاً فوتون) در یک مد مشخص از میدان الکترومغناطیس دارد. به صورت ریاضی، حالت‌های فوک، حالت‌های ویژه عملگر تعداد \hat{n} هستند که تعداد ذرات را می‌شمارد.

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle$$

در اینجا $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ است و \hat{a}^\dagger و \hat{a} به ترتیب عملگرهای خلق و نابودی هستند. این عملگرها از روابط جابجایی بوزونی پیروی می‌کنند

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

عملگر خلق \hat{a}^\dagger یک ذره به حالت اضافه می‌کند

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

در حالی که عملگر نابودی \hat{a} یک ذره را حذف می‌کند

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

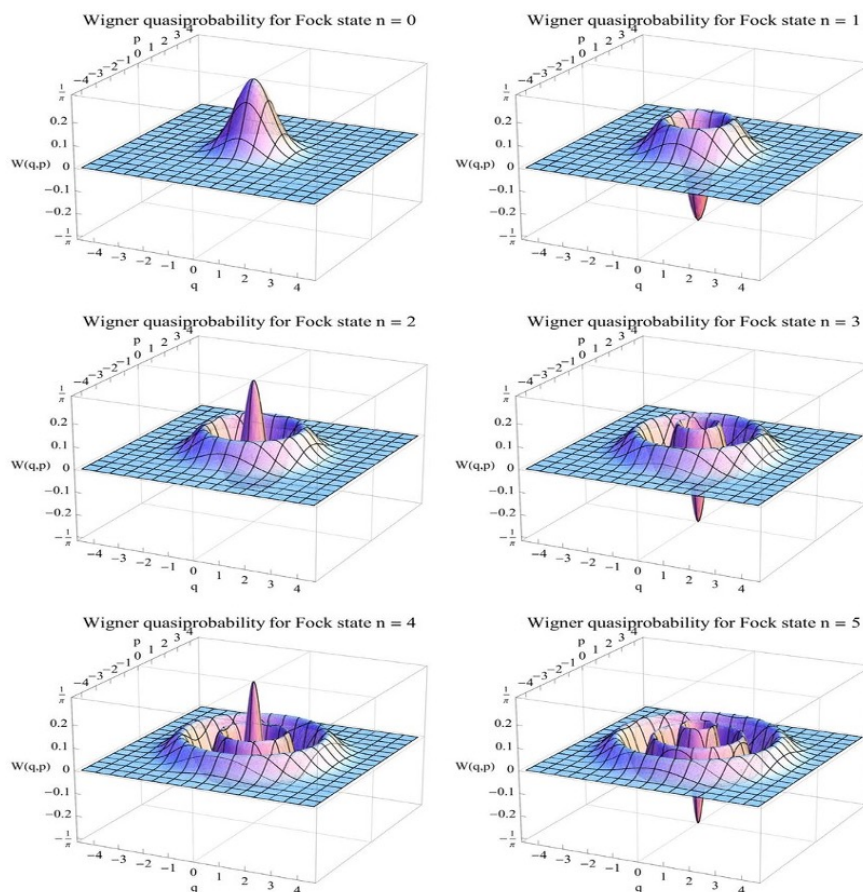
حالت خلا $|0\rangle$ ، حالتی را نشان می‌دهد که در آن هیچ ذره‌ای وجود ندارد و حالت پایه مد است. به عبارت دیگر هامیلتونی هر سامانه برای تضمین پایداری سامانه از پایین محدود شده، یعنی برای هر مد k یک حالت خلا $|0\rangle$ وجود دارد به طوری که

$$\hat{a} |0\rangle = 0$$

حالت‌های فوک متعامد و کامل هستند و یک پایه کامل برای فضای هیلبرت یک مد تشکیل می‌دهند

$$\langle m | n \rangle = \delta_{nm} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \hat{\mathbb{I}}$$

در شکل زیر تابع ویگنر برای حالت‌های مختلف عددی رسم شده است.



شکل ۱.۲: تابع ویگنر به ازای حالت‌های فوک مختلف

۳.۲ فضای فوک

فضای فوک، فضای هیلبرت است که همه‌ی حالت‌های کوانتومی ممکن یک سامانه با تعداد متغیر ذرات راه در برمی‌گیرد. برای یک تک مد، فضای فوک صرفاً گسترده همه حالت‌های فوک $|n\rangle$ به ازای $n = 0, 1, \dots$ است. با این حال برای چندین مد فضای فوک پیچیده‌تر شده و به صورت حاصل ضرب تانسوری فضای فوک مدهای منفرد ساخته می‌شود. یک حالت عمومی در فضای فوک را می‌توان به شکل برهم‌نهی حالت‌هایی با تعداد ذرات مختلف نوشت:

$$|\psi\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle + \dots$$

که در آن c_n ضرایب مختلط هستند و $|n\rangle$ نماینده حالت فوک با n ذره است. این حالت همچنین می‌تواند در سیستم چند

مدی به صورت زیر بیان شود:

$$|\psi\rangle = \sum_{n_1, n_2, \dots} c_{n_1, n_2, \dots} |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \dots$$

که در آن n_i تعداد ذرات در مد i ام را نشان می دهد.

۴.۲ عملگرهای تربیعی (کوادراتور) میدان

هامیلتونی یک نوسانگر هارمونیک برحسب عملگرهای مکان و تکانه برای یک تک مد k به شکل زیر بدست آمد که در آن ذرات را بدون جرم در نظر گرفتیم:

$$\hat{H}_k = \frac{1}{2}(\hat{p}_k^2 + \omega_k^2 \hat{x}_k^2) \quad (۶.۲)$$

اگر این هامیلتونی را بر حسب عملگرهای خلق و فنا بازنویسی کنیم داریم:

$$H_k = \hbar\omega_k(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2}) \quad (۷.۲)$$

با توجه به روابط (۴.۲) و (۵.۲) می توان عملگرهای مکان و تکانه را برای هر مد k برحسب عملگرهای خلق و فنا به شکل زیر نوشت

$$\hat{p}_k = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}}(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger) \quad (۸.۲)$$

$$\hat{x}_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger) \quad (۹.۲)$$

که رابطه جابجایی زیر بین آن ها برقرار است:

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_{k'}] = i\hbar\delta_{kk'}$$

کار کردن با عملگرهای بدون بعد راحت تر است. دقیقاً شبیه به اینکه در مورد حالت‌ها و عملگرهای اسپینی ترجیح می‌دهیم با عملگرهای پائولی محاسبات را دنبال کنیم. در این بخش دو عملگر معرفی می‌شود که به آن‌ها عملگرهای تربیعی یا کوادراتورهای میدان می‌گوییم. کوادراتورهای متناظر با هر مد به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\hat{q}_k = \hat{X} = \frac{(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger)}{\sqrt{2}} = Re(\hat{a}) \quad (10.2)$$

$$\hat{p}_k = \hat{P} = \frac{(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger)}{i\sqrt{2}} = Im(\hat{a}) \quad (11.2)$$

رابطه جابجایی برای آن‌ها به شکل زیر است:

$$[\hat{q}_k, \hat{p}_l] = i\delta_{kl}$$

برای عدم قطعیت دو مشاهده پذیر غیرقابل جابجایی دلخواه داریم:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle &= \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \\ \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle &= \langle (\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{B} \rangle^2 \\ \langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle &\geq \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (12.2)$$

بنابراین، رابطه عدم قطعیت برای کوادراتورهای \hat{X}_k و \hat{P}_k به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\langle (\Delta \hat{X}_k)^2 \rangle \langle (\Delta \hat{P}_k)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{X}_k, \hat{P}_k] \rangle \right|^2 = \frac{1}{16} \quad (13.2)$$

در بخش ۱.۲ اشاره شد که موج الکترومغناطیس می‌تواند به مدهای نوسانی تجزیه شود، بسته به هر مد یک عملگر خلق و فنا داریم. تک مد کوانتیده میدان الکترومغناطیسی برحسب عملگرهای خلق و فنا به شکل زیر بیان می‌شود

$$\hat{E}_k(r, t) = E_0 \left(\hat{a}_k e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + \hat{a}_k^\dagger e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right)$$

که در این رابطه E_0 دامنه میدان الکتریکی است. با استفاده از رابطه ۱۰.۲ و ۱۱.۲، می‌توانیم میدان الکتریکی را به شکل

$$\hat{E}_k(r, t) = 2E_0 \left(\hat{X}_k \cos(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + \hat{P}_k \sin(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right)$$

بازنویسی کنیم. همچنین میدان الکتریکی رابطه بالا را می‌توان با در نظر گرفتن یک ثابت فاز اختیاری Θ به شکل کلی زیر نمایش داد

$$\hat{E}_k(r, t) = 2E_0 \left(\hat{X}_k^{(\Theta)} \cos(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \Theta) + \hat{P}_k^{(\Theta)} \sin(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \Theta) \right) \quad (۱۴.۲)$$

در اینجا شکل کلی کوادراتورهای میدان با رابطه زیر داده می‌شوند

$$\begin{aligned} \hat{X}_k^{(\Theta)} &= (\hat{a}_k e^{-i\Theta} + \hat{a}_k^\dagger e^{i\Theta})/2 \\ \hat{P}_k^{(\Theta)} &= (\hat{a}_k e^{-i\Theta} - \hat{a}_k^\dagger e^{i\Theta})/2i \end{aligned} \quad (۱۵.۲)$$

این کوادراتورهای جدید بدست آمده را می‌توان از طریق چرخش کوادراتورهای اولیه بدست آورد.

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_k^{(\Theta)} \\ \hat{P}_k^{(\Theta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_k \\ \hat{P}_k \end{pmatrix} \quad (۱۶.۲)$$

چون این تبدیل یک تبدیل یکانی است، مشاهده‌پذیرهای جدید بدست آمده هرمیتی هستند و در رابطه جابجایی صدق می‌کنند.

۵.۲ فضای فاز

فضای فاز یک فضای انتزاعی است که برای نمایش حالت‌های سیستم برحسب جفت‌های مکان و تکانه استفاده می‌شود. در بیان کلاسیکی یک حالت می‌تواند به صورت یک نقطه در فضای فاز نمایش داده شود چون مکان و تکانه حالت مقدار دقیقی دارند. اما در مکانیک کوانتوم این نمایش مجاز نیست، بنابراین یک حالت کوانتومی خالص باید به جای یک نقطه با یک محدوده یا لکه نمایش داده شود یعنی یک نقطه‌ای که عدم قطعیت هم دارد به دلیل وجود شباهت بین عملگرهای

مکان و تکانه و عملگرهای کوادراتور، استفاده از کوادراتورها بجای مکان و تکانه در نمایش فضای فاز امری مرسوم است. برای توصیف رفتار مشاهده‌پذیرهای کوادراتور میدان در فضای فاز، تابع ویگنر یک تابع توزیع مناسب است که در بخش ۴.۳.۱ به آن اشاره شد. بر اساس شکل تابع توزیع ویگنر، حالت‌های کوانتومی متغیر پیوسته را می‌توان به دو گروه حالت‌های گاوسی و غیر گاوسی تقسیم کرد.

۶.۲ حالت‌های گاوسی

حالت‌های گاوسی، یکی از بنیادی‌ترین و در عین حال پرکاربردترین دسته‌ها در فضای سیستم‌های متغیر پیوسته هستند. این حالت‌ها به واسطه ساختار ریاضیاتی ساده اما قدرتمندشان، در بسیاری از زمینه‌های اپتیک کوانتومی، اطلاعات کوانتومی، و نظریه آشکارسازی نقش کلیدی ایفا می‌کنند. ویژگی بارز حالت‌های گاوسی آن است که تابع توزیع ویژگی مشخصه آن‌ها و همچنین توزیع‌های شبه‌احتمالی متناظر مانند تابع ویگنر، همگی دارای فرم گاوسی هستند. از منظر ریاضی، یک حالت کوانتومی در فضای فاز زمانی گاوسی تلقی می‌شود که تابع چگالی آن به صورت کامل با ماتریس کواریانس و بردار میانگین مشخص شود. این بدان معناست که تمام اطلاعات آماری حالت، در مرتبه دوم لحظه‌ها خلاصه می‌شود و نیازی به دانستن جزئیات مرتبه‌های بالاتر نیست. این ویژگی باعث می‌شود که حالت‌های گاوسی به عنوان مدل‌هایی تحلیلی و قابل پیاده‌سازی در آزمایشگاه، بسیار محبوب باشند. در ادامه این بخش برخی از حالت‌های مهم گاوسی را بررسی می‌گردد.

۱.۶.۲ حالت گرمایی

حالت گرمایی^۱ زمانی ایجاد می‌شود که سامانه مورد نظر در تعادل ترمودینامیکی باشد. حالت گرمایی در دمای غیر صفر تقریب خوبی از حالت خلا است. ماتریس چگالی یک حالت گرمایی که در دمای T قرار دارد در حالت کلی به شکل

$$\rho = \frac{\exp(-\beta \hat{H})}{\text{tr} [\exp(-\beta \hat{H})]} \quad (۱۷.۲)$$

در این رابطه، \hat{H} نمایانگر هامیلتونی سیستم است که انرژی‌های مجاز حالت‌های کوانتومی را تعیین می‌کند، و β پارامتر ترمودینامیکی موسوم به "بتا" است که به دما وابسته بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

^۱ Thermal states

که در آن k_B ثابت بولتزمن و T دمای مطلق سیستم است. این پارامتر نقش کلیدی در توزیع گیس ایفا می‌کند و تعیین‌کننده وزن نسبی حالت‌های انرژی مختلف در حالت تعادلی سیستم‌های کوانتومی و آماری است. ثابت بولتزمن است. اگر حالت مورد استفاده یک حالت تک مد باشد در این صورت رابطه ۱۷.۲ را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$\rho = \frac{\exp(-\beta \hbar \omega \hat{n})}{\text{Tr} [\exp(-\beta \hbar \omega \hat{n})]} \quad (18.2)$$

در رابطه بالا، ω فرکانس مد مورد استفاده و \hat{n} عملگر تعداد است. اگر تابع توزیع ویگنر را برای یک حالت گرمایی محاسبه شود در نهایت به رابطه زیر بدست می‌آید که آشکارا یک تابع گاوسی است.

$$W_{\text{th}}(x, p) = \frac{1 - e^{-\omega\beta}}{\pi(1 + e^{-\omega\beta})} \exp \left[-\frac{1 - e^{-\omega\beta}}{1 + e^{-\omega\beta}} (x^2 + p^2) \right] \quad (19.2)$$

۲.۶.۲ حالت همدوس

حالت‌های همدوس^۲ ویژه حالت‌های عملگر فنا هستند.

$$\hat{a}_k |\alpha\rangle_k = \alpha |\alpha\rangle_k$$

و یک پایه ابرکامل می‌باشند. یک حالت همدوس را برحسب پایه‌های فوک می‌توانیم به شکل زیر بسط دهیم

$$|\alpha\rangle_k = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_k \quad (20.2)$$

حالت خلا ویژه حالت عملگر فنا با ویژه مقدار صفر است. پس به عنوان یک مثال ساده از حالت‌های همدوس می‌توان حالت خلا را در نظر گرفت. به عنوان اولین مثال به محاسبه تابع ویگنر برای حالت خلا می‌پردازیم، تابع موج مکان حالت خلا را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$$

^۲ Coherent states

با توجه به اینکه

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p})$$

$$\hat{a} |0\rangle = 0$$

بنابراین

$$\hat{a} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}) \int dq |x\rangle \langle x|0\rangle = \int dx |x\rangle (x + \frac{\partial}{\partial x}) \langle x|0\rangle = 0$$

$$\left(x + \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi_0(x) = 0$$

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (21.2)$$

با کمی محاسبه به راحتی تابع ویگنر را می‌توانیم محاسبه کنیم و در نهایت تابع ویگنر حالت خلا به شکل زیر بدست می‌آید

$$W_{|0\rangle\langle 0|}(x, p) = \frac{2}{\pi} \exp(-x^2 - p^2) \quad (22.2)$$

حال به سراغ محاسبه تابع ویگنر برای یک حالت همدوس در پایه‌های مکان می‌رویم. ابتدا با تعریف $\psi_\alpha(x)$ شروع می‌کنیم

$$\psi_\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle$$

با توجه به اینکه در حالت کلی α یک عدد مختلط است و می‌توان آن را به صورت $\alpha = x_0 + ip_0$ نوشت، همچنین با استفاده از رابطه ۲۰.۲ که بیان‌گر تابع موج در نمایش مختصات برای حالت‌های عددی است، به راحتی می‌توان تابع موج حالت همدوس را محاسبه کرد. بنابراین داریم

$$\psi_\alpha(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - x_0)^2 + ip_0x\right) \quad (23.2)$$

این تابع موج نشان می‌دهد که حداقل عدم قطعیت بسته موج در مرکز (x_0, p_0) است. برای محاسبه تابع ویگنر یک حالت همدوس از تعریف فصل اول تابع ویگنر استفاده می‌کنیم.

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-2iyp/\hbar} \langle x+y|\rho|x-y \rangle$$

$$\rho = |\alpha\rangle \langle \alpha|$$

$$\langle x+y|\rho|x-y \rangle = \langle x+y|\alpha\rangle \langle \alpha|x-y \rangle = \psi_{\alpha}(x+y) \psi_{\alpha}^*(x-y)$$

$$\psi_{\alpha}(x+y) \psi_{\alpha}^*(x-y)$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}((x+y-x_0)^2 + (x-y-x_0)^2) + ip_0((x+y)-(x-y))\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-((x-x_0)^2 + y^2) + 2ip_0y\right)$$

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-((x-x_0)^2 + y^2) + 2ip_0y\right) e^{-2iyp} dy$$

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(-y^2 + 2i(p_0 - p)y) \exp(-((x-x_0)^2) dy$$

در ادامه ابتدا به ساده‌سازی عبارت $\exp(-y^2 + 2i(p_0 - p)y)$ در انتگرال می‌پردازیم

$$\exp(-y^2 + 2i(p_0 - p)y) = \exp(-(y - i(p_0 - p))^2 + (p_0 - p)^2)$$

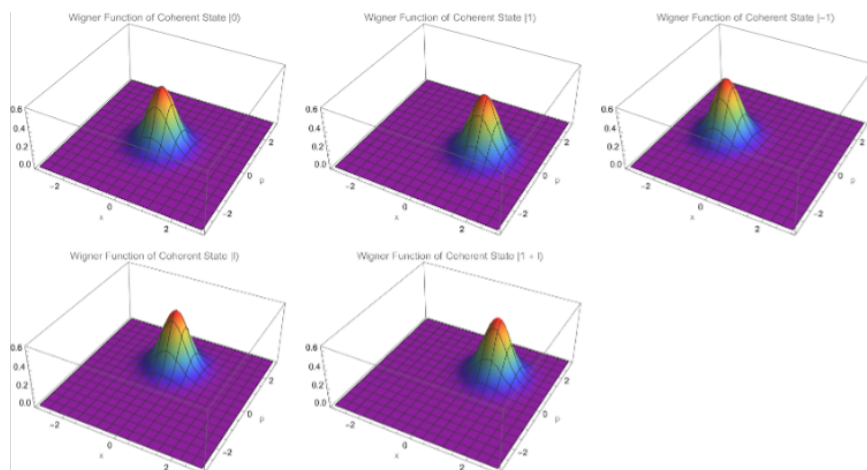
$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(y - i(p_0 - p))^2 + (p_0 - p)^2) dy = \sqrt{\pi} e^{(p_0 - p)^2}$$

در نهایت تابع ویگنر برابر است با

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} \exp(-(x-x_0)^2) \exp((p_0 - p)^2)$$

$$W(x, p) = \frac{2}{\pi} \exp(-2((x - \text{Re}(\alpha))^2 + (p - \text{Im}(\alpha))^2)) \quad (24.2)$$

نمایش تابع ویگنر برای مقادیر مختلف در شکل زیر آمده است.



شکل ۲.۲: تابع ویگنر حالت‌های همدوس

در حالت کلی یک تابع گاوسی چند متغیره را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$f(x) = c \exp \left(-\frac{1}{2} x^T A x + b^T x \right) \quad (25.2)$$

در این رابطه $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ ، $b = (b_1, b_2, \dots, b_N)^T$ و A یک ماتریس مثبت $n \times n$ است. بنابراین می‌توان هر حالت گاوسی را با یک بردار b و یک ماتریس A توصیف کرد. به بردار b ممان اول می‌گوییم و ماتریس A معکوس ممان دوم می‌باشد. کوادراتورهای مکان و تکانه را به شکل رابطه ۱۰.۲ و ۱۱.۲ تعریف شده است، از این رو می‌توان همه عملگرهای کانونی را در یک بردار به شکل زیر نوشت:

$$\hat{R} = (\hat{q}_1, \hat{p}_1, \dots, \hat{q}_N, \hat{p}_N)^T$$

همچنین می‌توانیم رابطه جابجایی بین عملگرها را به شکل

$$[\hat{R}_k, \hat{R}_l] = i\Omega_{kl}$$

بنویسیم، که در این رابطه Ω فرم هم‌تافت N مد است. ما d_j را به عنوان ممان اول حالت گاوسی ρ معرفی می‌کنیم که از رابطه زیر بدست می‌آید

$$d_j = \langle \hat{R}_j \rangle_\rho$$

و ماتریس هم‌وردا σ را به عنوان ممان دوم معرفی می‌کنیم.

$$\sigma = \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left\langle \hat{R}_i \hat{R}_j + \hat{R}_j \hat{R}_i \right\rangle_\rho - \left\langle \hat{R}_i \right\rangle_\rho \left\langle \hat{R}_j \right\rangle_\rho \quad (26.2)$$

۳.۶.۲ حالت چلانده

حالت‌های همدوس، حالت‌هایی هستند که کم‌ترین عدم قطعیت را دارند با این حال، مجموعه‌ای بزرگ‌تر از حالت‌ها هستند که کم‌ترین عدم قطعیت را دارند اما ممکن است در آن‌ها واریانس مکان و تکانه برابر نباشد. مثلاً واریانس مکان کم و تکانه زیاد باشد یا بالعکس اما این کم و زیادی به گونه‌ای باشد که حالت باز هم کم‌ترین عدم قطعیت را داشته باشد. این حالت‌ها را حالت چلانده^۳ می‌گوییم. تابع ویگنر حالت چلانده با رابطه زیر داده می‌شود

$$W(x, p) = \frac{2}{\pi} \exp \left(-2 \left(\frac{(x - \text{Re}(\alpha))^2 \cos^2 \theta + (p - \text{Im}(\alpha))^2 \sin^2 \theta}{e^{2r}} + e^{2r} ((x - \text{Re}(\alpha))^2 \sin^2 \theta + (p - \text{Im}(\alpha))^2 \cos^2 \theta) \right) \right)$$

توصیف کامل این حالات در فصل بعدی آورده شده است. در مکانیک کوانتومی هر حالتی که می‌خواهد در فضای هیلبرت تحول یابد، توسط عملیات یکانی توصیف می‌شود. اما اشاره شد، فضایی مورد فضای فاز است. یک سوال مهمی که ممکن است ایجاد شود این است که یک تبدیل یکانی در فضای هیلبرت چگونه در فضای فاز تعریف می‌شود؟ اگر حالتی که مورد استفاده قرار می‌گیرد یک حالت گاوسی باشد، در حالت‌های گاوسی تبدیل یکانی روی فضای هیلبرت به یک تبدیل هممتافته بر روی ممان اول و دوم نگاشت می‌شود. نحوه عملکرد این تبدیل در رابطه زیر نمایش داده شده است. قبلاً ذکر شد که هر حالت گاوسی را می‌توان توسط ممان‌های اول و دوم توصیف کرد. ممان‌های اول و دوم تبدیل یافته به شکل زیر بدست می‌آید. در اینجا d ممان اول تبدیل یافته و σ ممان دوم تبدیل یافته است. بنابراین حالت تبدیل یافته جدید توسط ممان‌های جدید می‌تواند توصیف شود.

$$\dot{\rho} = \hat{U} \rho \hat{U}^\dagger \rightarrow \begin{cases} \dot{d} = S d \\ \dot{\sigma} = S \sigma S^T \end{cases} \quad (27.2)$$

^۳ Squeezed states

فصل ۳

محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته

تا این فصل، با مفاهیم پایه‌ای و ابزارهای ریاضیاتی لازم برای توصیف و تحلیل سامانه‌های کوانتومی با متغیرهای پیوسته آشنا شده‌ایم. این مقدمات شامل تعریف فضای فاز، حالت‌های گاوسی، توزیع‌های شبه‌احتمالی مانند تابع ویگنر، و ساختار ماتریس چگالی در نمایش مختصات و فضای فاز بوده‌اند. این مباحث، چارچوبی تحلیلی برای درک رفتار آماری و دینامیکی حالت‌های کوانتومی در سیستم‌های متغیر پیوسته فراهم کرده‌اند. در فصل پیش‌رو، تمرکز ما بر معرفی و بررسی عملگرهای بنیادی و گیت‌های کوانتومی در فضای متغیرهای پیوسته خواهد بود. این عملگرها شامل اپراتورهای جابجایی، چلانندگی، چرخش فازی، و تبدیل‌های خطی در فضای فاز هستند که هر یک نقش مشخصی در تغییر حالت‌های کوانتومی ایفا می‌کنند. همچنین، گیت‌های کوانتومی مانند گیت‌های همدوس، گیت‌های درهم‌تنیده‌کننده، و گیت‌های غیرخطی در این چارچوب معرفی خواهند شد. در این فصل، نه تنها ساختار ریاضیاتی این عملگرها را بررسی می‌کنیم، بلکه اثر اعمال آن‌ها بر روی حالت‌ها، توزیع‌های آماری، و دیگر عملگرها را نیز تحلیل خواهیم کرد. این تحلیل‌ها به ما امکان می‌دهند تا رفتار سیستم را تحت تبدیل‌های کوانتومی مختلف پیش‌بینی کنیم و مسیر طراحی الگوریتم‌های کوانتومی در فضای متغیرهای پیوسته را هموار سازیم. در واقع، این فصل به منزله‌ی سنگ‌بنای محاسبات کوانتومی در فضای پیوسته است و پایه‌های مفهومی و عملی لازم برای ورود به مباحث پیشرفته‌تر مانند رمزنگاری کوانتومی، آشکارسازی بهینه، و الگوریتم‌های کوانتومی مبتنی بر حالت‌های گاوسی را فراهم می‌سازد.

۱.۳ گیت‌های کوانتومی

عملیات یکانی همواره از طریق رابطه زیر

$$U = e^{-itH} \quad (۱.۳)$$

به یک هامیلتونین مولد مرتبط می‌شود. یکی از رویکردهای رایج این است که یکانی‌ها را براساس درجه هامیلتونین مولد طبقه‌بندی کنیم. می‌توان یک یکانی N مدی را با اعمال دنباله‌ای از گیت‌ها از یک مجموعه گیت جهان‌شمول ساخت. طبق طبقه‌بندی براساس درجه هامیلتونین یکانی‌ها به گیت‌های گاوسی و غیرگاوسی تقسیم می‌شوند که در ادامه برخی از مهم‌ترین‌ها بیان می‌شود.

۱.۱.۳ گیت جابه‌جایی

در فضای فاز کوانتومی، یکی از بنیادی‌ترین عملگرها، گیت جابه‌جایی^۱ است که نقش کلیدی در تولید، کنترل و پردازش حالت‌های همدوس و گاوسی ایفا می‌کند. این گیت با اعمال یک جابه‌جایی در فضای فاز، حالت اولیه را به نقطه‌ای جدید با مختصات دلخواه (x_0, p_0) منتقل می‌کند، بدون تغییر شکل تابع موج یا تابع ویگنر آن. عملگر جابه‌جایی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) \quad (۲.۳)$$

که در آن $\alpha = x_0 + ip_0$ پارامتر جابه‌جایی است و \hat{a}, \hat{a}^\dagger به ترتیب اپراتورهای خلق و فنا هستند. اعمال این گیت بر روی حالت خلأ، یک حالت همدوس تولید می‌کند

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle$$

می‌توان بصورت زیر، اثبات ریاضی آن را داشت. با استفاده از لم هاسدروف-بیکر داریم

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12}([\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]]) + \dots}$$

^۱ Displacement Gate

اگر $\hat{B} = \alpha^* \hat{a}$ و $\hat{A} = \alpha \hat{a}^\dagger$ در نتیجه

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0, \quad [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] = 0$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = |\alpha|^2$$

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}$$

بنابراین داریم

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} \quad (۳.۳)$$

حال بسط نمایی را می‌نویسیم

$$e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(e^{-\alpha^* \hat{a}})^l}{l!} |0\rangle$$

$$e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n (\hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle$$

با توجه به اینکه $\hat{a} |0\rangle = 0$ و $(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle$

$$e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \sqrt{n!} |n\rangle$$

بنابراین اثر عملگر جابجایی $\hat{D}(\alpha)$ بر روی حالت خلا به شکل زیر است:

$$\hat{D}(\alpha) |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (۴.۳)$$

نابراین برای ایجاد حالت همدوس با پارامتر α کافی است عملگر $\hat{D}(\alpha)$ را بر روی حالت خلا اعمال کنیم.

$$\hat{D}(\alpha) |0\rangle = |\alpha\rangle$$

اثر اعمال این عملگر بر روی عملگرهای خلق و فنا به شکل زیر است

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*$$

بنابراین به راحتی می‌توان نشان داد که تاثیر آن بر کوادراتور \hat{X} به شرح زیر است

$$\begin{aligned} \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{x} \hat{D}(\alpha) &= \frac{1}{2} \hat{D}^\dagger(\alpha) 2 \hat{x} \hat{D}(\alpha) \\ &= \frac{1}{2} \left(\hat{D}^\dagger(\alpha) (\hat{x} + i\hat{p} + \hat{x} - i\hat{p}) \hat{D}(\alpha) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) + \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \alpha + \hat{a}^\dagger + \alpha^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + \sqrt{2} \text{Re}(\alpha) \end{aligned}$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{x} \hat{D}(\alpha) = \hat{x} + \sqrt{2} \text{Re}(\alpha) \quad (5.3)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که به طور مشابه داریم

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{p} \hat{D}(\alpha) = \hat{p} + \sqrt{2} \text{Im}(\alpha) \quad (6.3)$$

اگر عملگرهای جابجایی مکان و تکانه خالص را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\hat{X}(x) = \hat{D} \left(\frac{x}{\sqrt{2\hbar}} \right) = \exp \left(-\frac{ix\hat{p}}{\hbar} \right)$$

$$\hat{Z}(p) = \hat{D} \left(\frac{ip}{\sqrt{2\hbar}} \right) = \exp \left(-\frac{ip\hat{x}}{\hbar} \right)$$

در نتیجه

$$\hat{X}^\dagger(x) \hat{x} \hat{X}(x) = \hat{x} + x$$

$$\hat{Z}^\dagger(p) p Z(p) = \hat{p} + p$$

$\hat{X}(x)$ یک حالت را در فضای فاز با x در مکان جابه‌جا می‌کند، در حالی که $\hat{Z}(p)$ حالت را در فضای فاز به اندازه p در تکانه جابه‌جا می‌کند. ما در ابتدای بخش اثر عملگر $\hat{D}(\alpha)$ را بر روی حالت خلا دیدیم. حال اگر بخواهیم عملگر جابجایی را بر روی یک حالت همدوس دلخواه مانند $|\beta\rangle$ نتیجه به چه صورت خواهد بود. در این حالت، مانند این است که دوبار عملگر جابجایی را بر روی حالت خلا اعمال کنیم یعنی

$$\hat{D}(\alpha) \hat{D}(\beta) |0\rangle$$

پس کافی است $\hat{D}(\alpha) \hat{D}(\beta)$ را محاسبه کنیم. با تعریف

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}$$

$$\hat{D}(\beta) = e^{\beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a}}$$

و استفاده از لم هاسدروف-بیکر خواهیم داشت

$$\hat{A} = \alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}$$

$$\hat{B} = \beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a}$$

و توجه به روابط جابه‌جایی بین عملگرهای خلق و فنا خواهیم داشت

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}] &= [\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, \beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a}] \\ &= \alpha \beta [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] - \alpha \beta^* [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] - \alpha^* \beta [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + \alpha^* \beta^* [\hat{a}, \hat{a}] \end{aligned}$$

$$[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}, \hat{a}] = 0, \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

$$[\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}, \beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a}] = \alpha \beta^* - \alpha^* \beta$$

$$\alpha \beta^* - \alpha^* \beta = 2i \text{Im}(\alpha \beta^*)$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 2i \operatorname{Im}(\alpha\beta^*)$$

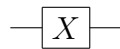
در نهایت

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha) \hat{D}(\beta) &= e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} e^{\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}} \\ &= e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a} + \beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} \\ &= e^{(\alpha+\beta)\hat{a}^\dagger - (\alpha+\beta)^*\hat{a}} e^{i\operatorname{Im}(\alpha\beta^*)} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\hat{D}(\alpha) \hat{D}(\beta) = \hat{D}(\alpha + \beta) e^{i\operatorname{Im}(\alpha\beta^*)} \quad (۷.۳)$$

در شکل ۲.۲ اثر این گیت بر روی حالت‌های مختلف نشان داده شده است. این گیت در مدار کوانتومی بصورت زیر نمایش داده می‌شود



شکل ۱.۳: نحوه نمایش گیت جابه‌جایی در مدارهای کوانتومی

۲.۱.۳ گیت چرخشی

دومین گیتی تک‌مدی که بررسی می‌کنیم گیت چرخشی^۲ یا تغییر فاز^۳ است که به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{R}(\phi) = e^{i\phi\hat{a}^\dagger\hat{a}} \quad (۸.۳)$$

این گیت یکی از عملگرهای بنیادی در محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته و اپتیک کوانتومی است که وظیفه‌ی آن، اعمال یک چرخش در فضای فاز به اندازه زاویه ϕ است. این چرخش باعث تغییر فاز حالت کوانتومی بدون تغییر در دامنه آن

^۲ Rotation Gate

^۳ Phase gate

می‌شود. تاثیر آن بر عملگرهای خلق و فنا به شکل زیر است

$$\hat{R}^\dagger(\phi) \hat{a} \hat{R}(\phi) = \hat{a} e^{i\phi}$$

$$\hat{R}^\dagger(\phi) \hat{a}^\dagger \hat{R}(\phi) = \hat{a}^\dagger e^{-i\phi}$$

اگر تاثیر این گیت را بر یک حالت همدوس بررسی کنیم داریم

$$\hat{R}(\phi) \hat{D}(\alpha) |0\rangle$$

چون $\hat{R}(\phi) |0\rangle = |0\rangle$ و با توجه به اینکه R یکانی است، عبارت بالا را به شکل زیر می‌توانیم بازنویسی کنیم

$$\hat{R}(\phi) \hat{D}(\alpha) |0\rangle = \hat{R}(\phi) \hat{D}(\alpha) \hat{R}^\dagger(\phi) \underbrace{\hat{R}(\phi) |0\rangle}_{|0\rangle}$$

پس کافی است $\hat{R}(\phi) \hat{D}(\alpha) \hat{R}^\dagger(\phi)$ را محاسبه کنیم

$$\hat{R}(\phi) \hat{D}(\alpha) \hat{R}^\dagger(\phi) = \hat{R}(\phi) \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) \hat{R}^\dagger(\phi)$$

$$= \exp\left(\alpha \hat{R}(\phi) \hat{a}^\dagger \hat{R}^\dagger(\phi) - \alpha^* \hat{R}(\phi) \hat{a} \hat{R}^\dagger(\phi)\right)$$

$$= \exp\left((\alpha e^{i\phi}) \hat{a}^\dagger - (\alpha e^{i\phi})^* \hat{a}\right) = \hat{D}(\alpha e^{i\phi})$$

در نتیجه

$$\hat{R}(\phi) |\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha e^{i\phi}) |0\rangle = |\alpha e^{i\phi}\rangle \quad (9.3)$$

در نهایت به محاسبه تاثیر این گیت بر روی کوادراتورهای مکان و تکانه می‌پردازیم

$$\hat{x}_{(\phi)} = \hat{R}^\dagger(\phi) \hat{x} \hat{R}(\phi)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{R}^\dagger(\phi) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \hat{R}(\phi) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger e^{-i\phi} + \hat{a} e^{i\phi})
\end{aligned}$$

$$\hat{R}^\dagger(\phi) \hat{x} \hat{R}(\phi) = \hat{x} \cos(\phi) - \hat{p} \sin(\phi) \quad (10.3)$$

و بطور مشابه

$$\hat{R}^\dagger(\phi) \hat{p} \hat{R}(\phi) = \hat{p} \cos(\phi) + \hat{x} \sin(\phi) \quad (11.3)$$

