

# مقدمه‌ای بر محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته

حسین داودی یگانه

مرکز محاسبات کوانتومی آریاکوانتا

۱۴۰۴ زمستان

ویرایش اول

## پیش‌گفتار

با شتاب فزاینده‌ای که فناوری‌های کوانتمی در سال‌های اخیر به خود دیده‌اند، نیاز به درک عمیق‌تر مفاهیم پایه‌ای این حوزه بیش از پیش احساس می‌شود. محاسبات کوانتمی متغیر پیوسته به عنوان یکی از شاخه‌های امیدبخش و از نظر تجربی قابل دسترس، جایگاه ویژه‌ای در این منظره پیدا کرده است. برخلاف مدل متعارف کیوبیتی که بر حالت‌های گسسته تکیه دارد، این چارچوب از طبیعت پیوسته‌ی متغیرهای فیزیکی مانند دامنه و فاز میدان‌های نوری بهره می‌برد و دروازه‌ای طبیعی به سوی پیاده‌سازی الگوریتم‌های کوانتمی با استفاده از فناوری‌های اپتیک خطی گشوده است.

این درسنامه با هدف معرفی و درک عمیق محاسبات کوانتمی متغیر پیوسته نگاشته شده است. مخاطب اصلی آن دانشجویان تحصیلات تکمیلی، پژوهشگران جوان و علاقه‌مندی است که می‌خواهند نه تنها فرمالیسم ریاضی، بلکه شهود فیزیکی و توان محاسباتی این رویکرد را درک کنند. در این مسیر، مفاهیم پایه‌ای از مکانیک کوانتمی و اپتیک کوانتمی مرور می‌شود و سپس به‌طور نظاممند به معرفی گیت‌های پایه، حالت‌های خاص (همچون حالت‌های چلاند و گاوی)، الگوریتم‌های کوانتمی و مدل‌های متفاوت محاسبات (مبتنی بر گیت و مبتنی بر اندازه‌گیری) پرداخته می‌شود. ساختار درسنامه به گونه‌ای طراحی شده که خواننده پس از آشنایی با مبانی نظری، بتواند به‌طور مستقیم به مطالعه‌ی الگوریتم‌های شاخص، کاربردها همچنین چالش‌های پیش‌روی این حوزه بپردازد. کوشش بر آن بوده تا با ارائه‌ی مثال‌های عددی، برنامه‌نویسی کوانتمی درک شهودی تقویت شود.

در نهایت، امید داریم این مجموعه نه فقط به عنوان یک درسنامه، بلکه به عنوان مشوقی همراه در این حوزه عمل کند. سپاسگزار همه‌ی پیشگامانی هستیم که با کارهای بنیادین خود، مسیر این علم را هموار کرده‌اند، و امیدواریم این اثر، گامی هر چند کوچک در جهت گسترش مرزهای دانش و تربیت نسل آینده‌ی دانشمندان و مهندسان کوانتمی باشد. در پایان خاطر نشان می‌شود نسخه حاضر، ویرایش نخست می‌باشد و عاری از خطا نیست، خواشمند است نظرات و پیشنهادات ارزشمند خود را با ما در میان بگذارید.

حسین داودی یگانه

زمستان ۱۴۰۴

# فهرست مطالب

|    |  |
|----|--|
| ۱  | پیش‌گفتار  |
| ۵  | ۱ مقدمه و پیش‌نیازها   |
| ۵  | ۱.۱ مروری بر نظریه اطلاعات کوانتومی . . . . .                      |
| ۶  | ۲.۱ سیستم‌های متغیر گسته در مقابل سیستم‌های متغیر پیوسته . . . . . |
| ۶  | ۱.۲.۱ سیستم‌های متغیر گسته . . . . .                               |
| ۷  | ۲.۲.۱ سیستم‌های متغیر پیوسته . . . . .                             |
| ۸  | ۳.۲.۱ اهمیت متغیرهای پیوسته در محاسبات کوانتومی . . . . .          |
| ۹  | ۳.۱ پیش‌نیازهای ریاضیاتی . . . . .                                 |
| ۹  | ۱.۳.۱ فضای هیلبرت . . . . .  |
| ۱۰ | ۲.۳.۱ نظریه عملگرها . . . . .                                      |
| ۱۲ | ۳.۳.۱ هندسه همتافت . . . . .                                       |
| ۱۴ | ۴.۳.۱ تابع ویگنر . . . . .   |
| ۱۵ | ۲ اپتیک کوانتومی و سیستم‌های متغیر پیوسته                          |
| ۱۶ | ۱.۲ کوانتش میدان الکترومغناطیسی . . . . .                          |
| ۱۸ | ۲.۲ حالت‌های فوک . . . . .   |
| ۱۹ | ۳.۲ فضای فوک . . . . .   |
| ۲۰ | ۴.۲ عملگرهای تربیعی (کوادراتور) میدان . . . . .                    |
| ۲۲ | ۵.۲ فضای فاز . . . . .   |
| ۲۳ | ۶.۲ حالت‌های گاوسی . . . . .                                       |

|    |       |   |       |
|----|-------|---|-------|
| ۲۳ | ..... | حالت گرمایی                               | ۱.۶.۲ |
| ۲۴ | ..... | حالت همدوس                                | ۲.۶.۲ |
| ۲۸ | ..... | حالت چلاندہ                               | ۳.۶.۲ |
| ۲۹ | ..... | محاسبات کوانتمی متغیر پیوسته              | ۳     |
| ۳۰ | ..... | گیت‌های کوانتمی                           | ۱.۳   |
| ۳۰ | ..... | گیت جابه‌جایی                             | ۱.۱.۳ |
| ۳۴ | ..... | گیت چرخشی                                 | ۲.۱.۳ |
| ۳۶ | ..... | گیت چلاندگی                               | ۳.۱.۳ |
| ۳۹ | ..... | گیت فاز مکعبی                             | ۴.۱.۳ |
| ۴۱ | ..... | گیت کِر                                   | ۵.۱.۳ |
| ۴۲ | ..... | گیت شکافنده پرتو                          | ۶.۱.۳ |
| ۴۴ | ..... | گیت چلاندگی دومدی                         | ۷.۱.۳ |
| ۴۵ | ..... | CX گیت                                    | ۸.۱.۳ |
| ۴۶ | ..... | CZ گیت                                    | ۹.۱.۳ |
| ۴۷ | ..... | اندازه‌گیری‌های متغیر پیوسته              | ۲.۳   |
| ۴۷ | ..... | تشخیص هموداین                             | ۱.۲.۳ |
| ۵۰ | ..... | تشخیص هتروداین                            | ۲.۲.۳ |
| ۵۱ | ..... | شمارش فوتون                               | ۳.۲.۳ |
| ۵۲ | ..... | درهم‌تنیدگی در سیستم‌های متغیر پیوسته     | ۳.۳   |
| ۵۲ | ..... | ایجاد درهم‌تنیدگی                         | ۱.۳.۳ |
| ۵۶ | ..... | تشخیص درهم‌تنیدگی                         | ۲.۳.۳ |
| ۵۶ | ..... | معیار ترانهاده جزئی مثبت                  | ۳.۳.۳ |
| ۵۷ | ..... | معیار ون‌لوک-فوراساوا                     | ۴.۳.۳ |
| ۵۹ | ..... | فرابرد کوانتمی                            | ۴.۳   |
| ۵۹ | ..... | فرابرد کوانتمی در سامانه‌های متغیر گسسته  | ۱.۴.۳ |
| ۶۱ | ..... | فرابرد کوانتمی در سامانه‌های متغیر پیوسته | ۲.۴.۳ |