مدارها گیت چرخشی را به شکل زیر نمایش داده می شود

$$\boxed{R}$$

شکل ۲.۳: نحوه نمایش گیت چرخشی در مدارهای کوانتومی

۳.۱.۳ گیت چلانندگی

سومین گیتی تک مدی که بررسی می کنیم، گیت چلانندگی^۴ است. این گیت یکی از مهم ترین ابزارها در اپتیک کوانتومی و محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته است که برای کاهش نوسانات کوانتومی در یکی از مؤلفه های مکان یا تکانه استفاده می شود، در حالی که نوسانات مؤلفه دیگر افزایش می یابد، به طوری که اصل عدم قطعیت هایزنبرگ حفظ شود. حالت های چلاننده از اعمال این گیت بر روی حالت ها ساخته می شود. کلی ترین حالت تک مد گاوسی، حالت چلاننده جابجا شده است که به وسیله ترکیب دو عملگر جابجایی و چلانندگی روی حالت خلا ایجاد می شود.

$$|\psi_{\alpha,\xi}\rangle_k \equiv |\psi_{\alpha,s,\theta}\rangle_k = D_k(\alpha) S_k(\xi) |0\rangle_k \quad (12.3)$$

^۴ Squeezing Gate

عملگر چلانندگی به شکل زیر تعریف می شود

$$\hat{S}(\xi) = \exp \left[\frac{1}{2} (\xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^{\dagger 2}) \right] \quad (13.3)$$

که در این رابطه $\xi = se^{i\theta}$ شامل شدت چلانندگی s و زاویه فاز θ است. این تعریف نشان می دهد که گیت چلانندگی شامل ترکیبی از اپراتورهای درجه دوم \hat{a}^2 و $\hat{a}^{\dagger 2}$ است که نوسانات کوانتومی را در یکی از مؤلفه های مکان یا تکانه کاهش می دهد. اثر این گیت بر روی عملگرهای خلق و فنا به شکل زیر است

$$\hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a} \hat{S}(\xi) = \hat{a} \cosh s - \hat{a}^\dagger e^{i\phi} \sinh s$$

$$\hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) = \hat{a}^\dagger \cosh s - \hat{a} e^{i\phi} \sinh s$$

و تاثیر آن بر روی کوادراتورها به صورت زیر می باشد

$$\hat{S}(\xi)^\dagger \hat{x}_\phi \hat{S}(\xi) = e^{-s} \hat{x}_\phi$$

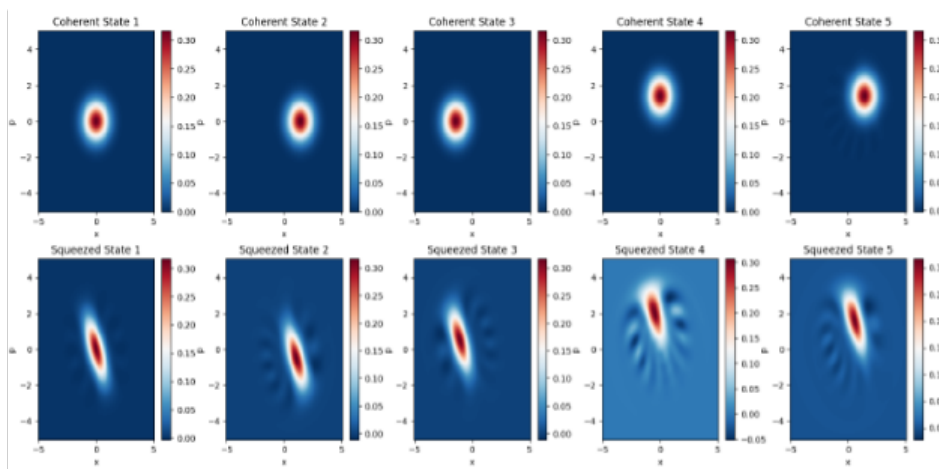
$$\hat{S}(\xi)^\dagger \hat{p}_\phi \hat{S}(\xi) = e^s \hat{p}_\phi$$

حالت چلانده واریانس در یک کوادراتور را کاهش می دهد و دیگری را افزایش می دهد. بهترین حالت برای درک این موضوع، دیدن حالت های مختلف در فضای فاز است. برای اینکه حالت های مختلف چلانده شده را در فضای فاز نمایش دهیم، نیازمند تابع ویگنر حالت های چلانده هستیم

$$W(x, p) = \frac{2}{\pi} \exp \left(-2 \left(\frac{(x - \text{Re}(\alpha))^2 \cos^2 \theta + (p - \text{Im}(\alpha))^2 \sin^2 \theta}{e^{2r}} + e^{2r} ((x - \text{Re}(\alpha))^2 \sin^2 \theta + (p - \text{Im}(\alpha))^2 \cos^2 \theta) \right) \right)$$

در شکل زیر تابع ویگنر برای حالت های همدوس و چلانده رسم شده و واضح است، زمانی که عملگر چلانندگی را اعمال می کنیم، واریانس در یک کوادراتور کاهش و در دیگری افزایش می یابد گیت چلانندگی را در مدارها به شکل زیر نمایش می دهیم

گیت بعدی که مورد بررسی قرار می گیرد، گیت فاز درجه دو \hat{a}^2 است. این گیت یکی از گیت های تک مدی مهم در



شکل ۳.۳: نمایش تابع ویگنر حالت چلانده

$$\boxed{S}$$

شکل ۴.۳: نحوه نمایش گیت چلانندگی در مدارهای کوانتومی

محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته است که نقش آن اعمال یک تحول غیرخطی درجه دوم بر مؤلفه مکان یا تکانه حالت کوانتومی است. گیت فاز درجه دو است که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\hat{P}(s) = \exp\left(i \frac{s}{2\hbar} \hat{x}^2\right) \quad (۱۴.۳)$$

این گیت یک تحول غیرخطی در فضای فاز ایجاد می‌کند که باعث خم شدن تابع موج در مؤلفه مکان می‌شود. در فضای فاز، این گیت باعث چرخش غیرخطی و تغییر در انحنای تابع ویگنر می‌شود. گیت فاز درجه دو در ترکیب با گیت‌های خطی مانند جابجایی و چرخشی، امکان پیاده‌سازی مدارهای غیرخطی و الگوریتم‌های پیچیده را فراهم می‌کند. گیت فاز درجه دو در کنار گیت فشردسازی و گیت فاز خطی، پایه‌ی ساخت گیت‌های کلی‌تر مانند گیت کلیفورد و گیت‌های گاوسین را تشکیل می‌دهد. همچنین در پیاده‌سازی گیت‌های جهانی برای محاسبات کوانتومی پیوسته، نقش مکمل دارد. اثر آن بر روی عملگر فنا به حالت زیر است

$$\hat{P}^\dagger(s) \hat{a} \hat{P}(s) = \hat{a} + i \frac{s}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

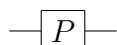
^۵ Quadratic Phase Gate

و تاثیر آن بر روی کوادراتورها به حالت زیر است که مکان را حفظ می‌کند.

$$\hat{P}^\dagger(s) \hat{x} \hat{P}(s) = \hat{x}$$

$$\hat{P}^\dagger(s) \hat{p} \hat{P}(s) = \hat{p} + s\hat{x}$$

نمایش گیت فاز درجه ۲ در مدارها به نحو زیر است.



شکل ۵.۳: نحوه نمایش گیت فاز درجه دو در مدارهای کوانتومی

۴.۱.۳ گیت فاز مکعبی

گیت دیگری که به آن اشاره می‌کنیم، گیت فاز مکعبی^۶ است. این گیت یکی از گیت‌های غیرگوسی و تک‌مدی در محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته است که نقش حیاتی در جهانی‌سازی محاسبات کوانتومی دارد. برخلاف گیت‌های گوسی که فقط تحول‌های خطی یا درجه دوم ایجاد می‌کنند، گیت فاز مکعبی تحول غیرخطی درجه سوم در مؤلفه مکان اعمال می‌کند.

$$\hat{V}(\gamma) = \exp\left(i \frac{\gamma}{3\hbar} \hat{x}^3\right) \quad (15.3)$$

تاثیر آن بر روی عملگر فنا و کوادراتورها به شکل زیر است

$$\hat{V}^\dagger(\gamma) \hat{a} \hat{V}(\gamma) = \hat{a} + i \frac{\gamma}{2\sqrt{2/\hbar}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2$$

$$\hat{V}^\dagger(\gamma) \hat{x} \hat{V}(\gamma) = \hat{x}$$

$$\hat{V}^\dagger(\gamma) \hat{p} \hat{V}(\gamma) = \hat{p} + \gamma \hat{x}^2$$

در ادامه تاثیر گیت فاز مکعبی را بر روی حالت خلا بررسی می‌کنیم و تاثیر آن را بر روی یک حالت گوسی نشان می‌دهیم.

^۶ Cubic Phase Gate

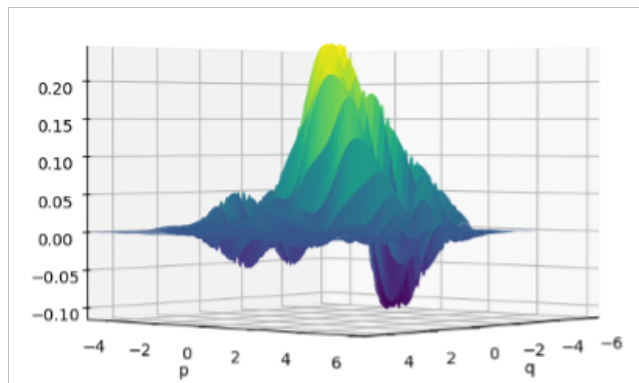
$$|\psi_\gamma\rangle = \hat{V}(\gamma) |0\rangle = \exp(i\gamma\hat{x}^3) |0\rangle$$

اکنون تابع موج را برای حالت $|\psi_\gamma\rangle$ بدست می‌آوریم

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

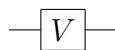
$$\psi_\gamma(x) = \langle x|\psi_\gamma\rangle = \exp(i\gamma\hat{x}^3)\psi_0(x) = \exp(i\gamma\hat{x}^3) \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

بهترین راه برای درک تغییرات این حالت، رسم تابع ویگنر آن است. تابع ویگنر حالت بالا با مقدار $\gamma = 1$ در شکل زیر نشان داده شده است. واضح است که حالت ما دیگر یک حالت گاوسی نیست و فرم غیرگاوسی به خود گرفته است در



شکل ۶.۳: تابع ویگنر حالت خلا که بر روی آن گیت فاز مکعبی اعمال شده است.

نهایت گیت فاز مکعبی را در مدارها با شکل زیر نمایش می‌دهیم



شکل ۷.۳: نحوه نمایش گیت فاز مکعبی در مدارهای کوانتومی

۵.۱.۳ گیت کر

آخرین گیت تک‌مدی که بررسی می‌کنیم، گیت کر^۷ است. این گیت یکی از گیت‌های غیرگوسی و تک‌مدی در محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته است که از برهم‌کنش‌های غیرخطی مرتبه چهارم ناشی می‌شود. گیت کر در بسیاری از سامانه‌های نوری غیرخطی، مانند فیبرهای نوری یا کاواک‌های نانوری، به صورت طبیعی ظاهر می‌شود. نمایش این گیت بصورت زیر است

$$\hat{K}(\kappa) = \exp(i\kappa \hat{n}^2) \quad (۱۶.۳)$$

این گیت در پایه فوک کاملاً قطری است و فقط فاز حالت‌های $|n\rangle$ را به صورت $e^{i\kappa n^2}$ تغییر می‌دهد. تاثیر آن بر روی عملگر خلق و فنا به شکل زیر است

$$\hat{K}^\dagger(\kappa) \hat{a} \hat{K}(\kappa)$$

$$\hat{K}^\dagger(\kappa) \hat{a} \hat{K}(\kappa)$$

و در نهایت تاثیر آن بر روی کوادراتورها به شکل زیر می‌باشد

$$\hat{K}(\kappa) : \begin{bmatrix} \hat{x}_\kappa \\ \hat{p}_\kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x} \cosh \phi - i\hat{p} \sinh \phi \\ \hat{p} \cosh \phi + i\hat{x} \sinh \phi \end{bmatrix}$$

که در آن

$$\phi(\hat{x}, \hat{p}) = k(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} - i\hat{x}^2 - i\hat{p}^2)$$

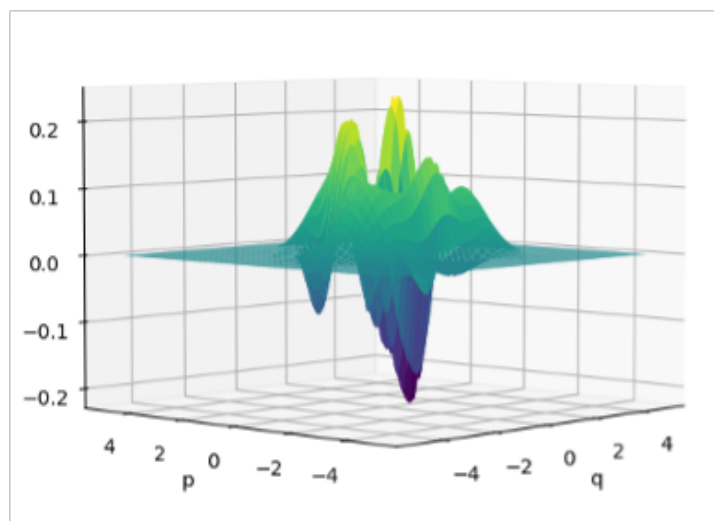
در ادامه تاثیر این گیت را بر روی حالت‌های همدوس بررسی می‌کنیم. بدیهی است که این گیت حالت خلا را تغییر نمی‌دهد چون $\hat{n}|0\rangle = 0$. تاثیر این گیت بر روی حالت‌های همدوس به شکل زیر است

$$|\psi_\kappa\rangle = \hat{K}(\kappa)|\alpha\rangle = \exp(i\kappa\hat{n}^2)|\alpha\rangle$$

$$|\psi_\kappa\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp(i\kappa\hat{n}^2)|n\rangle$$

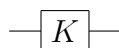
^۷ Kerr Gate

برای درک تغییرات این حالت، تابع ویگنر آن را رسم می‌کنیم. تابع ویگنر حالت بالا با مقدار $\kappa = 1$ در شکل زیر نشان داده شده است. هم‌ترین چیزی که در مورد این تبدیل باید به آن توجه کرد، غیر خطی بودن آن در فضای فاز است.



شکل ۸.۳: تابع ویگنر را برای حالت همدوس با پارامتر $\alpha = 1 + i$ که بر روی آن گیت کر را اعمال شده است.

گیت کر را در مدارها با شکل زیر نمایش می‌دهیم



شکل ۹.۳: نحوه نمایش گیت کر در مدارهای کوانتومی

۶.۱.۳ گیت شکافنده پرتو

تا اینجا گیت‌های تک‌مدی را بررسی کرده‌ایم. در این بخش به سراغ گیت‌های دو‌مدی می‌رویم. گیت بعدی که بررسی می‌کنیم، گیت شکافنده پرتو^۸ است که از پایه‌ای‌ترین گیت‌های دو‌مدی در اپتیک کوانتومی و محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته به‌شمار می‌رود. این گیت تعامل بین دو مد کوانتومی را مدل‌سازی می‌کند و نقش کلیدی در تولید درهم‌تنیدگی، تداخل کوانتومی، و پیاده‌سازی مدارهای نوری دارد. عملگر شکافنده پرتو بر حسب عملگرهای خلق و فنا دو مدی مثلاً، \hat{a}_1 و \hat{a}_2 به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{B}(\theta, \phi) = \exp \left[\theta \left(e^{i\phi} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger - e^{-i\phi} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \right] \quad (۱۷.۳)$$

^۸ Beam Splitter Gate

شکافنده پرتو عملگرهای فنا را به شکل زیر تغییر می دهد

$$\hat{B}(\theta, \phi)^\dagger \hat{a}_1 \hat{B}(\theta, \phi) = \hat{a}_1 \cos\theta - \hat{a}_2 e^{-i\phi} \sin\theta = t\hat{a}_1 - r^* \hat{a}_2$$

$$\hat{B}(\theta, \phi)^\dagger \hat{a}_2 \hat{B}(\theta, \phi) = \hat{a}_2 \cos\theta - \hat{a}_1 e^{i\phi} \sin\theta = t\hat{a}_2 - r \hat{a}_1$$

با تعریف $t = \cos\theta$ و $r = e^{i\phi} \sin\theta$ که نشان دهنده دامنه انتقال و انعکاس پرتو شکافنده است؛ شکافنده پرتو یک حالت همدوس را به شکل زیر تبدیل می کند

$$\hat{B}(\theta, \phi) |\alpha, \beta\rangle = |\alpha', \beta'\rangle$$

$$\alpha' = \alpha \cos\theta - \beta e^{-i\phi} \sin\theta$$

$$\beta' = \beta \cos\theta + \alpha e^{i\phi} \sin\theta$$

بنابراین به عنوان مثال حالت های همدوس مختلف کافی است به جای α, β, θ و ϕ مقادیر دلخواه را قرار دهیم. همچنین شکافنده پرتو بر روی عملگرهای کوادراتور به شکل زیر اثر می کند

$$\hat{B}(\theta, \phi)^\dagger \hat{x}_1 \hat{B}(\theta, \phi) = \hat{x}_1 \cos\theta - \sin\theta (\hat{x}_2 \cos\phi + \hat{p}_2 \sin\phi)$$

$$\hat{B}(\theta, \phi)^\dagger \hat{p}_1 \hat{B}(\theta, \phi) = \hat{p}_1 \cos\theta - \sin\theta (\hat{p}_2 \cos\phi - \hat{x}_2 \sin\phi)$$

$$\hat{B}(\theta, \phi)^\dagger \hat{x}_2 \hat{B}(\theta, \phi) = \hat{x}_2 \cos\theta - \sin\theta (\hat{x}_1 \cos\phi - \hat{p}_1 \sin\phi)$$

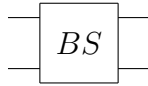
$$\hat{B}(\theta, \phi)^\dagger \hat{p}_2 \hat{B}(\theta, \phi) = \hat{p}_2 \cos\theta - \sin\theta (\hat{p}_1 \cos\phi + \hat{x}_1 \sin\phi)$$

در یک شکافنده پرتو ۵۰:۵۰ پارامترها به شکل $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، $\phi = 0$ یا $\phi = \pi$ تعریف می شوند بنابراین در حالت دامنه انتقال و انعکاس پرتو شکافنده برابر با $\frac{1}{2}$ است. اثر این حالت بر روی متغیرهای مکان و تکانه به شکل زیر است

$$\hat{B}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) |x\rangle_x |x\rangle_x = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \right\rangle \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \right\rangle$$

$$\begin{aligned}\hat{B}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) |p\rangle_p |p\rangle_p &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 - p_2) \right\rangle \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 + p_2) \right\rangle \\ \hat{B}\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right) |x\rangle_x |x\rangle_x &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2) \right\rangle \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 - x_1) \right\rangle \\ \hat{B}\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right) |p\rangle_p |p\rangle_p &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 + p_2) \right\rangle \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (p_2 - p_1) \right\rangle\end{aligned}$$

در نهایت در مدارها گیت شکافنده پرتو را به شکل زیر نمایش می‌دهیم.



شکل ۱۰.۳: نحوه نمایش گیت شکافنده پرتو در مدارهای کوانتومی

۷.۱.۳ گیت چلانندگی دومی

گیت دو مدی بعدی که بررسی می‌کنیم، گیت چلانندگی دومی^۹ است. این گیت یکی از مهم‌ترین ابزارها در تولید حالت‌های درهم‌تنیده در اپتیک کوانتومی و محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته است. برخلاف گیت چلانندگی تک‌مدی که نوسانات را در یک مد کاهش می‌دهد، گیت دومی باعث درهم‌تنیدگی نوسانات بین دو مد می‌شود. این گیت به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\hat{S}_2(z) = \exp\left(z\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger - z^*\hat{a}_1\hat{a}_2\right) = \exp\left(r\left(e^{i\phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger - e^{-i\phi}\hat{a}_1\hat{a}_2\right)\right) \quad (۱۸.۳)$$

که در آن $z = re^{i\phi}$ ، $r > 0$ و $\phi \in [0, 2\pi)$ است. همچنین می‌توان این گیت را برحسب گیت‌های چلانندگی تک مد و شکافنده پرتو ۵۰:۵۰ تجزیه کرد که این حالت برابر است با

$$\hat{S}_2(z) = \hat{B}^\dagger\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \left[\hat{S}(z) \otimes \hat{S}(-z)\right] \hat{B}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \quad (۱۹.۳)$$

^۹ Two-Mode Squeezing Gate

گیت چلانندگی دو مدی عملگرهای خلق و فنا را به شکل زیر تغییر می دهد

$$\hat{S}_2(z)^\dagger \hat{a}_1 \hat{S}_2(z) = \hat{a}_1 \cosh(r) - \hat{a}_2^\dagger e^{i\phi} \sinh(r)$$

$$\hat{S}_2(z)^\dagger \hat{a}_2 \hat{S}_2(z) = \hat{a}_2 \cosh(r) - \hat{a}_1^\dagger e^{i\phi} \sinh(r)$$

همچنین از تاثیر این گیت بر روی حالت خلا دو مدی داریم

$$|TMSV\rangle = \hat{S}_2(z) |0, 0\rangle = \frac{1}{\cosh(r)} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{i\phi} \tanh(r))^n |n, n\rangle \quad (20.3)$$

دو گیت بعدی که بررسی شده است از نوع کیت های کنترل شده است که یک کیومد را به عنوان کیومد کنترل انتخاب می کند و کیومد دیگر را به عنوان هدف انتخاب می کند.

۸.۱.۳ گیت CX

گیت X کنترل شده که با CX نمایش داده می شود و همچنین به عنوان گیت جمع یا گیت اضافه کننده شناخته می شود، یک جابه جایی کنترل شده در مکان به وجود می آورد و توسط رابطه زیر داده می شود.

$$CX(s) = \int dx |x\rangle \langle x| \otimes D\left(\frac{sx}{\sqrt{2}\hbar}\right) = \exp\left(-\frac{is}{\hbar} x_1 \otimes p_2\right) \quad (21.3)$$

به این گیت، گیت جمع می گویند چون اثر آن بر روی یک حالت در پایه های مکان برابر است با

$$CX(s) |x_1, x_2\rangle_x = |x_1, x_2 + sx_1\rangle_x \quad (22.3)$$

این گیت را می توان بر حسب عملگر چلانندگی تک مد و شکافنده پرتو به شکل زیر نوشت

$$CX(s) = \hat{B}\left(\frac{\pi}{2} + \theta, 0\right) \left(\hat{S}(r, 0) \otimes \hat{S}(-r, 0)\right) \hat{B}(\theta, 0) \quad (23.3)$$

که در اینجا

$$\sin 2\theta = \frac{-1}{\cosh r}, \quad \cos 2\theta = \tanh(r), \quad \sinh(r) = -\frac{s}{2}$$

در نهایت تاثیر این عملگر بر روی عملگرهای خلق و فنا و همچنین کوادراتورها به شکل زیر است

$$CX(s)^\dagger \hat{x}_1 CX(s) = \hat{x}_1$$

$$CX(s)^\dagger \hat{p}_1 CX(s) = \hat{p}_1 - s\hat{p}_2$$

$$CX(s)^\dagger \hat{x}_2 CX(s) = \hat{x}_2 + s\hat{x}_1$$

$$CX(s)^\dagger \hat{p}_2 CX(s) = \hat{p}_2$$

$$CX(s)^\dagger \hat{a}_1 CX(s) = \hat{a}_1 + \frac{s}{2} (\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2)$$

$$CX(s)^\dagger \hat{a}_2 CX(s) = \hat{a}_2 + \frac{s}{2} (\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1)$$

۹.۱.۳ گیت CZ

آخرین گیت دومی که در این بخش بررسی شده است، گیت کنترل شده Z می باشد که با CZ نمایش داده می شود و به آن کنترل- فاز نیز گفته می شود. گیت کنترل- فاز به صورت زیر تعریف می شود

$$CZ(s) = \iint dx dy e^{isx_1x_2/\hbar} |x_1, x_2\rangle \langle x_1, x_2| = \exp\left(is x_1 \otimes x_2/\hbar\right) \quad (24.3)$$

همچنین می توان با استفاده از گیت CX و چرخشی، این گیت را به شکل زیر بازنویسی کرد

$$CZ(s) = R_{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right) CX(s) R_{(2)}^\dagger\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (25.3)$$

توجه شود که گیت چرخشی فقط بر روی مد دوم تاثیر می گذارد. همچنین اثر این گیت بر روی حالتی که در پایه های مکان نوشته شده باشد برابر است با

$$CZ(s) |x_1, x_2\rangle_x = e^{isx_1x_2/\hbar} |x_1, x_2\rangle_x \quad (26.3)$$

در نهایت تاثیر این عملگر بر روی عملگرهای خلق و فنا و همچنین کوادراتورها از روابط زیر بدست می‌آید

$$CZ(s)^{\dagger} \hat{x}_1 CZ(s) = \hat{x}_1$$

$$CZ(s)^{\dagger} \hat{p}_1 CZ(s) = \hat{p}_1 + s\hat{x}_2$$

$$CZ(s)^{\dagger} \hat{x}_2 CZ(s) = \hat{x}_2$$

$$CZ(s)^{\dagger} \hat{p}_2 CZ(s) = \hat{p}_2 + s\hat{x}_1$$

$$CZ(s)^{\dagger} \hat{a}_1 CZ(s) = \hat{a}_1 + i\frac{s}{2}(\hat{a}_2^{\dagger} + \hat{a}_2)$$

$$CZ(s)^{\dagger} \hat{a}_2 CZ(s) = \hat{a}_2 + i\frac{s}{2}(\hat{a}_1^{\dagger} + \hat{a}_1)$$

۲.۳ اندازه‌گیری‌های متغیر پیوسته

در سیستم‌های کوانتومی متغیر پیوسته، اندازه‌گیری‌ها نقش حیاتی در استخراج اطلاعات، اجرای پروتکل‌های کوانتومی، و کنترل حالت‌های کوانتومی دارند. برخلاف سیستم‌های گسسته که اندازه‌گیری‌ها معمولاً روی کیوبیت‌ها انجام می‌شود، در متغیر پیوسته از اندازه‌گیری‌هایی استفاده می‌شود که به‌طور مستقیم با مؤلفه‌های مکان و تکانه مرتبط‌اند. این اندازه‌گیری‌ها شامل تشخیص هموداین^{۱۰}، تشخیص هترودااین^{۱۱} و شمارش فوتون^{۱۲} می‌شوند. در ادامه به بررسی هریک خواهیم پرداخت.

۱.۲.۳ تشخیص هموداین

آشکارسازی هموداین یک تکنیک کلیدی برای اندازه‌گیری یکی از کوادراتورها در یک سیستم کوانتومی متغیر پیوسته است. در اندازه‌گیری هموداین، سیگنال نوری که باید اندازه‌گیری شود، با یک لیزر مرجع^{۱۳} که فاز و فرکانس آن به‌دقت کنترل شده، ترکیب می‌شود. این ترکیب در یک آشکارساز تفاضلی انجام می‌شود، که اختلاف شدت‌های دو پرتو را اندازه‌گیری می‌کند. در ابتدا، دو مد داریم؛ اول مد سیگنال که مشخص‌کننده حالت کوانتومی ورودی است (a_s) و مد نوسانگر محلی

^{۱۰} Homodyne Detection

^{۱۱} Heterodyne Detection

^{۱۲} Photon Counting

^{۱۳} Local Oscillator

یا موضعی که یک پرتوی همدوس قدرتمند با دامنه بزرگ (α) و فاز مشخص (θ)، نمایش داده شده به صورت (a_{LO}) است. این دو مد وارد یک تقسیم‌کننده پرتو ۵۰:۵۰ می‌شوند. اثر تقسیم‌کننده پرتو بر عملگرهای نابودی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$a_1 = \frac{a_{LO} + a_s}{\sqrt{2}} \quad , \quad a_2 = \frac{a_{LO} - a_s}{\sqrt{2}}$$

که در این روابط a_2 و a_1 خروجی‌های تقسیم‌کننده پرتو هستند. خروجی‌های تقسیم‌کننده پرتو به دو فوتودیود ارسال می‌شوند که تعداد فوتون‌ها n_1 و n_2 را اندازه‌گیری می‌کنند. عملگر تعداد فوتون به شکل زیر تعریف می‌شود

$$n_1 = a_1^\dagger a_1 \quad , \quad n_2 = a_2^\dagger a_2$$

با جایگذاری از روابط بالا n_1 و n_2 بدست می‌آید

$$n_1 = \frac{1}{2} \left(a_{LO}^\dagger a_{LO} + a_s^\dagger a_s + a_{LO}^\dagger a_s + a_s^\dagger a_{LO} \right) \quad (27.3)$$

$$n_2 = \frac{1}{2} \left(a_{LO}^\dagger a_{LO} + a_s^\dagger a_s - a_{LO}^\dagger a_s - a_s^\dagger a_{LO} \right) \quad (28.3)$$

اختلاف جریان‌های فوتودیودها، سیگنال خروجی را مشخص می‌کند. این اختلاف برابر است با

$$n_1 - n_2 = a_{LO}^\dagger a_s + a_s^\dagger a_{LO} \quad (29.3)$$

این رابطه نشان می‌دهد که اختلاف جریان‌ها حاوی اطلاعات مربوط به تداخل بین سیگنال و نویسان‌گر محلی است. از آنجا که نویسان‌گر محلی یک پرتوی همدوس قدرتمند است ($|\alpha| \gg 1$) می‌توان عملگر a_{LO} را با مقدار میانگین آن (α) جایگزین کرد. بنابراین

$$\langle a_{LO} \rangle = \alpha e^{-i\theta}$$

با جایگذاری این مقدار در تفاضل جریان‌ها، رابطه زیر بدست می‌آید.

$$n_1 - n_2 \approx \alpha e^{-i\theta} a_s + \alpha e^{i\theta} a_s^\dagger \quad (30.3)$$

با استفاده از تعریف عملگر کوادراتور $x_s^{(\theta)}$ داریم

$$x_s^{(\theta)} = x_s \cos \theta + p_s \sin \theta$$

از طرفی عملگر مکان و تکانه به شکل

$$x_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_s + a_s^\dagger) \quad , \quad p_s = \frac{1}{\sqrt{2}i} (a_s - a_s^\dagger)$$

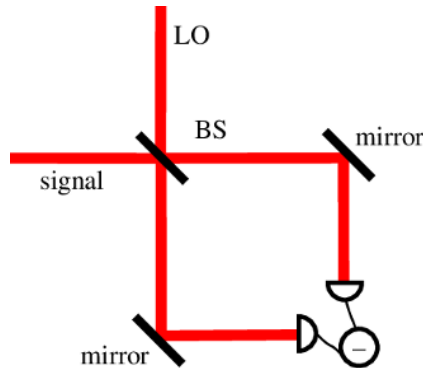
تعریف شده‌اند، بنابراین سیگنال خروجی برابر است با

$$n_1 - n_2 \propto \alpha x_s^{(\theta)} \quad (31.3)$$

در نتیجه مقدار چشم داشتی اختلاف جریان‌ها به شکل زیر محاسبه می‌شود

$$\langle n_1 - n_2 \rangle = 2|\alpha| \langle x_s^{(\theta)} \rangle \quad (32.3)$$

این رابطه نشان می‌دهد که سیگنال خروجی مستقیماً به کوادراتور $x_s^{(\theta)}$ مربوط است که زاویه θ آن توسط فاز نوسان‌گر محلی تعیین می‌شود. زاویه فاز نوسان‌گر محلی تعیین می‌کند که کدام کوادراتور اندازه‌گیری شود. با تغییر فاز نوسان‌گر محلی، می‌توان هر کوادراتور دلخواهی x_s یا p_s را اندازه‌گیری کرد. تشخیص هموداین به دلیل قابلیت اندازه‌گیری دقیق و حساسیت بالا، یکی از ابزارهای کلیدی در سیستم‌های متغیر پیوسته است و در آزمایش‌های مرتبط با اطلاعات کوانتومی و فیزیک حالت‌های نوری کاربرد فراوان دارد.



شکل ۱۱.۳: نمایی شماتیک از آشکارساز هموداین

۲.۲.۳ تشخیص هتروداین

تشخیص هتروداین مشابه به تشخیص هموداین است، اما در اینجا هدف اندازه‌گیری همزمان دو کوادراتور است. این دو عملگر به دلیل رابطه‌ی عدم قطعیت که دارند، نمی‌توانند به‌طور دقیق و همزمان اندازه‌گیری شوند و این باعث ایجاد عدم قطعیت می‌شود. خروجی یک اندازه‌گیری هترودین معمولاً به‌صورت تابع Q نمایش داده می‌شود. تابع Q یکی از توزیع‌های شبه‌احتمالی است که ویژگی‌های حالت کوانتومی را در فضای مختلط فضای حالت کوانتومی می‌سازد.

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle \quad (۳۳.۳)$$

که در آن α یک مقدار مختلط است که مشخص‌کننده‌ی مقادیر مکان و تکانه است و ρ اپراتور چگالی است که وضعیت سیستم کوانتومی را توصیف می‌کند. روند کار در تشخیص هتروداین دقیقاً مشابه با تشخیص هموداین است. در تشخیص هتروداین، یک سیگنال کوانتومی که می‌خواهیم آن را اندازه‌گیری کنیم (a_s)، با یک نوسانگر محلی که یک حالت هم‌دوس است (a_{LO}) ترکیب می‌شود. این ترکیب در یک تقسیم‌کننده پرتو ۵۰:۵۰ صورت می‌گیرد. شبیه به تشخیص هموداین، بعد از تقسیم در پرتو، خروجی‌های تقسیم‌کننده به‌صورت زیر خواهند بود

$$a_1 = \frac{a_{LO} + a_s}{\sqrt{2}}, \quad a_2 = \frac{a_{LO} - a_s}{\sqrt{2}} \quad (۳۴.۳)$$

جریان تولید شده در فوتودیودها به تعداد فوتون‌های عبوری از آن‌ها بستگی دارد. عملگرهای تعداد فوتون برای این دو پرتوی خروجی به‌صورت رابطه (۲۹.۳) نوشته می‌شود و با انجام محاسبات مشابه بخش قبل، در نهایت برای دریافت سیگنال خروجی، تفاضل این دو جریان اندازه‌گیری‌شده را محاسبه می‌کنیم که سیگنال خروجی به‌شکل زیر در می‌آید

$$n_1 - n_2 \propto \alpha (x_s \cos \theta + p_s \sin \theta) \quad (۳۵.۳)$$

در حقیقت، تشخیص هتروداین و تشخیص هموداین شبیه به هم هستند، اما تفاوت‌های اصلی در نحوه اندازه‌گیری و نوع اطلاعاتی که از سیستم استخراج می‌کنیم وجود دارد. در این روش هر دو کوادراتور \hat{x} و \hat{p} به‌طور همزمان اندازه‌گیری می‌شوند. این اندازه‌گیری نیاز به استفاده از دو فرکانس مختلف دارد. یک فرکانس برای نوسانگر محلی و یک فرکانس برای سیگنال، که این باعث می‌شود که بتوانیم به‌طور همزمان هر دو کوادراتور را اندازه‌گیری کنیم. هر دو روش در نهایت به یک هدف مشابه دست می‌یابند، اندازه‌گیری یکی یا هر دو از کوادراتورهای سیستم کوانتومی. در هر دو روش، از یک نوسانگر محلی برای تقویت سیگنال استفاده می‌شود و پس از تداخل آن با سیگنال، اختلاف جریان‌ها اندازه‌گیری می‌شود

اما در تشخیص هتروداين، دو فرکانس مختلف استفاده می‌شود و به همین دلیل قادر به اندازه‌گیری همزمان مکان و تکانه هستیم. در حالی که در هموداين تنها یک کوادراتور اندازه‌گیری می‌شود که بستگی به فاز نوسان‌گر محلی دارد.

۳.۲.۳ شمارش فوتون

در تشخیص شمارش فوتون، برخلاف روش‌های هموداين و هتروداين که به اندازه‌گیری کوادراتورهای \hat{x} و \hat{p} می‌پردازند، هدف این است که تعداد فوتون‌هایی که در یک حالت کوانتومی خاص حضور دارند شمارش شود. این روش به‌طور مستقیم ویژگی‌های ذره‌ای (نه موجی) نور را بررسی می‌کند. تشخیص شمارش فوتون یکی از ساده‌ترین و رایج‌ترین روش‌ها در فیزیک کوانتومی است که برای آشکارسازی تک‌فوتونی یا پرتوهای ضعیف استفاده می‌شود. عملگر شمارش فوتون در حالت کوانتومی، معمولاً با عملگر فوک که تعداد فوتون‌ها را اندازه‌گیری می‌کند، توصیف می‌شود. اگر \hat{n} عملگر تعداد فوتون باشد، تعداد فوتون‌ها به صورت زیر مشخص می‌شود

$$n = a^\dagger a$$

در این روش، از آشکارسازهای فوتونی برای شبیه‌سازی این عملگر استفاده می‌شود. آشکارساز فوتون به‌طور معمول دو ویژگی اصلی دارد؛

- ۱- کارایی کوانتومی (η): درصد فوتون‌هایی که از سیگنال مورد نظر به‌درستی شناسایی می‌شوند.
- ۲- شمارش پس‌زمینه^{۱۴}: فوتون‌های اضافی که به دلیل نویزهای پس‌زمینه و بی‌نظمی‌ها در دستگاه آشکارساز ایجاد می‌شوند. در تشخیص شمارش فوتون، آشکارساز معمولاً به گونه‌ای تنظیم می‌شود که وقتی حداقل یک فوتون به آن برسد، پاسخ دهد. این آشکارساز معمولاً آشکارسازهای فوتودیود یا مشابه آن است که با تشخیص تغییرات در جریان الکتریکی، تعداد فوتون‌ها را می‌شمارد. عملگر شمارش فوتون می‌تواند به‌صورت یک مجموعه‌ای از اپراتورهای $POVM$ مدل شود که نتیجه آن فقط مقادیر عددی صحیح $n = 0, 1, 2, \dots$ است. این مقادیر نمایانگر تعداد فوتون‌هایی است که توسط دستگاه شناسایی شده‌اند. عملگر $POVM$ برای شمارش فوتون به‌طور کلی به این صورت نوشته می‌شود

$$E_n = |n\rangle \langle n| \quad (۳۶.۳)$$

که در آن $|n\rangle$ یک حالت فوک است که تعداد n فوتون را نشان می‌دهد. در دنیای واقعی، آشکارساز فوتون معمولاً تحت تأثیر نویز پس‌زمینه قرار دارد. نویز پس‌زمینه ناشی از فوتون‌هایی است که از محیط یا از خود آشکارساز به‌طور تصادفی

^{۱۴} Dark counts

شناسایی می‌شوند. به عبارت دیگر، زمانی که یک فوتون وارد آشکارساز نمی‌شود، ممکن است هنوز سیگنالی به دلیل نویز پس‌زمینه ثبت شود. این نویز می‌تواند دقت اندازه‌گیری شمارش فوتون را کاهش دهد. برای مدل‌سازی این نویز، می‌توان یک متغیر تصادفی n_{dark} را محاسبات وارد کرد که مربوط به فوتون‌های پس‌زمینه است. در نهایت، مقدار مورد انتظار تعداد فوتون‌ها در حضور نویز به این شکل خواهد بود

$$\langle n_{total} \rangle = \langle n \rangle + \langle n_{dark} \rangle \quad (37.3)$$

۳.۳ درهم‌تنیدگی در سیستم‌های متغیر پیوسته

درهم‌تنیدگی در سیستم‌های متغیر پیوسته یکی از بنیادی‌ترین پدیده‌های مکانیک کوانتومی است که نقش کلیدی در توسعه فناوری‌های ن کوانتومی ایفا می‌کند. برخلاف سامانه‌های گسسته که بر پایه کیوبیت‌ها بنا شده‌اند، در اینجا حالت‌های کوانتومی با متغیرهایی چون مکان، تکانه یا مدهای میدان نوری توصیف می‌شوند و فضای هیلبرت آن‌ها بی‌نهایت بعدی است. این ویژگی امکان ایجاد همبستگی‌های قوی و پایدار میان زیرسامانه‌ها را فراهم می‌آورد و بستر مناسبی برای کاربردهایی چون ارتباطات امن کوانتومی، محاسبات مبتنی بر مدهای نوری و سنجش‌های فوق‌دقیق ایجاد می‌کند. از این رو مطالعه درهم‌تنیدگی پیوسته نه تنها از منظر نظری اهمیت دارد، بلکه در مسیر تحقق عملی فناوری‌های کوانتومی آینده نیز نقشی تعیین‌کننده خواهد داشت. در این بخش به بررسی درهم‌تنیدگی کوانتومی پرداخته خواهد شد.

۱.۳.۳ ایجاد درهم‌تنیدگی

یکی از عملیات‌های اصلی در پردازش اطلاعات کوانتومی ایجاد درهم‌تنیدگی است. هنگامی که درمورد درهم‌تنیدگی در سیستم‌های متغیر پیوسته صحبت می‌شود، یکی از موارد قابل بحث پارادوکس EPR ^{۱۵} است. در سال ۱۹۳۵ انیشتین پودولسکی و روزن مقاله‌ای با عنوان ”آیا توصیف مکانیک کوانتومی یک واقعیت فیزیکی را می‌توان کامل در نظر گرفت“ منتشر کردند که مدعی بود مکانیک کوانتومی ناقص است. آن‌ها برای نشان دادن ادعای خود یک حالت بسیار جالبی را معرفی می‌کنند. یک سیستم کوانتومی که از دو ذره به نام‌های ۱ و ۲ تشکیل شده‌است را در نظر بگیرید. از رابطه جابه‌جایی مکان و تکانه می‌دانیم

$$[\hat{x}_1, \hat{p}_1] = [\hat{x}_2, \hat{p}_2] = i\hbar \neq 0$$

^{۱۵} Einstein-Podolsky-Rosen

این رابطه به این معنی است که نمی‌توانیم یک حالت کوانتومی داشته باشیم که مکان و تکانه را همزمان باهم تعیین کنیم. با این حال یک ترکیب خطی از عملگرهای کوادراتور به شکل زیر می‌سازیم

$$[\hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{p}_1 + \hat{p}_2] = 0$$

از آنجایی که رابطه جابه‌جایی فوق صفر است، یعنی یک حالت کوانتومی وجود دارد که ویژه حالت همزمان $\hat{x}_1 - \hat{x}_2$ و $\hat{p}_1 + \hat{p}_2$ است. این رابطه به ما می‌گوید که اختلاف مکان $\hat{x}_1 - \hat{x}_2$ و مجموع تکانه $\hat{p}_1 + \hat{p}_2$ می‌توانند به‌طور همزمان اندازه‌گیری شوند. آن‌ها در مقاله‌ی خود پیش‌بینی وجود چنین حالتی را دلیل بر ناقص بودن مکانیک کوانتومی می‌دانستند. حالتی که به عنوان حالت EPR معرفی شد دارای دو ویژگی بود که در آن حالت اختلاف مکان و مجموع تکانه یک مقدار ثابت محدود می‌شدند. به عنوان مثال، اختلاف مکان و مجموع تکانه صفر باشد. این حالت دارای ویژگی بود که باعث می‌شد انیشتین، روزن و پودولسکی مدعی شوند که مکانیک کوانتومی ناقص است. استدلال آن‌ها به این شکل بود: فرض کنید \hat{x}_1 از ذره ۱ چنین حالت کوانتومی را اندازه‌گیری می‌کنیم. سپس، کوادراتور \hat{x}_2 از ذره ۲ بلافاصله و با دقت کامل مشخص می‌شود. به همین ترتیب اگر تکانه \hat{p}_1 ذره ۱ را اندازه‌گیری کنیم بلافاصله تکانه \hat{p}_2 ذره ۲ معلوم می‌شود. این رفتار که به عمل شبیح‌وار از راه دور^{۱۶} معروف است، نشان می‌دهد که انتخاب مشاهده‌گر روی ذره اول، بلافاصله وضعیت ذره دوم را تغییر می‌دهد، حتی اگر این دو ذره از هم بسیار دور باشند. امروزه، بسیاری از فیزیک‌دانان این پدیده را نه به عنوان یک پارادوکس، بلکه به عنوان نشانه‌ای از تفاوت‌های اساسی بین فیزیک کلاسیک و کوانتومی می‌دانند. حالت EPR به یکی از پایه‌های اصلی درهم‌تنیدگی در سیستم‌های متغیر پیوسته تبدیل شده است. این حالت معادل کوانتومی حالات بل در سیستم‌های گسسته است. برای سیستم‌های d ترازه گسسته، حالت‌های بل تعمیم یافته با

$$|\psi_{nm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} e^{\frac{2\pi i n k}{d-1}} |k, k \oplus m\rangle \quad (38.3)$$

داده می‌شود. که این رابطه حالت‌های بل برای سیستم‌های گسسته با بعد d را نشان می‌دهد و در آن k مقادیر پایه در فضای حالت، m و n مقادیر پارامترهای مربوط به تغییرات فاز و جابه‌جایی، \oplus جمع ماژولار و $\frac{1}{\sqrt{d}}$ ثابت بهنجارش است. به عنوان مثال برای $d = 2$ داریم: در فضای دو بعدی حالت‌های پایه $|0\rangle$ و $|1\rangle$ با جایگذاری مقادیر مختلف m و n حالت‌های زیر بدست می‌آید که همان حالت‌های بل در فضای دو بعدی است.

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle)$$

^{۱۶} Spooky Action at a Distance

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle)$$

در سیستم‌های کوانتومی گسسته حالات بل به عنوان حالت‌های درهم‌تنیده دو کیوبیت تعریف می‌شوند. در سیستم‌های متغیر پیوسته، این حالات به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$|\psi_{u,v}\rangle = \frac{1}{N} \int dq e^{-iuq} |q, q+v\rangle_q \quad (39.3)$$

در اینجا n ، k و m به متغیرهای u, q و v تبدیل شده‌اند و علامت جمع با یک انتگرال جایگزین شده است. در این رابطه N ثابت بهنجارش است. با توجه به اینکه حالت‌های EPR ، حالت‌های درهم‌تنیده در سامانه متغیر پیوسته هستند بنابراین از ویژگی آن‌ها استفاده می‌کنیم و اختلاف مکان و مجموع تکانه را برابر با مقدار ثابتی قرار می‌دهیم.

$$\langle \hat{q}_1 - \hat{q}_2 \rangle = -v$$

$$\langle \hat{p}_1 + \hat{p}_2 \rangle = u$$

$$var(\hat{q}_1 - \hat{q}_2), var(\hat{p}_1 + \hat{p}_2) = 0$$

به این معنی است که مکان و تکانه دوسیستم کاملاً همبستگی دارند. حالت‌های $|\psi_{u,v}\rangle$ نسخه متغیر پیوسته حالت‌های بل هستند. با استفاده از گیت CX می‌توانیم حالت $|\psi_{u,v}\rangle$ را برحسب ویژه حالت‌های مکان و تکانه $|u\rangle_p$ و $|v\rangle_q$ بنویسیم

(40.3)

$$|\psi_{u,v}\rangle = \frac{1}{N} \int dq e^{-iuq} \exp(-2iq_1 p_1) |q, v\rangle_q = CX \left(\int dq e^{-iuq} |q\rangle_q \right) |v\rangle_q = CX |u\rangle_p |v\rangle_q$$

با توجه به این‌که ویژه حالت‌های کوآراتورها به‌هنگار نیستند و نمی‌توانیم آن‌ها را به صورت فیزیکی تشخیص دهیم، پس حالت‌های EPR هم غیر فیزیکی هستند. با این وجود ما می‌توانیم حالت‌های EPR تقریبی را ایجاد کنیم. اکنون باید یک پیاده‌سازی نوری واقعی برای این حالت پیدا کنیم. اول از همه یادآوری می‌کنیم که می‌توانیم از حالت‌های چلانده به عنوان ویژه حالت‌های تقریبی عملگرهای مکان و تکانه استفاده کنیم. در عمل از حالت‌های چلانده شده برای تقریب زدن موقعیت‌ها و تکانه‌ها استفاده می‌شود. گیت CX را می‌توان بر حسب عملگرهای خلق و فنا نوشت که نشان می‌دهد یک عملگر چلانندگی دو مدی است.

$$CX_{ij} = \exp(-2i\hat{q}_i \hat{p}_j) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\hat{a}_i \hat{a}_j - \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j - \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger \right) \right] \quad (41.3)$$

این کار مشابه با ایجاد درهم‌تنیدگی دوکیوبیتی است که در آن ابتدا یک گیت هادامارد به کیوبیت کنترل اعمال می‌شود و سپس یک CX اعمال می‌شود. با این حال برای ایجاد گیت CX متغیر پیوسته به چلانندگی زیادی نیاز داریم که در عمل به سختی ایجاد می‌شود بنابراین بررسی خواهیم کرد که آیا می‌توانیم دو حالت همدوس چلانده را با عناصر اپتیکی خطی مانند شیفت‌کننده‌های فاز و تقسیم‌کننده پرتو، درهم‌تنیده کنیم یا خیر. دو تابع ویگنر می‌جزا $W_1(q_1, p_1)$ و $W_2(q_2, p_2)$ را در نظر بگیرید که مربوط به دو حالت چلانده هستند. فرض کنید که این‌ها به ترتیب در مکان تکانه چلانده شده‌اند.

$$W_1(q_1, p_1) = \frac{2}{\pi} \exp \left[-2\Delta^2 (q_1 - q_\alpha)^2 - \frac{2(p_1 - p_\alpha)^2}{\Delta^2} \right] \quad (۴۲.۳)$$

$$W_2(q_2, p_2) = \frac{2}{\pi} \exp \left[-\frac{(q_2 - q_\alpha)^2}{2\Delta^2} - 8\Delta^2 (p_2 - p_\alpha)^2 \right] \quad (۴۳.۳)$$

که در اینجا q_α و p_α مقادیر میانگین مکان و تکانه، همچنین Δ پارامتر چلانندگی است. با ترکیب دو حالت چلانده $W_1(q_1, p_1)$ و $W_2(q_2, p_2)$ و اعمال یک دوران در فضای فاز، تابع ویگنر کل به صورت زیر به دست می‌آید

$$(۴۴.۳)$$

$$W(q_1, p_1; q_2, p_2) = W(q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta, p_1 \cos \theta + p_2 \sin \theta; q_2 \cos \theta - q_1 \sin \theta, p_2 \cos \theta - p_1 \sin \theta)$$

اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ را در نظر بگیریم، تابع ویگنر چرخشی $W = W(q'_1, p'_1; q'_2, p'_2)$ به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$W = \frac{4}{\pi^2} \exp \left[-\frac{\left(\frac{(q'_1 - q'_2)}{\sqrt{2}} - q_\alpha \right)^2}{2\Delta^2} - \frac{2 \left(\frac{(p'_1 + p'_2)}{\sqrt{2}} - p_\alpha \right)^2}{\Delta^2} \right] \times$$

$$\exp \left[-2\Delta^2 \left(\frac{(q'_1 + q'_2)}{\sqrt{2}} - q_\alpha \right)^2 - 8\Delta^2 \left(\frac{(p'_1 - p'_2)}{\sqrt{2}} - p_\alpha \right)^2 \right] \quad (۴۵.۳)$$

که در آن

$$q'_1 = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}}, \quad q'_2 = \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}}, \quad p'_1 = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{2}}, \quad p'_2 = \frac{p_2 - p_1}{\sqrt{2}}$$

مختصات چرخشی هستند. در حد چلانندگی بی‌نهایت یعنی $\Delta^2 \rightarrow \infty$ تابع ویگنر به حاصلضرب دو تابع دلتا مختصات چرخشی می‌یابد، به این معنی که تفاوت مکان‌ها به شدت در اطراف q_α و p_α کاهش می‌یابد،

تکانه کل به شدت در اطراف p_α به اوج می‌رسد.

۲.۳.۳ تشخیص درهم‌تنیدگی

در اینجا یک سوال اساسی ممکن است پیش بیاید و آن این است که چگونه تایید کنیم که یک سیستم درهم‌تنیده است یا خیر؟ برای پاسخ به این سوال ابتدا شرط جداپذیری دو سیستم را معرفی می‌کنیم:

یک حالت کوانتومی را به عنوان حالت جداپذیر دو زیرسیستم A و B معرفی می‌کنیم اگر و تنها اگر به ازای دو مجموعه $\{\hat{\rho}_i^A\}$ و $\{\hat{\rho}_i^B\}$ از A و B بتوانیم ماتریس چگالی حالت کوانتومی را به شکل زیر بنویسیم

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_i^A \otimes \hat{\rho}_i^B \quad (۴۶.۳)$$

راستی‌آزمایی تجربی درهم‌تنیدگی کوانتومی با استفاده از تعریف بالا به دلایل متعدد کابوس آزمایش‌گرایان است چون برای استفاده از این رابطه به $\hat{\rho}$ نیاز داریم ولی ما در سامانه‌های متغیر پیوسته با کوادراتورها معمولاً کار می‌کنیم و \hat{x} و \hat{p} را اندازه‌گیری می‌کنیم. بنابراین اولین کار سخت پیدا کردن و حدس زدن یک $\hat{\rho}$ است که حالت سیستم را توضیف کند. اما این تنها کار سخت پیش‌روی ما نیست. دومین کار سخت، انتخاب پایه‌هایی است که بتوانیم در آن پایه‌ها $\hat{\rho}$ را به شکل رابطه (۴۶.۳) تجزیه کنیم. حالا که استفاده از این رابطه سخت است به سراغ شاهد‌های درهم‌تنیدگی^{۱۷} می‌رویم. ما در شاهد‌های درهم‌تنیدگی به دنبال یک سری معیار هستیم که برای ما درهم‌تنیده بودن یا جداپذیر بودن حالات را مشخص کند. اولین معیاری که معرفی می‌شود، معیار ترانهاد جزئی مثبت^{۱۸} است.

۳.۳.۳ معیار ترانهاد جزئی مثبت

معیار ترانهاد جزئی مثبت که به آن معیار پرز-هورودسکی^{۱۹} هم می‌گویند، یکی از ابزارهای ریاضی کلیدی برای شناسایی وجود درهم‌تنیدگی در حالت‌های کوانتومی است. این معیار در سال ۱۹۹۶ توسط آشر پرز و خانواده هورودسکی ارائه شد و کاربرد ویژه‌ای در شناسایی درهم‌تنیدگی در سیستم‌های دو بخشی دارد. برای یک سیستم دوبخشی AB که با ماتریس $\hat{\rho}_{AB}$ توصیف می‌شود، فضای کلی سیستم به صورت حاصل‌ضربی از فضاها دو زیرسیستم تعریف می‌شود:

$$H_{AB} = H_A \otimes H_B$$

^{۱۷} Entanglement Witness

^{۱۸} Positive Partial Transpose(PPT)

^{۱۹} Peres-Horodecki criterion

ماتریس چگالی $\hat{\rho}_{AB}$ را می‌توان در پایه‌های محلی به صورت زیر نوشت:

$$\rho = \sum_{i,j,k,l} p_{kl}^{ij} |i\rangle \langle j| \otimes |k\rangle \langle l|$$

ترانهاده جزئی نسبت به زیرسیستم B به این معنا است که عملگرهای مربوط به زیرسیستم B در ماتریس چگالی ترانهاده می‌شوند، در حالی که زیرسیستم A تغییری نمی‌کند. معیار PPT بیان می‌کند که اگر $\hat{\rho}_{AB}$ یک حالت کوانتومی جدانشدنی باشد، انتقال جزئی آن $\hat{\rho}_{AB}^{T_B}$ همچنان یک ماتریس مثبت نیمه‌معین^{۲۰} خواهد بود اما اگر $\hat{\rho}_{AB}$ یک حالت کوانتومی درهم‌تنیده باشد، انتقال جزئی آن دیگر مثبت نیمه‌معین نیست و حداقل یکی از مقادیر ویژه‌ی ماتریس $\hat{\rho}_{AB}^{T_B}$ منفی خواهد بود. در سیستم‌های با ابعاد پایین مانند دو کیوبیتی یا یک کیوبیت و یک کیوتريت معیار PPT شرط لازم و کافی برای درهم‌تنیدگی است. به عبارت دیگر اگر حالت درهم‌تنیده باشد، انتقال جزئی مثبت نیمه‌معین نخواهد بود. ولی اگر حالت جدانشدنی باشد، انتقال جزئی مثبت نیمه‌معین خواهد بود. در سیستم‌های با ابعاد بالا معیار PPT تنها یک شرط لازم برای درهم‌تنیدگی است و دیگر کافی نیست. برخی حالات درهم‌تنیده وجود دارند که انتقال جزئی مثبت دارند. این حالات به عنوان حالات درهم‌تنیده‌ی با PPT شناخته می‌شوند و به دسته‌ی درهم‌تنیدگی موسوم به درهم‌تنیدگی مرزی تعلق دارند.

۴.۳.۳ معیار ون‌لوک-فوراساوا

در سیستم‌های کوانتومی، برخی از معیارها مانند PPT یا دیگر معیارهای مبتنی بر تجزیه ماتریس چگالی $\hat{\rho}$ برای بررسی درهم‌تنیدگی نیازمند تخمین دقیق $\hat{\rho}$ هستند. این فرآیند به اندازه‌گیری‌های متعدد و محاسبات پیچیده نیاز دارد. از سوی دیگر، در آزمایش‌های CV ، کوادراتورهای میدان الکترومغناطیسی \hat{x} و \hat{p} به راحتی قابل اندازه‌گیری هستند. معیار ون‌لوک-فوراساوا^{۲۱} به دنبال توسعه روشی است که از نتایج مستقیم اندازه‌گیری کوادراتورها برای بررسی درهم‌تنیدگی استفاده کند. این رویکرد به‌ویژه برای سیستم‌های چند مدی طراحی شده است، جایی که معیارهای سنتی ممکن است ناکارآمد باشند. این معیار، مشابه معیارهایی مانند معیارهای دوان-سایمون^{۲۲}، به‌طور خاص بر اساس اندازه‌گیری کوادراتورهای سیستم تعریف شده و نیازی به دانش مستقیم ماتریس چگالی حالت کوانتومی ندارد. معیار VLF از ترکیب‌های خطی

^{۲۰} positive semi-definite

^{۲۱} Van Look-Furusawa(VLF)

^{۲۲} Duan-Simon

کوادراتورهای مکان \hat{x}_j و \hat{p}_j برای بررسی درهم‌تنیدگی استفاده می‌کند. این ترکیب‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{X} = \sum_{j=1}^N g_j \hat{x}_j \quad (47.3)$$

$$\hat{P} = \sum_{j=1}^N h_j \hat{p}_j \quad (48.3)$$

که در آن g_j و h_j ضرایب وزنی مرتبط با هر مد j هستند. برای حالت‌های کوانتومی که میان دو گروه مدها A و B جدانشدنی نیستند، معیار VLF بیان می‌کند که جمع واریانس‌های \hat{X} و \hat{P} باید کمتر از یک آستانه خاص باشد

$$\langle \Delta^2 \hat{X} \rangle + \langle \Delta^2 \hat{P} \rangle \geq \hbar \left(\sum_{j \in A} |g_j h_j| + \sum_{k \in B} |g_k h_k| \right) \quad (49.3)$$

اگر جمع واریانس‌های ترکیب‌های خطی کوادراتورها کمتر از مقدار آستانه باشد، نشان‌دهنده وجود درهم‌تنیدگی کوانتومی بین دو گروه A و B است. با بررسی تمام حالت‌های دو گروهی ممکن، می‌توان به درهم‌تنیدگی چند مدی کامل دست یافت. از جمله مزایای معیار VLF می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- سادگی آزمایشگاهی: معیار VLF تنها به اندازه‌گیری کوادراتورهای مدهای مختلف نیاز دارد که به راحتی با آشکارسازهای هموداین انجام می‌شود
- عدم نیاز به تخمین ماتریس چگالی: این معیار نیازی به بازسازی کامل حالت کوانتومی ندارد.
- تشخیص چند مدی: این معیار به طور خاص برای بررسی درهم‌تنیدگی در سیستم‌های چند مدی طراحی شده است. برای سیستم‌هایی مانند حالت‌های خوشه‌ای، این معیار بسیار کارآمد است، زیرا واریانس برخی ترکیبات خطی کوادراتورها به صفر میل می‌کند. لازم به ذکر است که معیار VLF تنها یک شرط کافی برای تشخیص درهم‌تنیدگی است. بنابراین، ممکن است در برخی موارد نتواند تمام حالت‌های درهم‌تنیده را شناسایی کند.

۴.۳ فرابرد کوانتومی

اکنون به یکی از مهم‌ترین کاربردهای درهم‌تنیدگی یعنی فرابرد کوانتومی^{۲۳} می‌پردازیم. فرابرد کوانتومی تکنیکی برای انتقال اطلاعات بین دو نقطه دور از هم است. در فرابرد کوانتومی آلیس و باب که در دو نقطه دور از یکدیگر قرار دارند، بین خودشان یک حالت درهم‌تنیده به اشتراک می‌گذارند و همچنین بین آن‌ها یک کانال ارتباطی کلاسیک برقرار است. فرض کنید آلیس می‌خواهد یک حالت کوانتومی ناشناخته را برای باب بفرستد. با توجه به اینکه هیچ اندازه‌گیری وجود ندارد که همزمان همه اطلاعات حالت را به آلیس بدهد (فرضیه برافکنش^{۲۴}) و همچنین قضیه عدم شبیه‌سازی حالت بنابراین تنها راه باقی‌مانده برای اینکه اطلاعات حالت را به باب بدهد این است که خود حالت را برای باب بفرستد. این همان کاری است که در فرایند فرابرد کوانتومی انجام می‌شود.

۱.۴.۳ فرابرد کوانتومی در سامانه‌های متغیر گسسته

ابتدا پروتکل فرابرد کوانتومی در سامانه‌های گسسته معرفی می‌شود. فرض کنید که آلیس باید یک کیوبیت که در حالت زیر آماده شده است به باب بفرستد

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

برای مشاهده طرز کار این پدیده، حالت سه کیوبیتی زیر را در نظر بگیرید

$$|\psi\rangle_a \otimes |\Psi^-\rangle_{AB} = (\alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a) \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |1\rangle_B - |1\rangle_A |0\rangle_B) \quad (5.0.3)$$

که در آن آلیس کیوبیت a را در اختیار دارد که قرار است ارسال شود، همچنین آلیس و باب کیوبیت‌های A و B که به شکل یک حالت درهم‌تنیده $|\Psi^-\rangle_{AB}$ بین آن‌ها به اشتراک گذاشته شده است در اختیار دارند. رابطه‌ی بالا را می‌توانیم به شکل زیر برحسب پایه بل برای کیوبیت‌های آلیس بازنویسی کنیم

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_a \otimes |\Psi^-\rangle_{AB} &= \frac{1}{2} |\Psi^-\rangle_{aA} (-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) + \frac{1}{2} |\Psi^+\rangle_{aA} (-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) \\ &\quad + \frac{1}{2} |\Phi^-\rangle_{aA} (\alpha|1\rangle_B + \beta|0\rangle_B) + \frac{1}{2} |\Phi^+\rangle_{aA} (\alpha|1\rangle_B - \beta|0\rangle_B) \end{aligned}$$

با نوشتن به این صورت، آلیس می‌تواند با اندازه‌گیری دو کیوبیت خودش در پایه حالت بل، کیوبیت باب را در یک حالت

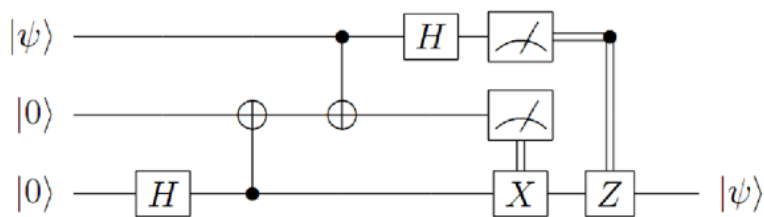
^{۲۳} quantum teleportation

^{۲۴} projection postulate

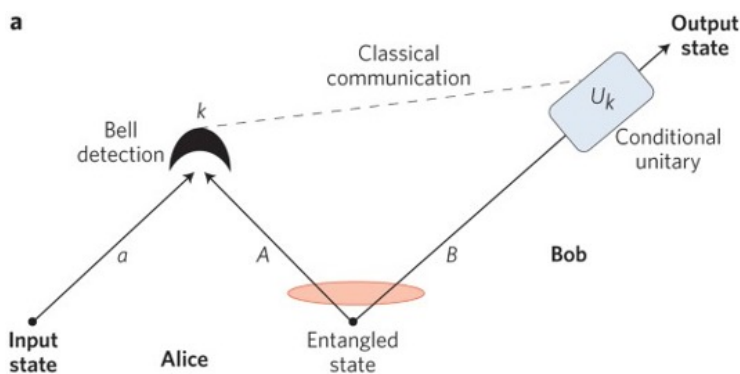
وابسته به α و β آماده کند. چهار نتیجه هم احتمال، مربوط به حالت های $|\Phi^+\rangle_{aA}$ ، $|\Phi^-\rangle_{aA}$ ، $|\Psi^+\rangle_{aA}$ ، $|\Psi^-\rangle_{aA}$ کیوبیت باب را در چهار حالت متناظر $\alpha|1\rangle_B - \beta|0\rangle_B$ و $\alpha|1\rangle_B + \beta|0\rangle_B$ ، $-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B$ ، $-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B$ باقی می گذارند. این چهار حالت از طریق اثر یکی از چهار عملگر پائولی به حالت کیوبیت اصلی در معادله (۵۰.۳) مرتبط می شوند.

$$\begin{aligned}\hat{I}(-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) &= -(\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) \\ \hat{\sigma}_z(-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) &= -(\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) \\ \hat{\sigma}_x(\alpha|1\rangle_B + \beta|0\rangle_B) &= (\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) \\ \hat{\sigma}_y(\alpha|1\rangle_B - \beta|0\rangle_B) &= -i(\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B)\end{aligned}\quad (51.3)$$

تنها کار آلیس این است که به باب بگوید کدام یک از این چهار عملگر هم احتمال به کیوبیت او (باب) اعمال شده است و نتیجه، در محل باب، نسخه ای از کیوبیت اصلی آلیس است. در شکل ۱۲.۳ و ۱۳.۳ طرحی از فرایرد کوانتومی و همچنین مدار فرایرد کوانتومی نشان داده شده است.



شکل ۱۲.۳: مدار فرایرد کوانتومی



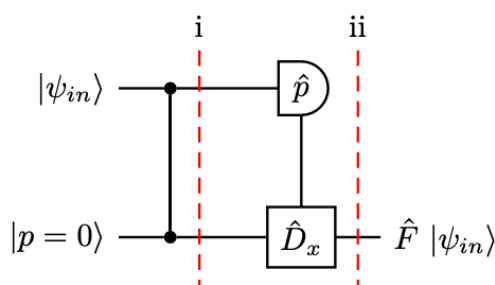
شکل ۱۳.۳: نحوه اجرای پروتکل فرایرد کوانتومی

۲.۴.۳ فرابرد کوانتومی در سامانه‌های متغیر پیوسته

فرابرد یکی از پروتکل‌های بنیادی در نظریه اطلاعات کوانتومی است که نه تنها امکان انتقال حالت‌های کوانتومی را فراهم می‌کند، بلکه به‌عنوان ابزاری کلیدی برای ساخت مدل‌های محاسبات کوانتومی نیز به کار گرفته می‌شود. در چارچوب متغیرهای پیوسته، دو نسخه اصلی از این پروتکل معرفی شده است که به آن‌ها نیمه‌فرابرد^{۲۵} و فرابرد کامل^{۲۶} گفته می‌شود. در ادامه به بررسی این دو پرداخته می‌شود.

۱.۲.۴.۳ نیمه فرابرد کوانتومی

در نیمه‌فرابرد، تنها بخشی از عملیات فرابرد انجام می‌شود و عنصر اصلی مدار، گیت CZ است. این نسخه در واقع تعمیم مستقیمی از مدل محاسبات کوانتومی مبتنی بر کیوبیت‌ها در چارچوب محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری^{۲۷} ($MBQC$) به حوزه متغیر پیوسته محسوب می‌شود. از لحاظ تاریخی، نخستین تلاش‌ها برای پیاده‌سازی ($MBQC$) در نسخه متغیر پیوسته بر پایه همین مدار نیمه‌فرابرد شکل گرفتند، زیرا ساختار آن شباهت زیادی به مدل کیوبیتی داشت و امکان انتقال مفاهیم از جهان کیوبیت‌ها به متغیرهای پیوسته را فراهم می‌کرد. با این حال، اجرای عملی این پروتکل به دلیل نیاز به گیت‌های غیرخطی و کنترل دقیق بر گیت CZ ، پیچیدگی‌های فنی قابل توجهی دارد. مدار نیمه‌فرابرد یکی از ابتدایی‌ترین روش‌ها برای فرابرد کوانتومی در سیستم‌های متغیر پیوسته است. این مدار شامل گیت CZ و یک حالت کمکی می‌باشد. شکل ۱۴.۳ مدار نیمه‌فرابرد را نشان می‌دهد.



شکل ۱۴.۳: مدار نیمه فرابرد کوانتومی

^{۲۵} Half teleportation

^{۲۶} Full teleportation

^{۲۷} Measurement-Based Quantum Computation

در این شکل $|\psi_{in}\rangle$ نشان دهنده حالت انتقالی یا مد ورودی است و $|p=0\rangle$ مد کمکی را نشان می‌دهد. گیت CZ بر روی دو مد (ورودی و کمکی) اعمال می‌شود. این گیت باعث ایجاد همبستگی بین کوادراتورهای مکان \hat{x} و تکانه \hat{p} این دو مد می‌شود. با توجه به روابط تبدیل گیت CZ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
CZ(s)^\dagger \hat{x}_1 CZ(s) &= \hat{x}_1 \\
CZ(s)^\dagger \hat{p}_1 CZ(s) &= \hat{p}_1 + s\hat{x}_2 \\
CZ(s)^\dagger \hat{x}_2 CZ(s) &= \hat{x}_2 \\
CZ(s)^\dagger \hat{p}_2 CZ(s) &= \hat{p}_2 + s\hat{x}_1 \\
CZ(s)^\dagger \hat{a}_1 CZ(s) &= \hat{a}_1 + i\frac{s}{2}(\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2) \\
CZ(s)^\dagger \hat{a}_2 CZ(s) &= \hat{a}_2 + i\frac{s}{2}(\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1)
\end{aligned} \tag{۵۲.۳}$$

عملگرهای کوادراتور در قسمت (i) نمودار به شکل زیر تبدیل می‌شوند.

$$\hat{x}_{in}^{(i)} = \hat{x}_{in}$$

$$\hat{p}_{in}^{(i)} = \hat{p}_{in} + \hat{x}_{Anc}$$

$$\hat{x}_{Anc}^{(i)} = \hat{x}_{Anc}$$

$$\hat{p}_{Anc}^{(i)} = \hat{p}_{Anc} + \hat{x}_{in}$$

بعد از اعمال گیت CZ مقدار عملگر $\hat{p}_{in}^{(i)}$ را اندازه‌گیری می‌شود. وقتی که یک عملگر اندازه‌گیری می‌شود، نتیجه اندازه‌گیری که یک اسکالر است با عملگر جایگزین می‌شود. در این مورد m_p به عنوان نتیجه اندازه‌گیری در نظر می‌گیریم و مقدار $\hat{p}_{in}^{(i)}$ با m_p جایگزین می‌کنیم. بنابراین با توجه به رابطه فوق

$$m_p = \hat{p}_{in} + \hat{x}_{Anc}$$

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که

$$m_p - \hat{p}_{in} = \hat{x}_{Anc}$$

می‌توان عملگرهای کوادراتور مد کمکی را پس از اندازه‌گیری مد ورودی یعنی در مرحله (ii)، دوباره به شکل زیر نوشت

$$\hat{x}_{Anc}^{(ii)} = \hat{x}_{Anc}$$

$$\hat{p}_{Anc}^{(ii)} = \hat{p}_{Anc} + \hat{x}_{in}$$

با استفاده از معادلات فوق داریم

$$\hat{x}_{Anc}^{(ii)} = m_p - \hat{p}_{in}$$

$$\hat{p}_{Anc}^{(ii)} = \hat{p}_{Anc} + \hat{x}_{in}$$

باید تاکید شود که توزیع احتمال m_p فارغ از هرگونه پیاده‌سازی مدار در شکل ۱۴.۳ به شدت به حالت ورودی و حالت فرعی بستگی دارد. با این حال می‌توانیم به وسیله یک تغییر جابه‌جایی در مد کمکی، m_p پاک شود. از این عدد m_p استفاده می‌شود تا حالت کوانتومی کمکی اصلاح شود. این اصلاح شامل یک ”جابه‌جایی” است که حالت کمکی را به حالتی نزدیک‌تر به حالت اصلی تبدیل می‌کند. هدف این است که اثر نویز یا خطا از بین برده شود و حالت خروجی با حالت اصلی تطبیق داده شود. به عنوان یک تشبیه ساده تصور کنید می‌خواهید یک بسته را از یک نقطه به نقطه دیگر بفرستید، اما در مسیر بسته ممکن است کمی کج شود یا آسیب ببیند. اندازه‌گیری شبیه به این است که وضعیت بسته را بررسی کنید و ببینید چقدر کج شده است. عملیات پیشخور^{۲۸} یعنی این خطا را اصلاح کنید (مثلاً بسته را صاف کنید) تا دوباره به حالت درست برگردد. در نهایت با اعمال عملیات جابه‌جایی روابط به شکل زیر درمی‌آید

$$\hat{x}_{out} = -\hat{p}_{in} \quad (۵۳.۳)$$

$$\hat{p}_{out} = \hat{x}_{in} + \hat{p}_{Anc}$$

در صورتی که از ویژه حالت کوادراتور \hat{p} یعنی $|p=0\rangle$ به عنوان حالت کمکی استفاده شود، \hat{p}_{Anc} همیشه صفر خواهد بود و رابطه ورودی-خروجی مدار نیمه فرابرد به سادگی تبدیل فوریه مد ورودی است. اکنون اهمیت مدار نیمه فرابرد مشخص شد، به وسیله یک مدار نیمه فرابرد می‌توان تبدیل فوریه کوانتومی در یک سامانه متغیر پیوسته انجام داد. با این حال ویژه حالت‌های کوادراتورها غیرفیزیکی هستند و معمولاً در اجرای واقعی با حالت‌های چلانده جایگزین می‌شوند. اگر یک حالت چلانده با پارامتر چلانده r را به عنوان حالت فرعی خود استفاده کنیم، رابطه ورودی و خروجی به شکل

^{۲۸} Feed forward

زیر نوشته می شود

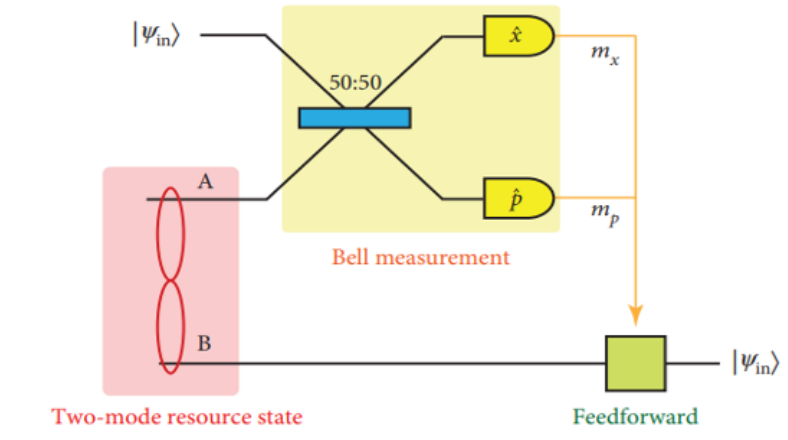
$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out} \\ \hat{p}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{p}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{p}_{Anc} e^{-r} \end{pmatrix} \quad (54.3)$$

از نکات جالب که می توان به آن اشاره کرد این است که صرف نظر از اینکه چه چیزی به عنوان حالت فرعی استفاده شود، اثر حالت فرعی فقط در کوادراتور \hat{p} ظاهر می شود. این به دلیل این واقعیت است که اثر حالت فرعی در کوادراتور \hat{x} از طریق عملیات پیشخور پاک می شود. دلیل اینکه مدار شکل ۱۴.۳ ک مدار نیمه فرابرد نامیده می شود این است که با دوبار تکرار یک مدار مشابه یک عملیات واحد دریافت می کنیم. چون $\hat{F}^2 = \hat{I}$ که در آن \hat{F} تبدیل فوریه کوانتومی است. با این حال در سامانه های نوری، دو مرتبه تکرار یک مدار نیمه فرابرد معادل با پیاده سازی فرابرد کوانتومی نیست.