|     |  |
|-----|--|
| ٦٨  | ٤ الگوریتم‌ها و مدل‌های محاسباتی متغیر پیوسته                          |
| ٦٨  | ١.٤ الگوریتم‌های کوانتمی . . . . .                                     |
| ٧٠  | ١.١.٤ کلاس‌های پیچیدگی کلاسیک . . . . .                                |
| ٧١  | ٢.١.٤ کلاس‌های پیچیدگی کوانتمی . . . . .                               |
| ٧٢  | ٣.١.٤ طبقه‌بندی الگوریتم‌ها . . . . .                                  |
| ٧٥  | ٢.٤ الگوریتم‌های کوانتمی متغیر پیوسته . . . . .                        |
| ٧٥  | ١.٢.٤ الگوریتم گروور متغیر پیوسته . . . . .                            |
| ٨١  | ٢.٢.٤ الگوریتم دویچ-جوزا متغیر پیوسته . . . . .                        |
| ٨٥  | ٣.٤ الگوریتم‌های وردشی کوانتمی متغیر پیوسته . . . . .                  |
| ٨٧  | ١.٣.٤ الگوریتم‌های وردشی کوانتمی . . . . .                             |
| ٩٠  | ٢.٣.٤ انواع آنساتز . . . . .   |
| ٩٧  | ٣.٣.٤ گرادیان . . . . .  |
| ٩٨  | ٤.٣.٤ بهینه‌سازی . . . . .   |
| ٩٩  | ٥.٣.٤ کاربرد الگوریتم‌های وردشی کوانتمی . . . . .                      |
| ١٠٠ | ٦.٣.٤ الگوریتم QAOA در سامانه متغیر پیوسته . . . . .                   |
| ١٠٨ | ٤.٤ مدل‌های محاسباتی متغیر پیوسته . . . . .                            |
| ١٠٨ | ١.٤.٤ مدل محاسباتی متغیر پیوسته مبتنی بر گیت . . . . .                 |
| ١٠٩ | ٢.٤.٤ محاسبات کوانتمی متغیر پیوسته مبتنی بر اندازه‌گیری . . . . .      |
| ١١٥ | ٣.٤.٤ محاسبات کوانتمی متغیر پیوسته مبتنی بر حالت‌های خوش‌های . . . . . |
| ١١٩ | ٤.٤.٤ مدل محاسبات کوانتمی ترکیبی . . . . .                             |
| ١٢٠ | پیوست: برنامه‌نویسی کوانتمی در سیستم‌های متغیر پیوسته                  |

# فصل ۱

## مقدمه و پیش نیازها

در این فصل به بررسی مفاهیم پایه‌ای ریاضیاتی و کوانتمی می‌پردازیم که در ادامه مسیر نقش مهمی را ایفا می‌کنند. هدف این فصل، ایجاد بنیانی نظری و محکم برای ورود به مباحث تخصصی‌تر در نظریه اطلاعات کوانتمی است. در ابتدا، نظریه اطلاعات کوانتمی را معرفی می‌کنیم؛ حوزه‌ای میان‌رشته‌ای که از تلفیق اصول مکانیک کوانتمی با مفاهیم بنیادی نظریه اطلاعات شکل گرفته است. این نظریه با بهره‌گیری از ویژگی‌هایی مانند برهمنهی، درهم‌تنیدگی و ناموضعیت، امکان نمایش و پردازش اطلاعات را به شیوه‌ای فراتر از محدودیت‌های کلاسیک فراهم می‌سازد. در این چارچوب، اطلاعات نه تنها به صورت بیت‌های دودویی، بلکه به صورت کیوبیت‌هایی با حالت‌های ترکیبی نمایش داده می‌شوند. سپس به بررسی سیستم‌های متغیر پیوسته و گسسته می‌پردازیم. سیستم‌های پیوسته معمولاً با متغیرهایی مانند زمان، مکان یا انرژی سروکار دارند و رفتار آن‌ها با معادلات دیفرانسیل توصیف می‌شود. در مقابل، متغیرهای گسسته تنها می‌توانند مقادیر مشخص و جدا از هم مانند حالت‌های منطقی یا شمارش‌پذیر بگیرند. در ادامه، برخی پیش‌نیازهای ریاضیاتی مانند احتمال، جبر خطی و مفاهیم پایه‌ای نظریه اطلاعات مرور خواهد شد که در فصول بعدی به آن‌ها نیاز خواهیم داشت.

### ۱.۱ مروری بر نظریه اطلاعات کوانتمی

نظریه اطلاعات کوانتمی شاخه‌ای از فیزیک نظری و علوم رایانه است که روش‌های استفاده از سیستم‌های مکانیک کوانتمی را برای نمایش، پردازش و انتقال اطلاعات مورد مطالعه قرار می‌دهد. این رشته اصول نظریه اطلاعات کلاسیک را که توسط کلود شانون در دهه ۱۹۴۰ مطرح شد، با پدیده‌های منحصر به فرد مکانیک کوانتمی مانند برهمنهی، درهم‌تنیدگی و ناموضعیت ترکیب می‌کند. در تئوری اطلاعات کلاسیک، اطلاعات معمولاً به صورت دو دویی نمایش داده می‌شوند، جایی که بیت‌ها ۰ و ۱ هستند، این بیت‌ها را می‌توان از طریق عملگرهای منطقی مانند NOT, AND, OR که

اساس محاسبات کلاسیک را تشکیل می‌دهند، دستکاری کرد. در مقابل، نظریه اطلاعات کوانتومی از کیوبیت‌ها به عنوان واحد اساسی اطلاعات استفاده می‌کند. یک کیوبیت می‌تواند به طور همزمان در ترکیبی از حالت ۰ و ۱ قرار گیرد. توانایی کیوبیت‌ها در قرار گرفتن در حالت برهمنهی، به رایانه‌های کوانتومی این امکان را می‌دهد که برخی از مسائل محاسباتی را با سرعتی بسیار بیشتر از رایانه‌های کلاسیک حل کنند. برای نمونه، الگوریتم شور قادر است فاکتورگیری اعداد بزرگ را به صورت نمایی سریع‌تر از بهترین الگوریتم‌های کلاسیک انجام دهد. همچنین الگوریتم گروور امکان جستجوی غیرساختارمند در پایگاه داده‌ها را با کارایی بالاتری فراهم می‌سازد. با این حال، کاربردهای نظریه اطلاعات کوانتومی تنها به حوزه محاسبات محدود نمی‌شوند. این نظریه در زمینه‌هایی چون ارتباطات کوانتومی، رمزگاری کوانتومی (مانند توزیع کلید کوانتومی)، تصحیح خطای کوانتومی و توسعه پروتکل‌های امن نیز نقش مهمی ایفا می‌کند. این گستردگی کاربرد نشان‌دهنده ظرفیت بالای این حوزه برای تحول در فناوری‌های آینده است.

## ۲.۱ سیستم‌های متغیر گسسته در مقابل سیستم‌های متغیر پیوسته

در محاسبات کوانتومی، متغیرهای گسسته<sup>۱</sup> و پیوسته<sup>۲</sup> دو چارچوب متفاوت برای نمایش و پردازش اطلاعات کوانتومی ارائه می‌دهند. این تمایز نه تنها در نوع داده‌ها بلکه در ساختار فضای هیلبرت، نوع درهم‌تنیدگی، و روش‌های پیاده‌سازی الگوریتم‌ها تأثیرگذار است. انتخاب میان این دو مدل به ماهیت سیستم فیزیکی، نوع پردازش مورد نظر، و محدودیت‌های تجربی بستگی دارد. هر دو رویکرد در نظریه اطلاعات کوانتومی جایگاه ویژه‌ای دارند. مدل‌های گسسته برای طراحی الگوریتم‌های کوانتومی و پیاده‌سازی روی رایانه‌های کوانتومی مبتنی بر کیوبیت مناسب‌اند، در حالی که مدل‌های پیوسته در ارتباطات کوانتومی، رمزگاری پیوسته، و شبیه‌سازی سیستم‌های فیزیکی پیچیده کاربرد دارند. در برخی موارد، ترکیب این دو نیز ممکن است، مانند استفاده از گسسته‌سازی متغیرهای پیوسته برای پیاده‌سازی عملی در آزمایشگاه.