۲.۲.۴.۳ فرابرد کامل کوانتومی

در فرابرد کامل به طور کامل عملیات فرابرد را پیاده سازی می کند و عنصر اصلی مدار آن شکافنده پرتو (BS) است. شکافنده پرتو یک ابزار اپتیکی خطی و بسیار ساده تر از گیت های غیرخطی است و همین ویژگی باعث شده که بیشتر آزمایش های عملی فرابرد کوانتومی در حوزه CV بر پایه مدار فرابرد کامل طراحی شوند. این پروتکل نه تنها از نظر پیاده سازی ساده تر است، بلکه امکان استفاده از منابع اپتیکی استاندارد و تکنیک های اندازه گیری همدوسی را نیز فراهم می کند. به همین دلیل، فرابرد کامل به عنوان پایه ای برای بسیاری از آزمایش های انتقال حالت های کوانتومی، تولید شبکه های درهم تنیده بزرگ و حتی ساخت مدارهای محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه گیری در حوزه CV به کار گرفته شده است. تفاوت اصلی این مدار با مدار نیمه فرابرد در این است که در این مدار به جای گیت CZ از شکاف پرتو استفاده شده است. در تنظیمات نوری استفاده از شکافنده پرتو بسیار آسان تر از گیت CZ است. مدار فرابرد کامل در شکل ۱۵.۳ نشان داده شده است

در شکل ۱۵.۳ $|\psi_{in}\rangle$ نشان دهنده حالتی است که بین آلیس و باب فرابرد می شود بدون اینکه حالت اصلی به طور مستقیم منتقل شود. این انتقال از طریق درهم تنیدگی کوانتومی و اصول اندازه گیری بل انجام می شود. همچنین یک منبع درهم تنیده دومی داریم که یک مد آن در اختیار آلیس و یک مد آن در اختیار باب است. فرض کنید که در اینجا مد A در اختیار آلیس و مد B در اختیار باب است. در اولین مرحله حالت ورودی و مد A در یک شکافنده پرتو 50 : 50 با یکدیگر ترکیب می شوند. تقسیم کننده پرتو اطلاعات حالت ورودی و مد A را با هم ترکیب می کند. پس از آن عملگرهای کوادراتور هر مد با هدف کشف اطلاعات مشترک بین حالت ورودی و مد A اندازه گیری می شود. این اندازه گیری توأمان ، اندازه گیری بل نامیده می شود. اندازه گیری بل متغیر پیوسته در واقع تصویرگر مد ورودی و مد A بر روی حالت EPR



شکل ۱۵.۳: مدار فرابرد کوانتومی

جابه‌جا شده است. این مشابه فرابرد کوانتومی گسسته و مبتنی بر کیوبیت است که در آن اندازه‌گیری بل، اندازه‌گیری تصویرگر روی یکی از چهار حالت بل است. اکنون اگر نتایج اندازه‌گیری m_x و m_p در نظر گرفته شود، با توجه به اینکه مد A و حالت ورودی درهم‌تنیده شده‌اند داریم

$$\begin{aligned}\sqrt{2}m_x &= \hat{x}_{in} - \hat{x}_A \\ \sqrt{2}m_p &= \hat{p}_{in} + \hat{p}_A\end{aligned}\tag{۵۵.۳}$$

به راحتی می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\hat{x}_B + \sqrt{2}m_x &= \hat{x}_{in} - \hat{x}_A + \hat{x}_B \Rightarrow \hat{x}_B = \hat{x}_{in} - \sqrt{2}m_x + (\hat{x}_B - \hat{x}_A) \\ \hat{p}_B + \sqrt{2}m_p &= \hat{p}_{in} + \hat{p}_A + \hat{p}_B \Rightarrow \hat{p}_B = \hat{p}_{in} - \sqrt{2}m_p + (\hat{p}_A + \hat{p}_B)\end{aligned}\tag{۵۶.۳}$$

اکنون کوادراتورهایی که دست باب است، بدست آمد. در فرابرد کیوبتی آلیس نتایج اندازه‌گیری خود را از طریق یک کانال کلاسیک به باب مخابره می‌کرد و باب با توجه به نتیجه اندازه‌گیری آلیس عملیات مناسب را بر روی کیوبیت خود انجام می‌داد. در اینجا عملیات پیشخور نقش همان ارتباط کلاسیک را برای ما انجام می‌دهد و نتایج اندازه‌گیری یعنی m_x و m_p با استفاده از عملیات پیشخور به باب مخابره شده و باب با توجه به مقادیر اندازه‌گیری شده، عملگر جابه‌جایی

متناسب را اعمال می‌کند. پس از اعمال جابه‌جایی و پاکسازی مقادیر m_p و m_x داریم

$$\hat{x}_B = \hat{x}_{in} + (\hat{x}_B - \hat{x}_A) \quad (57.3)$$

$$\hat{p}_B = \hat{p}_{in} + (\hat{p}_A + \hat{p}_B)$$

اگر حالت منبع فرعی دو مدی را بتوان به گونه‌ای انتخاب کرد که در آن

$$\hat{x}_B - \hat{x}_A = 0 \quad (58.3)$$

$$\hat{p}_A + \hat{p}_B = 0$$

آنگاه عملگرهای کوادراتور مد خروجی همانند کوادراتورهای مد ورودی است. به این معنی که حالت کوانتومی مد ورودی با موفقیت به مد خروجی تبدیل شده است. حالت فرعی ایده‌آل که شرط معادلات (58.3) حالت‌های EPR است یعنی اگر از حالت‌های به عنوان حالت منبع دومدی استفاده کنیم می‌توانیم حالت ورودی را دقیقاً فرابرد کنیم اما از آنجایی که دستیابی به حالت‌های EPR ایده‌آل امکان‌پذیر نیست، بنابراین پروتکل فرابرد کوانتومی همیشه شامل نوعی نویز است که با توزیع $\hat{x}_B - \hat{x}_A$ و $\hat{p}_A + \hat{p}_B$ تعیین می‌شود. در عمل حالت‌های EPR ایده‌آل با حالت‌های چلانده دومدی تقریب زده می‌شود، در این صورت واریانس‌های $(\Delta^2(\hat{x}_B - \hat{x}_A))$ و $(\Delta^2(\hat{p}_A + \hat{p}_B))$ میزان نویز در سیستم را تعیین می‌کند. همچنین باید دقت شود که در اینجا دقت اندازه‌گیری آلیس بدون خطا فرض شده است، اگر اندازه‌گیری‌های آلیس دقیق نباشند، جابجایی توسط باب نیز دقیق نخواهد بود. اکنون به توصیف تابع ویگنر حالت خروجی می‌پردازیم. تابع ویگنر حالت خروجی به شکل

$$W_{out}(x_{out}, p_{out}) = \iint dx dp W_{in}(x, p) \Phi(x_{out} - x, p_{out} - p) \quad (59.3)$$

بدست می‌آید که در این رابطه W_{in} تابع ویگنر حالت ورودی و Φ تابع ویگنر مرتبط با حالت منبع دو مدی است. اگر حالت منبع درهم‌تنیده ایده‌آل باشد، مانند یک حالت EPR ، تابع ویگنر Φ به یک دلتا-تابع تبدیل می‌شود

$$\Phi_{EPR}(x, p) \propto \delta(x) \delta(p)$$

در این صورت

$$W_{in}(x_{out}, p_{out}) = W_{out}(x_{out}, p_{out})$$

این بدان معناست که حالت ورودی بدون هیچ‌گونه نویزی منتقل می‌شود. در عمل، از حالت‌های فشرده دومدی برای تقریب زدن حالت EPR استفاده می‌شود. در این شرایط، تابع ویگنر منبع با رابطه زیر متناسب است

$$\Phi_{TMSS}(x_{out} - x, p_{out} - p) \propto e^{-x p} \left[-\frac{(x_{out} - x)^2 + (p_{out} - p)^2}{2\hbar e^{-2r}} \right] \quad (۶۰.۳)$$

که r نشان‌دهنده پارامتر فشردگی است. هرچه r بزرگ‌تر باشد، پهنای توزیع کوچک‌تر و دقت فرایرد بیشتر است.

فصل ۴

الگوریتم‌ها و مدل‌های محاسباتی متغیر پیوسته

مدل‌های محاسباتی مبتنی بر متغیرهای پیوسته، به جای کار با مقادیر صفر و یک، از کمیت‌هایی مانند مکان، تکانه یا شدت میدان استفاده می‌کنند. این رویکرد فضای هیلبرت بی‌نهایت بعدی را در اختیار قرار می‌دهد و امکان طراحی الگوریتم‌هایی را فراهم می‌سازد که در مدل‌های گسسته قابل دسترس نیستند. الگوریتم‌های نمونه برداری بوزونی، پروتکل‌های رمزنگاری کوانتومی و مدل‌های یادگیری ماشین کوانتومی از جمله نمونه‌های برجسته‌ی این حوزه‌اند. مزیت اصلی این چارچوب در آن است که می‌تواند پلی میان محاسبات دیجیتال و آنالوگ ایجاد کند. از یک سو، ابزارهای اپتیک کوانتومی و نوسانگرهای هارمونیک بستر طبیعی برای پیاده‌سازی این مدل‌ها هستند؛ و از سوی دیگر، کاربردهای عملی آن‌ها در شبیه‌سازی‌های علمی، بهینه‌سازی مسائل پیچیده و پردازش داده‌های آنالوگ روزه‌روز در حال گسترش است. در این فصل ابتدا یک دید جامع از الگوریتم‌های کوانتومی ارائه خواهد شد و در ادامه در سیستم‌های متغیر پیوسته الگوریتم‌ها بررسی خواهند شد و نهایتاً مدل‌های محاسباتی متغیر پیوسته ارائه خواهد شد.

۱.۴ الگوریتم‌های کوانتومی

روح رایانه‌های کوانتومی، فارغ از بستری که بر روی آن پیاده‌سازی می‌شوند، الگوریتم‌ها هستند. همچنین سرعت براساس الگوریتم‌ها تعریف می‌شود. الگوریتم‌های کوانتومی یکی از جذاب‌ترین و نویدبخش‌ترین شاخه‌های علوم رایانه و فیزیک کوانتومی هستند که با هدف حل مسائلی طراحی شده‌اند که یا به صورت کلاسیک غیرقابل حل‌اند یا حل آن‌ها نیازمند منابع محاسباتی بسیار زیادی است. این الگوریتم‌ها با بهره‌گیری از اصول فیزیک کوانتومی مانند برهم‌نهی، درهم‌تنیدگی و تداخل، روش‌های جدید و خلاقانه‌ای برای پردازش اطلاعات ارائه می‌دهند. اولین ایده‌ها درباره محاسبات کوانتومی به دهه ۱۹۸۰ میلادی بازمی‌گردد، ریچارد فاینمن، یکی از برجسته‌ترین فیزیک‌دانان قرن بیستم، در سال ۱۹۸۲ ایده‌ای مطرح کرد

که امروزه به شبیه‌سازهای کوانتومی معروف است. او پیشنهاد داد که برای مطالعه سیستم‌های کوانتومی، به جای استفاده از رایانه‌های کلاسیک (که در این زمینه محدودیت دارند)، باید دستگاه‌هایی بسازیم که بر اساس قوانین مکانیک کوانتومی عمل کنند. این ایده الهام‌بخش بسیاری از تحقیقات در زمینه محاسبات کوانتومی شد و امروزه به‌عنوان مبنایی برای رایانه‌های کوانتومی شناخته می‌شود. اولین الگوریتم‌های کوانتومی در اوایل دهه ۱۹۹۰ ارائه شدند، درحالی‌که سخت‌افزار مرتبط وجود نداشت. ایده‌های اولیه از یوری مانین و پاول بنیوف (۱۹۷۹-۱۹۸۱) شکل گرفتند. این دانشمندان ایده استفاده از سیستم‌های کوانتومی برای انجام محاسبات را مطرح کردند. پاول بنیوف، ایده استفاده از مکانیک کوانتومی را برای شبیه‌سازی سیستم‌های فیزیکی ارائه کرد و یوری مانین به نقش احتمالی رایانه‌های کوانتومی برای حل مسائلی که برای رایانه‌های کلاسیک بسیار دشوار هستند اشاره کرد. در دهه ۱۹۸۰، دویچ کار روی مفاهیم اولیه محاسبات کوانتومی را ادامه داد و ایده رایانه کوانتومی جهانشمول را معرفی کرد. او الگوریتم‌های اولیه‌ای مانند الگوریتم دویچ (۱۹۸۵) را ارائه داد که توانایی حل مسائل خاص را به شکلی کارآمدتر از کلاسیک‌ها نشان می‌داد. در الگوریتم دویچ-جوزا (۱۹۹۲)، توانایی بررسی سریع‌تر ویژگی‌های یک تابع نسبت به روش‌های کلاسیک به نمایش گذاشته شد. از دیگر الگوریتم‌های معروف آن زمان می‌توان به الگوریتم شور اشاره کرد. این الگوریتم توسط پیتر شور معرفی شد و یکی از مهم‌ترین پیشرفت‌ها در محاسبات کوانتومی به شمار می‌رود. کاربرد این الگوریتم در فاکتورگیری اعداد صحیح (مثلاً تجزیه یک عدد به عوامل اول آن) است و از این جهت اهمیت دارد که بسیاری از سیستم‌های رمزنگاری (مانند RSA) به سختی فاکتورگیری اعداد متکی هستند. الگوریتم شور این کار را با زمان‌بندی نمایی کمتر از الگوریتم‌های کلاسیک انجام می‌دهد. الگوریتم بعدی الگوریتم گروور است که توسط لوو گروور طراحی شد و به جستجوی کارآمد در یک پایگاه داده اختصاص دارد. پایگاه داده‌ای که در حالت کلاسیک نیازمند جستجوی خطی $O(N)$ است، در حالت کوانتومی به $O(\sqrt{N})$ کاهش می‌یابد. این الگوریتم تأثیرات بزرگی در بهبود مسائلی مانند جستجوی الگوریتمی و بهینه‌سازی دارد. در سال ۲۰۱۳ و ۲۰۱۴ الگوریتم‌های وردشی کوانتومی جدیدی معرفی شدند که قلب تپنده الگوریتم‌های حال حاضر هستند که در ادامه بطور مفصل بیان خواهند شد. تعداد الگوریتم‌های کوانتومی در مقایسه با الگوریتم‌های کلاسیک بسیار کمتر است. تا به امروز که این متن نگارش شده است یعنی سال ۲۰۲۵، باغ‌وحش الگوریتم‌های کوانتومی^۱ ۷۱ الگوریتم مختلف را فهرست کرده است. نکته‌ی خیلی مهم درباره‌ی الگوریتم‌ها این است که اکثر الگوریتم‌های معرفی شده، کیوبیتی هستند و برای سامانه‌های گسسته تعریف شده است و تعداد انگشت شماری الگوریتم وجود دارد که برای سامانه‌های متغیر پیوسته تعریف شده‌اند. قبل از پرداختن به جزئیات درباره الگوریتم‌های متغیر پیوسته، چند تعریف و مفهوم ارائه می‌شود. اولین مفهومی که به آن پرداخته شده است، مفهوم پیچیدگی است.

^۱ Quantum Algorithm Zoo

۱.۱.۴ کلاس‌های پیچیدگی کلاسیک

پیچیدگی محاسباتی یکی از شاخه‌های اصلی نظریه محاسبات است که به مطالعه منابع لازم (مانند زمان و فضا) برای حل مسائل توسط الگوریتم‌ها می‌پردازد. این شاخه به طبقه‌بندی مسائل بر اساس میزان سختی محاسباتی آن‌ها کمک می‌کند و مفاهیمی مانند سختی و آسانی را برای الگوریتم‌ها و مسائل تعریف می‌کند. دو منبع اصلی که در پیچیدگی محاسباتی مورد بررسی قرار می‌گیرند عبارت‌اند از زمان محاسباتی که تعداد گام‌های موردنیاز برای اجرای الگوریتم را مشخص می‌کند و فضای محاسباتی که میزان حافظه‌ای که الگوریتم در طول اجرا نیاز دارد را مشخص می‌کند. کلاس‌های پیچیدگی گروه‌بندی‌هایی از مسائل هستند که بر اساس منابع موردنیاز برای حل آن‌ها تعریف می‌شوند. برخی از کلاس‌های اصلی پیچیدگی در بخش زیر ذکر شده است.

● کلاس P

این کلاس شامل مسائلی است که توسط یک ماشین تورینگ قطعی (DTM) در زمان چندجمله‌ای حل می‌شوند. به زبانی دیگر این کلاس بیانگر مسائل آسان یا قابل حل از دیدگاه محاسبات کلاسیک است. به عنوان مثال مرتب‌سازی لیست اعداد، ضرب ماتریس‌ها در این دسته قرار می‌گیرند.

● کلاس NP

شامل مسائلی است که اگر یک جواب پیشنهادی داده شود، می‌توان در زمان چندجمله‌ای درستی آن را بررسی کرد. مسائل NP لزوماً توسط ماشین‌های کلاسیک در زمان چندجمله‌ای حل نمی‌شوند، اما بررسی جواب آن‌ها سریع است.

● کلاس $NP - Complete$

این کلاس شامل دشوارترین مسائل در NP است. اگر بتوان یک مسئله کامل- NP را در زمان چندجمله‌ای حل کرد، تمام مسائل NP قابل حل خواهند بود. از جمله مثال‌های این کلاس مسئله فروشنده دوره‌گرد است.

● کلاس $NP - Hard$

که حداقل به سختی مسائل کامل- NP هستند، اما الزاماً در NP قرار ندارند (یعنی ممکن است جواب آن‌ها قابل تأیید نباشد). مثلاً مسائل بهینه‌سازی که جواب دقیق آن‌ها محاسبه‌ناپذیر است.

● کلاس $PSPACE$

شامل مسائلی است که می‌توانند با استفاده از حافظه چندجمله‌ای حل شوند، صرف‌نظر از زمان لازم برای حل آن‌ها. به عنوان مثال: حل بازی‌هایی با تعداد محدودی حرکت.

• کلاس $EXPTIME$

که شامل مسائلی است که برای حل آن‌ها به زمان نمایی نیاز است. حل بازی شطرنج با تحلیل تمام حرکات ممکن در این دسته قرار می‌گیرد

۲.۱.۴ کلاس‌های پیچیدگی کوانتومی

در محاسبات کوانتومی، کلاس‌های پیچیدگی به مطالعه مسائل و منابع موردنیاز برای حل آن‌ها در مدل محاسبات کوانتومی می‌پردازند. این کلاس‌ها تعمیمی از کلاس‌های پیچیدگی کلاسیک مانند P و NP هستند و بر اساس توانایی رایانه‌های کوانتومی تعریف می‌شوند.

• کلاس BQP شامل تمام مسائلی است که می‌توانند توسط یک رایانه کوانتومی در زمان چندجمله‌ای با احتمال خطای محدود (کمتر از $\frac{1}{3}$) حل شوند. این کلاس معادل "مسائل قابل حل توسط رایانه‌های کوانتومی" در نظر گرفته می‌شود و هر مسئله‌ای که در P حل می‌شود، در BQP نیز قابل حل است. همچنین BQP مسائل خاصی را شامل می‌شود که در P یا حتی NP نیستند ولی در رابطه با BQP ، $PSPACE$ به احتمال زیاد زیرمجموعه‌ای از $PSPACE$ است. مسائل معروف مانند الگوریتم شور (برای فاکتورگیری عددی) و الگوریتم گروور (برای جستجوی پایگاه داده) در این کلاس قرار دارند. رابطه BQP با کلاس‌های کلاسیک به شکل زیر است

$$P \subseteq BQP \subseteq PSPACE$$

اما رابطه دقیق BQP با NP هنوز مشخص نیست.

• کلاس QMA این کلاس، نسخه کوانتومی کلاس NP است. جایی که یک ماشین کوانتومی می‌تواند یک گواه کوانتومی را دریافت کرده و درستی آن را در زمان چندجمله‌ای بررسی کند. گواه کوانتومی می‌تواند مزایای بیشتری نسبت به گواه کلاسیک داشته باشد، زیرا شامل اطلاعات برهم‌نهی یا درهم‌تنیده است. اگر گواه درست باشد، ماشین کوانتومی با احتمال بالا آن را می‌پذیرد اما اگر گواه غلط باشد، احتمال پذیرش آن پایین است. مسائل مربوط به بررسی ویژگی‌های حالت‌های کوانتومی مانند انرژی حالت پایه یک سیستم کوانتومی در این دسته از پیچیدگی قرار می‌گیرند.

• کلاس $BQP - hard$ و $BQP - complete$ در کلاس $BQP - hard$ مسائل آن قدر سخت هستند که اگر یکی از آن‌ها توسط یک رایانه کوانتومی حل شود، تمام مسائل در BQP نیز قابل حل خواهند بود. مثالی از

$BQP - hard$ بودن: شبیه‌سازی برخی سیستم‌های کوانتومی است و $BQP - complete$ که شامل مسائل بسیار مهم در BQP است که نه تنها در BQP قرار دارند، بلکه سخت‌ترین مسائل این کلاس نیز هستند.

۳.۱.۴ طبقه‌بندی الگوریتم‌ها

طبقه‌بندی و دسته‌بندی‌های مختلفی برای الگوریتم‌های کوانتومی وجود دارد در این بخش یکی از این دسته‌بندی‌ها که بر اساس کاربرد الگوریتم‌ها است، معرفی شده است.

۱.۳.۱.۴ الگوریتم‌های مبتنی بر اوراکل

اولین مورد، الگوریتم‌های مبتنی بر اوراکل^۲ است. الگوریتم‌های مبتنی بر اوراکل در محاسبات کوانتومی یک کلاس از الگوریتم‌ها هستند که برای حل مسائل خاص با استفاده از اطلاعات یک تابع یا اوراکل طراحی شده‌اند. اوراکل به‌طور کلی یک «جعبه سیاه» است که به ازای ورودی‌های خاص، خروجی‌هایی تولید می‌کند. این الگوریتم‌ها از قدرت هم‌زمانی و تداخل کوانتومی برای بهره‌برداری از اوراکل استفاده می‌کنند. این الگوریتم‌ها برای حل مسئله باید یک یا چند بار اوراکل را فراخوانی کنند. تعداد فراخوانی‌ها در الگوریتم‌های کوانتومی معمولاً بسیار کمتر از تعداد لازم در الگوریتم‌های کلاسیک است. این الگوریتم‌ها از توانایی‌های کوانتومی مانند تداخل و برهم‌نهی استفاده می‌کنند تا پاسخ را با تعداد کمتری از فراخوانی‌ها پیدا کنند، این امر باعث افزایش کارایی آن‌ها در مقایسه با همتایان کلاسیک می‌شود. این الگوریتم‌ها اغلب برای مسائلی استفاده می‌شوند که دارای یک فضای جستجوی بسیار بزرگ و پاسخ واحد هستند. به عنوان مثال الگوریتم‌های دوپیچ-جوزا، سیمون، برنشتین-وزیرانی و گروور از این دسته الگوریتم‌ها هستند.

۲.۳.۱.۴ الگوریتم‌های شبیه‌سازی سیستم‌های فیزیک کوانتومی

دسته بعدی الگوریتم‌هایی هستند که وظیفه آن‌ها شبیه‌سازی سیستم‌های فیزیک کوانتومی است. شبیه‌سازی فیزیک کوانتومی یکی از کاربردهای کلیدی محاسبات کوانتومی است که به مطالعه و مدل‌سازی سیستم‌های فیزیکی پیچیده در سطح کوانتومی می‌پردازد. این کاربرد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، زیرا بسیاری از فرآیندها در شیمی، مواد پیشرفته، و زیست‌فیزیک در این مقیاس رخ می‌دهند و محاسبات کلاسیک اغلب قادر به مدل‌سازی دقیق آن‌ها نیست. شبیه‌سازی کوانتومی به معنای بازسازی رفتار یک سیستم کوانتومی واقعی روی یک سیستم کوانتومی قابل کنترل (مانند یک رایانه کوانتومی) است. این شبیه‌سازی‌ها به‌طور خاص در موارد زیر مفید هستند

- بررسی برهم‌کنش‌های اتم‌ها و مولکول‌ها

^۲ Oracle

● مطالعه رفتارهای مواد مغناطیسی یا ابررساناها

● شبیه‌سازی ساختارها و واکنش‌های شیمیایی

برای شبیه‌سازی فیزیک کوانتومی از الگوریتم‌ها و روش‌های مختلفی استفاده می‌شود، از جمله شبیه‌سازی هامیلتونی که وظیفه آن توصیف و حل معادلات حاکم بر سیستم‌های کوانتومی است و مدل‌سازی دینامیک سیستم‌های مولکولی کاربرد دارد. همچنین از الگوریتم‌های تخمین فاز کوانتومی که برای یافتن مقادیر ویژه سیستم‌های کوانتومی استفاده می‌شود و در محاسبه انرژی حالت پایه یک مولکول کاربرد دارد، در شبیه‌سازی فیزیک کوانتومی استفاده می‌شود. روش‌های ترکیبی کلاسیک-کوانتومی، روش‌هایی مانند VQE ^۳ که از ترکیب محاسبات کلاسیک و کوانتومی برای بهینه‌سازی استفاده می‌کنند دیگر دسته از الگوریتم‌ها هستند که طبقه شبیه‌ساز فیزیک کوانتومی قرار می‌گیرند.

۳.۳.۱.۴ الگوریتم‌های شبیه‌سازی مولکول‌های زیستی

سومین دسته شبیه‌سازی مولکول‌های زیستی است. شبیه‌سازی مولکول‌های زیستی با استفاده از محاسبات کوانتومی یکی از چالش‌برانگیزترین و در عین حال امیدوارکننده‌ترین کاربردهای این فناوری است. هدف این شبیه‌سازی‌ها، مطالعه ساختارها و رفتار مولکول‌های زیستی پیچیده مانند پروتئین‌ها، پپتیدها،^۴ و ریبوزوم‌ها^۵ در سطوح اتمی است. این شبیه‌سازی‌ها به درک بهتر فرآیندهای زیستی و شیمیایی و طراحی داروها و مواد زیستی جدید کمک می‌کنند.

۴.۳.۱.۴ الگوریتم‌های یادگیری ماشین کوانتومی

دسته پنجم از این طبقه‌بندی یادگیری ماشین کوانتومی^۶ است. یادگیری ماشین کوانتومی QML ترکیبی از دو حوزه قدرتمند، یادگیری ماشین و محاسبات کوانتومی است. این شاخه با هدف استفاده از مزایای محاسبات کوانتومی برای بهبود الگوریتم‌ها و مدل‌های یادگیری ماشین توسعه یافته است. محاسبات کلاسیک در یادگیری ماشین با چالش‌های متعددی از جمله حجم عظیم داده‌ها، زمان‌بر بودن آموزش مدل‌ها و محدودیت در مدل‌سازی سیستم‌های پیچیده روبه‌رو است. محاسبات کوانتومی می‌تواند این چالش‌ها را با استفاده از خواص کوانتومی مانند برهم‌نهی، درهم‌تنیدگی و تداخل حل کند. از کاربردهای یادگیری ماشین کوانتومی می‌توان به بهبود سرعت الگوریتم‌های آموزش شبکه‌های عصبی و مدل‌های یادگیری ماشین، کاربرد در داده‌های با ابعاد بالا، ترکیب شبکه‌های عصبی کلاسیک با محاسبات کوانتومی برای مدل‌سازی بهتر داده‌های پیچیده، حل مسائل بهینه‌سازی که در یادگیری ماشین کلاسیک چالش‌برانگیز هستند و استفاده از

^۳ Variational Quantum Eigensolver(VQE)

^۴ peptides

^۵ Ribosome

^۶ Quantum Machine Learning(QML)

محاسبات کوانتومی برای مدل‌سازی بهتر زبان و پردازش متن اشاره کرد. الگوریتم‌های مهم در یادگیری ماشین کوانتومی، الگوریتم تقویت دامنه^۷، الگوریتم HHL ^۸، شبکه‌های عصبی کوانتومی^۹ (QNN)، الگوریتم تخمین فاز کوانتومی و ماشین بردار پشتیبان کوانتومی^{۱۰} ($QSVM$) است.

۵.۳.۱.۴ الگوریتم‌های فاکتورگیری اعداد صحیح

ششمین دسته از این طبقه‌بندی فاکتورگیری اعداد صحیح است. فاکتورگیری اعداد صحیح با استفاده از محاسبات کوانتومی، یکی از معروف‌ترین کاربردهای این فناوری است که می‌تواند تأثیر قابل توجهی بر امنیت اطلاعات و رمزنگاری داشته باشد. الگوریتم اصلی که این وظیفه را انجام می‌دهد، الگوریتم شور است. این الگوریتم با استفاده از ویژگی‌های خاص محاسبات کوانتومی می‌تواند فاکتورهای اول یک عدد صحیح بزرگ را به سرعت پیدا کند.

۶.۳.۱.۴ الگوریتم‌های وردشی کوانتومی

الگوریتم‌های وردشی کوانتومی نمونه‌ای برجسته از رویکردهای هیبریدی هستند که محاسبات کوانتومی و کلاسیکی را در کنار هم به کار می‌گیرند. در این الگوریتم‌ها، بخش کوانتومی وظیفه‌ی تولید حالت‌ها و اجرای مدارهای پارامتری را بر عهده دارد، در حالی که بخش کلاسیکی با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی عددی، پارامترهای مدار را تنظیم می‌کند. این تعامل مداوم میان دو بخش، امکان حل مسائل پیچیده‌ای را فراهم می‌سازد که با روش‌های صرفاً کلاسیک یا کوانتومی به‌سادگی قابل دسترس نیستند. اهمیت الگوریتم‌های وردشی کوانتومی به‌ویژه در سامانه‌های کوانتومی مقیاس متوسط و نویزی ($NISQ$) آشکار می‌شود؛ جایی که محدودیت در تعداد کیوبیت‌ها و وجود نویز مانع از اجرای الگوریتم‌های کوانتومی بزرگ مقیاس می‌شود. در چنین شرایطی، الگوریتم‌های وردشی با بهره‌گیری از قدرت بهینه‌سازی کلاسیکی و قابلیت‌های کوانتومی، راهکاری عملی و کارآمد ارائه می‌دهند. از مهم‌ترین نمونه‌های این دسته می‌توان به الگوریتم وردشی برای شبیه‌سازی انرژی حالت‌های کوانتومی (VQE)، الگوریتم وردشی برای بهینه‌سازی ترکیبیاتی ($QAOA$)، و رویکردهای نوین در ترکیب یادگیری ماشین با مدارهای وردشی اشاره کرد. این الگوریتم‌ها نه تنها در پژوهش‌های بنیادی، بلکه در کاربردهای عملی مانند شبیه‌سازی مواد، طراحی دارو، و حل مسائل بهینه‌سازی پیچیده نیز جایگاه ویژه‌ای یافته‌اند. با توجه به اهمیت این الگوریتم‌ها در یک بخش جدا بطور کامل بیان خواهند شد.

^۷ Amplitude Amplification

^۸ Harrow-Hassidim-Lloyd

^۹ Quantum Neural Networks(QNN)

^{۱۰} Quantum Support Vector Machine(QSVM)

۲.۴ الگوریتم‌های کوانتومی متغیر پیوسته

در ابتدای بحث اشاره شد که تعداد انگشت شماری الگوریتم وجود دارد که برای سامانه‌های متغیر پیوسته تعریف شده‌اند. از جمله این الگوریتم‌ها، الگوریتم‌های گروور و دویچ-جوزا است که در ادامه هریک از این دو الگوریتم توضیح داده شده است.