### ۱.۲.۱ سیستم‌های متغیر گسسته

در مدل‌های محاسبات کوانتومی مبتنی بر متغیرهای گسسته، اطلاعات کوانتومی در فضای هیلبرت با ابعاد محدود نمایش داده می‌شود. واحد پایه‌ای این مدل، کیوبیت است که در حالت‌های مجازی  $|0\rangle$ ،  $|1\rangle$  تعریف می‌شود. برخلاف بیت کلاسیک که فقط در یکی از این دو حالت قرار دارد، کیوبیت می‌تواند در ترکیبی از این دو حالت به صورت برهمنهی قرار گیرد. این ویژگی، همراه با امکان درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌ها، قدرت محاسباتی منحصر به‌فردی را فراهم می‌کند که در مدل‌های کلاسیک قابل دستیابی نیست. در این چارچوب، عملیات پردازشی با استفاده از گیت‌های کوانتومی گسسته

<sup>۱</sup> Discrete Variables (DV)

<sup>۲</sup> Continuous Variables (CV)

مانند CNOT، Pauli-X، Hadamard و T انجام می‌شود. این گیت‌ها تبدیل‌هایی واحدی روی فضای هیلبرت گستته اعمال می‌کنند و امکان طراحی الگوریتم‌های کوانتومی را فراهم می‌سازند. الگوریتم‌هایی مانند الگوریتم شور برای DV فاکتورگیری، الگوریتم گروور برای جستجوی سریع، والگوریتم‌های تصحیح خطای کوانتومی همگی در چارچوب DV توسعه یافته‌اند و نقش کلیدی در پیشرفت رایانش کوانتومی ایفا کرده‌اند. پیاده‌سازی فیزیکی مدل DV در بسترها متنوعی انجام شده است؛ از جمله یون‌های به دام افتاده، مدارهای ابررسانا، نقاط کوانتومی، و اسپین‌های الکترونی. هر یک از این بسترها امکان تعریف حالت‌های گستته و کنترل دقیق بر گیت‌های کوانتومی را فراهم می‌کنند. بهویژه، نقاط کوانتومی به‌دلیل سازگاری با فناوری‌های نیمه‌رسانا و قابلیت مجتمع‌سازی در مقیاس بالا، توجه ویژه‌ای را در سال‌های اخیر به خود جلب کرده‌اند. با وجود مزایای مدل DV چالش‌هایی مانند حفظ همدوسی، مقابله با نویز محیطی، و طراحی سیستم‌های تصحیح خطای همچنان مطرح‌اند. با این حال، توسعه سخت‌افزارهای پایدار، پیشرفت در الگوریتم‌های مقاوم به خطای و طراحی معماری‌های مقیاس‌پذیر باعث شده‌اند که مدل DV به عنوان ستون فقرات رایانش کوانتومی مدرن شناخته شود و در بسیاری از پروژه‌های صنعتی و تحقیقاتی مورد استفاده قرار گیرد. با توجه به اینکه در این نسخه به محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته پرداخته می‌شود از وارد شدن به جزئیات سیستم‌های متغیر گستته صرف نظر می‌شود، علاقه‌مندان می‌توانند به مراجع دیگر مراجعه نمایند.

## ۲۰.۱ سیستم‌های متغیر پیوسته

در مقابل سیستم‌های CV از حالت‌های کوانتومی تعریف شده بر روی طیف‌های پیوسته بجای سطوح گستته استفاده می‌کنند. رایج‌ترین مثال‌ها در این زمینه سیستم‌های مبتنی بر حالات کوانتومی نور، به ویژه کوادراتورهای<sup>۳</sup> میدان الکترومغناطیس هستند. این کوادراتورها که معادل عملگرهای مکان و تکانه  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$  هستند، برخلاف نتایج دو دویی در سیستم‌های DV می‌توانند هر مقدار حقیقی را داشته باشند. اطلاعات کوانتومی CV معمولاً با استفاده از حالت‌های همدوس<sup>۴</sup> نور، حالت‌های چلاند<sup>۵</sup> و سایر حالت‌های گاوی نمایش داده می‌شود. فرمالیسم محاسبات کوانتومی CV عمیقاً در تئوری نوسانگرهای هارمونیک ریشه دارد، جایی که اطلاعات کوانتومی با استفاده از عملیات روی این طیف‌های پیوسته پردازش می‌شود. مزیت اصلی سیستم‌های CV این است که می‌توان آن‌ها را به راحتی با فناوری نوری موجود پیاده سازی کرد که این امکان را فراهم می‌کند که با استفاده از اپتیک خطی، تشخیص هموداین<sup>۶</sup> و سایر تکنیک‌های به خوبی ثابت شده، حالات کوانتومی به خوبی دستکاری شوند. اطلاعات کوانتومی CV معمولاً با استفاده از حالت‌های همدوس

<sup>۳</sup> Quadrature

<sup>۴</sup> Coherent states

<sup>۵</sup> Squeezed States

<sup>۶</sup> Homodyne measurement

نور، حالت‌های چلاند و سایر حالت‌های گاوسی نمایش داده می‌شود. فرمالیسم محاسبات کوانتمی CV عمیقاً در تئوری نوسانگرهای هارمونیک ریشه دارد، جایی که اطلاعات کوانتمی با استفاده از عملیات روی این طیف‌های پیوسته پردازش می‌شود. مزیت اصلی سیستم‌های CV این است که می‌توان آن‌ها را به راحتی با فناوری نوری موجود پیاده سازی کرد که این امکان را فراهم می‌کند که با استفاده از اپتیک خطی، اندازه‌گیری همواره و سایر تکنیک‌های به خوبی ثبت شده، حالات کوانتمی به خوبی دستکاری شوند.

### ۳.۲.۱ اهمیت متغیرهای پیوسته در محاسبات کوانتمی

اهمیت سیستم‌های متغیرهای پیوسته در محاسبات کوانتمی هم در پتانسیل نظری آن‌ها و هم در کاربردهای عملی شان نهفته است. چندین عامل به اهمیت آن‌ها کمک می‌کند:

- مقیاس پذیری و پیاده سازی: یکی از بزرگترین چالش‌ها در محاسبات کوانتمی DV افزایش تعداد کیوبیت‌ها، با حفظ همدوسی و کنترل خطاهای CV است. سیستم‌های CV به ویژه آن‌هایی که مبتنی بر پلت فرم‌های نوری است راه حل مقیاس پذیرتری را ارائه می‌دهند. برای مثال، حالت‌های درهم‌تنیده بزرگ (معروف به حالت خوش‌های) که برای محاسبات کوانتمی لازم هستند، می‌توان با استفاده از نوسان سازهای پارامتری نوری که به طور تجربی در دسترس هستند، تولید کرد
- سازگاری با اپتیک کلاسیک: سیستم‌های CV به شدت با سیستم‌های ارتباط نوری کلاسیک سازگار هستند که آن‌ها را برای شبکه‌های ارتباطات کوانتمی مناسب می‌سازد. این سازگاری ادغام شبکه‌های کوانتمی با زیرساخت‌های فیبر نوری موجود را تسهیل می‌کند و امکان ارتباطات کوانتمی در فواصل طولانی را فراهم می‌کند.
- تصحیح خطای کوانتمی: تصحیح خطای کوانتمی برای هر سیستم محاسباتی کوانتمی به منظور عملی بودن آن ضروری است سیستم‌های CV می‌توانند از کدهای خاصی مانند کد گوتسمن کیتایف-پرسکیل (GKP) استفاده کنند که مخصوصاً برای اطلاعات کوانتمی CV مناسب هستند. این کدها از حالت‌های شبکه در فضای فاز برای محافظت از اطلاعات کوانتمی خطاهای جابه‌جایی کوچک استفاده می‌کنند که یک نوع رایج نویز در سیستم‌های CV است.

- پتانسیل برای محاسبات کوانتمی مقاوم به خطای ترکیب عملیات‌های گاوسی و غیرگاوسی در سیستم‌های CV امکان محاسبات کوانتمی جهان‌شمول را فراهم می‌کند علاوه بر این با توسعه پروتکل‌های مقاوم به خطای که به طور خاص برای سیستم‌های CV مانند کدهای بوزونی، طراحی شده‌اند، پتانسیل قابل توجهی برای رایانه‌های

کوانتمی مبتنی بر  $CV$  وجود دارد که بتوانند در سناریوهایی که نویز یک نگرانی اصلی است، از سیستم‌های مبتنی بر  $DV$  بهتر عمل کنند

در مجموع متغیرهای پیوسته یک چارچوب قوی و همه جانبه برای پردازش اطلاعات کوانتمی ارائه می‌دهد. سازگاری آن با تکنولوژی‌های موجود، پتانسیل برای مقیاس پذیری و نقش آن‌ها در تصحیح خطای کوانتمی، آن‌ها را به یک حوزه تحقیقاتی مهم در مسیر دستیابی به سیستم‌های عملی محاسبات و ارتباطات کوانتمی تبدیل کرده است. با ادامه توسعه این زمینه‌ها، محاسبات کوانتمی  $CV$  احتمالاً نقش اساسی در آینده فناوری‌های کوانتمی ایفا می‌کند.

## ۳.۱ پیش‌نیازهای ریاضیاتی

برای درک موثر حوزه اطلاعات کوانتمی متغیر پیوسته، داشتن پایه‌ای قوی در چندین حوزه ریاضیاتی ضروری است. این بخش به مفاهیم کلیدی ریاضیاتی که در اینجا استفاده خواهد شد، می‌پردازد: فضای هیلبرت، نظریه عملگرها، هندسه همتافت<sup>۷</sup> و تابع ویگنر.<sup>۸</sup>

### ۱.۳.۱ فضای هیلبرت

در مکانیک کوانتمی و نظریه اطلاعات کوانتمی، فضاهای هیلبرت ساختارهای ریاضی اصلی هستند که برای توصیف حالات کوانتمی استفاده می‌شوند. فضای هیلبرت که با  $\mathcal{H}$  نشان داده می‌شود، یک فضای برداری کامل است که به یک ضرب داخلی مججهز شده است. این ضرب داخلی امکان تعریف زوایا و فاصله‌ها بین بردارها را فراهم می‌کند و اهمیت زیادی دارد، زیرا محاسبه احتمالات و تکامل حالات کوانتمی در زمان را ممکن می‌سازد.

### تعريف و ویژگی‌ها

برای هر دو بردار  $|\psi\rangle$  و  $|\phi\rangle$  در فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$ ، ضرب داخلی  $\langle\phi|\psi\rangle$  یک عدد مختلط است که دارای ویژگی زیر است:

$$\langle\psi|\phi\rangle = \overline{\langle\phi|\psi\rangle}$$

<sup>۷</sup> Symplectic Geometry

<sup>۸</sup> Wigner function

این ویژگی تضمین می‌کند که ضرب داخلی همواره متقارن است، علاوه بر این حاصل ضرب داخلی در آرگومان دوم خود خطی است:

$$\langle \psi | (a|\phi\rangle + b|\chi\rangle) = a\langle \psi |\phi\rangle + b\langle \psi |\chi\rangle$$

که در اینجا  $a$  و  $b$  اعداد مختلط هستند نرم یک بردار  $\langle \psi |$  در فضای هیلبرت  $H$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$$

اگر  $1 = \|\psi\|$  باشد، آنگاه بردار  $\langle \psi |$  نرمال شده است. هر بردار  $\langle \psi |$  را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه نوشت:

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |e_i\rangle$$

که در آن بردارهای  $\langle e_i |$  تشکیل دهنده یک پایه متعامد-نرمال هستند، یعنی:  $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$  دلتای کرونکر است و برابر 1 است اگر  $j = i$  و برابر 0 اگر  $j \neq i$ . در نتیجه، داریم:

$$\|\psi\|^2 = \langle \psi | \psi \rangle = \sum_i |a_i|^2$$

در سیستم‌های متغیر پیوسته، فضای هیلبرت معمولاً بی نهایت بعدی هستند. به عنوان مثال، حالت یک مدد واحد از میدان الکترومغناطیسی در فضای هیلبرت  $(R) = L^2$  نمایش داده می‌شود جایی که عملگرهای کوادراتور  $\hat{x}$  و  $\hat{p}$  به ترتیب به عنوان عملگرهای مکان و تکانه عمل می‌کند این فضای هیلبرت، فضایی از توابع مجدد انتگرال پذیر است و پایه‌ای برای تحلیل حالات کوانتومی نور تشکیل می‌دهد

### ۲۰.۳.۱ نظریه عملگرها

نظریه عملگرها چارچوب ریاضی است که برای توصیف مشاهده پذیرهای فیزیکی و دینامیک سیستم‌های کوانتومی استفاده می‌شود. عملگرها توابعی هستند که بردارها را از یک فضای برداری به فضای برداری دیگر نگاشت می‌کنند و در مکانیک کوانتومی برای نمایش اندازه‌گیری‌ها، تبدیلات و تکامل زمان ضروری هستند.

## عملگر خطی

یک عملگر خطی  $\hat{A}$  روی یک فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  به صورت زیر تعریف می‌شود که برای هر بردار  $|\psi\rangle$  و  $|\phi\rangle$  در  $\mathcal{H}$  و هر عدد  $a$  و  $b$  داریم:

$$\hat{A}(a|\psi\rangle + b|\phi\rangle) = a\hat{A}|\psi\rangle + b\hat{A}|\phi\rangle$$

عملگرهای خطی اجزای اساسی مکانیک کوانتومی هستند، زیرا نماینده گیت‌ها و تبدیلات کوانتومی هستند

## عملگرهای خودالحاقی

عملگرهای خودالحاقی که به عنوان عملگرهای هرمیتی نیز شناخته می‌شوند، بسیار مهم هستند؛ زیرا به مقادیر قابل مشاهده فیزیکی مربوط می‌شوند. یک عملگر  $\hat{A}$  خودالحاقی است اگر

$$\langle \psi | \hat{A} \phi \rangle = \langle \hat{A} \psi | \phi \rangle$$

به ازای همه بردارهای  $|\psi\rangle$  و  $|\phi\rangle$  در  $\mathcal{H}$ . عملگرهای خودالحاقی دارای ویژه مقادیر حقیقی هستند که با نیاز به اینکه مقادیر مشاهده پذیرها (مانند مکان، تکانه و انرژی) باید عده‌های واقعی باشند، سازگار است.

## عملگرهای یکانی

عملگرهای یکانی در مکانیک کوانتومی اهمیت زیادی دارند، زیرا تکامل زمانی سیستم‌های کوانتومی را توصیف می‌کنند، یک عملگر  $U$  یکانی است اگر

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I$$

که در آن  $I$  عملگر واحد است. عملگر واحد ضرب داخلی را تغییر نمی‌دهد و فرم بردارها و در نتیجه احتمالات را حفظ می‌کند و تغییر نمی‌دهد

## جابه‌جاگرها و اصل عدم قطعیت

جابه‌جاگری دو عملگر  $\hat{A}$  و  $\hat{B}$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

اصل عدم قطعیت هایزنبرگ که یک نتیجه اساسی از مکانیک کوانتومی است، از عدم جابه‌جاگری عملگرهای مکان و تکانه به وجود می‌آید.

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

این رابطه نشان می‌دهد که نمی‌توان مکان و تکانه یک ذره را باهم و با دقت دلخواه اندازه‌گیری کرد. اصل عدم قطعیت نتیجه مستقیم نظریه عملگرها در مکانیک کوانتومی است. در اطلاعات کوانتومی متغیر پیوسته، نظریه عملگرها برای تحلیل رفتار عملگرهای تربیعی (کوادراتوری) که معادل مکان و تکانه در فضای فاز هستند به کار می‌رود. این عملگرها نقش مهمی در تعریف حالات و دینامیک سیستم‌های CV دارند.

### ۳.۳.۱ هندسه همتافت

هندسه همتافت یکی از بخش‌های مهم ریاضیات است که چارچوبی ریاضی برای توصیف فضای فاز در مکانیک کلاسیک و کوانتومی فراهم می‌کند. این حوزه به ویژه در مطالعه سیستم‌های کوانتومی متغیر پیوسته در نظریه اطلاعات کوانتومی اهمیت زیادی دارد، زیرا به ما کمک می‌کند تا تبدیلات و ناوردایی‌ها در فضای فاز را درک کنیم.