۱.۲.۴ الگوریتم گروور متغیر پیوسته

در این الگوریتم، مسأله مطرح شده عبارت است از پیدا کردن یک داده خاص در یک پایگاه داده بدون ساختار. برای توضیح داده‌های دارای ساختار و بدون ساختار، دفترچه تلفن را در نظر بگیرید که در آن نام‌ها به ترتیب الفبایی، به همراه شماره تلفن‌هایشان فهرست شده‌اند. پیدا کردن شماره یک شخص معین کار ساده‌ایی است؛ چرا که داده‌ها به صورت الفبایی مرتب شده است. با این وجود، پیدا کردن یک شخص با شماره تلفن معلوم، سخت است؛ چرا که شماره‌ها مرتب نیستند. بر روی یک رایانه کلاسیک، جستجو در یک پایگاه داده نامرتب نمی‌تواند در زمان کمتر از زمان خطی یا $O(N)$ یعنی با بررسی تک تک ورودی‌ها انجام گیرد. الگوریتم گروور بیان می‌کند که روی یک رایانه کوانتومی این عمل با پیچیدگی زمانی $O(\sqrt{N})$ قابل انجام است و به‌طور حدی، سریع‌ترین الگوریتم قابل پیاده‌سازی برای جستجوی پایگاه داده نامرتب روی یک رایانه کوانتومی است. در ادامه به تعمیم الگوریتم جستجوی گروور برای حالتی است که اطلاعات کوانتومی با استفاده از متغیرهای دارای طیف پیوسته (مانند مکان، تکانه یا دامنه میدان الکترومغناطیسی) نمایش داده می‌شوند؛ می‌پردازیم. این الگوریتم به دنبال پیدا کردن یک حالت هدف x_f در فضای پیوسته K است. ما می‌خواهیم از میان مجموعه‌ای از مقادیر (در اینجا نقاط پیوسته روی یک محور یا در یک فضا)، یک مقدار خاص x_f را پیدا کنیم. این مقدار خاص توسط تابعی مشخص می‌شود

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x_f \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

در محاسبات کوانتومی گسسته، ما از تعداد محدودی حالت استفاده می‌کنیم. اما در محاسبات متغیر پیوسته، فضای حالت بی‌نهایت بعدی است. در اینجا، هر مقدار x یک حالت $|x\rangle$ را در فضای هیلبرت پیوسته تعریف می‌کند که شرط زیر را برقرار می‌سازند.

$$\langle \dot{x} | x \rangle = \delta(\dot{x} - x)$$

برای ایجاد حالتی مشابه جستجوی گسسته در محاسبات CV فضای جستجو به N ناحیه مجزا تقسیم می‌شود که هر کدام معادل یک حالت هدف x_f است. الگوریتم با استفاده از برهم‌نهی و درهم‌تنیدگی، بازده جستجو را بهبود می‌بخشد. تبدیل فوری نقش اصلی را در این الگوریتم ایفا می‌کند. برای یک حالت پایه پیوسته $|x\rangle$ تبدیل فوری به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{F}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int dy e^{2ixy} |y\rangle \quad (۱.۴)$$

که در آن x و y متغیرهای پیوسته هستند و n تعداد ریجسترهای CV است. همچنین این تبدیل، پایه مکان $|x\rangle$ را به پایه تکانه $|y\rangle$ نگاشت می‌کند. این تبدیل، اساسی‌ترین ابزار برای حرکت در فضای فاز و تغییر دیدگاه بین متغیرهای مکان و تکانه است. اگر تبدیل فوری را بر روی یک حالت اولیه $|x_i\rangle$ اعمال کنیم، دامنه احتمال برای یافتن سیستم در حالت هدف $|x_f\rangle$ به صورت زیر است

$$\langle x_f | \mathcal{F} | x_i \rangle = \mathcal{F}_{fi} = \frac{e^{2ix_i x_f}}{\sqrt{\pi^n}} \quad (۲.۴)$$

بنابراین، احتمال یافتن سیستم در حالت $|x_f\rangle$ برابر است با

$$|\mathcal{F}_{fi}|^2 = \frac{1}{\pi^n}$$

این نشان می‌دهد که بدون استفاده از تقویت کوانتومی (مثل الگوریتم گروور)، باید $O(\pi^N)$ آزمایش انجام شود تا حالت هدف پیدا شود. اوراکل، حالتی از فضای جستجو را که هدف است، علامت‌گذاری می‌کند. این کار با معکوس کردن علامت دامنه احتمال حالت هدف انجام می‌شود. در سیستم‌های CV، عملگر وارونگی برای یک حالت $|x\rangle$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$I_x = 1 - 2P_{\Delta x} \quad (۳.۴)$$

که در آن $P_{\Delta x}$ عملگر تصویر است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$P_{\Delta x} = \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} dx' |x'\rangle \langle x'|$$

در سیستم‌های گسسته، عملگر تصویر به صورت $P_x = |x\rangle \langle x|$ تعریف می‌شود. در CV، به دلیل ماهیت پیوسته فضا، P_x برای یک نقطه خاص تعریف‌پذیر نیست، زیرا هر حالت دارای گسترشی نامحدود است. عملگر $P_{\Delta x}$ حالت را به بازه‌ای حول x_0 محدود می‌کند. این بازه Δx نشان‌دهنده دقت دستگاه اندازه‌گیری است. اوراکل فاز حالت هدف $|x_f\rangle$ را معکوس می‌کند

$$I_x |x_f\rangle = \begin{cases} -|x\rangle & \text{if } x = x_f \\ |x\rangle & \text{if } x \neq x_f \end{cases} \quad (4.4)$$

عملگر جستجو \mathcal{C} با ترکیب تبدیل فوریه، وارونگی هدف، و وارونگی انتخابی طراحی شده است

$$\mathcal{C} = -I_{x_i} \mathcal{F}^\dagger I_{x_f} \mathcal{F} \quad (5.4)$$

هر بار اعمال \mathcal{C} ، دامنه احتمال حالت هدف را تقویت می‌کند و به تدریج حالت سیستم را به سمت حالت هدف نزدیک‌تر می‌کند. فرض کنید حالت اولیه $|x_i\rangle$ باشد. اثر \mathcal{C} بر روی $|x_i\rangle$ به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \mathcal{C} |x_i\rangle &= \left(1 - \frac{4}{\pi^n}\right) |x_i\rangle + \frac{2}{\sqrt{\pi^n}} \int_{x_{f1}}^{x_{f2}} dx' e^{2ix_i x'_f} \mathcal{F}^\dagger |x'_f\rangle \\ \mathcal{C} |x_i\rangle &= \left(1 - \frac{4}{\pi^n}\right) |x_i\rangle + \text{correction term} \end{aligned} \quad (6.4)$$

این نشان می‌دهد که عملگر جستجو، حالتی از برهم‌نهی را ایجاد می‌کند که شامل ترکیبی از حالت اولیه و هدف است. بخش اول کاهش دامنه حالت اولیه و بخش اصلاحات افزایش دامنه حالت هدف را به دنبال دارد. یعنی با هر بار اعمال \mathcal{C} دامنه حالت هدف تقویت می‌شود و دامنه حالت اولیه و سایر حالت‌ها کاهش پیدا می‌کند. برای اندازه‌گیری پیشرفت الگوریتم، از فاصله فوبینی-استادی بین حالت اولیه $|x_i\rangle$ و حالت هدف $|x_f\rangle$ استفاده می‌شود. در فضای هیلبرت، فاصله بین دو حالت کوانتومی بر اساس زاویه بین بردارهای حالت محاسبه می‌شود. فاصله فوبینی-استادی نشان می‌دهد که فاصله به زاویه بین بردارهای حالت مرتبط است. اگر دو حالت $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ داشته باشیم، فاصله فوبینی-استادی از رابطه

زیر بدست می‌آید

$$d^2(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = 4 \left(1 - \left| \left\langle \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|} \middle| \frac{\psi_2}{\|\psi_2\|} \right\rangle \right|^2 \right) \quad (۷.۴)$$

اگر دو حالت $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ عمود باشند، آنگاه $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$ برابر با صفر است و فاصله بیشینه است و اگر دو حالت برابر باشند، آنگاه فاصله صفر است. الگوریتم گروور تلاش می‌کند تا حالت سیستم را از حالت اولیه $|x_i\rangle$ به حالت هدف $|x_f\rangle$ برساند. این فرآیند مانند یک چرخش تدریجی در فضای حالت است. هر بار اعمال عملگر C ، سیستم به اندازه مشخصی در فضای حالت حرکت می‌کند. این حرکت را می‌توان به صورت فاصله بین حالت اولیه $|x_i\rangle$ و حالتی که بعد از یک مرحله به دست می‌آید $|x_i\rangle^{(1)}$ محاسبه کرد

$$d^2(|x_i\rangle, |x_i\rangle^{(1)}) \approx O\left(\frac{1}{\sqrt{\pi^n}}\right) \quad (۸.۴)$$

این مقدار نشان می‌دهد که هر مرحله، سیستم یک قدم کوچک اما معنادار به سمت حالت هدف حرکت می‌کند. برای رساندن سیستم از حالت اولیه $|x_i\rangle$ به حالت هدف $|x_f\rangle$ ، باید فاصله کل بین این دو حالت طی شود. فاصله کل بین $|x_i\rangle$ و $|x_f\rangle$ برابر است با

$$d^2(|x_i\rangle, |x_f\rangle) = 4 \left(1 - \frac{1}{\pi^n} \right)$$

با توجه به اینکه هر گام $O\left(\frac{1}{\sqrt{\pi^n}}\right)$ پیشرفت ایجاد می‌کند، تعداد کل گام‌ها N_s به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$N_s = \frac{d^2(|x_i\rangle, |x_f\rangle)}{d^2(|x_i\rangle, |x_i\rangle^{(1)})} \approx O\left(\sqrt{\pi^n}\right) \quad (۹.۴)$$

این نتیجه بسیار مهم است چون در روش کلاسیک برای یافتن حالت هدف باید $O(\pi^n)$ بررسی انجام شود ما با استفاده از الگوریتم گروور در سیستم‌های کوانتومی، تنها $O(\sqrt{\pi^n})$ گام کافی است.

۱.۱.۲.۴ مثال جستجوی کوانتومی در یک بازه پیوسته

در این مثال، الگوریتم گروور برای یک فضای هیلبرت پیوسته $H = L^2(R)$ به کار گرفته شده است. هدف پیدا کردن یک حالت در یک ناحیه مشخص $S \subset R$ است، نه فقط یک نقطه. این تعمیم برای کاربردهای عملی بسیار مهم‌تر است. فضای جست‌وجوی: فضای هیلبرت در فضای توابع موج مربع-انتگرال‌پذیر $H = L^2(R)$ با پایه مکان $\{|x\rangle\}_{x \in R}$

است جستجو با یک حالت اولیه مشخص $|\psi_0\rangle$ (مانند یک موجک گوسی) آغاز می‌شود که نمایانگر توزیع احتمال اولیه در فضای مکان است.

$$\psi_0(x) = \langle x | \psi_0 \rangle = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

جواب مسئله، یک بازه قابل اندازه‌گیری $S \subset R$ است. هدف این است که با کمترین تعداد فراخوانی اوراکل، دامنه احتمال تابع موج در این ناحیه متمرکز شود. برای تعریف حالت‌های جواب، از یک تصویرگر پیوسته استفاده می‌کنیم که روی ناحیه S عمل می‌کند

$$\Pi_S = \int_S |x\rangle \langle x| dx$$

الگوریتم بر پایه دو عملگر ساخته شده است:

اوراکل: این عملگر فاز حالت را در داخل ناحیه S به اندازه π می‌چرخاند و بیرون آن را بدون تغییر باقی می‌گذارد.

$$O_S = I - 2\Pi_S$$

اینجا $\chi_S(\hat{q})$ عملگر تابع مشخصه است که اگر مکان در S باشد، مقدار ۱ و در غیر این صورت مقدار صفر دارد. پخش‌کننده: این عملگر یک بازتاب حول بردار حالت اولیه $|\psi_0\rangle$ انجام می‌دهد.

$$R_0 = 2|\psi_0\rangle \langle \psi_0| - I$$

یک گام کامل از الگوریتم با اعمال پی‌درپی این دو عملگر تعریف می‌شود

$$G = R_0 O_S$$

همانند نسخه گسسته، دینامیک کامل الگوریتم در یک زیرفضای دوبعدی که توسط حالت درون ناحیه $(|\psi_S\rangle)$ و حالت بیرون ناحیه $(|\psi_\perp\rangle)$ تولید می‌شود، رخ می‌دهد. ابتدا، احتمال اولیه یافتن حالت در ناحیه S را محاسبه می‌شود

$$\mu = \langle \psi_0 | \Pi_S | \psi_0 \rangle = \int_S |\psi_0(x)|^2 dx \quad (۱۰.۴)$$

این احتمال، زاویه اولیه را تعریف می‌کند. این مقدار، زاویه θ را از طریق $\mu = \sin^2 \theta$ تعریف می‌کند. هر بار اعمال عملگر G حالت را به اندازه زاویه 2θ در این زیرفضا می‌چرخاند. پس از k تکرار، احتمال یافتن ذره در ناحیه k پس از k تکرار

برابر است با

$$P_k = \sin^2((2k+1)\theta)$$

این احتمال با انتخاب تعداد بهینه تکرارها بیشینه می شود

$$k^* = \left\lceil \frac{\pi}{4\theta} - \frac{1}{2} \right\rceil = \Theta(\mu^{-1/2})$$

این نتیجه نشان می دهد که بهبود سرعت درجه دوم الگوریتم گروور در فضای پیوسته نیز کاملاً برقرار است. برای ملموس کردن، تصور کنید یک سیم بسیار بلند (بی نهایت) داریم و به ما گفته شده که در نقطه ای از این سیم، یک نقص یا ناخالصی بسیار کوچک وجود دارد. وظیفه ما پیدا کردن مکان این نقص است. ما هیچ ایده ای نداریم که نقص کجاست. بنابراین، با یک حالت کاملاً پخش شده و نامتمرکز شروع می کنیم. یک موجک گوسی بسیار عریض بهترین گزینه است. فرض می کنیم $\sigma = 2$ باشد (واریانس بزرگ به معنای عدم قطعیت زیاد است).

$$\psi_0(x) = \frac{1}{(4)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{8}\right)$$

فرض کنیم به ما گفته شده نقص در یک بازه بسیار کوچک به عرض 0.01 در اطراف نقطه $x = 4$ قرار دارد.

$$S = [4.00, 4.01]$$

این یک جستجوی بسیار چالش برانگیز است، زیرا حالت اولیه ما در $x = 0$ متمرکز است، در حالی که هدف ما در $x = 4$ قرار دارد. این مقدار برابر است با انتگرال مجذور تابع موج ما روی ناحیه S . از آنجایی که بازه بسیار کوچک است، می توان آن را با حاصلضرب ارتفاع تابع در عرض بازه تقریب زد

$$\int_{4.00}^{4.01} |\psi_0(x)|^2 dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{4.00}^{4.01} e^{-x^2/4} dx \approx 0.00516$$

$$\mu \approx \text{height} * \text{width} = 0.00516 * 0.01 \approx 5.16 * 10^{-5}$$

شانس اولیه برای یافتن نقص تقریباً ۱ به ۲۰,۰۰۰ است! با محاسبه زاویه خواهیم داشت که

$$\theta = \arcsin(\sqrt{\mu}) = \arcsin\left(\sqrt{5.16 * 10^{-5}}\right) \approx 0.00718 \text{ rad}$$

این یک زاویه بسیار کوچک است که نشان‌دهنده سختی جستجو است. از فرمول بهینه‌گرور استفاده کرده تا ببینیم چند بار باید چرخه اوراکل-تقویت را تکرار کنیم

$$k^* = \left\lceil \frac{\pi}{4\theta} - \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{\pi}{4 * 0.00718} - \frac{1}{2} \right\rceil \approx 108$$

الگوریتم به ما می‌گوید که به ۱۰۸ تکرار نیاز داریم. پس از ۱۰۸ تکرار، احتمال یافتن نقص در ناحیه S برابر است با

$$P_{108} = \sin 22k + 1 = \sin 22108 + 1 = \sin 222170.00718 = \sin 221.558$$

از آنجایی که $1.5708 \approx \pi/2$ ، این مقدار بسیار به ۱ نزدیک است و احتمال موفقیت ما تقریباً ۹۹.۹۹ درصد خواهد بود. این مثال نشان می‌دهد که الگوریتم گروور متغیر پیوسته قادر است یک ناحیه بسیار کوچک S را در یک فضای جستجوی بسیار بزرگ پیدا کند. حتی زمانی که شانس اولیه موفقیت بسیار ناچیز است ($\mu \approx 0.00005$)، الگوریتم با تعداد معقولی تکرار ($k = 108$)، احتمال موفقیت را به طور چشمگیری به نزدیک ۱۰۰ درصد می‌رساند. این قدرت تقویت دامنه جوهره اصلی مزیت کوانتومی این الگوریتم است.

۲.۲.۴ الگوریتم دویچ-جوزا متغیر پیوسته

الگوریتم دویچ-جوزا یک الگوریتم کوانتومی است که برای تعیین این طراحی شده که آیا یک تابع داده‌شده ثابت (یعنی خروجی یکسان برای همه ورودی‌ها) یا متعادل (یعنی تعداد مساوی خروجی‌های ۰ و ۱ در دامنه آن) است. به صورت کلاسیک، این تشخیص ممکن است به 2^n ارزیابی تابع در بدترین حالت نیاز داشته باشد. اما نسخه کوانتومی تنها به یک بار ارزیابی نیاز دارد که از طریق برهم‌نهی کوانتومی و تداخل انجام می‌شود. این بخش، الگوریتم را به سیستمی تعمیم می‌دهد که در آن متغیرها طیف پیوسته دارند این متغیرهای پیوسته با ابزارهایی مانند تبدیل فوریه و گیت‌های مشابه گیت‌های کوانتومی در سیستم‌های گسسته مدیریت می‌شوند. همانند بخش قبل، فضای حالت بی‌نهایت‌بعدی است. هر مقدار x یک حالت $|x\rangle$ را در فضای هیلبرت پیوسته تعریف می‌کند که شرط زیر را برقرار می‌سازند.

$$\langle \hat{x} | x \rangle = \delta(\hat{x} - x)$$

همچنین دوباره از تبدیل فوریه کوانتومی استفاده می‌کنیم و تبدیل فوریه را به شکل معادله زیر می‌نویسیم

$$\mathcal{F}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dy e^{2ixy} |y\rangle$$

ابزار بعدی که در این الگوریتم به آن نیاز داریم، گیت XOR است که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$|x\rangle |y\rangle \longrightarrow |x\rangle |x+y\rangle$$

گیت XOR، نسخه‌ای از گیت Controlled-NOT برای سیستم‌های کوانتومی با متغیرهای پیوسته است. این گیت برای ترکیب اطلاعات دو حالت کوانتومی استفاده می‌شود و ابزار کلیدی در اجرای الگوریتم دویچ-جوزا است. گیت XOR، نسخه‌ای از گیت Controlled-NOT برای سیستم‌های کوانتومی با متغیرهای پیوسته است. این گیت برای ترکیب اطلاعات دو حالت کوانتومی استفاده می‌شود و ابزار کلیدی در اجرای الگوریتم دویچ-جوزا است. دو حالت کوانتومی $|x\rangle$ و $|y\rangle$ به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شوند؛ پس از اعمال گیت XOR حالت کنترل $|x\rangle$ بدون تغییر باقی می‌ماند و حالت هدف $|y\rangle$ به $|x+y\rangle$ تغییر می‌کند، یعنی مقدار حالت کنترل به حالت هدف افزوده می‌شود. اوراکل کوانتومی U_f یک عملگر یکانی است که اطلاعات مربوط به تابع $f(x)$ را روی حالت‌های ورودی رمزگذاری می‌کند. این اوراکل به صورت زیر تعریف شده است

$$U_f |x\rangle |y\rangle \longrightarrow |x\rangle |y+f(x)\rangle$$

این تعریف مشابه عملکرد اوراکل در نسخه گسسته الگوریتم دویچ-جوزا است، اما در اینجا عملیات روی متغیرهای پیوسته انجام می‌شود. یکی از ویژگی‌های مهم اوراکل کوانتومی این است که روی برهم‌نهی حالت‌ها و همچنین به صورت خطی عمل می‌کند. مثلاً

$$U_f (\mathcal{F}|x\rangle |z\rangle) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dy e^{2ixy} |y\rangle |z+f(y)\rangle$$

در ادامه مراحل اجرای الگوریتم دویچ-جوزا در یک سامانه متغیر پیوسته توضیح داده شده است. ابتدا آلیس دو حالت کوانتومی را آماده می‌کند. یک حالت پرسش $|x_0\rangle$ ، و یک حالت هدف $|\frac{\pi}{2}\rangle$ حالت پرسش نشان‌دهنده یک متغیر پیوسته x_0 است که آلیس می‌خواهد تابع $f(x)$ را روی آن ارزیابی کند. این حالت به عنوان ورودی به اوراکل ارسال می‌شود و نشان‌دهنده دامنه متغیر پیوسته x است و حالت هدف برای رمزگذاری خروجی تابع $f(x)$ استفاده می‌شود. مقدار اولیه آن برابر $\frac{\pi}{2}$ است، اما پس از اعمال اوراکل به مقدار $f(x) + \frac{\pi}{2}$ تغییر می‌کند. حالت ترکیبی اولیه سیستم به صورت زیر

است

$$|x_0\rangle \left| \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

سپس آلیس تبدیل فوریه \mathcal{F} را روی هر دو حالت اعمال می‌کند تا برهم‌نهی ایجاد کند. پس از این مرحله، حالت سیستم ترکیبی برابر است با

$$\mathcal{F}|x_0\rangle \mathcal{F}\left|\frac{\pi}{2}\right\rangle = \frac{1}{\pi} \int dx dy e^{2ix_0x + i\pi y} |x\rangle |y\rangle$$

باب اوراکل U_f را برای ارزیابی تابع $f(x)$ روی حالت ترکیبی اعمال می‌کند و نتیجه می‌دهد.

$$U_f \left(\mathcal{F}|x_0\rangle \mathcal{F}\left|\frac{\pi}{2}\right\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx e^{2ix_0x + i\pi f(x)} |x\rangle \mathcal{F}\left|\frac{\pi}{2}\right\rangle$$

می‌توان نوشت

$$U_f \left(|x\rangle \mathcal{F}\left|\frac{\pi}{2}\right\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dy e^{i\pi y} U_f(|x\rangle \otimes |y\rangle) = (-1)^{f(x)} |x\rangle \mathcal{F}\left|\frac{\pi}{2}\right\rangle$$

در مرحله بعد آلیس تبدیل فوریه معکوس را برای استخراج اطلاعات تابع از حالت سیستم اعمال می‌کند. این تبدیل باعث می‌شود که اطلاعات رمزگذاری‌شده در فازهای حالت سیستم آشکار شود و این عامل تغییر فاز مستقیماً به مقدار تابع $f(x)$ بستگی دارد

$$|q\rangle = \frac{1}{\pi} \int dx dx' e^{2ix(x_0 - x')} (-1)^{f(x)} |x\rangle \mathcal{F}\left|\frac{\pi}{2}\right\rangle$$

حالت سیستم پس از تبدیل فوریه معکوس، آماده اندازه‌گیری است و اطلاعات درباره نوع تابع (ثابت یا متعادل) در آن ذخیره شده است. آلیس حالت پرسش را اندازه‌گیری می‌کند تا نتیجه نهایی را استخراج کند. اندازه‌گیری با استفاده از عملگر تصویرگر زیر انجام می‌شود

$$P_{\Delta x} = \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} dy |y\rangle \langle y|$$

آلیس حالت سیستم را روی مقدار اولیه x_0 تصویر می‌کند. این تصویر کردن باعث می‌شود بسته به اینکه $f(x)$ ثابت یا متعادل باشد، نتیجه $\pm |x_0\rangle$ (برای تابع ثابت) یا حالتی متعامد با $|x_0\rangle$ (برای تابع متعادل) خواهد بود. این مراحل نشان می‌دهند که چگونه برهم‌نهی، اوراکل، و تبدیل فوریه به صورت هماهنگ عمل می‌کنند تا اطلاعات تابع $f(x)$ به صورت کارآمد در حالت کوانتومی رمزگذاری شود. با این الگوریتم، تشخیص ویژگی تابع تنها با یک بار اجرای اوراکل ممکن است، که مزیت قابل توجهی نسبت به روش‌های کلاسیک ارائه می‌دهد.

۱.۲.۲.۴ مثال عددی الگوریتم دویچ-جوزا در فضای متغیر پیوسته

برای روشن تر شدن نحوه عملکرد الگوریتم دویچ-جوزا در حوزه متغیر پیوسته، یک مثال عددی ساده آورده شده است. هدف، تمایز بین یک تابع ثابت و یک تابع متعادل با تنها یک بار فراخوانی اوراکل است. فضای محاسباتی، فضای مکان تک بعدی $x \in R$ است. حالت ورودی اولیه، $|\psi_0\rangle$ ، با یک تابع موج گوسی بهنجار شده و باریک حول مبدأ $x_0 = 0$ تقریب زده شده است

$$\psi_0(x) = \langle x | \psi_0 \rangle = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

این تابع موج، تقریب مناسبی از یک ویژه حالت مکان $|\psi_0\rangle$ است؛ هرچه پارامتر σ کوچکتر باشد، این تقریب دقیق تر خواهد بود. دو دسته از توابع $f(x)$ که توسط اوراکل کوانتومی پیاده سازی می شوند، مقایسه می شود

• تابع ثابت: برای سادگی، $f(x) \equiv 0$ برای تمام مقادیر x در نظر گرفته می شود. در این حالت، اوراکل یک تبدیل همانی است

$$(-1)^{f(x)} = +1$$

• تابع متعادل: یک نمونه ساده از تابع متعادل، تابع پله ای است

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ 1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

که منجر به یک اوراکل فازی به شکل تابع علامت می شود

$$g(x) \equiv (-1)^{f(x)} = \begin{cases} +1 & \text{if } x < 0 \\ -1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

الگوریتم با اعمال دنباله ای از تبدیل ها بر روی حالت اولیه اجرا می شود: ابتدا تبدیل فوریه کوانتومی، سپس اوراکل (U_f) و در نهایت معکوس تبدیل فوریه اجرا می شود. پس از این توالی، اندازه گیری در پایه مکان انجام می شود. دامنه احتمال بازگشت سیستم به حالت اولیه (یعنی اندازه گیری مکان در $x_0 = 0$) متناسب با انتگرال هم پوشانی زیر است

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) g(x) dx$$

بنابراین، احتمال مشاهده این نتیجه تقریباً برابر با $|A|^2$ خواهد بود. این کمیت، آزمون ما برای تمایز بین دو دسته تابع است. برای ملموس شدن نتایج، پارامتر پهنای موجک را $\sigma = 0.1$ انتخاب می‌کنیم که یک تقریب بسیار خوب از ویزه حالت مکان در مبدأ فراهم می‌کند.

تابع ثابت: از آنجایی که $g(x) = 1$ است، دامنه احتمال برابر با انتگرال خود تابع موج اولیه است. با توجه به نرمالیزه بودن $|\psi_0 x|^2$ ، این انتگرال غیرصفر است: تابع ثابت: از آنجایی که $g(x) = 1$ است، دامنه احتمال برابر با انتگرال خود تابع موج اولیه است. با توجه به نرمالیزه بودن $|\psi_0 x|^2$ ، این انتگرال غیرصفر است

$$A_{\text{constant}} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) dx = 0.595$$

در نتیجه، احتمال بازگشت به حالت اولیه مقداری قابل توجه است

$$P_{\text{constant}} = |A_{\text{constant}}|^2 \approx 0.354$$

تابع متعادل: با توجه به اینکه $\psi_0(x)$ یک تابع زوج (متقارن حول مبدأ) است، تداخل کاملاً ویرانگر رخ می‌دهد

$$A_{\text{balanced}} = \int_{-\infty}^0 \psi_0(x) dx - \int_0^{\infty} \psi_0(x) dx$$

بنابراین، احتمال مشاهده ذره در مبدأ صفر است

$$P_{\text{balanced}} = |A_{\text{balanced}}|^2 = 0$$

۳.۴ الگوریتم‌های وردشی کوانتومی متغیر پیوسته

در دهه گذشته سخت افزارهای کوانتومی^{۱۱} در عملکرد بهینه کیوبیت ها، مدت زمان همدوسی و تعداد کیوبیت های بکار گرفته شده، پیشرفت های زیادی داشته اند. مدارهای کوانتومی با استفاده از کیوبیت های ابررسانا و یون های به دام افتاده ساخته شده اند اگرچه محدودیت های بنیادی مهندسی اجازه بکارگیری زمان همدوسی دلخواه و یا تعداد کیوبیت دلخواه را نداده است اما در حال حاضر این مسائل هم از موضوعات روز در فناوری های کوانتومی هستند. الگوریتم های کوانتومی با سرعت بسیار زیاد و زمان کم قادر به حل مسائلی هستند که الگوریتم های کلاسیکی از حل آنها عاجزند اما

^{۱۱} Quantum hardware

باید توجه داشت برای بکارگیری الگوریتم کوانتومی به صدها یا شاید هزارها کیوبیت احتیاج است. علاوه بر این، باید خطاهایی که در حین انجام الگوریتم به وقوع می پیوندد را نیز تصحیح کرد. به عنوان مثال، در بکارگیری الگوریتم شور برای حل یک مسئله که روی رایانه کلاسیکی به سختی قابل حل است به شش میلیون کیوبیت احتیاج است در حالی که در حال حاضر فقط ۱۰۰۰ کیوبیت در اختیار است. از طرفی این ایده مطرح شد که امکان پیاده سازی تعداد از مسائل با سرعت نمایی نسبت به رایانه های کلاسیکی وجود دارد که در آن از بطور همزمان از رایانه کوانتومی و کلاسیکی استفاده می شود که به الگوریتم های وردشی کوانتومی یا الگوریتم های ترکیبی کوانتومی- کلاسیکی معروف شده است. در این الگوریتم ها، آماده سازی حالت اولیه سیستم کوانتومی و اندازه گیری های کوانتومی روی یک رایانه کوانتومی انجام شده و قسمت بهینه سازی و به روزرسانی پارامترهای حالت کوانتومی در رایانه کلاسیکی انجام می شود. در این دسته از الگوریتم ها، حالت اولیه با توجه به مسئله ساخته می شود که یک حالت پارامتری است. بعد از این کار، حالت پارامتری به یک رایانه کوانتومی فرستاده می شود و اندازه گیری کوانتومی انجام می گیرد. نتایج اندازه گیری که تابعی از پارامترهاست به یک رایانه کلاسیکی فرستاده می شود. رایانه کلاسیکی با انجام بهینه سازی روی تابع، یک سری پارامتر جدید بازتولید می کند. این پارامترها به رایانه کوانتومی بازگردانده شده و حلقه تا یافتن پارامتر بهینه تکرار می شود. مطالعاتی که تا به امروز انجام شده اند نشان می دهد برای انجام محاسبات کوانتومی که در آن به n کیوبیت احتیاج است، می توان با استفاده از $n - k$ کیوبیت به اضافه منابع کلاسیکی، محاسبات را انجام داد که k تعداد کیوبیت های کمکی است. این رویکرد قابل تعمیم است و اجازه می دهد تمام مدارهای کوانتومی را به زیر مدارهایی کوچکتر تجزیه کرد. نکته مهم این است که هزینه محاسبات با افزایش تعداد گیت ها بصورت نمایی افزایش می یابد، پس باید تعداد گیت ها در زیر مدارها کمینه شوند. برای به کارگیری الگوریتم های وردشی کوانتومی از رایانه کوانتومی مقیاس- متوسط نوفه ای^{۱۲} (NIQS) استفاده می شود که در چند سال آینده بصورت عمده در دسترس خواهد بود که در ادامه به توضیح آن می پردازیم. واژه نوفه ای^{۱۳} مربوط به این موضوع است که در آن وسایل کوانتومی می توانند تحت تاثیر محیط مختل شوند برای مثال تغییرات کوچک در دما یا انحراف میدان های مغناطیسی و الکتریکی می توانند باعث حذف اطلاعات کوانتومی شوند که از این فرآیند با عنوان ناهمدوسی یاد می شود. برای غلبه به این موضوع ما باید بتوانیم تصحیح خطای کوانتومی انجام دهیم. اساسا باید تشخیص دهیم که سیستم مورد نظر چه مقدار دچار اختلال شده است و سپس آن را تصحیح کنیم. مقیاس- متوسط^{۱۴} مربوط به تعداد کیوبیت هاست که اغلب موارد محدود به صد کیوبیت و یا کمتر می شود. اما در نهایت باید میلیون ها کیوبیت را در نظر گرفت و خطای آن را تصحیح کرد که با نام خطای قابل تصحیح شناخته می شود. در اغلب محاسبات کوانتومی عبارت near-term بجای NIQS به کار برده می شود زیرا این وسایل در چند سال آینده در دسترس خواهند

^{۱۲} Noisy Intermediate Scale Quantum

^{۱۳} Noisy

^{۱۴} Intermediate Scale

بود و همچنین به تصحیح خطا نیازی نخواهند داشت. بکارگیری رایانه کوانتومی NIQS در تمامی بسترهای فیزیکی که برای ساخت یک رایانه مطرح است از قبیل کیوبیت های ابررسانا و یا در رایانه های کوانتومی فوتونیکی فراهم است. باید توجه داشت که کوچک بودن رایانه کوانتومی به اندازه فیزیکی آن مربوط نیست بلکه به تعداد کیوبیت های آن اطلاق می شود. در رایانه کوانتومی NIQS باید نوفه را حذف کرده و آن را به عنوان یک عامل با اثر محدود چه برای وسایل کلاسیکی و چه برای وسایل کوانتومی در نظر گرفت. این دستگاه ها توانسته اند به برخی از دستاوردهای چشمگیر، نظیر برتری کوانتومی، در وظایف خاص دست یابند؛ برای مثال، حل مسائلی که حتی قوی ترین ابررایانه ها قادر به انجام آنها نیستند. با این حال، مزیت کوانتومی عملی، یعنی برتری در کاربردهای واقعی، هنوز تحقق نیافته است. علاوه بر این، دستیابی به رایانه های کوانتومی مقاوم در برابر خطا که قابلیت اجرای کامل الگوریتم های کوانتومی را دارند، همچنان به سال ها یا حتی دهه ها تحقیق و توسعه نیاز دارد.

۱.۳.۴ الگوریتم های وردشی کوانتومی

در پاسخ به محدودیت های دستگاه های NISQ الگوریتم های وردشی کوانتومی^{۱۵} (VQA) معرفی شده اند. این الگوریتم ها به عنوان رویکردی انعطاف پذیر و کاربردی برای بهره گیری از پتانسیل دستگاه های فعلی شناخته می شوند. VQA ترکیبی از محاسبات کوانتومی و بهینه سازی کلاسیک هستند که ویژگی های زیر را دارند

- مدارهای پارامتری کم عمق: این الگوریتم ها از مدارهای کوانتومی پارامتری استفاده می کنند که عمق کمی دارند و بنابراین نویز را کاهش می دهند.
- بهینه سازی هیبریدی: تخمین پارامترهای مدار کوانتومی توسط یک رایانه کلاسیک انجام می شود که این امر امکان استفاده بهینه از منابع موجود را فراهم می کند.
- قابلیت انعطاف پذیری بالا: این الگوریتم ها را می توان برای طیف گسترده ای از مسائل، نظیر شبیه سازی های شیمی کوانتومی، حل مسائل بهینه سازی و یادگیری ماشین، تطبیق داد.
- با وجود پتانسیل بالا، VQA همچنان با چالش های متعددی مواجه هستند که باید برطرف شوند
- قابلیت آموزش: یکی از مشکلات اساسی این الگوریتم ها، به دام افتادن در صفحات خشک^{۱۶} است، جایی که گرادینان هزینه به صفر نزدیک می شود و آموزش مدل غیرممکن می شود
- دقت: تضمین دقت نتایج نهایی همچنان یک مسئله حیاتی است.
- کارایی: کاهش هزینه های محاسباتی و تعداد اندازه گیری های لازم برای بهینه سازی یک هدف مهم است.