### فضای برداری همتافت

فضای برداری همتافت یک فضای برداری حقیقی است  $\mathcal{V}$  که با یک فرم دو جمله‌ای غیرتbehگن<sup>۹</sup> و نامتقارن<sup>۱۰</sup> که به عنوان فرم همتافت شناخته می‌شود تجهیز شده است.

$$\omega : V * V \rightarrow R$$

<sup>۹</sup> non degenerate

<sup>۱۰</sup> Skew-symmetric

در زمینه مکانیک کوانتومی، فرم همتافت روابط جایگشتی بین مختصات کانوئیکال، مانند مکان و تکانه را رمزگذاری می‌کند. برای یک فضای برداری  $V = \mathbb{R}^{2n}$  فرم همتافت می‌تواند با ماتریس  $J$  نمایش داده شود،

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix}$$

که در آن  $\mathbb{I}_n$  ماتریس واحد  $n \times n$  است.

### تبديلات همتافت

یک تبدیل خطی  $S : V \rightarrow S : V$  همتافت نامیده می‌شود اگر فرم همتافت را حفظ کند؛ به این معنا که:

$$J = S^T JS$$

در مکانیک کوانتومی متغیر پیوسته، تبدیلات همتافت، با عملیات‌های گاووسی مانند چلاندگی، جابجایی و دوران مرتبط هستند که جزو موارد پایه‌ای و بنیادی در دستکاری حالت‌های کوانتومی هستند.

### ماتریس‌های کوواریانس

در مطالعه حالت‌های گاووسی ماتریس کوواریانس  $\sigma$ ، یک کمیت کلیدی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{ij} = \langle \{\Delta R_i, \Delta R_j\} \rangle$$

که در آن  $\Delta R_i = R_i - \langle R_i \rangle$  عملگرهای کوادراتور متمرکز شده هستند؛ ماتریس کوواریانس باید شرط عدم قطعیت را برآورده کند.

$$\sigma + \frac{i\hbar}{2} J > 0$$

که بازتابی از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ است که به ساختار همتافت فضای فاز اعمال می‌شود. هندسه همتافت ابزارهای لازم برای تحلیل و دستکاری سیستم‌های متغیر پیوسته را فراهم می‌کند و برای فهم رفتار حالت‌های کوانتومی در فضای فاز ضروری است.

## ۴.۳.۱ تابع ویگنر

توزیع شبه احتمال ویگنر نوعی توزیع شبه احتمالی است. این توزیع برای اولین بار توسط ویگنر در سال ۱۹۳۲ معرفی شد تا اصلاحات کوانتومی مکانیک آماری کلاسیک را مورد بررسی قرار دهد. هدف اصلی این بود که تابع موجی را که در معادله شرودینگر ظاهر می‌شود، به یک توزیع احتمال در فضای فاز مرتبط کنیم. این توزیع به عنوان یک تابع مولد برای تمام توابع خود همبستگی یک تابع موج کوانتومی مشخص، عمل می‌کند. این توزیع در واقع ماتریس چگالی کوانتومی را از طریق تبدیل ویگنر-ویل به یک تابع در فضای فاز حقیقی نگاشت می‌کند، که تجسم این عملگر در فضای فاز است. مفهوم نگاشت بین توابع فضای فاز حقیقی و عملگرهای هرمیتی اولین بار توسط هرمان ویل در سال ۱۹۲۷ در زمینه‌ای مرتبط با نظریه نمایش در ریاضیات معرفی شد. در سال ۱۹۴۸ ژان ویل این توزیع را مجدداً به عنوان یک نمایش مربعی از انرژی زمان-فرکانس محل یک سیگنال استنباط کرد و در واقع یک طیف نگار ایجاد کرد. بعدها در سال ۱۹۴۹ خوزه انریکه مویال به طور مستقل این تابع را به عنوان تابع مولد ممان‌های کوانتومی شناسایی کرد که مبنای رمزگذاری تمام مقادیر انتظاری کوانتومی در فضای فاز را فراهم می‌کند. در نتیجه توزیع ویگنر نقش مهمی در مکانیک آماری، شیمی کوانتومی، اپتیک کوانتومی، تحلیل سیگنال و... دارد. در مکانیک کلاسیک، یک ذره دارای مکان و تکانه مشخصی است که توسط یک نقطه در فضای فاز نمایش داده می‌شود. برای یک مجموعه (آنسامبل) از ذرات، احتمال یافتن یک ذره در یک مکان خاص در فضای فاز با یک توزیع احتمال مشخص می‌شود که به آن چگالی لیوول گفته می‌شود. اما این تفسیر برای ذرات کوانتومی به دلیل اصل عدم قطعیت صدق نمی‌کند. توزیع شبه احتمال ویگنر نقش مهمی را در مکانیک کوانتومی ایفا می‌کند، اما تمام خواص یک توزیع احتمال متعارف را ندارد. در واقع این توزیع می‌تواند مقادیر منفی بگیرد که معمولاً با اثرات تداخل کوانتومی مرتبط هستند و معادل کلاسیک ندارند. توزیع ویگنر برای یک حالت خالص به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x+y) \psi(x-y) e^{-2ipy/\hbar} dy$$

که در اینجا  $\psi$  تابع موج و  $x$  و  $p$  مکان و تکانه هستند. برای یک حالت کوانتومی که با ماتریس چگالی  $\rho$  توصیف می‌شود، تابع ویگنر  $W(x, p)$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-2iyp/\hbar} \langle x+y | \rho | x-y \rangle$$

## فصل ۲

### اپتیک کوانتومی و سیستم‌های متغیر پیوسته

در این فصل ابتدا مروری بر مفاهیم پایه اپتیک کوانتومی و سیستم‌های متغیر پیوسته داریم. اپتیک کوانتومی شاخه‌ای از فیزیک کوانتومی است که به بررسی رفتار نور در سطح کوانتومی می‌پردازد؛ بهویژه در شرایطی که خواص موجی و ذرهای نور به‌طور همزمان نقش ایفا می‌کنند. سیستم‌های متغیر پیوسته نیز چارچوبی هستند که در آن مشاهده‌پذیرهایی مانند مکان و تکانه (یا به‌طور معادل، دامنه‌های میدان الکترومغناطیسی) بهجای متغیرهای گسسته، بهصورت پیوسته تعریف می‌شوند و در فضای فاز تحلیل می‌گردند.

همواره یکی از راهکارهای ما برای گذار از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتومی، تبدیل مشاهده‌پذیرهای ذرات به عملگرهای هرمیتی است. این عملگرها در فضای هیلبرت تعریف می‌شوند و بهجای مقادیر عددی قطعی، طیفی از مقادیر ممکن را ارائه می‌دهند که وابسته به حالت کوانتومی سیستم هستند. این گذار مفهومی، پایه‌گذار بسیاری از پدیده‌های غیرکلاسیکی مانند درهم‌تنیدگی، تداخل کوانتومی، و عدم قطعیت است.

بحث را با کوانتش میدان الکترومغناطیسی آغاز می‌کنیم. در ابتدا هدف ما این است که نشان دهیم میدان‌های الکترومغناطیس چیزی جز نوسانات هماهنگ ساده نیستند. به عبارت دیگر، هر مدل مستقل از میدان را می‌توان بهصورت یک نوسان‌گر هماهنگ مدل کرد که در چارچوب کوانتومی با اپراتورهای آفرینش و نابودی توصیف می‌شود. این دیدگاه به ما اجازه می‌دهد تا رفتار نور را نه تنها به عنوان موج کلاسیکی، بلکه به عنوان مجموعه‌ای از فوتون‌ها در حالت‌های کوانتومی مختلف تحلیل کنیم. در ادامه، با استفاده از این مدل نوسان‌گر هماهنگ، به معرفی حالت‌های کوانتومی نور، توزیع‌های شبیه‌احتمالی در فضای فاز، و ابزارهای ریاضیاتی مانند تابع ویگنر و ماتریس کواریانس خواهیم پرداخت.

## ۱.۲ کوانتش میدان الکترومغناطیسی

دو صفحه رسانای نامتناهی که به موازات یکدیگر قرار گرفته‌اند را در نظر بگیرید. فرض کنید هیچ بار یا جریان الکتریکی در محیط وجود ندارد ولی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بتوانند بین این دو صفحه وجود داشته باشند. در غیاب منابع (بار و جریان) معادلات ماسکول عبارت‌اند از:

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \cdot E = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (1.2)$$

با کمی ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{or} \quad \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

ساده‌ترین جواب‌های این معادلات را می‌توان با استفاده از تکنیک جداسازی متغیرها و برگزیدن جواب‌های موج تخت برای بخش فضایی بدست آورد. با فرض اینکه قطبش میدان‌ها مشخص باشد و همچنین اعمال شرایط مرزی به راحتی می‌توانیم میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را به شکل زیر بدست آوریم

$$E_{(z,t)} = \hat{x} A_t \sin(kz)$$

$$B_{(z,t)} = \hat{y} \frac{\mu_0 \epsilon_0}{k} \dot{A}_t \cos(kz)$$

با توجه به رابطه انرژی کل الکترومغناطیسی، داریم

$$U = \frac{1}{2} \int_v (\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}) dv$$

$$U = \frac{V \epsilon_0}{4} (A^2 + \frac{\mu_0 \epsilon_0}{k} \dot{A}^2)$$

با استفاده از رابطه‌ی پاشندگی  $kc = \omega$  و اندکی جبر ساده می‌توان رابطه‌ی بالا را به شکل زیر بازنویسی کرد

$$U = \frac{V\epsilon_0}{2m\omega^2} \left( \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 + \frac{1}{2} m\dot{A}^2 \right) \quad (2.2)$$

که مقدار ثابتی است که در صورت و مخرج ضرب شده است. حال اگر متغیر  $q$  را که بعد مکان دارد به صورت  $q^2 = \frac{V\epsilon_0}{2m\omega^2} A^2$  تعریف کنیم و از آن کمیتی از جنس تکانه خطی  $m\dot{q} \equiv p$  بسازیم، انرژی الکترومغناطیس شبیه به انرژی یک نوسانگر هماهنگ ساده خواهد شد

$$U = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \quad (3.2)$$

اکنون وقت آن رسیده که انرژی نوسانگر هماهنگ ساده فوق کوانتیزه شود. برای این منظور به هر متغیر مشاهده‌پذیر در کلاسیک یک عملگرخطی و هرمیتی نسبت داده می‌شود. متغیرهای مشاهده‌پذیر ما در این مسئله عبارتند از: مکان، تکانه و انرژی. بنابراین:

$$q \rightarrow \hat{q} \quad , \quad p \rightarrow \hat{p} \quad , \quad U \rightarrow \hat{H}$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{q}^2$$

پس موج الکترومغناطیس یک سیستم از میدان‌های الکترومغناطیسی نوسان کننده هست. سیستم‌های نوسانگر هماهنگ توسط فرکانس‌های مشخص خود تفکیک می‌شوند، به هر فرکانس متمایز یک «مد» می‌گوییم. بنابراین موج الکترومغناطیسی می‌تواند به مدهای نوسان تجزیه شود که بسته به هر مد یک عملگر خلق و فنا داریم. عملگرهای خلق و فنا متناظر با سیستم نوسانگر هماهنگ، در تحلیل هر پتانسیل بسیار مهم هستند. این عملگرهای را می‌توان بر حسب عملگرهای مکان و تکانه به شکل زیر نمایش داد

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{x} + i\hat{p}) \quad (4.2)$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{x} - i\hat{p}) \quad (5.2)$$

که در اینجا  $\omega$  فرکانس زاویه‌ای متناظر با نوسانگر است.

## ۲.۲ حالت‌های فوک

حالت‌های فوک که به عنوان حالت‌های عددی نیز شناخته می‌شوند، حالت‌های کوانتومی یک سامانه را با تعداد مشخصی از ذرات توصیف می‌کنند. در زمینه اپتیک کوانتومی این ذرات معمولاً فوتون‌ها هستند. یک حالت فوک  $|n\rangle$  به عنوان حالتی تعریف می‌شود که دقیقاً  $n$  ذره (مثلاً فوتون) در یک مدل مشخص از میدان الکترومغناطیس دارد. به صورت ریاضی، حالت‌های فوک، حالت‌های ویژه عملگر تعداد  $\hat{n}$  هستند که تعداد ذرات را می‌شمارد.

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle$$

در اینجا  $\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{n}$  است و  $\hat{a}$  و  $\hat{a}^\dagger$  به ترتیب عملگرهای خلق و نابودی هستند. این عملگرها از روابط جابجایی بوزونی پیروی می‌کنند

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

عملگر خلق  $\hat{a}^\dagger$  یک ذره به حالت اضافه می‌کند

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

در حالی که عملگر نابودی  $\hat{a}$  یک ذره را حذف می‌کند

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

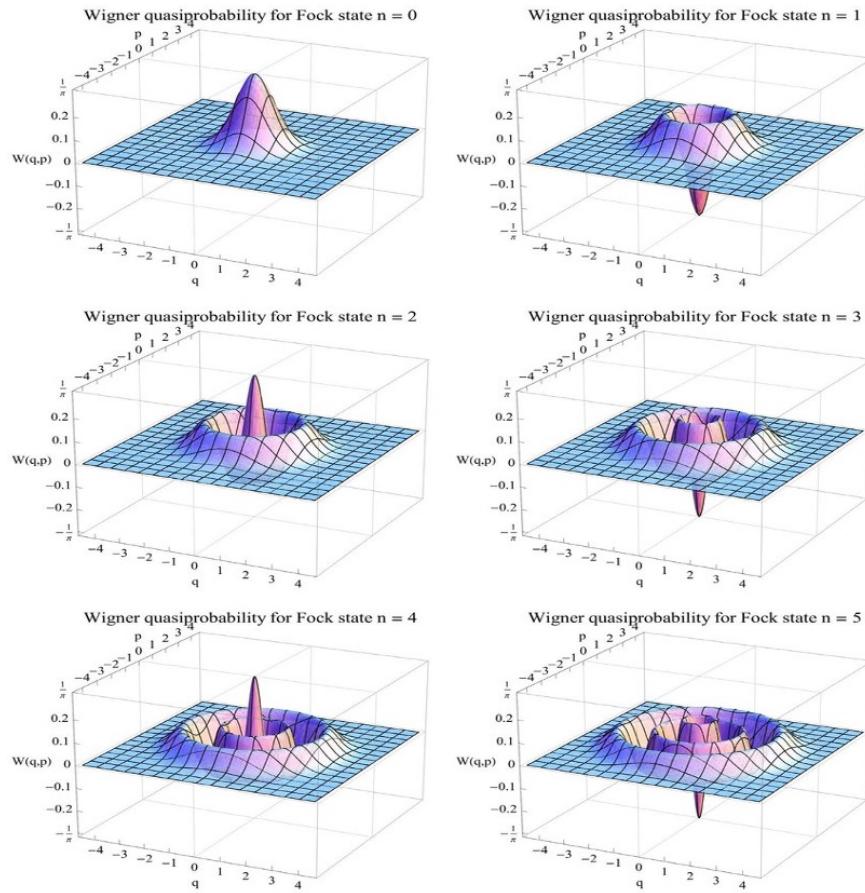
حالت خلا  $|0\rangle$ ، حالتی را نشان می‌دهد که در آن هیچ ذره‌ای وجود ندارد و حالت پایه مدل است. به عبارت دیگر هامیلتونی هر سامانه برای تضمین پایداری سامانه از پایین محدود شده، یعنی برای هر مدل  $k$  یک حالت خلا  $|0\rangle$  وجود دارد به طوری که

$$\hat{a} |0\rangle = 0$$

حالت‌های فوک متعامد و کامل هستند و یک پایه کامل برای فضای هیلبرت یک مدل تشکیل می‌دهند

$$\langle m|n\rangle = \delta_{nm} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \hat{\mathbb{I}}$$

در شکل زیر تابع ویگنر برای حالت‌های مختلف عددی رسم شده است.