^{۱۵} Variational Quantum Algorithm

^{۱۶} Barren Plateaus

الگوریتم‌های وردشی کوانتومی یک چارچوب عمومی و قابل تنظیم برای حل مسائل مختلف ارائه می‌دهند. این الگوریتم‌ها با انعطاف‌پذیری بالا، قابلیت تطبیق با انواع ساختارهای الگوریتمی را دارند. با وجود تفاوت‌هایی که بین ساختارهای این الگوریتم‌ها وجود دارد، عناصر اساسی مشترکی در تمامی آن‌ها دیده می‌شود. در این بخش، اجزای اصلی VQA مورد بررسی قرار می‌گیرند. فرایند طراحی یک الگوریتم VQA با مشخص کردن مسئله‌ای که قصد حل آن را داریم آغاز می‌شود. این شامل دسترسی به توصیف کامل مسئله و گاهی اوقات مجموعه‌ای از داده‌های آموزشی است. برای مثال، یک مسئله ممکن است شبیه‌سازی یک سیستم کوانتومی، حل یک مسئله بهینه‌سازی یا یافتن مقادیر ویژه یک هامیلتونی باشد. اولین قدم، تعریف تابع هزینه $C(\theta)$ است که به نوعی راه‌حل مسئله را در خود کدگذاری می‌کند. تابع هزینه در VQA مشابه با نقش تابع هدف در روش‌های یادگیری ماشین است، زیرا وظیفه آن ارزیابی کیفیت پاسخ در هر مرحله از فرایند بهینه‌سازی است. پس از تعریف تابع هزینه، یک آنساز^{۱۷} (مدار پارامتری کوانتومی) انتخاب می‌شود که با مجموعه‌ای از پارامترها (θ) قابل تنظیم است. این آنساز به طور سیستماتیک آموزش داده می‌شود تا مقدار تابع هزینه به حداقل برسد. یکی از ویژگی‌های متمایز VQA استفاده از یک ساختار ترکیبی است که در آن ریانه کوانتومی برای اجرای مدار کوانتومی و تخمین مقدار تابع هزینه یا گرادینت‌های آن استفاده می‌شود و کامپیوتر کلاسیک وظیفه بهینه‌سازی پارامترهای مدار را بر عهده دارد. این ساختار ترکیبی به دلیل سطح نویز پایین‌تر و نیاز به عمق کم مدار، با سخت‌افزارهای فعلی NISQ بسیار سازگار است. تابع هزینه یکی از اجزای اساسی و تعیین‌کننده در ساختار الگوریتم‌های وردشی کوانتومی است. این تابع، پل ارتباطی میان مسئله اصلی و فرایند بهینه‌سازی است و راه‌حل مسئله را به شکلی ریاضی کدگذاری می‌کند. تابع هزینه، مشابه یادگیری ماشین کلاسیک، مقادیر پارامترهای قابل آموزش (θ) را به اعداد حقیقی نگاشت می‌کند. این تابع به صورت یک سطح چندبعدی تعریف می‌شود که هدف اصلی، یافتن نقاط کمینه آن است. به عبارت دیگر، مقدار تابع هزینه نشان‌دهنده کیفیت راه‌حل پیشنهادی است. در الگوریتم‌های VQA تابع هزینه معمولاً به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C(\theta) = f(\{\rho_k\}, \{O_k\}, U(\theta))$$

که در آن $U(\theta)$ مدار کوانتومی پارامتری وابسته به θ ، $\{\rho_k\}$ مجموعه‌ای از حالت‌های ورودی، $\{O_k\}$ مجموعه‌ای از عملگرهای مشاهده‌پذیر و تابعی که به ساختار مسئله بستگی دارد و مقدار هزینه را تعیین می‌کند، است. در بسیاری از

^{۱۷} Ansatz

موارد، تابع هزینه می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود

$$C(\theta) = \sum_k f_k \left(\text{Tr} \left[O_k U(\theta) \rho_k U^\dagger(\theta) \right] \right) \quad (11.4)$$

که در آن f_k توابع تعریف شده برای هر مشاهده‌پذیر هستند. یک تابع هزینه مناسب باید ویژگی‌های زیر را داشته باشد وفاداری: حداقل مقدار تابع هزینه باید معادل راه‌حل مسئله باشد. به عبارت دیگر، کمینه‌سازی $C(\theta)$ باید به یافتن پاسخ درست مسئله منجر شود.

قابلیت تخمین کارآمد: تخمین مقدار $C(\theta)$ باید با استفاده از اندازه‌گیری‌های محدود بر روی کامپیوتر کوانتومی و پردازش‌های کلاسیک قابل انجام باشد. این ویژگی در دستگاه‌های NISQ که با محدودیت‌های منابع روبه‌رو هستند، اهمیت ویژه‌ای دارد.

معناداری عملیاتی: تابع هزینه باید به گونه‌ای طراحی شود که کاهش مقدار آن نشان‌دهنده بهبود کیفیت راه‌حل باشد. قابلیت آموزش: سطح هزینه باید به گونه‌ای باشد که بتوان به راحتی پارامترهای (θ) را بهینه‌سازی کرد. برای مثال، وجود صفحات خشک می‌تواند بهبود پارامترها را دشوار کند.

مزیت کوانتومی: تابع هزینه نباید به سادگی توسط رایانه‌های کلاسیک محاسبه شود؛ چرا که این امر منجر به از بین رفتن مزیت کوانتومی الگوریتم خواهد شد.

برای سازگاری با سخت‌افزارهای NISQ، مدارهای کوانتومی استفاده شده در تخمین $C(\theta)$ باید عمق کم و الزامات محاسباتی محدودی داشته باشند. به دلیل نویز و زمان همدوسی کوتاه کیوبیت‌ها، مدارها نباید بیش از حد عمیق باشند، همچنین طراحی مدارها باید به نحوی باشد که تعداد کیوبیت‌های کمکی مورد نیاز به حداقل برسد و در نهایت تخمین تابع هزینه یا گرادین‌های آن باید با استفاده از حداقل تعداد اندازه‌گیری ممکن انجام شود. تابع هزینه نقش کلیدی در عملکرد و موفقیت الگوریتم‌های VQA ایفا می‌کند. طراحی مناسب این تابع باید تضمین‌کننده دقت، کارایی و قابلیت آموزش الگوریتم باشد. علاوه بر این، در نظر گرفتن محدودیت‌های سخت‌افزاری دستگاه‌های NISQ در تعریف و تخمین تابع هزینه ضروری است. بخش‌های بعدی به بررسی چگونگی طراحی انسازها و ارتباط آن‌ها با تابع هزینه می‌پردازد. در الگوریتم‌های وردشی کوانتومی، انتخاب انساز نقش اساسی در عملکرد و کارایی الگوریتم ایفا می‌کند. انساز به ساختار مدار کوانتومی پارامتری اشاره دارد که به عنوان تابعی از مجموعه‌ای از پارامترها $C(\theta)$ طراحی می‌شود. این مدار، فضای جستجوی الگوریتم را تعریف کرده و مستقیماً بر قابلیت آموزش، دقت و پیچیدگی محاسباتی الگوریتم تأثیر می‌گذارد. انساز به صورت یک عملگر یکانی $U(\theta)$ تعریف می‌شود که به طور پارامتری بر حالت‌های ورودی (ρ_k) اعمال می‌شود. این عملگر وظیفه تولید حالت‌های کوانتومی را دارد که برای بهینه‌سازی تابع هزینه استفاده می‌شوند. فرم کلی انساز را

معمولاً می‌توان به صورت ترکیبی از لایه‌های گیت‌های پارامتری و غیرپارامتری بیان کرد

$$U(\theta) = U_l(\theta_l) \dots U_2(\theta_2) U_1(\theta_1)$$

با

$$U_l(\theta_l) = \prod_m e^{-i\theta_m H_m} W_m$$

که در آن l تعداد لایه‌ها یا عمق آنساز و $U_l(\theta_l)$ یک واحد پارامتری یا غیرپارامتری در لایه l است. هر لایه از آنساز می‌تواند شامل چندین گیت کوانتومی باشد که به صورت متوالی یا موازی روی کیوبیت‌ها اعمال می‌شوند. اجزای کلیدی آنساز از دو بخش اصلی تشکیل شده است. اول گیت‌های پارامتری ($e^{-i\theta_m H_m}$) که این گیت‌ها شامل پارامترهای قابل تنظیم (θ_m) هستند که در طی فرآیند بهینه‌سازی توسط الگوریتم تنظیم می‌شوند و همچنین عملگر (H_m) یک عملگر هرمیتی است که به صورت محلی یا غیرمحلی عمل می‌کند. گیت‌های پارامتری با تنظیم دقیق پارامترها، ظرفیت آنساز برای نمایش حالت‌های مختلف کوانتومی را افزایش می‌دهند. دوم گیت‌های غیر پارامتری (W_m) که شامل اپراتورهایی هستند که بدون پارامترهای قابل تنظیم عمل می‌کنند و وظیفه اصلی این گیت‌ها، آماده‌سازی یا تغییر ساختار حالت کوانتومی برای مراحل بعدی است. گیت‌های غیرپارامتری با ایجاد درهم‌تنیدگی، فضای حالت قابل دسترس را گسترش می‌دهند.

۲.۳.۴ انواع آنساز

آنساز در الگوریتم‌های وردشی کوانتومی، همان حدس اولیه یا مدار کوانتومی پارامتری است که فضای جستجو را تعریف می‌کند. انتخاب درست آنساز تعیین می‌کند که آیا الگوریتم قادر به تقریب مناسب خواهد بود یا نه. در ادامه به معرفی انواع آنساز خواهیم پرداخت.

• آنساز کارآمد سخت افزاری

یکی از پرکاربردترین انواع آنساز در الگوریتم‌های کوانتومی وردشی (VQAs) است که به منظور بهره‌برداری بهینه از سخت‌افزارهای کوانتومی طراحی شده است. این آنساز با در نظر گرفتن محدودیت‌ها و معماری خاص دستگاه‌های کوانتومی، ساختاری ساده و کارآمد ارائه می‌دهد که امکان پیاده‌سازی روی دستگاه‌های NISQ را فراهم می‌کند. این آنساز برای کاهش عمق مدار و سازگاری با محدودیت‌های سخت‌افزاری طراحی شده است. ویژگی‌های اصلی آن شامل موارد زیر است

۱- استفاده از گیت‌های بومی سخت‌افزار که به طور مستقیم توسط معماری دستگاه پشتیبانی می‌شوند. ۲- کاهش

پیچیدگی ترجمه مدارها: برخلاف انسازهای عمومی که نیاز به ترجمه گیت‌ها به گیت‌های بومی دارند، این انساز مستقیماً از گیت‌های سخت‌افزاری پشتیبانی شده استفاده می‌کند. ۳- طراحی بهینه برای کاهش عمق مدار و در نتیجه کاهش نویز و خطای محاسباتی ساختار کلی این انساز از لایه‌های متناوب گیت‌های پارامتری و گیت‌های غیرپارامتری تشکیل شده است که قابلیت سازگاری با هر معماری سخت‌افزاری را دارد. این انساز از گیت‌هایی استفاده می‌کند که مستقیماً توسط سخت‌افزار پشتیبانی می‌شوند، بنابراین نیازی به ترجمه مدار به گیت‌های بومی وجود ندارد همچنین کاهش عمق مدار باعث کاهش تأثیر نویز می‌شود که در دستگاه‌های NISQ اهمیت زیادی دارد. یکی از مشکلات اصلی انساز کارآمد سخت‌افزاری، گیر افتادن در صفحات خشک است. این مشکل زمانی رخ می‌دهد که گرادینان تابع هزینه در مراحل اولیه بهینه‌سازی بسیار کوچک شود و بهینه‌سازی به کندی پیش رود. دلیل این مشکل به پیچیدگی چشم‌انداز هزینه و تعاملات غیرمحل بین کیوبیت‌ها مربوط می‌شود. این انساز معمولاً مسئله‌ناوابسته است و از اطلاعات خاص مسئله استفاده نمی‌کند. بنابراین، در مسائلی که نیاز به ساختارهای خاص دارند، ممکن است عملکرد بهینه نداشته باشد.

● انساز خوشه یکانی جفت شده^{۱۸}

UCC یکی از پرکاربردترین انسازهای مسئله‌محور در الگوریتم‌های وردشی کوانتومی است که به‌طور خاص در حوزه شیمی کوانتومی برای تخمین انرژی حالت پایه مولکول‌ها و پیدا کردن حالت‌های الکترونی آن‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. این انساز مبتنی بر روش‌های کلاسیک کوپل-کلاستر بوده و برای سیستم‌های کوانتومی طراحی شده است تا از ظرفیت بالای کامپیوترهای کوانتومی بهره‌برد. در روش UCC، حالت پایه سیستم به‌صورت یک حالت برانگیخته‌شده از یک حالت مرجع (معمولاً حالت هارتری-فوک^{۱۹}) بیان می‌شود. این فرایند با استفاده از یک عملگر یکانی انجام می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$|\psi(\theta)\rangle = e^{T(\theta)-T(\theta)^\dagger} |\psi(0)\rangle$$

که در اینجا $|\psi(0)\rangle$ ، حالت مرجع سیستم، معمولاً حالت هارتری-فوک است و $T(\theta)$ عملگر خوشه که بر اساس ترکیب خطی عملگرهای برانگیختگی تعریف می‌شود، هستند

$$T(\theta) = \sum_k T_k(\theta)$$

و $T_k(\theta)$ عملگرهای برانگیختگی تک‌الکترونی و چندالکترونی هستند. عملگرهای تک برانگیختگی T_1 که تغییر حالت

^{۱۸} Unitary Coupled Clustered Ansatz (UCC)

^{۱۹} Hartree-Fock

یک الکترون را از یک اوربیتال اشغال شده به یک اوربیتال غیر اشغال شده مدل سازی می کنند. عملگرهای دو برانگیختگی T_2 که به تغییر هم زمان دو الکترون از اوربیتال های اشغال شده به اوربیتال های غیر اشغال شده می پردازند.

$$T_1 = \sum_{i,j} \theta_i^j a_i^\dagger a_j$$

$$T_2 = \sum_{i,j,k,l} \theta_{i,j}^{k,l} a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l$$

برای پیاده سازی این آنساتز در رایانه های کوانتومی، عملگرهای فرمیونی باید به عملگرهای اسپینی تبدیل شوند. دو روش رایج برای این تبدیل عبارت اند از

تبدیل جردن- ویگنر: به طور مستقیم عملگرهای فرمیونی را به زنجیره ای از عملگرهای اسپینی تبدیل می کند.

تبدیل براویی- کیتایف: نسخه بهینه تری است که تعداد گیت های کوانتومی مورد نیاز را کاهش می دهد

عملگر یکانی $e^{T(\theta)-T(\theta)^\dagger}$ به طور مستقیم در دستگاه های کوانتومی پیاده سازی نمی شود، زیرا شامل اپراتورهای نمایی است که قابل تجزیه نیستند. برای حل این مشکل، از بسط تروتز^{۲۰} استفاده می شود. این بسط امکان تجزیه عملگر پیچیده به توالی گیت های یکانی ساده تر را فراهم می کند که می توان آن ها را در سخت افزارهای کوانتومی پیاده سازی کرد. این آنساتز به طور خاص برای مدل سازی سیستم های کوانتومی طراحی شده است و قابلیت بسیار بالایی در تخمین دقیق انرژی حالت پایه دارد و برخلاف روش های کلاسیک، قابلیت نمایش برانگیختگی های چند الکترونی پیچیده را دارد. انواع مختلف این آنساتز مانند UCCSD (شامل تک برانگیختگی و دو برانگیختگی) یا UCCGSD (برانگیختگی های عمومی) برای مسائل مختلف استفاده می شوند. تعداد پارامترهای قابل تنظیم (θ_m) در UCC با افزایش اندازه سیستم به طور نمایی افزایش می یابد که باعث پیچیدگی محاسباتی می شود، همچنین بهینه سازی این پارامترها ممکن است به دلیل وجود صفحات خشک دشوار باشد. استفاده از بسط تروتز ممکن است خطاهایی را در نتیجه نهایی وارد کند. تعداد بیشتری از مراحل تروتز می تواند دقت را افزایش دهد، اما عمق مدار را نیز بیشتر می کند. آنساتز UCC به طور خاص در حوزه شیمی کوانتومی برای مسائل تخمین انرژی حالت پایه مولکول ها، شبیه سازی دینامیک مولکولی و تحلیل ویژگی های الکترونی سیستم های پیچیده بکار می رود.

• آنساتز عملگر متناوب کوانتومی^{۲۱}

الگوریتم بهینه سازی تقریبی کوانتومی^{۲۲} یکی از برجسته ترین الگوریتم های کوانتومی برای حل مسائل بهینه سازی

^{۲۰} Trotter Expansion

^{۲۱} Quantum Alternating Operator Ansatz

^{۲۲} Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)

ترکیباتی است. این الگوریتم که توسط ادوارد فرهی و همکارانش معرفی شد، از یک آنساز تناوبی برای هدایت حالت اولیه به سمت حداقل انرژی یک تابع هزینه استفاده می‌کند. ساختار QAOA به‌طور مستقیم از روش آدیاباتیک کوانتومی الهام گرفته شده و از ویژگی‌های محاسبات کوانتومی برای جستجوی فضای حالت استفاده می‌کند. QAOA برای حل مسائل بهینه‌سازی ترکیباتی طراحی شده است، به‌ویژه مسائل سختی-NP که در آن‌ها هدف یافتن یک راه‌حل تقریبی برای یک مسئله دشوار است. هدف این الگوریتم، یافتن حالتی از سیستم کوانتومی است که تابع هزینه تعریف‌شده را حداقل کند. این تابع هزینه توسط یک هامیلتونی به نام هامیلتونی مسئله (H_P) مدل‌سازی می‌شود. آنساز QAOA شامل تناوب بین دو عملگر اصلی است. عملگر مسئله ($e^{-i\gamma_l H_P}$) که وابسته به هامیلتونی مسئله است و وظیفه هدایت سیستم به سمت راه‌حل بهینه را بر عهده دارد و عملگر آمیختگی ($e^{-i\beta_l H_M}$) که از یک هامیلتونی آمیختگی (H_M) استفاده می‌کند و حالت کوانتومی را در فضای حالت جستجو می‌کند. حالت کوانتومی پس از p لایه به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$U(\gamma, \beta) = \prod_{l=1}^p e^{-i\beta_l H_M} e^{-i\gamma_l H_P}$$

QAOA یکی از قدرتمندترین ابزارهای کوانتومی برای مسائل بهینه‌سازی است. ساختار تناوبی و وابستگی مستقیم آن به هامیلتونی مسئله، آن را برای مسائل سخت-NP مناسب کرده است. با وجود چالش‌هایی در بهینه‌سازی و عمق مدار، QAOA به‌طور فعال در تحقیقات محاسبات کوانتومی مورد مطالعه است و پتانسیل بالایی برای حل مسائل واقعی در حوزه‌هایی مانند شبکه، زمان‌بندی، و هوش مصنوعی دارد.

● آنساز هامیلتونی وردشی^{۲۳}

این آنساز یک رویکرد قدرتمند و مسئله‌محور برای شبیه‌سازی حالت‌های پایه یا دینامیک کوانتومی در الگوریتم‌های وردشی کوانتومی است. این آنساز به‌طور خاص برای بهره‌گیری از ساختار هامیلتونی سیستم طراحی شده است و از اطلاعات مربوط به اجزای هامیلتونی برای ساخت مدارهای کوانتومی استفاده می‌کند. آنساز از ساختار ریاضی هامیلتونی سیستم برای طراحی مدار کوانتومی استفاده می‌کند. این هامیلتونی، که معمولاً به‌صورت جمعی از عملگرهای هرمیتی تعریف می‌شود، پایه و اساس طراحی این آنساز است. حالت خروجی این آنساز به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$|\psi(\theta)\rangle = U(\theta) |\psi(0)\rangle$$

$$U(\theta) = \prod_l \left(\prod_k e^{-\theta_{l,k} H_k} \right)$$

^{۲۳} Variational Hamiltonian Ansatz

استفاده از ساختار هامیلتونی باعث می‌شود فضای جستجو محدود به حالت‌های مرتبط با مسئله شود، که این امر زمان محاسبات را کاهش می‌دهد. این آنساتز به دلیل استفاده مستقیم از هامیلتونی سیستم، تطابق خوبی با مسائل فیزیکی و شیمی کوانتومی دارد و به دلیل ساختار لایه‌ای و استفاده از گیت‌های ساده، پیاده‌سازی آنساتز در سخت‌افزارهای فعلی امکان‌پذیر است. آنساتز در حوزه‌های مختلفی از جمله شیمی کوانتومی: تخمین انرژی حالت پایه مولکول‌ها، مدل‌های فیزیک ماده چگال: شبیه‌سازی سیستم‌های الکترونی پیچیده و شبیه‌سازی دینامیک سیستم‌های کوانتومی: بررسی تحولات زمانی در سیستم‌های باز یا بسته، کاربرد دارد.

● آنساتز ساختار متغیر^{۲۴}

یکی از آنساتزهای نوآورانه در الگوریتم‌های وردشی کوانتومی است که در آن ساختار مدار به همراه پارامترهای قابل تنظیم بهینه می‌شود. این آنساتز برخلاف آنساتزهای سنتی که ساختار از پیش تعریف‌شده‌ای دارند، به‌طور تطبیقی طراحی می‌شود و می‌تواند با نیازهای خاص مسئله هماهنگ شود. در آنساتز نه تنها مقادیر پارامترهای مدار، بلکه خود ساختار مدار (تعداد گیت‌ها، نوع گیت‌ها و ترتیب آن‌ها) نیز بخشی از فرآیند بهینه‌سازی است. به این ترتیب، مدار نهایی به‌طور خاص برای مسئله مورد نظر طراحی می‌شود. ساختار مدار در طول فرآیند بهینه‌سازی به‌طور پویا تغییر می‌کند. این بهینه‌سازی شامل: اضافه یا حذف گیت‌ها، تغییر ترتیب گیت‌ها و تنظیم تعداد لایه‌ها است. این آنساتز می‌تواند به‌طور خاص با ویژگی‌های مسئله سازگار شود و از منابع محاسباتی به‌طور بهینه استفاده کند. این روش یک رویکرد قدرتمند و انعطاف‌پذیر برای طراحی مدارهای کوانتومی است که قابلیت تطبیق با مسائل مختلف را دارد. این آنساتز با کاهش پیچیدگی غیرضروری و طراحی مدارهای اختصاصی، عملکرد الگوریتم‌های VQA را بهبود می‌بخشد. با این حال، بهینه‌سازی پیچیده و نیاز به الگوریتم‌های پیشرفته از چالش‌های اصلی این رویکرد محسوب می‌شوند. تحقیقات آینده می‌تواند بر توسعه روش‌های کارآمدتر برای کاهش زمان محاسبات و مقابله با چالش‌های بهینه‌سازی متمرکز شود.

^{۲۴} Variable Structure Ansatz

• آنسازز زیر منطقی و کنترل بهینه کوانتومی^{۲۵}

آنسازز زیر منطقی و کنترل بهینه کوانتومی دو رویکرد متمایز و پیشرفته برای طراحی آنسازز در الگوریتم‌های وردشی کوانتومی هستند. هر دو رویکرد به دنبال بهبود دقت، کاهش تأثیر نویز، و تطبیق بهتر با سخت‌افزارهای کوانتومی موجود هستند. این رویکردها به‌طور خاص برای سیستم‌های نویزی و پیچیده در دستگاه‌های NISQ طراحی شده‌اند. آنسازز زیر منطقی به جای کار با کیوبیت‌های فیزیکی، از کیوبیت‌های زیرمنطقی استفاده می‌کند. این کیوبیت‌ها از طریق استفاده از کدهای تصحیح خطای کوانتومی تعریف می‌شوند و به‌طور موثری نویز و خطاهای سخت‌افزاری را کاهش می‌دهند. در این روش، یک زیرمجموعه از کیوبیت‌های فیزیکی با هم ترکیب می‌شوند تا یک کیوبیت منطقی تشکیل دهند. مدار کوانتومی سپس بر اساس این کیوبیت‌های منطقی طراحی می‌شود و استفاده از عملگرهای تصحیح خطا در طول اجرای مدار، صحت عملیات را تضمین می‌کند. کنترل بهینه کوانتومی یک رویکرد برای بهبود دقت و کارایی مدارهای کوانتومی است. این روش از تکنیک‌های پیشرفته کنترل بهینه برای تنظیم دقیق گیت‌ها، پارامترها، و توالی اعمال آن‌ها استفاده می‌کند. در این روش، دینامیک سیستم کوانتومی به‌طور مستقیم مدل‌سازی می‌شود. آنسازز زیر منطقی و کنترل بهینه کوانتومی دو رویکرد مکمل برای طراحی و اجرای مدارهای کوانتومی با دقت بالا هستند. آنسازز زیر منطقی با استفاده از کیوبیت‌های منطقی نویز را کاهش می‌دهد، در حالی که کنترل بهینه کوانتومی با بهینه‌سازی دقیق دینامیک گیت‌ها و مدارها، عملکرد سیستم را بهبود می‌بخشد. هرچند این روش‌ها دارای چالش‌هایی هستند، اما پیشرفت در توسعه سخت‌افزار و الگوریتم‌های بهینه‌سازی می‌تواند استفاده عملی آن‌ها را در دستگاه‌های NISQ ممکن کند.

• آنسازز ترکیبی

آنسازز ترکیبی به انساززهایی اشاره دارد که از ترکیب دو یا چند نوع آنسازز مختلف ایجاد می‌شوند. هدف اصلی این رویکرد بهره‌برداری از مزایای هر یک از انساززهای ترکیبی است تا عملکرد کلی بهبود یابد. این انساززها برای حل مسائل پیچیده، که ممکن است ویژگی‌های متنوعی داشته باشند، طراحی شده‌اند. آنسازز ترکیبی، ترکیبی از انساززهای مسئله‌محور و مسئله‌ناوابسته یا سایر رویکردهای موجود مانند زیر منطقی و آنسازز کارآمد سخت‌افزاری هستند. این ترکیب به‌گونه‌ای انجام می‌شود که نقاط قوت هر آنسازز حفظ شده و نقاط ضعف آن جبران شود. این آنسازز می‌تواند به‌طور خاص برای حل مسائل متنوع طراحی شود و به نیازهای مختلف پاسخ دهد، همچنین آنسازز ترکیبی می‌تواند از دقت بالای انساززهای مسئله‌محور و سادگی و پیاده‌سازی آسان انساززهای مسئله‌ناوابسته بهره ببرند و ترکیب انساززهای مختلف می‌تواند به کاهش عمق مدار و افزایش سازگاری با دستگاه‌های NISQ کمک کند. انواع آنسازز ترکیبی:

۱- ترکیب کارآمد سخت‌افزاری و انساززهای مسئله‌محور: بخش اول مدار از گیت‌های ساده و سخت‌افزاری تشکیل شده است و بخش دوم شامل گیت‌هایی است که اطلاعات مسئله را کدگذاری می‌کند. مثال: استفاده از آنسازز کارآمد

^{۲۵} Sub-Logical Ansatz and Quantum Optimal Control

سخت‌افزاری برای ایجاد درهم‌تنیدگی و سپس استفاده از آنساز مسئله‌محور برای شبیه‌سازی حالت پایه یک سیستم.

۲- ترکیب زیر منطقی و آنساز وردشی: در این روش، کیوبیت‌های منطقی به جای کیوبیت‌های فیزیکی استفاده می‌شوند و مدار بهینه‌سازی می‌شود تا فضای جستجو کاهش یابد.

۳- ترکیب آنسازهای مسئله‌محور مختلف: برای مسائل پیچیده، ممکن است نیاز به ترکیب چندین آنساز مسئله‌محور وجود داشته باشد. برای مثال، ترکیب چند آنساز برای حل مسائل شیمی کوانتومی که جنبه‌های بهینه‌سازی ترکیباتی نیز دارند.

آنساز ترکیبی یک ابزار قدرتمند برای طراحی مدارهای انعطاف‌پذیر و کارآمد در الگوریتم‌های VQA است. این آنسازها با ترکیب مزایای آنسازهای مختلف می‌توانند عملکرد بهتری در حل مسائل پیچیده ارائه دهند. هرچند طراحی و پیاده‌سازی آن‌ها چالش‌هایی به همراه دارد، اما با پیشرفت‌های بیشتر در الگوریتم‌های بهینه‌سازی و سخت‌افزارهای کوانتومی، این رویکرد نقش برجسته‌ای در محاسبات کوانتومی خواهد داشت.

● آنساز حالت‌های مختلط

به آنسازهایی اطلاق می‌شود که برای مدل‌سازی حالات مخلوط کوانتومی طراحی شده‌اند. در حالی که حالت‌های خالص ($|\psi\rangle$) با یک بردار حالت واحد توصیف می‌شوند، حالات مخلوط توسط ماتریس چگالی (ρ) بیان می‌شوند. این آنسازها به‌ویژه برای شبیه‌سازی سیستم‌های کوانتومی باز که تحت تأثیر نویز یا اختلالات محیطی قرار دارند، ضروری هستند. حالت مخلوط به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

در الگوریتم‌های وردشی کوانتومی برای حالات مخلوط، آنسازها معمولاً به گونه‌ای طراحی می‌شوند که قادر به تولید ماتریس چگالی دقیق برای شبیه‌سازی سیستم‌های باز باشند. یک آنساز برای مدل‌سازی حالات مخلوط می‌تواند به صورت ترکیبی از مدارهای کوانتومی معمولی (برای حالات خالص) و عملیات اضافی برای اعمال نویز یا تداخل محیط با سیستم باشد. این آنساز می‌تواند شامل یک مرحله اول برای ایجاد یک بردار حالت اولیه با استفاده از یک آنساز استاندارد مثل آنساز کارآمد سخت‌افزاری یا QAOA یک مرحله دوم برای اعمال عملیات شبیه‌سازی نویز مانند ناهمدوسی یا جابجایی‌های احتمالی برای مدل‌سازی اختلالات محیطی که باعث ایجاد حالات مخلوط می‌شود، باشد. در نهایت، این فرآیند می‌تواند به صورت یک ماتریس چگالی جمع‌شده از حالات مختلف نوشته شود

$$\rho(\theta) = \sum_i p_i(\theta) |\psi_i(\theta)\rangle \langle \psi_i(\theta)|$$

که در آن $p_i(\theta)$ احتمال‌های وابسته به پارامترهای مدار و $|\psi_i(\theta)\rangle$ حالت‌های کوانتومی تولیدشده توسط مدار است.

۳.۳.۴ گرادیان

گرادیان‌ها یکی از مفاهیم کلیدی در الگوریتم‌های وردشی کوانتومی هستند. محاسبه گرادیان‌ها به‌ویژه در فرایند بهینه‌سازی آنسازها بسیار اهمیت دارد، زیرا از آن‌ها برای به‌روزرسانی پارامترهای مدار استفاده می‌شود تا تابع هزینه به حداقل برسد. در VQA، این گرادیان‌ها به‌عنوان بخشی از فرآیند بهینه‌سازی برای یافتن مقادیر بهینه پارامترها در مدارهای کوانتومی به کار می‌روند. گرادیان‌ها در الگوریتم‌های بهینه‌سازی نشان‌دهنده نرخ تغییر تابع هزینه $C(\theta)$ نسبت به پارامترهای بهینه‌سازی (θ) هستند. به عبارت دیگر، گرادیان‌ها به ما می‌گویند که چطور باید پارامترها را تغییر دهیم تا تابع هزینه سریع‌تر به حداقل خود برسد. برای یک تابع هزینه $C(\theta)$ و یک پارامتر (θ) از مدار، گرادیان به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{C(\theta + \delta) - C(\theta)}{\delta}$$

در الگوریتم‌های کوانتومی، محاسبه مستقیم گرادیان‌ها معمولاً نیاز به روش‌های خاصی دارد زیرا محاسبه دقیق گرادیان‌ها با استفاده از روش‌های کلاسیک در سیستم‌های کوانتومی به‌طور مستقیم ممکن نیست.

• روش‌های محاسبه گرادیان در الگوریتم‌های وردشی کوانتومی

روش‌های محاسبه گرادیان به دو روش اصلی کلاسیک و کوانتومی تقسیم می‌شود. ابتدا دو مورد از روش‌های اصلی محاسبه کلاسیک گرادیان ذکر شده است. اولین روش کلاسیک، روش تغییر محدود است. در این روش، گرادیان‌ها به‌طور عددی و با استفاده از اختلاف محدود محاسبه می‌شوند. این روش معمولاً ساده‌ترین و قابل‌اجزاترین روش برای محاسبه گرادیان‌ها است.

$$\frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i} \approx \frac{C(\theta + \delta) - C(\theta)}{\delta}$$

که در آن δ مقدار کوچکی است که برای محاسبه تغییرات در تابع هزینه استفاده می‌شود. روش دوم، روش گرادیان دقیق (گرادیان تحلیلی) است. در این روش، گرادیان‌ها به‌طور دقیق با استفاده از قواعد ریاضی تحلیل می‌شوند. این روش معمولاً زمانی استفاده می‌شود که تابع هزینه به‌طور دقیق قابل تجزیه باشد. این روش دقت بالاتری دارد اما در مسائل پیچیده ممکن است محاسبات سنگینی داشته باشد. در سیستم‌های کوانتومی، محاسبه مستقیم گرادیان‌ها به دلیل نیاز به اندازه‌گیری‌های چندگانه و پیچیدگی محاسبات کوانتومی دشوار است. در اینجا دو روش اصلی برای محاسبه گرادیان‌ها در VQA بررسی می‌شود. روش اول تغییر محدود کوانتومی است که در این روش، گرادیان‌ها به‌طور مشابه با روش‌های

کلاسیک، اما به طور کوانتومی محاسبه می‌شوند. این روش شامل اندازه‌گیری‌هایی است که تغییرات کوچک در پارامترهای مدار ایجاد کرده و سپس مقادیر تابع هزینه محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\langle C(\theta + \delta) \rangle - \langle C(\theta) \rangle}{\delta}$$

که در آن $\langle C(\theta) \rangle$ میانگین اندازه‌گیری‌های تابع هزینه است. روش اصلی بعدی قانون تغییر پارامتر است. این روش سخت‌افزاری و محاسباتی کارآمد برای محاسبه گرادیان‌ها در مدارهای کوانتومی با پارامترهای وابسته به گیت‌های یکانی است. به طور خاص، اگر θ_l یک پارامتر در مدار کوانتومی باشد گرادیان تابع هزینه نسبت به θ_l با استفاده از قانون جابه‌جایی پارامتر به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\frac{\partial C}{\partial \theta_l} = \sum_k \frac{1}{2 \sin \alpha} (Tr [O_k U^\dagger(\theta_+) \rho_k U(\theta_+)] - Tr [O_k U^\dagger(\theta_-) \rho_k U(\theta_-)])$$

که در آن $\theta_+ = \alpha e_l$ بردار واحد با مقدار ۱ در مکان l و ۰ در سایر موقعیت‌ها است، همچنین α یک عدد حقیقی است که مقدار جابه‌جایی پارامتر را تعیین می‌کند. این روش گرادیان تحلیلی را به جای تقریبی فراهم می‌کند و سخت‌افزاری کارآمد است، زیرا تنها به اجرای دو مدار کوانتومی با جابه‌جایی $+\alpha$ و $-\alpha$ نیاز دارد. در نقطه $\alpha = \pi/4$ ، دقت محاسبات بهینه می‌شود، زیرا ضریب $\frac{1}{\sin \alpha}$ کمینه می‌شود. گرادیان‌ها برای به‌روزرسانی پارامترهای مدار در الگوریتم‌های مانند (VQE) و (QAOA) استفاده می‌شوند، همچنین اطلاعات گرادیانی به درک بهتر ویژگی‌های تابع هزینه و رفتار آن در فضای پارامترها کمک می‌کنند. در ادامه به بررسی بهینه‌سازها در چارچوب الگوریتم‌های وردشی کوانتومی پرداخته شده است.

۴.۳.۴ بهینه‌سازی

بهینه‌سازها یکی از عناصر کلیدی در VQA ها هستند و انتخاب آن‌ها تأثیر مستقیمی بر دقت، کارایی و همگرایی الگوریتم دارد. بهینه‌سازی در VQA فرآیند به حداقل رساندن تابع هزینه $\langle C(\theta) \rangle$ است که توسط پارامترهای مدار کوانتومی (θ) تعیین می‌شود. موفقیت یک VQA به شدت به انتخاب یک بهینه‌ساز مناسب بستگی دارد، زیرا:

- پیچیدگی‌های تابع هزینه: توابع هزینه در VQAs: اغلب شامل حداقل‌های موضعی متعدد هستند و محیط بهینه‌سازی ممکن است تصادفی باشد (به دلیل نویز سخت‌افزار یا خطاهای اندازه‌گیری).
- چالش‌های جدید در VQAs: مواردی مانند پهنه‌های بی‌بار، نویز سخت‌افزاری، و محدودیت تعداد اندازه‌گیری‌ها مشکلاتی منحصربه‌فرد در فرآیند بهینه‌سازی ایجاد می‌کنند.