شکل ۱۰.۲: تابع ویگنر به ازای حالت‌های فوک مختلف

## ۳.۲ فضای فوک

فضای فوک، فضای هیلبرت است که همهی حالت‌های کوانتومی ممکن یک سامانه با تعداد متغیر ذرات راه در برمی‌گیرد برای یک تک مد، فضای فوک صرفا گستردۀ همه حالت‌های فوک  $|n\rangle$  به ازای  $n = 0, 1, \dots$  است. با این حال برای چندین مد فضای فوک پیچیده‌تر شده و به صورت حاصل ضرب تansوری فضای فوک مدهای منفرد ساخته می‌شود. یک حالت عمومی در فضای فوک را می‌توان به شکل برهمنهی حالت‌هایی با تعداد ذرات مختلف نوشت:

$$|\psi\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle + \dots$$

که در آن  $c_n$  ضرایب مختلط هستند و  $|n\rangle$  نماینده حالت فوک با  $n$  ذره است. این حالت همچنین می‌تواند در سیستم چند

مدى به صورت زير بيان شود:

$$|\psi\rangle = \sum_{n_1, n_2, \dots} c_{n_1, n_2, \dots} |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \dots$$

كه در آن  $n_i$  تعداد ذرات در مد  $i$  را نشان مي دهد.

## ۴.۲ عملگرهای تربیعی (کوادراتور) میدان

هامیلتونی یک نوسانگر هارمونیک برحسب عملگرهای مکان و تکانه برای یک تک مد  $k$  به شکل زیر بدست آمد که در آن ذرات را بدون جرم در نظر گرفتیم:

$$\hat{H}_k = \frac{1}{2}(\hat{p}_k^2 + \omega_k^2 \hat{x}_k^2) \quad (6.2)$$

اگر این هامیلتونی را برحسب عملگرهای خلق و فنا بازنویسی کنیم داریم:

$$H_k = \hbar\omega_k(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2}) \quad (7.2)$$

با توجه به روابط (۶.۲) و (۵.۲) می توان عملگرهای مکان و تکانه را برای هر مد  $k$  برحسب عملگرهای خلق و فنا به شکل زير نوشت

$$\hat{p}_k = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}}(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger) \quad (8.2)$$

$$\hat{x}_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger) \quad (9.2)$$

كه رابطه جابجایی زير بين آنها برقرار است:

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{kk}$$

کار کردن با عملگرهای بدون بعد راحت‌تر است. دقیقاً شیوه به اینکه در مورد حالت‌ها و عملگرهای اسپینی ترجیح می‌دهیم با عملگرهای پائولی محاسبات را دنبال کنیم. در این بخش دو عملگر معرفی می‌شود که به آن‌ها عملگرهای تربیعی یا کوادراتورهای میدان می‌گوییم. کوادراتورهای متناظر با هر مد به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\hat{q}_k = \hat{X} = \frac{(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger)}{\sqrt{2}} = Re(\hat{a}) \quad (10.2)$$

$$\hat{p}_k = \hat{P} = \frac{(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger)}{i\sqrt{2}} = Im(\hat{a}) \quad (11.2)$$

رابطه جابجایی برای آن‌ها به شکل زیر است:

$$[\hat{q}_k, \hat{p}_l] = i\delta_{kl}$$

برای عدم قطعیت دو مشاهده پذیر غیرقابل جابجایی دلخواه داریم:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle &= \left\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \right\rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \\ \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle &= \left\langle (\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle)^2 \right\rangle = \langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{B} \rangle^2 \\ \langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle &\geq \frac{1}{4} \left| \left\langle [\hat{A}, \hat{B}] \right\rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (12.2)$$

بنابراین، رابطه عدم قطعیت برای کوادراتورهای  $\hat{X}_k$  و  $\hat{P}_k$  به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\left\langle (\Delta \hat{X}_k)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta \hat{P}_k)^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4} \left| \left\langle [\hat{X}_k, \hat{P}_k] \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{16} \quad (13.2)$$

در بخش ۱.۲ اشاره شد که موج الکترومغناطیس می‌تواند به مدهای نوسانی تجزیه شود، بسته به هر مد یک عملگر خلق و فنا داریم. تک مد کوانتیده میدان الکترومغناطیسی بر حسب عملگرهای خلق و فنا به شکل زیر بیان می‌شود

$$\hat{E}_k(r, t) = E_0 \left( \hat{a}_k e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + \hat{a}_k^\dagger e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right)$$

که در این رابطه  $E_0$  دامنه میدان الکتریکی است. با استفاده از رابطه ۱۰.۲ و ۱۱.۲، می‌توانیم میدان الکتریکی را به شکل

$$\hat{E}_k(r, t) = 2E_0 \left( \hat{X}_k \cos(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + \hat{P}_k \sin(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right)$$

بازنویسی کنیم. همچنین میدان الکتریکی رابطه بالا را می‌توان با در نظر گرفتن یک ثابت فاز اختیاری  $\Theta$  به شکل کلی زیر نمایش داد

$$\hat{E}_k(r, t) = 2E_0 \left( \hat{X}_k^{(\Theta)} \cos(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \Theta) + \hat{P}_k^{(\Theta)} \sin(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \Theta) \right) \quad (۱۴.۲)$$

در اینجا شکل کلی کوادراتورهای میدان با رابطه زیر داده می‌شوند

$$\begin{aligned} \hat{X}_k^{(\Theta)} &= (\hat{a}_k e^{-i\Theta} + \hat{a}_k^\dagger e^{i\Theta})/2 \\ \hat{P}_k^{(\Theta)} &= (\hat{a}_k e^{-i\Theta} - \hat{a}_k^\dagger e^{i\Theta})/2i \end{aligned} \quad (۱۵.۲)$$

این کوادراتورهای جدید بدست آمده را می‌توان از طریق چرخش کوادراتورهای اولیه بدست آورد.

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_k^{(\Theta)} \\ \hat{P}_k^{(\Theta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cos}\Theta & \text{Sin}\Theta \\ -\text{Sin}\Theta & \text{Cos}\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_k \\ \hat{P}_k \end{pmatrix} \quad (۱۶.۲)$$

چون این تبدیل یک تبدیل یکانی است، مشاهده‌پذیرهای جدید بدست آمده هرمیتی هستند و در رابطه جابجایی صدق می‌کنند.

## ۵.۲ فضای فاز

فضای فاز یک فضای انتزاعی است که برای نمایش حالت‌های سیستم بر حسب جفت‌های مکان و تکانه استفاده می‌شود. در بیان کلاسیکی یک حالت می‌تواند به صورت یک نقطه در فضای فاز نمایش داده شود چون مکان و تکانه حالت مقدار دقیقی دارند. اما در مکانیک کوانتوم این نمایش مجاز نیست، بنابراین یک حالت کوانتومی خالص باید به جای یک نقطه با یک محدوده یا لکه نمایش داده شود یعنی یک نقطه‌ای که عدم قطعیت هم دارد به دلیل وجود شباهت بین عملگرهای

مکان و تکانه و عملگرهای کوادراتور، استفاده از کوادراتورها بجای مکان و تکانه در نمایش فضای فاز امری مرسوم است. برای توصیف رفتار مشاهده‌پذیرهای کوادراتور میدان در فضای فاز، تابع ویگنر یک تابع توزیع مناسب است که در بخش ۴.۳ به آن اشاره شد. بر اساس شکل تابع توزیع ویگنر، حالت‌های کوانتومی متغیر پیوسته را می‌توان به دو گروه حالت‌های گاووسی و غیر گاووسی تقسیم کرد.

## ۶.۲ حالت‌های گاووسی

حالت‌های گاووسی، یکی از بنیادی‌ترین و در عین حال پرکاربردترین دسته‌ها در فضای سیستم‌های متغیر پیوسته هستند. این حالت‌ها به‌واسطه ساختار ریاضیاتی ساده اما قدرتمندشان، در بسیاری از زمینه‌های اپتیک کوانتومی، اطلاعات کوانتومی، و نظریه آشکارسازی نقش کلیدی ایفا می‌کنند. ویژگی بارز حالت‌های گاووسی آن است که تابع توزیع ویژگی مشخصه آنها و همچنین توزیع‌های شباهتمالی متناظر مانند تابع ویگنر، همگی دارای فرم گاووسی هستند. از منظر ریاضی، یک حالت کوانتومی در فضای فاز زمانی گاووسی تلقی می‌شود که تابع چگالی آن به صورت کامل با ماتریس کواریانس و بردار میانگین مشخص شود. این بدان معناست که تمام اطلاعات آماری حالت، در مرتبه دوم لحظه‌ها خلاصه می‌شود و نیازی به دانستن جزئیات مرتبه‌های بالاتر نیست. این ویژگی باعث می‌شود که حالت‌های گاووسی به عنوان مدل‌هایی تحلیلی و قابل پیاده‌سازی در آزمایشگاه، بسیار محبوب باشند. در ادامه این بخش برخی از حالت‌های مهم گاووسی را بررسی می‌گردد.