بهینه‌سازها را به دو دسته اصلی می‌توان تقسیم کرد: روش‌های کاهش گرادیان و سایر روش‌ها. روش‌های کاهش گرادیان یکی از رایج‌ترین و بنیادی‌ترین روش‌های بهینه‌سازی است که در الگوریتم‌های وردشی کوانتومی نقش حیاتی ایفا می‌کند. این روش‌ها برای به حداقل رساندن تابع هزینه $C(\theta)$ ، با استفاده از گرادیان‌های تابع نسبت به پارامترهای قابل تنظیم θ ، طراحی شده‌اند. در محیط‌های کوانتومی، روش‌های کاهش گرادیان به دلیل امکان محاسبه گرادیان‌های دقیق، کارایی بالایی دارند. روش‌های کاهش گرادیان در الگوریتم‌های VQA به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند: گرادیان کاهشی ساده و گرادیان کاهشی تصادفی (SGD) که گرادیان کاهشی ساده‌ترین نسخه الگوریتم گرادیان کاهشی است و به‌صورت مستقیم از گرادیان تابع هزینه برای به‌روزرسانی پارامترها استفاده می‌کند؛ ولی در گرادیان کاهشی تصادفی به جای محاسبه گرادیان دقیق، از یک تقریب تصادفی برای گرادیان استفاده می‌شود. این موضوع به‌ویژه در محیط‌های کوانتومی که تعداد اندازه‌گیری‌ها محدود است، مفید است. در نتیجه روش‌های گرادیان کاهشی به دلیل سادگی، کارایی، و قابلیت تطبیق با دستگاه‌های کوانتومی یکی از اصلی‌ترین روش‌های بهینه‌سازی در الگوریتم‌های VQA محسوب می‌شوند. این روش‌ها با وجود چالش‌هایی مانند پهنه‌های بی‌بار و نویز سخت‌افزاری، با بهبودهایی مانند استفاده از بهینه‌سازهای پیشرفته و گرادیان طبیعی کوانتومی بهبود یافته‌اند. این روش‌ها نقش کلیدی در بهینه‌سازی پارامترهای مدارهای کوانتومی ایفا می‌کنند و ابزار مهمی برای حل مسائل پیچیده در شیمی کوانتومی، بهینه‌سازی، و یادگیری ماشین هستند. سایر روش‌ها به معرفی روش‌های جایگزین برای بهینه‌سازی در الگوریتم‌های وردشی کوانتومی می‌پردازد. این روش‌ها به‌طور خاص برای مقابله با محدودیت‌ها و چالش‌هایی طراحی شده‌اند که در استفاده از روش‌های مبتنی بر گرادیان ممکن است به وجود بیاید. این دسته از روش‌ها شامل تکنیک‌هایی است که گرادیان‌ها را به‌طور مستقیم استفاده نمی‌کنند یا از روش‌های پیشرفته‌تر برای تنظیم پارامترها بهره می‌گیرند. یادگیری فرادانش، یک روش پیشرفته است که در آن یک شبکه عصبی آموزش می‌بیند تا از تاریخچه بهینه‌سازی و گرادیان‌های فعلی، قوانین به‌روزرسانی مناسب را برای پارامترها بیاموزد. این رویکرد اجازه می‌دهد تا بهینه‌ساز به مرور زمان برای کلاس خاصی از مسائل، عملکرد بهتری پیدا کند. SPSA یکی از روش‌های جایگزین برای گرادیان کاهشی است که در آن گرادیان به‌صورت تقریبی و بر اساس مشتق‌های جزئی در یک جهت تصادفی محاسبه می‌شود. این روش به جای محاسبه گرادیان کامل، یک تقریب ساده‌تر از آن ارائه می‌دهد که تنها به یک مشتق نیاز دارد. روش‌های گرادیان-آزاد برای مسائل خاصی طراحی شده‌اند که در آن‌ها تابع هزینه به‌صورت ترکیبی خطی از مقادیر چشم‌داشتی تعریف می‌شود

۵.۳.۴ کاربرد الگوریتم‌های وردشی کوانتومی

به‌عنوان ابزاری بسیار قدرتمند برای بهره‌برداری از کامپیوترهای کوانتومی در دوره NISQ (دستگاه‌های کوانتومی با نویز متوسط و مقیاس محدود) معرفی شده‌اند. این بخش کاربردهای متنوعی را که VQAs می‌توانند در مسائل مختلف

علمی، ریاضی و مهندسی ارائه دهند. یکی از ویژگی‌های برجسته VQAs این است که این الگوریتم‌ها انعطاف‌پذیری بالایی برای حل طیف وسیعی از مسائل ارائه می‌دهند. از جمله مزایای کلیدی این الگوریتم‌ها می‌توان به پوشش گسترده کاربردها، استفاده از سخت‌افزارهای کوانتومی فعلی و تطبیق با نیازهای مسئله اشاره کرد. کاربردهای VQAs را می‌توان به دسته‌های زیر تقسیم کرد

۱- پیدا کردن حالت‌های پایه و برانگیخته

یکی از برجسته‌ترین کاربردهای VQAs محاسبه حالت‌های پایه و حالت‌های برانگیخته در سیستم‌های کوانتومی است. این وظایف در شیمی کوانتومی و فیزیک مواد کاربرد گسترده‌ای دارند. الگوریتم‌هایی مانند (VQE) که از اولین الگوریتم VQA است که برای تخمین انرژی حالت پایه طراحی شده است، کاربرد دارند.

۲- شبیه‌سازی دینامیک‌های کوانتومی

شبیه‌سازی دینامیک‌های کوانتومی شامل مطالعه تکامل زمانی سیستم‌های کوانتومی است. روش‌های زیر در این بخش ارائه شده‌اند

رویکرد تکراری: شبیه‌سازی دینامیک به صورت تکراری و مرحله به مرحله.

انتقال سریع وردشی: روش‌هایی که با کاهش زمان محاسبات شبیه‌سازی سریع‌تری ارائه می‌دهند.

۳- مسائل ریاضی

می‌توانند برای حل مسائل ریاضی مانند حل سیستم‌های معادلات خطی و ضرب ماتریس- بردار استفاده شوند. به عنوان مثال: در مسئله سیستم‌های خطی، هدف پیدا کردن حالتی است که یک معادله خطی خاص را برآورده کند.

۴- بهینه‌سازی

الگوریتم‌های VQAs برای حل مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی مانند مسائل Max-Cut یا مسائل رضایت محدودیت‌ها (SAT) استفاده می‌شوند. الگوریتم معروف در این حوزه (QAOA) است.

۵- یادگیری ماشین کوانتومی

می‌توانند در حوزه یادگیری ماشین کوانتومی برای طراحی شبکه‌های عصبی کوانتومی و مدل‌های تولیدی مانند شبکه‌های متخاصم مولد (GANs) استفاده شوند. این روش‌ها پتانسیل بالایی برای بهبود کارایی و دقت یادگیری ماشین در مقایسه با روش‌های کلاسیک دارند.

۶.۳.۴ الگوریتم QAOA در سامانه متغیر پیوسته

مدارهای وردشی تاکنون در حوزه‌های مختلف از جمله شیمی محاسباتی، فاکتورگیری اعداد صحیح، پیاده‌سازی الگوریتم جستجوی گروور، طراحی اتوانکودرهای کوانتومی، و شبکه‌های عصبی کوانتومی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. به‌ویژه،

این مدارها در مسائل بهینه‌سازی کاربرد گسترده‌ای دارند. الگوریتم‌های بهینه‌سازی تقریبی کوانتومی (QAOA) به‌عنوان بخشی از این مدارها شناخته می‌شوند. پژوهش‌های بسیاری به بررسی عملکرد QAOA و توسعه نسخه‌های بهبودیافته و توسعه‌یافته آن پرداخته‌اند. اگرچه الگوریتم QAOA در مسائل بهینه‌سازی گسسته به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است، بسیاری از مسائل دنیای واقعی - به‌ویژه در حوزه‌هایی مانند مالی، یادگیری ماشین، و مهندسی - ماهیت پیوسته دارند. این مسائل شامل یافتن حداقل یک تابع حقیقی در یک فضای پیوسته است. بنابراین، برای گسترش تأثیر الگوریتم‌های کوانتومی در این حوزه‌ها، لازم است روش‌های فعلی به مسائل بهینه‌سازی پیوسته تعمیم داده شوند. این بخش یک الگوریتم بهینه‌سازی تقریبی کوانتومی برای مسائل پیوسته ارائه می‌دهد. این الگوریتم بر اساس روش عملگرهای متناوب عمل می‌کند که ویژگی اصلی QAOA است. در این روش تابع هدف به‌عنوان یک هامیلتونی هزینه کدگذاری می‌شود. الگوریتم با اجرای متناوب تکامل زمانی تحت دو عملگر غیرجابجایی (هامیلتونی هزینه و هامیلتونی اختلاط) پیش می‌رود و بازه‌های زمانی هر مرحله به‌عنوان پارامترهای وردشی تنظیم می‌شوند روش‌های گرادیان کاهشی در یادگیری عمیق عمل می‌کند. نقطه شروع در جهت گرادیان تابع هزینه به‌روزرسانی می‌شود و یک جابه‌جایی اضافی وابسته به تکانه نیز به این تغییر اضافه می‌گردد. اگر حالت اولیه الگوریتم به‌صورت یک برهم‌نهی از چندین نقطه شروع تنظیم شود، الگوریتم می‌تواند به‌عنوان گرادیان کاهشی در برهم‌نهی تفسیر شود. این ویژگی نشان‌دهنده اجرای موازی فرآیند بهینه‌سازی برای نقاط مختلف است. در حقیقت، تکامل حاصل برابر با دینامیک کوانتومی یک ذره در حضور یک پتانسیل است که تابع هزینه را توصیف می‌کند. این الگوریتم نه‌تنها برای مسائل پیوسته مناسب است، بلکه امکان حل مسائل گسسته و محدودشده را نیز فراهم می‌آورد. از دیگر توانایی‌های آن می‌توان به دستیابی به سرعت‌های کوانتومی مشابه الگوریتم گروور و نمونه‌گیری از توزیع‌هایی اشاره کرد که شبیه‌سازی آن‌ها با کامپیوترهای کلاسیک در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر نیست.

● تعریف مسئله بهینه‌سازی پیوسته

فرض کنید تابعی به‌صورت $f(x) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده است که x یک بردار بعدی- N در فضای اعداد حقیقی است. هدف مسئله بهینه‌سازی پیوسته این است که مقدار حداقل $f(x)$ را پیدا کنیم. این حداقل، با یک نقطه x^* بیان می‌شود، به‌طوری‌که:

$$f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^N} f(x)$$

در چارچوب مکانیک کوانتومی، این مسئله به یافتن یک حالت کوانتومی $|\psi\rangle$ معادل است که میانگین مقدار یک هامیلتونی هزینه H_C را کمینه کند. این هامیلتونی به شکل زیر تعریف می‌شود

$$H_C = f(x)$$

که در آن \hat{x} عملگر مکان است. هدف این است که مقدار میانگین انرژی، یعنی $\langle \psi | H_C | \psi \rangle$ ، کمینه شود. الگوریتم از روش عملگرهای متناوب برای حل این مسئله استفاده می‌کند. در این روش، دو هامیلتونی اصلی به صورت متناوب بر روی سیستم اعمال می‌شوند

هامیلتونی هزینه (H_C): تابع هدف را نمایش می‌دهد و بهینه‌سازی سیستم را هدایت می‌کند.
 هامیلتونی اختلاط (H_M): یک هامیلتونی مکمل است که با H_C جابجا نمی‌شود و باعث تغییرات اضافی در سیستم می‌شود. یکی از انتخاب‌های رایج برای این هامیلتونی، هامیلتونی جنبشی است

$$H_M = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N p_j^2 = \frac{1}{2} p^2$$

که در آن p_j عملگر تکانه متناظر با متغیر x_j است. برای درک نحوه تأثیر این هامیلتونی‌ها، تکامل عملگرهای مکان \hat{x} و تکانه \hat{p} در تصویر هایزنبرگ بررسی می‌شود. تحت هامیلتونی اختلاط (H_M) تکامل عملگر مکان به صورت زیر است

$$e^{i\gamma \hat{p}^2/2} \hat{x} e^{-i\gamma \hat{p}^2/2} = \hat{x} + \gamma \hat{p} \quad (12.4)$$

این رابطه نشان می‌دهد که عملگر مکان \hat{x} به اندازه‌ای متناسب با تکانه \hat{p} و ضریب γ تغییر می‌کند. تحت هامیلتونی هزینه (H_C) تکامل عملگر تکانه \hat{p} به صورت زیر است

$$e^{i\eta f(x)} \hat{p} e^{-i\eta f(x)} = \hat{p} - \eta \nabla f(\hat{x}) \quad (13.4)$$

این رابطه نشان‌دهنده تغییر تکانه در جهت گرادیان منفی تابع هدف است. با ترکیب این دو تکامل، قانون کلی به‌روزرسانی عملگر مکان به دست می‌آید

$$x \rightarrow \hat{x} + \gamma \hat{p} - \eta \gamma \nabla f(\hat{x}) \quad (14.4)$$

این قانون معادل الگوریتم گرادیان کاهشی با تکانه است. هر قسمت از تابع موج با کاهش در جهت گرادیان محلی خود، با یک جابجایی وابسته به تکانه اضافی، به روز می‌شود. در این الگوریتم یک حالت ورودی $|\psi_0\rangle$ تعریف می‌شود. سپس

عملگر یکانی QAOA که به شکل زیر تعریف شده است، اعمال می شود.

$$\hat{U}(\eta, \gamma) = \prod_{j=1}^P e^{-i\gamma_j \hat{H}_M} e^{-i\eta_j \hat{H}_C}$$

در این عملگر P تعداد مراحل الگوریتم است. پس از اعمال عملگر یکانی، حالت خروجی به شکل زیر بدست می آید

$$|\psi_{\eta, \gamma}\rangle = \hat{U}(\eta, \gamma) |\psi_0\rangle$$

پس از اعمال الگوریتم، رجیسترها در پایه مکان \hat{x} اندازه گیری می شوند و نمونه های x با احتمالی متناسب با $|\langle x | \psi_0 \rangle|^2$ هامیلتونی تولید می شوند، سپس این فرایند می تواند تکرار شود. پارامترهای η و γ نقش مهمی در کارایی الگوریتم ایفا می کنند. γ شدت تغییرات تکانه را کنترل می کند و η نقش نرخ یادگیری را دارد و تعیین می کند که سیستم چه مقدار در جهت گرادیان حرکت کند. این پارامترها می توانند به صورت تطبیقی با استفاده از روش های کلاسیک مانند گرادیان کاهشی تنظیم شوند. همچنین می توان اشاره کرد که در اصل، هر هامیلتونی غیر جابجایی پذیر با H_C می تواند به عنوان هامیلتونی اختلاط استفاده شود.

• بهینه سازی با قیود: یک چارچوب کوانتومی جامع

الگوریتم QAOA ارائه شده، علاوه بر حل مسائل بهینه سازی پیوسته بدون قید، برای مسائل بهینه سازی پیوسته با قیود نیز طراحی شده است. این نوع مسائل در بسیاری از کاربردهای دنیای واقعی از جمله مهندسی، یادگیری ماشین، اقتصاد و علوم اجتماعی اهمیت بالایی دارند. بهینه سازی با قیود مستلزم یافتن حداقل یک تابع هدف در حالی است که مجموعه ای از محدودیت ها، شامل قیود تساوی و قیود نابرابری، بر متغیرهای بهینه سازی اعمال می شوند. در چارچوب الگوریتم QAOA، این قیود از طریق اضافه کردن پتانسیل های محدودکننده انرژی به هامیلتونی هزینه H_C مدل سازی می شوند. یک مسئله بهینه سازی پیوسته با قیود به شکل زیر تعریف می شود

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} f(x)$$

که $f(x)$ تابع هدفی است که باید کمینه شود و قیود زیر بر x اعمال می شوند

۱- قیود تساوی که بیان می کنند که هر متغیر $g_i(x)$ باید مقدار ثابتی c_i را بپذیرد.

$$\{g_i(x) = c_i\}_{i=1}^n$$

۲- قیود نابرابری که تضمین می‌کنند که هر متغیر $h_j(x)$ باید حداقل مقدار d_j را برآورده کند.

$$\{h_j(x) \geq d_j\}_{j=1}^m$$

برای وارد کردن این قیود در الگوریتم QAOA یک تغییر اساسی در هامیلتونی هزینه H_C اعمال می‌شود. قیود به صورت پتانسیل‌های محدودکننده به هامیلتونی اضافه می‌شوند

$$H_C \mapsto f(x) + V_E(x) + V_I(x)$$

که در آن $V_E(x)$ پتانسیل محدودکننده مربوط به قیود تساوی و $V_I(x)$ پتانسیل محدودکننده مربوط به قیود نابرابری است. این پتانسیل‌ها با اضافه کردن انرژی اضافی در نقاطی که قیود نقض می‌شوند، سیستم را مجبور می‌کنند تا به نواحی‌ای حرکت کند که این قیود را برآورده سازد. همان‌طور که در رابطه (۱۳.۴) نشان داده شد، گرادیان پتانسیل‌ها دینامیک تابع موج را تغییر می‌دهد. این گرادیان، تغییراتی در مکان تابع موج \hat{x} ایجاد می‌کند و آن را به سمت ناحیه‌ای هدایت می‌کند که قیود را ارضا کند. برای اعمال قیود تساوی $g_i(x) = c_i$ ، یک پتانسیل محدودکننده به شکل زیر تعریف می‌شود

$$V_E(x) = \sum_{i=1}^n \lambda (g_i(x) - c_i)^2$$

که در آن λ یک ضریب بزرگ است که شدت تأثیر این قید را تنظیم می‌کند. این پتانسیل یک دره با انرژی کم در نقاطی ایجاد می‌کند که قیود تساوی را برآورده می‌کنند. گرادیان این پتانسیل وقتی قیود ارضا شوند ($g_i(x) = c_i$) صفر می‌شود و انرژی سیستم به حداقل مقدار ممکن می‌رسد. برای اعمال قیود نابرابری $h_j(x) \geq d_j$ از پتانسیل محدودکننده زیر استفاده می‌شود

$$V_I(x) = \sum_{j=1}^m \mathcal{R}[\beta(d_j - h_j(x))]$$

که در آن $\mathcal{R}(x) = \max\{0, x\}$ تابع یکسوساز است که به صورت $\mathcal{R}(x) = \max\{0, x\}$ تعریف می‌شود، همچنین β ضریبی بزرگ است که شدت تأثیر قید نابرابری را تعیین می‌کند. این پتانسیل در نقاطی که قیود برآورده نمی‌شوند، یک شیب مثبت ایجاد می‌کند و سیستم را به سمت ناحیه معتبر هدایت می‌کند. گرادیان این پتانسیل فقط زمانی غیرصفر است که $h_j(x) \geq d_j$ باشد. تابع یکسوساز $\mathcal{R}(x) = \max\{0, x\}$ در پیاده‌سازی‌های عددی و کوانتومی ممکن است به صورت دقیق پیاده‌سازی نشود. بنابراین از تقریب‌های تحلیلی هموار استفاده می‌شود. یکی از انتخاب‌های رایج برای این تقریب،

استفاده از تابع سوئیچ است

$$\mathcal{R}(x) = \xi(x) \equiv x \cdot \sigma(x) \quad , \quad \sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

که در آن $\sigma(x)$ تابع سیگموئید است. اضافه کردن پتانسیل‌های محدودکننده به هامیلتونی هزینه، گرادیان کلی سیستم را به شکل زیر تغییر می‌دهد

$$\nabla H_C = \nabla f(x) + \nabla V_E(x) + \nabla V_I(x)$$

که $\nabla f(x)$ حرکت سیستم را به سمت کمینه تابع هدف هدایت می‌کند و $\nabla V_E(x)$ سیستم را به ناحیه‌ای هدایت می‌کند که قیود تساوی ارضا شود و $\nabla V_I(x)$ دینامیک سیستم را به ناحیه‌ای می‌برد که قیود نابرابری برقرار باشند. این ترکیب تضمین می‌کند که سیستم هم‌زمان تابع هدف را کمینه کرده و قیود مسئله را برآورده می‌کند. این روش، یک چارچوب عمومی برای حل مسائل بهینه‌سازی با قیود در الگوریتم QAOA فراهم می‌کند. با استفاده از پتانسیل‌های محدودکننده و گرادیان‌های اصلاح‌شده، سیستم کوانتومی به‌طور طبیعی به سمت نواحی‌ای هدایت می‌شود که هم تابع هدف کمینه شده و هم قیود مسئله ارضا می‌شوند. انعطاف‌پذیری در انتخاب پتانسیل‌ها و استفاده از تقریب‌های تحلیلی مانند سوئیچ، این الگوریتم را برای مسائل عملی و پیچیده قابل‌اعتماد و کارآمد می‌سازد. اگرچه الگوریتم معرفی‌شده به‌طور خاص برای حل مسائل بهینه‌سازی پیوسته طراحی شده است، اما انعطاف‌پذیری آن به اندازه‌ای است که می‌تواند برای مسائل بهینه‌سازی گسسته نیز مورد استفاده قرار گیرد. یکی از مهم‌ترین کلاس‌های مسائل گسسته که در بسیاری از حوزه‌ها کاربرد دارند، مسائل بهینه‌سازی چندجمله‌ای باینری بدون قید (PUBO) است. الگوریتم QAOA با استفاده از این چارچوب، مسائل بهینه‌سازی گسسته مانند PUBO و QUBO را در فضای پیوسته کدگذاری کرده و حل می‌کند. این فرآیند شامل نگاشت عملگرهای گسسته به عملگرهای پیوسته، تعریف پتانسیل‌های محدودکننده، و تنظیم دقیق پارامترها برای حفظ دینامیک گسسته در فضای پیوسته است. انعطاف‌پذیری در انتخاب پارامترها و هامیلتونی‌ها، این الگوریتم را به ابزاری قدرتمند برای حل مسائل بهینه‌سازی پیچیده در زمینه‌های متنوع تبدیل می‌کند. و در نهایت در رابطه با QAOA و پیچیدگی محاسباتی دو نکته قابل‌توجه وجود دارد. الگوریتم‌های تقریبی بهینه‌سازی کوانتومی، (QAOA) به دلیل ماهیت ابتکاری خود، معمولاً از طریق آزمایش عملکردشان بر روی مسائل خاص ارزیابی می‌شوند. با این حال، الگوریتم گروور که به‌عنوان یک حالت خاص از QAOA قابل‌بازنویسی است، بهبود زمانی در حد مربعی نسبت به الگوریتم‌های کلاسیک ارائه می‌دهد. همچنین مدارهای CV-IQP یکی از قوی‌ترین کلاس‌های محاسبات کوانتومی برای متغیرهای پیوسته هستند. مطالعات نظری نشان داده‌اند که شبیه‌سازی مدارهای CV-IQP با کامپیوترهای کلاسیک در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر نیست، مگر اینکه سلسله‌مراتب چندجمله‌ای به سطح سوم فرو بریزد. بنابراین خروجی مدار CV-IQP^{۲۶} به‌طور اثبات‌شده‌ای

برتری کوانتومی را نشان می‌دهد. به دلیل شباهت QAOA به CV-IQP حتی یک مرحله از الگوریتم QAOA نمی‌تواند به‌طور کارآمد توسط دستگاه‌های کلاسیک شبیه‌سازی شود. برای نمایش شهودی عملکرد الگوریتم، یک مسئله بهینه‌سازی ساده تک‌بعدی را در نظر می‌گیریم. هدف، یافتن مقدار کمینه تابع هزینه $f(x)$ است. این مثال نشان می‌دهد که چگونه یک گام از الگوریتم CV-QAOA، ذره کوانتومی را به سمت نقطه بهینه هدایت می‌کند، که این فرآیند معادل یک گام در الگوریتم گرادیان کاهشی با تکانه است.

• به کارگیری CV-QAOA روی تابع یک‌بعدی

هدف نشان دادن این است که یک لایه CV-QAOA با هامیلتونی هزینه $H_C = f(\hat{x})$ و هامیلتونی اختلاط $H_M = \frac{1}{2}p^2$ رفتار معادل یک گام «گرادیان نزولی با مومنوم» را بر روی مؤلفه‌های تابع موج پیاده‌سازی می‌کند و در نتیجه توزیع پایه مکان $|\psi(x)|^2$ را به سمت نواحی مینیم تابع f هدایت می‌کند. این مثال نشان می‌دهد که چگونه یک گام از الگوریتم CV-QAOA، ذره کوانتومی را به سمت نقطه بهینه هدایت می‌کند، که این فرآیند معادل یک گام در الگوریتم گرادیان کاهشی با تکانه است. تابع هدف یک‌بعدی را به صورت

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

در نظر می‌گیریم. مشتق و نقاط بحرانی این تابع عبارت‌اند از

$$\nabla f(x) = x$$

و نقاط مینیم محلی در $x = 0$ واقع‌اند (و مقدار تابع در این نقاط $f(0) = 0$). هامیلتونی هزینه و اختلاط به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$H_C = f(\hat{x}) = \frac{1}{2}x^2, \quad H_M = \frac{1}{2}p^2$$

فرض می‌کنیم سیستم در حالت اولیه ψ_{in} قرار دارد که یک بسته موج گوسی (حالت همدوس) است که در مکان $x_0 = 2$ متمرکز شده و تکانه اولیه آن صفر است. بنابراین، مقادیر چشم‌داشتی اولیه عبارتند از

$$\langle \hat{x} \rangle_{in} = 2, \quad \langle p \rangle_{in} = 0$$

برای یک گام از الگوریتم ($p = 1$)، پارامترهای زمانی به صورت $\gamma_1 = 0.5$ (مدت زمان تکامل تحت هامیلتونی هزینه)

^{۲۶} Continuous-Variable Instantaneous Quantum Polynomial

و $\beta_1 = 0.5$ (مدت زمان تکامل تحت هامیلتونی اختلاط) انتخاب می‌شود. سپس اثر عملگر یکانی

$$\hat{U}(\gamma_1, \beta_1) = \prod_{j=1}^P e^{-i\beta_1 \hat{H}_M} e^{-i\gamma_1 \hat{H}_C}$$

بر روی مقادیر چشم‌داشتی مکان و تکانه به شکل زیر است. در قدم اول $e^{-i\gamma_1 \hat{H}_C}$ اعمال می‌شود. در این مرحله، سیستم به اندازه γ_1 تحت هامیلتونی هزینه تکامل می‌یابد. تکانه سیستم در جهت گرادیان منفی تابع هزینه تغییر می‌کند. تغییر در مقدار چشم‌داشتی تکانه با تقریب مرتبه اول به شکل زیر در می‌آید

$$\Delta p \approx -\gamma_1 \nabla f(x_{\text{in}}) = -0.5 \times (2) = -1.0$$

از آنجایی که \hat{H}_C تنها به \hat{x} وابسته است، مقدار چشم‌داشتی مکان تغییر نمی‌کند. یعنی ذره کوانتومی در مکان اولیه خود یک "ضربه" در جهت منفی (به سمت نقطه کمینه) دریافت کرده است. در قدم دوم $e^{-i\beta_1 \hat{H}_M}$ اعمال می‌شود. اکنون سیستم به اندازه β_1 تحت هامیلتونی اختلاط تکامل می‌یابد. تغییر در مقدار چشم‌داشتی مکان با تقریب مرتبه اول به شکل زیر در می‌آید

$$\Delta \langle \hat{x} \rangle \approx \beta_1 \langle p \rangle' = 0.5 \times (-1.0) = -0.5$$

از آنجایی که \hat{H}_M تنها به \hat{p} وابسته است، مقدار چشم‌داشتی تکانه در این مرحله تغییر نمی‌کند. پس از این مرحله، مقادیر چشم‌داشتی نهایی - پس از یک گام کامل QAOA - عبارتند از

$$\langle \hat{x} \rangle_{\text{out}} = 2 + (-0.5) = 1.5, \quad \langle p \rangle_{\text{out}} = -1.0$$

پس از یک گام از الگوریتم CV-QAOA، مقدار چشم‌داشتی مکان ذره از $x = 2$ به $x = 1.5$ منتقل شده است که یک حرکت واضح به سمت نقطه کمینه تابع در $x = 0$ می‌باشد. این فرآیند دقیقاً معادل یک گام از الگوریتم گرادیان کاهشی با تکانه است. در متن، $x \rightarrow \hat{x} + \beta \hat{p} - \beta \gamma \nabla f(\hat{x})$ ، هامیلتونی این فرآیند را به صورت کلی توصیف می‌کند. در این مثال با توجه به $p_{\text{in}} = 0$ داریم

$$\langle \hat{x} \rangle_{\text{out}} = \langle x \rangle_{\text{in}} - \beta \gamma \nabla f(x) = 2 - 0.5 \times 0.5 \times 2 = 1.5$$

که دقیقاً با نتیجه گام به گام ما مطابقت دارد. این مثال عددی ساده، به طور شفاف نشان می‌دهد که چگونه دینامیک

کوانتومی حاصل از هامیلتونی‌های هزینه و اختلاط، یک الگوریتم بهینه‌سازی کلاسیک قدرتمند را در سطح کوانتومی شبیه‌سازی می‌کند.

۴.۴ مدل‌های محاسباتی متغیر پیوسته

محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته عمدتاً در دو الگوی مکمل پیاده‌سازی می‌شود یعنی مدل مبتنی بر گیت و مدل مبتنی بر اندازه‌گیری (یک‌طرفه). در مدل مبتنی بر گیت، محاسبات از طریق اعمال دنباله‌ای از گیت‌های گاوسی و غیرگاوسی بر روی حالت‌های اولیه همدوس یا چلانده انجام می‌شود. این رویکرد که به مدارهای کیوبیتی شبیه است، مبنای نظری مستقیمی برای طراحی الگوریتم‌ها فراهم می‌کند، اما پیاده‌سازی تجربی گیت‌های غیرخطی جهانشمول در سیستم‌های خطی مانند اپتیک، چالشی کلیدی محسوب می‌شود. در مقابل، مدل مبتنی بر اندازه‌گیری با چالش‌های اجرای گیت‌های دشوار مقابله می‌کند؛ در این پارادایم، یک حالت خوشه‌ای درهم‌تنیده به عنوان منبع محاسباتی آماده شده و کل محاسبه صرفاً از طریق اندازه‌گیری‌های همدوس متوالی بر روی بخش‌های این شبکه و اعمال تصحیح بازخورد کلاسیکی بر اساس نتایج آنها پیش می‌رود. این روش که به‌طور ذاتی برای سیستم‌های نوری خطی مناسب‌تر است، اجرای عملیاتی و پایدار محاسبات پیچیده را بدون نیاز به گیت‌های غیرخطی لحظه‌ای امکان‌پذیر می‌سازد و اساس بیشتر پیشرفت‌های تجربی اخیر در حوزه پردازش اطلاعات کوانتومی با نور به شمار می‌رود. در این بخش به معرفی این مدل‌های محاسباتی پرداخته می‌شود.

۱.۴.۴ مدل محاسباتی متغیر پیوسته مبتنی بر گیت

اولین مدل محاسباتی که به آن اشاره شده است، مدل محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته مبتنی بر گیت است. محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته مبتنی بر گیت^{۲۷} یا CVQC یک چارچوب اساسی برای محاسبات کوانتومی است که در حوزه متغیرهای پیوسته عمل می‌کند. برای اجرای هر نوع محاسبه کوانتومی دلخواه در چارچوب متغیرهای پیوسته، نیاز به یک مجموعه گیت جهانشمول است. مجموعه گیت جهانی مجموعه‌ای از گیت‌های کوانتومی است که قادر به پیاده‌سازی هر عملیاتی در فضای هیلبرت متغیر پیوسته باشد. در CVQC، محاسبات جهانی به ترکیبی از عملیات گاوسی و حداقل یک عملیات غیرگاوسی متکی است. از جمله عملگرهای گاوسی می‌توان به گیت‌های جابه‌جایی، چلانندگی، چرخشی و تقسیم‌کننده پرتو اشاره کرد و همچنین برای گیت‌های غیرگاوسی می‌توان از گیت فاز مکعبی به عنوان یک مثال نام برد. ترکیب عملیات گاوسی و غیرگاوسی امکان پیاده‌سازی هر نوع تبدیلی را در فضای متغیر پیوسته فراهم می‌کند. بنابراین اگر

^{۲۷} Gate-Based Continuous-Variable Quantum Computing

بخواهیم یک مدل محاسباتی جهانشمول داشته باشیم، باید مجموعه گیت‌هایی که در مدل استفاده می‌شود یک مجموعه جهانشمول باشد تا به وسیله آن‌ها هر نوع محاسباتی را پیاده سازی کرد. مدل مداری یکی از چارچوب‌های اساسی در محاسبات کوانتومی است که در آن محاسبات به صورت توالی‌ای از گیت‌های کوانتومی انجام می‌شود. این مدل که ابتدا برای سیستم‌های گسسته (مانند کیوبیت‌ها) معرفی شد، در محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته (CVQC) نیز با استفاده از متغیرهای پیوسته نظیر مکان و تکانه در فضای فاز گسترش یافته است. در این مدل، عملیات کوانتومی به عنوان مدارهایی از گیت‌های پیوسته در نظر گرفته می‌شوند که بر روی حالات کوانتومی اعمال می‌شوند. این مدل پایه‌ای برای درک چگونگی انجام محاسبات کوانتومی در چارچوب CVQC ارائه می‌دهد. در این مدل محاسبات با آماده‌سازی یک یا چند حالت اولیه آغاز می‌شود. این حالت معمولاً یکی از حالات رایج در سیستم‌های متغیر پیوسته، مانند حالت همدوس یا حالت چلانده یا حالت فوک است. گیت‌ها بلوک‌های سازنده مدارهای کوانتومی هستند که محاسبات را انجام می‌دهند و عملیات در این مدل از طریق گیت‌های متغیر پیوسته اجرا می‌شوند. گیت‌ها از طریق اتصالاتی به هم متصل می‌شوند که توالی عملیات را مشخص می‌کنند. این اتصالات می‌توانند نشان‌دهنده وابستگی زمانی بین گیت‌ها باشند. نتیجه نهایی مدار از طریق اندازه‌گیری بدست می‌آید. خروجی می‌تواند شامل اطلاعات پردازش شده در قالب متغیرهای کوادراتور یا تعداد فوتون‌ها باشد. بسیاری از گیت‌های موردنیاز در این مدل با استفاده از ابزارهای نوری مانند آینه‌های نیمه‌شفاف و تقویت‌کننده‌های نوری به راحتی قابل پیاده‌سازی هستند. همچنین مدارها به صورت ماژولار طراحی می‌شوند و این امکان را فراهم می‌کنند که محاسبات پیچیده‌تر با ترکیب بلوک‌های ساده‌تر انجام شوند. مدل مداری در سیستم‌های متغیر پیوسته قابلیت گسترش به تعداد زیادی از حالات و گیت‌ها را دارد. یک مدار در CVQC را می‌توان به صورت یک دنباله ریاضی از عملگرها نمایش داد که بر حالات اولیه اعمال می‌شوند. به طور کلی، حالت خروجی مدار را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$|\psi_{out}\rangle = U_n \dots U_2 U_1 |\psi_{in}\rangle$$

که در آن U_i عملگر مربوط به گیت i -ام است.

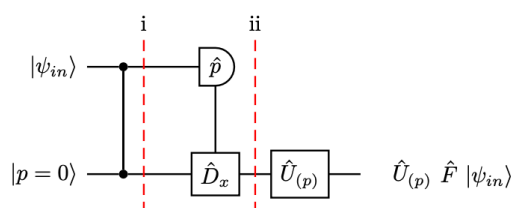
۲.۴.۴ محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته مبتنی بر اندازه‌گیری

مدل‌های متغیر پیوسته مبتنی بر اندازه‌گیری (یک‌طرفه) پارادایمی کاربردی در محاسبات کوانتومی نوری هستند که در آن محاسبات نه با اجرای گیت‌های متوالی، بلکه از طریق اندازه‌گیری‌های متوالی بر روی یک حالت خوشه‌ای درهم‌تنیده انجام می‌شود. در این روش، ابتدا یک شبکه (خوشه) از حالت‌های فشرده شده درهم‌تنیده به عنوان منبع محاسباتی آماده می‌شود. سپس با انجام اندازه‌گیری‌های همدوس روی بخش‌هایی از این شبکه و اعمال تصحیح مبتنی بر بازخورد کلاسیکی بر اساس نتایج اندازه‌گیری، عملیات محاسباتی موردنظر به طور قطعی اجرا می‌گردد. این رویکرد به ویژه در اپتیک کوانتومی

مزیت بزرگی دارد، زیرا ساخت حالت‌های خوشه‌ای و انجام اندازه‌گیری‌های خطی، از اجرای گیت‌های منطقی پیچیده، به‌طور تجربی ساده‌تر و پایدارتر است و مبنای بسیاری از آزمایش‌های پیشرفته در شبیه‌سازی کوانتومی و پردازش اطلاعات نوری محسوب می‌شود. برای درک رویکرد محاسبات مبتنی بر اندازه‌گیری ابتدا مدار نیمه‌فرابرد را به یاد آورید. اهمیت مدار نیمه‌فرابرد از این جهت بود که در نهایت خروجی آن تبدیل فوری به حالت ورودی بود. یعنی

$$|\psi_{out}\rangle = \hat{\mathcal{F}} |\psi_{in}\rangle$$

حال فرض کنید که عملگر یکانی مانند $U_{(p)}$ که تنها تابعی از کوادراتور تکانه است در انتهای مدار اعمال می‌کنیم مانند شکل زیر



شکل ۱.۴: استفاده از مدار نیمه‌فرابرد در محاسبات کوانتومی. در این شکل عملگر یکانی دلخواه $\hat{U}_{(p)}$ در انتهای مدار اعمال شده است

اگر حالت کمکی ما ویژه حالت عملگر تکانه باشد، می‌توان حالت خروجی را به شکل زیر نوشت

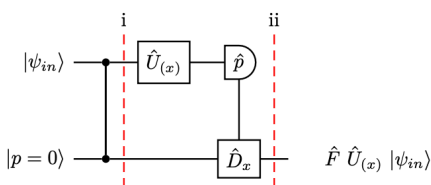
$$|\psi_{out}\rangle = \hat{U}_{(p)} \hat{\mathcal{F}} |\psi_{in}\rangle$$

چون $U_{(p)}$ که تنها تابعی از کوادراتور تکانه است، اگر با عملگر تبدیل فوری جابه‌جا شود، در نهایت داریم

$$|\psi_{out}\rangle = \hat{U}_{(p)} \hat{\mathcal{F}} |\psi_{in}\rangle = \hat{\mathcal{F}} \hat{U}_{(x)} |\psi_{in}\rangle$$

پس اعمال $\hat{U}_{(p)}$ در انتهای مدار نیمه‌فرابرد، معادل با اعمال عملگر $\hat{U}_{(x)}$ به حالت ورودی است؛ یعنی ورودی مدار نیمه‌فرابرد $\hat{U}_{(x)} |\psi_{in}\rangle$ باشد. از طرفی عملگر یکانی CZ فقط به کوادراتور مکان x وابسته است بنابراین عملگر $\hat{U}_{(x)}$ با عملگر CZ جابه‌جا می‌شود. مدار شکل ۱.۴ بصورت شکل ۲.۴ زیر تغییر می‌کند

این رابطه نشان می‌دهد که می‌توان عملیات $\hat{U}_{(p)}$ را به‌جای خروجی مدار، در بخش اندازه‌گیری اعمال کرد. به عبارت دیگر، اگر مبنای اندازه‌گیری تغییر کند، به‌جای اعمال $\hat{U}_{(x)}$ روی حالت کوانتومی، اثر آن در نتایج اندازه‌گیری منعکس

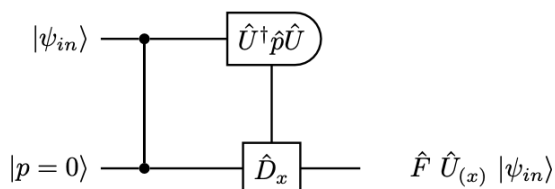


شکل ۲.۴: استفاده از مدار نیمه‌فرابرد در محاسبات کوانتومی. در این شکل عملگر یکانی از انتهای مدار به ابتدای مدار منتقل شده است

می‌شود. این تغییر مبنای اندازه‌گیری را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$m_p \hat{U}_{(x)}^\dagger |p = m_p\rangle = \left[\hat{U}_{(x)}^\dagger p \hat{U}_{(x)} \right] \hat{U}_{(x)}^\dagger |p = m_p\rangle$$

با توجه به یکانی بودن عملگر $\hat{U}_{(x)}$ بدیهی است که دو طرف این رابطه با یکدیگر برابر هستند. این معادله نشان می‌دهد که اعمال $\hat{U}_{(x)}$ روی حالت قبل از اندازه‌گیری، معادل استفاده از یک تصویرگر تغییر یافته در اندازه‌گیری است یا به عبارت دیگر اعمال $\hat{U}_{(x)}$ قبل از اندازه‌گیری معادل با تغییر پایه‌های اندازه‌گیری است. مدار این مرحله معادل با شکل ۳.۴ است. پس به طور خلاصه یک عملگر یکانی دلخواه بر روی حالت ورودی اعمال می‌شد و دیده شد که این عملگر را می‌توان با



شکل ۳.۴: استفاده از مدار نیمه‌فرابرد در محاسبات کوانتومی. در این شکل عملگر یکانی در قلب اندازه‌گیری جای گرفته است

تغییر در پایه‌های اندازه‌گیری پیاده‌سازی کرد. حال اگر بتوان با استفاده از تغییر عملگر دلخواه \hat{U} مجموعه‌ای از گیت‌های جهانشمول را به عنوان خروجی دریافت کرد، آنگاه با استفاده از مدار نیمه‌فرابرد می‌توان محاسبات کوانتومی جهانشمول را پیاده‌سازی کرد. برای این منظور نیازمند تولید عملگرهای جابه‌جایی، برش^{۲۸}، فاز مکعبی و تبدیل فوریه هستیم. مدار نیمه‌فرابرد، تبدیل فوریه را تولید می‌کند، یعنی خروجی مدار تبدیل فوریه است. با انتخاب

$$\hat{U}_{(x)} = D_p(m_p) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} m_p \hat{x}\right) \quad (15.4)$$

^{۲۸} Shear operation

که در آن \hat{x} عملگر مکان و m_p مقدار جابه‌جایی است، مقدار $\hat{U}_{(x)}^\dagger \hat{p} \hat{U}_{(x)}$ به شکل زیر بدست می‌آید. فرض کنید $A = \frac{i}{\hbar} m_p \hat{x}$ و $B = \hat{p}$ ، با استفاده از لم بیکر-کمپل-هاسدورف داریم

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{p}] = \left[\frac{i}{\hbar} m_p \hat{x}, \hat{p} \right] = \frac{i}{\hbar} m_p [\hat{x}, \hat{p}] = \frac{i}{\hbar} m_p \cdot i\hbar = -m_p$$

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{p}]] = \left[\frac{i}{\hbar} m_p \hat{x}, -m_p \right] = 0$$

$$e^{\hat{A}} \hat{p} e^{-\hat{A}} = \hat{p} + [\hat{A}, \hat{p}] = \hat{p} - m_p$$

بنابراین

$$\hat{U}_{(x)}^\dagger \hat{p} \hat{U}_{(x)} = \hat{D}_{(x)}^\dagger \hat{p} \hat{D}_{(x)} = \hat{p} + m_p$$

که نشان می‌دهد با انتخاب $\hat{U}_{(x)}$ به شکل رابطه (۱۵.۴) به راحتی می‌توان عملگر جابه‌جایی را ساخت. عملگر بعدی که برای محاسبات کوانتومی جهانشمول به آن نیاز داریم عملگر برش است. با در نظر گرفتن

$$\hat{U}_{(x)} = P(\gamma) = \exp\left(\frac{i}{2\hbar} \gamma \hat{x}^2\right)$$

همانند حالت قبل با انتخاب $A = \frac{i}{2\hbar} \gamma \hat{x}^2$ و $B = \hat{p}$ ، همچنین استفاده از لم بیکر-کمپل-هاسدورف

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{p}] = \left[\frac{i}{2\hbar} \gamma \hat{x}^2, \hat{p} \right] = \frac{i}{2\hbar} \gamma [\hat{x}^2, \hat{p}] = \frac{i}{2\hbar} \gamma \cdot 2i\hbar \hat{x} = -\gamma \hat{x}$$

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{p}]] = \left[\frac{i}{2\hbar} \gamma \hat{x}^2, -\gamma \hat{x} \right] = 0$$

$$e^{\hat{A}} \hat{p} e^{-\hat{A}} = \hat{p} + [\hat{A}, \hat{p}] = \hat{p} - \gamma \hat{x}$$

بنابراین

$$\hat{U}_{(x)}^\dagger \hat{p} \hat{U}_{(x)} = \hat{p} + \gamma \hat{x}$$

در آخرین قدم اگر

$$\hat{U}_{(x)} = U(\gamma) = \exp\left(\frac{i}{3\hbar}\gamma\hat{x}^3\right)$$

انتخاب شود، همانند محاسبات قبلی می‌توان به رابطه زیر رسید

$$\hat{U}_{(x)}^\dagger \hat{p} \hat{U}_{(x)} = \hat{p} + \gamma \hat{x}^2 \quad (16.4)$$

در اینجا نکته‌ای که وجود دارد این است که اندازه‌گیری‌هایی که در مدار نیمه‌فرابرد وجود دارد، اندازه‌گیری هموداین است و ما تنها می‌توان عملیات گاوسی را با استفاده از مدار نیمه‌فرابرد پیاده‌سازی کرد. این به این دلیل است که اندازه‌گیری‌های گاوسی نمی‌توانند غیرگاوسی را وارد سیستم کنند. پس با وجود مزایایی از جمله اینکه این مدارها نسبت به مدارهای فرابرد کامل ساده‌تر هستند و برای عملیات پایه مانند تبدیل فوریه مناسب‌اند اما به دلیل عدم توانایی در ساخت عملگرهای غیر گاوسی نمی‌توانند به عنوان یک رویکرد محاسباتی جهان‌شمول مورد استفاده قرارگیرد. عملیات غیرگاوسی نیاز به اندازه‌گیری در یک پایه غیرمتعارف دارد یا باید از یک مدار کمکی برای اعمال این تغییرات استفاده شود.

اکنون که با استفاده از مدار نیمه‌فرابرد نمی‌توان محاسبات جهان‌شمول انجام داد و تمامی عملگرهای موردنیاز را ساخت به سراغ مدار فرابرد کامل می‌رویم، هدف این است که مشخص شود با مدار فرابرد کامل می‌توان هر عملگری را ساخت یا خیر. مدار فرابرد کامل از یک منبع دو-مدی، اندازه‌گیری‌های هموداین و عملیات پیشخور تشکیل شده است. این مدار امکان انتقال یک حالت کوانتومی از یک مد ورودی به مد خروجی را فراهم می‌کند، در حالی که نوع عملیات اعمال‌شده بر این حالت به پایه اندازه‌گیری و تنظیمات منبع بستگی دارد.

فرض کنید که اندازه‌گیری‌های هموداین مدار فرابرد کامل، با تغییر پایه‌ای به شکل $\hat{x}_1(\theta_1)$ و $\hat{x}_2(\theta_2)$ اصلاح شده است که در آن $\hat{x}(\theta) = \hat{x} \cos \theta + \hat{p} \sin \theta$ و $\theta_1 \neq \theta_2$ در این صورت رابطه ورودی-خروجی مدار به شکل زیر بدست می‌آید

$$\hat{q}_{out} = V(\theta_+, \theta_-) \hat{q}_{in} + \begin{pmatrix} \hat{x}_B - \hat{x}_A \\ \hat{p}_B - \hat{p}_A \end{pmatrix} \quad (17.4)$$

در این رابطه $q = (x \ p)^T$ و $V(\theta_+, \theta_-)$ برابر است با

$$V(\theta_+, \theta_-) = R\left(\theta_+ - \frac{\pi}{2}\right) S(\ln \tan \theta_-) R(\theta_+)$$

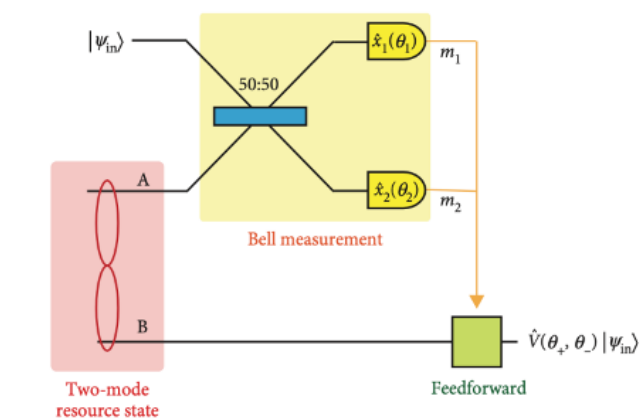
با

$$\theta_{\pm} = \frac{(\theta_2 \pm \theta_1)}{2}$$

در اینجا $R(\theta)$ ماتریس چرخش و $S(r)$ ماتریس چلانندگی است که به صورت زیر عمل می‌کند

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad S(r) = \begin{pmatrix} e^{-r} & 0 \\ 0 & e^r \end{pmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌شود در این رابطه عملگرهای چرخش و چلانندگی که جزو عملگرهای جهان‌شمول بودند وجود دارند همچنین با تغییر پایه اندازه‌گیری به پایه‌های مختلف، ماتریس $V(\theta_+, \theta_-)$ به‌طور مؤثر عملیات‌هایی مانند چرخش، فشردسازی و تغییر در پایه اندازه‌گیری را اعمال می‌کند. این تغییرات باعث می‌شود که ورودی و خروجی حالت کوانتومی به‌طور غیرمستقیم از هم جدا شوند و عملیات‌های پیچیده‌تری مانند گیت‌های کوانتومی گوسی و غیرگوسی پیاده‌سازی شوند. به‌طور خلاصه، این قضیه نشان می‌دهد که چگونه با تغییر پایه اندازه‌گیری در مدار فرابرد، می‌توان عملیات‌های مختلفی را بر حالت‌های ورودی اعمال کرد و آن‌ها را به خروجی‌ها انتقال داد. این تغییرات در اندازه‌گیری‌ها می‌توانند به پیاده‌سازی گیت‌های پیچیده و غیرگوسی منجر شوند که در بسیاری از الگوریتم‌های کوانتومی پیشرفته مورد استفاده قرار می‌گیرند. شکل ۴.۴ مدار فرابرد اصلاح شده را نشان می‌دهد. در بخش بعدی رویکرد محاسبات کوانتومی با استفاده از حالت‌های خوشه‌ای معرفی شده است.



شکل ۴.۴: استفاده از مدار فرابرد کامل در محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری

۳.۴.۴ محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته مبتنی بر حالت‌های خوشه‌ای

حالت‌های خوشه‌ای یکی از مباحث کلیدی در محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری است. در این بخش حالت‌های خوشه‌ای به عنوان یک ابزار برای انجام عملیات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری با استفاده از اندازه‌گیری‌ها و پیش پردازش‌های کلاسیکی معرفی شده‌اند. این حالت‌ها از اهمیت بالایی در توسعه الگوریتم‌های کوانتومی برخوردارند و به‌ویژه در سیستم‌های محاسباتی مبتنی بر خوشه‌های کوانتومی و محاسبات مبتنی بر مدارهای انتقال کوانتومی کاربرد دارند. حالت‌های خوشه‌ای مجموعه‌ای از حالت‌های درهم‌تنیده چندمدی هستند که به‌طور خاص در محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری کاربرد دارند. در این سیستم‌ها، اطلاعات کوانتومی نه تنها به وسیله‌ی گیت‌های کوانتومی بلکه از طریق اندازه‌گیری‌های مختلف بر روی حالت‌های خوشه‌ای استخراج می‌شود. به عبارت ساده، حالت‌های خوشه‌ای مجموعه‌ای از سیستم‌های کوانتومی هستند که به‌طور غیرمحلی به هم مرتبط شده‌اند. در یک خوشه کوانتومی، همه اجزای سیستم با یکدیگر درهم‌تنیده هستند و برای انجام هر گونه محاسبه، اندازه‌گیری‌هایی روی این حالت‌ها انجام می‌شود. محاسبات کوانتومی حالت خوشه‌ای بر پایه اجرای عملیات کوانتومی از طریق اندازه‌گیری‌های محلی روی یک حالت درهم‌تنیده چندکیوبیت، معروف به حالت گراف، بنا شده است. حالت‌های گراف می‌توانند توسط یک گراف $G = (V, E)$ توصیف شوند، که در آن V مجموعه‌ای از رأس‌ها و E مجموعه‌ای از یال‌ها است. رأس‌ها نشان‌دهنده کیوبیت‌ها هستند و یال‌ها ارتباط بین آن‌ها را نشان می‌دهند. هر رأس گراف ابتدا به حالت $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ مقداردهی می‌شود سپس یک گیت CSIGN یا CPHASE برای هر یال اعمال می‌شود.

چارچوب تثبیت کننده^{۲۹}: در گراف‌های گسسته، تثبیت کننده‌ها عملگرهایی هستند که یک حالت کوانتومی را ثابت نگه می‌دارند. این مجموعه یک گروه آبدی تشکیل می‌دهند.

$$K|\phi\rangle = |\phi\rangle$$

که K یک عملگر پایدارکننده و $|\phi\rangle$ حالت گراف کیوبیت‌ها است. این عملگرها معمولاً از ترکیب عملگرهای پاولی مانند X و Z ساخته می‌شوند. برای یک گراف با n رأس، مجموعه $\{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ یک گروه آبدی تشکیل می‌دهند که به عنوان گروه تثبیت کننده شناخته می‌شود. در نسخه متغیر پیوسته، حالت‌های خوشه‌ای مشابه با متغیرهای گسسته تعریف می‌شوند، اما از حالت‌های پیوسته مانند $|0\rangle_p$ به جای $|+\rangle$ و عملیات CZ برای ایجاد درهم‌تنیدگی استفاده می‌شود. اندازه‌گیری‌ها در پایه‌های p و q انجام می‌شوند که معادل اندازه‌گیری‌های X و Z در مدل متغیر گسسته هستند. هر رأس گراف نشان‌دهنده یک کیومد است و هر یال گراف نشان‌دهنده یک تعامل درهم‌تنیده بین دو مود است که توسط عملگر

^{۲۹} Stabilizer formalism

CZ اجرا می‌شود. مشابه حالت های گراف کیوبیت، فرمالیسم تثبیت کننده برای سیستم های CV می تواند برای مشخص کردن هر حالت گراف CV به طور کامل استفاده شود. برای حالت های گراف CV تثبیت کننده ها به صورت زیر تعریف می شوند.

$$K_i = X_i(s) \prod_{j \in N(i)} Z_j(s) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

که $N(i)$ مجموعه همسایه های رأس i است، همچنین $X_i(s)$ و $Z_j(s)$ عملگرهای جابه جایی در فضای مکان و تکانه هستند. برای توصیف بهتر، مفهوم باطل کننده به عنوان یک مجموعه خطی از عملگرهای هرمیتی معرفی می شود که حالت گراف را توصیف می کنند. فضای باطل کننده یک حالت گراف متغیر پیوسته $|\phi\rangle$ با n مود، یک فضای برداری n -بعدی است که از مجموعه ای از عملگرهای هرمیتی H_i ساخته می شود

$$H_i = p_i \sum_{j \in N(i)} q_j \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

که در آن q_j عملگر مکان برای مود j و p_i عملگر تکانه برای مود i است. هر ترکیب خطی از باطل کننده های H_i یعنی $H = \sum_i c_i H_i$ نیز یک باطل کننده معتبر است که شرط $H|\phi\rangle = 0$ را ارضا می کند. باطل کننده ها ابزار اصلی برای تحلیل ویژگی های گراف CV هستند. به عنوان مثال اتصال یا حذف یال ها و رأس ها مستقیماً در باطل کننده ها بازتاب پیدا می کند. هر گراف CV به طور کامل با مجموعه باطل کننده هایش تعریف می شود. در فصل اول گفته شد که تابع ویگنر ابزاری است که یک حالت کوانتومی را در فضای فاز (q, p) توصیف می کند. برای یک گراف CV ایده آل با n مود، تابع ویگنر به صورت زیر تعریف می شود

$$W(q, p) = \prod_{i=1}^n \epsilon(q_i) \delta(H_i)$$

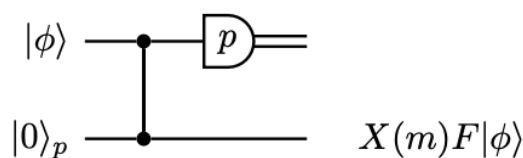
که $\epsilon(q_i)$ توزیع یکنواخت در فضای مکان است و $\delta(H_i)$ وزیع دلتا که شرایط باطل کننده ها را اعمال می کند. برای گراف های CV ایده آل، تابع ویگنر بسیار تکین است و در گراف های غیرایده آل (مثلاً با فشردسازی محدود)، تابع ویگنر با جایگزینی $\delta(H_i)$ توسط یک توزیع گاوسی به روزرسانی می شود. اندازه گیری های موضعی (q یا p) ابزار اصلی برای تغییر گراف های CV و پیاده سازی عملیات کوانتومی هستند. با اندازه گیری q_i روی مود i رأس i و تمام یال های متصل به آن حذف می شوند. اندازه گیری تکانه امکان کوتاه کردن گراف ها را فراهم می کند همچنین به طور خاص، برای گراف های خطی، اندازه گیری p در رأس میانی باعث حذف آن رأس و اتصال مستقیم دو رأس همسایه می شود. در حالت های گراف تعمیم یافته، به جای استفاده از حالت های $|0\rangle_p$ ، می توان از حالت های عمومی تر $|\phi_i\rangle$ استفاده کرد. تابع ویگنر برای این

حالت‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود

$$W(q, p) = \prod_{i=1}^n W_i(q_i, p_i)$$

که $W_i(q_i, p_i)$ تابع ویگنر حالت $|\phi_i\rangle$ است. اکنون که حالت‌های خوشه‌ای یا حالت‌های گراف معرفی شد در ادامه به توضیح نحوه محاسبات کوانتومی با استفاده از این حالت‌ها پرداخته می‌شود اما قبل از شروع بحث اصلی، اندازه‌گیری تطبیقی معرفی می‌شود. اندازه‌گیری‌های تطبیقی یکی از اجزای کلیدی محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری (MBQC) هستند. در این روش، انتخاب پایه اندازه‌گیری برای هر گره از گراف به نتایج اندازه‌گیری‌های قبلی بستگی دارد. این فرآیند برای تضمین اجرای صحیح عملیات یکانی ضروری است. در محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری، نتایج اندازه‌گیری‌ها حالت‌های سیستم باقی‌مانده را تعیین می‌کنند، برای جبران اثر نتایج تصادفی اندازه‌گیری‌ها، باید پایه اندازه‌گیری گره‌های بعدی تطبیق داده شود. پس از اندازه‌گیری یک گره، حالت کیومود باقی‌مانده دچار تغییراتی می‌شود (مانند جابه‌جایی یا چرخش)، این تغییرات باید با انتخاب مناسب پایه اندازه‌گیری‌های بعدی جبران شوند. فرض کنید می‌خواهیم یک عملیات گوسی ساده، مثل چرخش حالت $R(\theta)$ ، را اجرا کنیم: ابتدا گره‌ای در گراف اندازه‌گیری می‌شود و نتیجه آن، مثلاً m ، ثبت می‌شود؛ این نتیجه بر چرخش حالت خروجی تأثیر می‌گذارد اما برای اینکه خروجی درست باشد، پایه اندازه‌گیری گره بعدی باید به گونه‌ای تغییر کند که این اثر جبران شود. در سیستم‌های نوری اندازه‌گیری تطبیقی معمولاً با استفاده از آشکارسازهای هموداین انجام می‌شود سپس نتایج اندازه‌گیری به سیستم کنترل داده می‌شود و این سیستم تنظیمات آشکارسازها (مانند زاویه چرخش پایه) را برای اندازه‌گیری بعدی اصلاح می‌کند. اندازه‌گیری‌های تطبیقی تضمین می‌کنند که حتی در حضور نویزهای اندازه‌گیری و اثرات غیرقطعی حالت‌های کوانتومی، محاسبات صحیح و دقیق باقی می‌مانند. بدون این فرآیند، بسیاری از گیت‌های ضروری (خصوصاً غیرگوسی) قابل پیاده‌سازی نیستند. برای انجام محاسبات کوانتومی با استفاده از گراف‌ها در قدم اول حالت‌های ورودی را آماده می‌کنیم. کیومودهایی که به گره‌های ورودی V_{in} اختصاص داده شده‌اند، حالت اولیه یا حالت ورودی $|\phi\rangle$ را رمزگذاری می‌کنند. این حالت ممکن است یک حالت چلانده‌شده، یک حالت همدوس یا هر حالت کوانتومی دیگر باشد. سایر گره‌ها (غیر ورودی‌ها) با یک حالت صفر در پایه تکانه $|0\rangle_p$ مقداردهی اولیه می‌شوند. این حالت صفر معمولاً حالت خلأ است که در فضای فشرده‌شده جایگزین شده است. قدم دوم اعمال گیت CZ است. اثر این گیت ایجاد درهم‌تنیدگی بین دو کیومود است و حالت خروجی دو کیومود وابستگی متقابل بین مقادیر q و p پیدا می‌کند. گیت‌های CZ برای تمام یال‌های E موجود در گراف $G = (V, E)$ اعمال می‌شوند، همچنین ترتیب اعمال این گیت‌ها اهمیتی ندارد، زیرا گیت‌های CZ جابجاپذیر هستند. هدف این است که یک حالت گراف پیوسته تولید شود. این حالت پایه و منبع محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری است. قدم سوم انتخاب اندازه‌گیری است.

اگر اندازه گیری در پایه p انجام شود، عملگر اندازه گیری به شکل $p + f(q)$ است و اگر اندازه گیری در پایه q انجام شود، عملگر به صورت $q + f(p)$ تعریف می شود که $f(q)$ یا $f(p)$ معمولاً چندجمله ای هایی از متغیرهای q و p هستند که به عملیات مورد نظر وابسته اند. گره هایی که اندازه گیری می شوند، از گراف حذف می شوند و اندازه گیری ها عملیات مورد نظر را بر روی کیومودهای باقی مانده اعمال می کنند. انتخاب پایه اندازه گیری به نتایج اندازه گیری های قبلی وابسته است همچنین سیستم کنترل این اطلاعات را پردازش کرده و پایه اندازه گیری بعدی را تنظیم می کند. آخرین قدم در این راستا رمزگذاری حالت خروجی است. پس از اعمال اندازه گیری ها گره های باقی مانده در مجموعه V_{out} حاوی حالت خروجی هستند. حالت انتهایی معادل با این است که عملگر یکانی همچون U بر روی حالت ورودی اعمال شده باشد $U|\phi\rangle$. اگر با استفاده از مجموعه اندازه گیری هایی که انجام داده می شود بتوان مجموعه از گیت های جهان شمول را تولید کرد آنگاه می توان گفت که با استفاده از مدل محاسباتی مبتنی بر اندازه گیری، می توان محاسبات کوانتومی جهان شمول انجام داد. پیاده سازی گیت های تک مدی گاوسی و همچنین گیت CZ بسیار سراسر است. برای پیاده سازی گیت های تک مدی گاوسی از یک گراف دو گره ای استفاده می شود. با انتخاب حالت ورودی، اعمال گیت CZ و همچنین اندازه گیری، گراف دو گره ای ما شبیه به شکل ۵.۴ در می آید.



شکل ۵.۴: گراف دو گره ای که بر آن گیت CZ و همچنین اندازه گیری اعمال شده است.

این دقیقاً همان مدار نیمه فرابرد است که در بخش قبلی اثبات شد که به وسیله ی این مدار می توان به راحتی گیت های تک مدی گاوسی را تولید کرد. حال برای نشان دادن جهان شمول بودن محاسبات کافی است تا گیت های غیر گاوسی و CZ تولید شود. برای پیاده سازی گیت CZ کافی است دو گره را به عنوان ورودی و خروجی در گراف تعریف کنیم، گراف دو گره ای با یال بین آن ها به صورت پیش فرض یک گیت CZ را اجرا می کند. پس هیچ اندازه گیری خاصی نیاز نیست بنابراین پیاده سازی گیت CZ در این مدل کاملاً ساده و مستقیم است و نیازی به اقدامات اضافی ندارد. برای جهان شمول بودن به حداقل یک گیت غیر گاوسی نیاز داریم، گیت فاز مکعبی می تواند تمام عملیات غیر گاوسی تک مدی را ممکن کند. این گیت اجازه می دهد ویژگی های غیر خطی در فضای فاز اعمال شوند. این گیت نمی تواند صرفاً با اندازه گیری های ساده q یا p اجرا شود. بلکه به پایه اندازه گیری پیچیده تری نیاز دارد. برای پیاده سازی گیت فاز مکعبی، از یک گراف سه گره ای استفاده می کنیم. یک گره برای ورودی، یک گره میانی و یک گره خروجی که حالت نهایی را نگه می دارد. اگر به خاطر

داشته باشید در بخش قبلی که محاسبه بر اساس مدار نیمه‌فرابرد توضیح داده شد، گفته شد که در مدار نیمه‌فرابرد محدود به اندازه‌گیری‌های گاوسی هستیم اما در ابتدای بخش، جایی که پیاده‌سازی گراف‌ها توضیح داده شد، اشاره شد که در قسمت اندازه‌گیری مجاز به استفاده از اندازه‌گیری‌هایی هستیم که معمولاً چندجمله‌ای‌هایی از متغیرهای q و p هستند که به عملیات مورد نظر وابسته‌اند. بنابراین برخلاف مدار نیمه‌فرابرد این دفعه می‌توان اندازه‌گیری $\hat{p} + \gamma \hat{x}^2$ را اجرا کرد. این اندازه‌گیری باعث می‌شود که در حالت خروجی اثر گیت فاز مکعبی دیده شود. بنابراین این مدل محاسبات جهان‌شمول است، زیرا می‌تواند هر عملیات یکانی دلخواه را با استفاده از اندازه‌گیری‌های محلی و تطبیقی پیاده‌سازی کند.

۴.۴.۴ مدل محاسبات کوانتومی ترکیبی

محاسبات کوانتومی ترکیبی، سیستم‌های متغیر گسسته (DV) (کیوبیت) را با سیستم‌های متغیر پیوسته (CV) ترکیب می‌کند تا از نقاط قوت هر دو پارادایم استفاده کند. این ادغام به محققان اجازه می‌دهد تا سیستم‌های کوانتومی قدرتمند و همه‌کاره ایجاد کنند. مدل‌های هیبریدی با هدف ترکیب این دو رویکرد، ساختاری انعطاف‌پذیر و قدرتمند ایجاد می‌کنند که می‌تواند محدودیت‌های هر کدام از این سیستم‌ها را کاهش دهد. در این مدل اطلاعات می‌توانند به طور هم‌زمان در سیستم‌های CV و DV کدگذاری شوند. برای مثال: سیستم‌های CV ممکن است اطلاعات پیوسته (مثل فاز یک میدان نوری) را حمل کنند، در حالی که سیستم‌های DV می‌توانند نشان‌دهنده کیوبیت‌های منطقی باشند (مثل حضور یا عدم حضور فوتون). مثال: حالت (GKP) گوتسمن-کیتایف-پرسکیل یک کیوبیت منطقی را در یک سیستم CV کدگذاری می‌کند. مدل‌های هیبریدی محاسبات کوانتومی نقشی کلیدی در آینده فناوری کوانتومی ایفا خواهند کرد. این مدل‌ها با ترکیب کارایی و مقیاس‌پذیری سیستم‌های CV و دقت و قابلیت اطمینان سیستم‌های DV، به پیشرفت این فناوری کمک می‌کنند.

پیوست

موضوع غالب برای تلاش های نرم افزاری کوانتومی، هدف قرار دادن دستگاه های کوانتومی مبتنی بر کیوبیت است. یکی از رویکردهای برجسته، مدل متغیر پیوسته (CV) محاسبات کوانتومی است. در مدل CV، واحد پردازش اطلاعات پایه یک حالت بوزونیک بی بعدی است که آن را به ویژه برای اجراها و کاربردهای مبتنی بر نور مناسب می کند. مدل CV قدرت محاسباتی مدل کیوبیت را حفظ می کند، در حالی که تعدادی ویژگی منحصر به فرد را ارائه می دهد. به عنوان مثال، مدل CV برای شبیه سازی سیستم های بوزونیک (میدان های الکترومغناطیسی، اتم های به دام افتاده، نوسان گرهای هارمونیک، چگالش های بوز-انیشتین، فونون ها یا تشدیدگرهای نوری مکانیکی) و برای تنظیماتی که در آن عملگرهای کوانتومی پیوسته - مانند مکان و تکانه - مناسب هستند، قابل ارائه است. حتی در محاسبات کلاسیک، پیشرفت های اخیر از یادگیری عمیق، قدرت و انعطاف پذیری نمایش مستمر محاسبات را در مقایسه با مدل محاسباتی گسسته که از لحاظ تاریخی غالب بوده، نشان داده اند.

Strawberry Fields نام یک معماری نرم افزار منبع باز در زمینه محاسبات کوانتومی فوتونیک است که توسط شرکت Xanadu در شهر تورنتو، کانادا در سال ۲۰۱۹ توسعه یافت. این پلتفرم، که تحت لیسانس آپاچی نسخه ۰.۲ منتشر شده، به عنوان یک بستر نرم افزاری کوانتومی عمل می کند و به زبان برنامه نویسی پایتون پیاده سازی شده است. متمرکز بر مدل محاسباتی CV، ویژگی برجسته آن یک زبان برنامه نویسی کوانتومی نوآورانه به نام Blackbird می باشد. برای ایجاد زمینه سخت افزار محاسباتی کوانتومی فوتونیک آینده، Strawberry Fields همچنین شامل مجموعه ای از سه بک-اند شبیه ساز کوانتومی CV است که با استفاده از NumPy و TensorFlow پیاده سازی شده اند. Strawberry Fields دارای یک موتور داخلی برای تبدیل برنامه های بلک برد برای اجرا در هر یک از شبیه سازهای بک-اند یا در صورت موجود بودن، بر روی کامپیوترهای کوانتومی فوتونیک است. برای همراهی با کتابخانه، یک سرویس آنلاین برای کاوش تعاملی و شبیه سازی مدارهای CV موجود است و اولین چارچوب نرم افزار کوانتومی است که از محاسبات کوانتومی فوتونیک با متغیرهای پیوسته پشتیبانی می کند. این پلتفرم از سه جزء اصلی تشکیل شده است:

- یک API برای برنامه نویسی کوانتومی بر اساس یک زبان ساده به نام بلک برد.

● مجموعه ای از سه کامپیوتر کوانتومی مجازی بک-اند ، ساخته شده در NumPy و TensorFlow که هر کدام کاربردهای تخصصی را هدف قرار می دهند.

● موتوری که می تواند برنامه های نوشته شده به بلک برد را در بک-اندهای مختلف (از جمله سه شبیه ساز تعبیه شده، و در آینده نزدیک پردازنده های اطلاعات کوانتومی فوتونیک) کامپایل کند.

این کتابخانه همچنین شامل نمونه هایی از چندین الگوریتم ، از جمله فرابرد ، نمونه برداری بوزونی (گاوسی) ، چند جمله ای کوانتومی لحظه ای ^{۳۰} ، شبیه سازی هامیلتونی و بهینه سازی مدار کوانتومی متغیر است. در معماری strawberry fields دو شبیه ساز عددی ارائه شده است. یک بک اند گاوسی و یک بک اند مبتنی بر Fock. این دو فرمول به دلیل استفاده از فضای بی نهایت هیلبرت برای مدل CV محاسبات کوانتومی منحصر به فرد هستند و چالش های فنی خاص خود را دارند.

● بک اند گاوسی روش ها و توابع پیشرفته ای را برای محاسبه وفاداری و احتمالات حالت فوک، که شامل محاسبات هافنیان ^{۳۱} کلاسیک غیر قابل حل است، ارائه می کند.

● بک اند فوک اجازه می دهد تا عملیاتی مانند فشردن سازی و تقسیم پرتوها در پایه فوک انجام شود.

مجموعه ای از تجزیه مدارهای مهم را که در محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته ظاهر می شوند - مانند تجزیه Williamson ، Bloch-Messiah و Clements را ارائه می کند. بک-اند مبتنی بر فوک که با استفاده از کتابخانه یادگیری ماشینی TensorFlow نوشته شده است، امکان محاسبات نمادین ، تمایز خودکار و پس انتشار را از طریق شبیه سازی های کوانتومی CV فراهم می کند.

تمامی موارد مورد نیاز در محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته شامل تعریف کیومد، گیت ها و اندازه گیری در این کتابخانه قرار داده شده است . برای دسترسی به فایل نوت بوک آموزش این کتابخانه می توانید به لینک زیر مراجعه کنید.

<https://github.com/AriaQuanta/Introduction-to-Continuous-Variable-Quantum-Computing>

^{۳۰} Instantaneous quantum polynomial

^{۳۱} Hafnian

- [1] Nielsen, M.A. and I.L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*. 2010: Cambridge university press.
- [2] Shor, P.W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. in *Proceedings 35th annual symposium on foundations of computer science*. 1994. Ieee.
- [3] Grover, L.K. A fast quantum mechanical algorithm for database search. in *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing*. 1996.
- [4] Monroe, C. and J. Kim, Scaling the ion trap quantum processor. *Science*, 2013. 339(6124): p. 1164–1169.
- [5] Braunstein, S.L. and P. Van Loock, Quantum information with continuous variables. *Reviews of modern physics*, 2005. 77(2): p. 513–577.
- [6] Weedbrook, C., et al., Gaussian quantum information. *Reviews of Modern Physics*, 2012. 84(2): p. 621–669.
- [7] Mari, A. and J. Eisert, Positive Wigner functions render classical simulation of quantum computation efficient. *Physical review letters*, 2012. 109(23): p. 230503.
- [8] Menicucci, N.C., S.T. Flammia, and O. Pfister, One-way quantum computing in the optical frequency comb. *Physical review letters*, 2008. 101(13): p. 130501.
- [9] Gottesman, D., A. Kitaev, and J. Preskill, Encoding a qubit in an oscillator. *Physical Review A*, 2001. 64(1): p. 012310.

- [10] Cerf, N.J., G. Leuchs, and E.S. Polzik, *Quantum information with continuous variables of atoms and light*. 2007: World Scientific.
- [11] Bachor, H.-A. and T.C. Ralph, *A guide to experiments in quantum optics*. 2019: John Wiley & Sons.
- [12] Walls, D. and G.J. Milburn, Quantum Optics and Quantum Foundations, in *Quantum Optics*. 2025, Springer. p. 225–244.