## ۱.۶.۲ حالت گرمایی

حالت گرمایی<sup>۱</sup> زمانی ایجاد می‌شود که سامانه مورد نظر در تعادل ترمودینامیکی باشد. حالت گرمایی در دمای غیر صفر تقریب خوبی از حالت خلا است. ماتریس چگالی یک حالت گرمایی که در دمای  $T$  قرار دارد در حالت کلی به شکل

$$\rho = \frac{\exp(-\beta \hat{H})}{\text{tr} [\exp(-\beta \hat{H})]} \quad (17.2)$$

در این رابطه،  $\hat{H}$  نمایانگر هامیلتونی سیستم است که انرژی‌های معجاز حالت‌های کوانتومی را تعیین می‌کند، و  $\beta$  پارامتر ترمودینامیکی موسوم به "بتا" است که به دما وابسته بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

---

<sup>۱</sup> Thermal states

که در آن  $k_B$  ثابت بولتزمن و  $T$  دمای مطلق سیستم است. این پارامتر نقش کلیدی در توزیع گیس ایفا می‌کند و تعیین‌کننده وزن نسبی حالت‌های انرژی مختلف در حالت تعادلی سیستم‌های کوانتومی و آماری است. ثابت بولتزمن است. اگر حالت مورد استفاده یک حالت تک مد باشد در این صورت رابطه ۲.۷ را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$\rho = \frac{\exp(-\beta \hbar \omega \hat{n})}{\text{Tr} [\exp(-\beta \hbar \omega \hat{n})]} \quad (18.2)$$

در رابطه بالا،  $\omega$  فرکانس مد مورد استفاده و  $\hat{n}$  عملگر تعداد است. اگر تابع توزیع ویگنر را برای یک حالت گرمایی محاسبه شود در نهایت به رابطه زیر بدست می‌آید که آشکارا یک تابع گاووسی است.

$$W_{\text{th}}(x, p) = \frac{1 - e^{-\omega\beta}}{\pi(1 + e^{-\omega\beta})} \exp \left[ -\frac{1 - e^{-\omega\beta}}{1 + e^{-\omega\beta}} (x^2 + p^2) \right] \quad (19.2)$$

## ۲۰.۶.۲ حالت همدوس

حالت‌های همدوس<sup>۲</sup> ویژه حالت‌های عملگر فنا هستند.

$$\hat{a}_k |\alpha\rangle_k = \alpha |\alpha\rangle_k$$

و یک پایه ابرکامل می‌باشند. یک حالت همدوس را برحسب پایه‌های فوک می‌توانیم به شکل زیر بسط دهیم

$$|\alpha\rangle_k = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle_k \quad (20.2)$$

حالت خلا ویژه حالت عملگر فنا با ویژه مقدار صفر است. پس به عنوان یک مثال ساده از حالت‌های همدوس می‌توان حالت خلا را در نظر گرفت. به عنوان اولین مثال به محاسبه تابع ویگنر برای حالت خلا می‌پردازیم؛ تابع موج مکان حالت خلا را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$$

---

<sup>۲</sup> Coherent states

با توجه به اینکه

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p})$$

$$\hat{a} |0\rangle = 0$$

بنابراین

$$\hat{a} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}) \int dq |x\rangle \langle x|0\rangle = \int dx |x\rangle (x + \frac{\partial}{\partial x}) \langle x|0\rangle = 0$$

$$\left( x + \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_0(q) = 0$$

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (21.2)$$

با کمی محاسبه به راحتی تابع ویگنر را می‌توانیم محاسبه کنیم و در نهایت تابع ویگنر حالت خلا به شکل زیر بدست می‌آید

$$W_{|0\rangle\langle 0|}(x, p) = \frac{2}{\pi} \exp(-x^2 - p^2) \quad (22.2)$$

حال به سراغ محاسبه تابع ویگنر برای یک حالت همدوس در پایه‌های مکان می‌رویم. ابتدا با تعریف  $(x|\psi_\alpha)$  شروع می‌کنیم

$$\psi_\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle$$

با توجه به اینکه در حالت کلی  $\alpha$  یک عدد مختلط است و می‌توان آن را به صورت  $\alpha = x_0 + ip_0$  نوشت، همچنین با استفاده از رابطه ۲۰.۲ که بیان‌گر تابع موج در نمایش مختصات برای حالت‌های عددی است، به راحتی می‌توان تابع موج حالت همدوس را محاسبه کرد. بنابراین داریم

$$\psi_\alpha(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - x_0)^2 + ip_0x\right) \quad (23.2)$$

این تابع موج نشان می‌دهد که حداقل عدم قطعیت بسته موج در مرکز  $(x_0, p_0)$  است. برای محاسبه تابع ویگنر یک حالت همدوس از تعریف فصل اول تابع ویگنراستفاده می‌کنیم.

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-2ipy/\hbar} \langle x + y | \rho | x - y \rangle$$

$$\rho = |\alpha\rangle \langle \alpha|$$

$$\langle x + y | \rho | x - y \rangle = \langle x + y | |\alpha\rangle \langle \alpha| |x - y \rangle = \psi_\alpha(x + y) \psi_\alpha^*(x - y)$$

$$\psi_\alpha(x + y) \psi_\alpha^*(x - y)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}((x + y - x_0)^2 + (x - y - x_0)^2) + ip_0((x + y) - (x - y))\right) \\ &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-((x - x_0)^2 + y^2) + 2ip_0y\right) \end{aligned}$$

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-((x - x_0)^2 + y^2) + 2ip_0y\right) e^{-2ipy} dy$$

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(-y^2 + 2i(p_0 - p)y) \exp(-((x - x_0)^2) dy$$

در ادامه ابتدا به ساده‌سازی عبارت  $\exp(-y^2 + 2i(p_0 - p)y)$  در انتگرال می‌پردازیم

$$\exp(-y^2 + 2i(p_0 - p)y) = \exp(-(y - i(p_0 - p))^2 + (p_0 - p)^2)$$

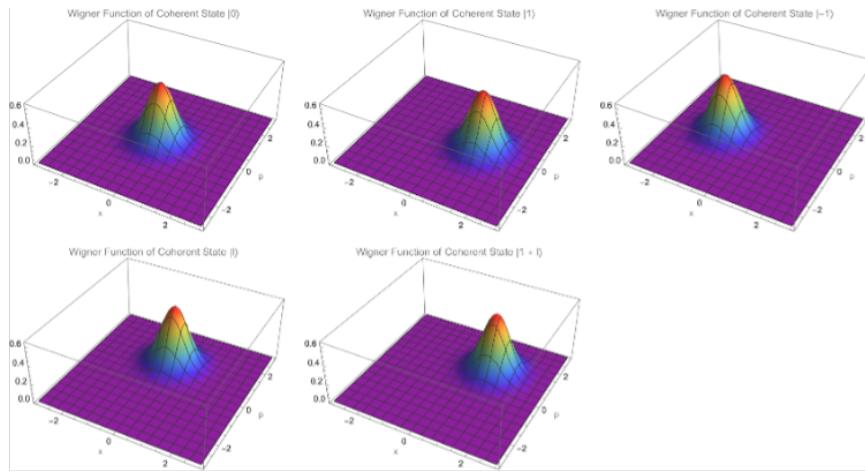
$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(y - i(p_0 - p))^2 + (p_0 - p)^2) dy = \sqrt{\pi} e x p((p_0 - p)^2)$$

در نهایت تابع ویگنر برابر است با

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} \exp(-(x - x_0)^2) \exp((p_0 - p)^2)$$

$$W(x, p) = \frac{2}{\pi} \exp\left(-2 \left((x - \operatorname{Re}(\alpha))^2 + (p - \operatorname{Im}(\alpha))^2\right)\right) \quad (24.2)$$

نمایش تابع ویگنر برای مقادیر مختلف در شکل زیر آمده است.



شکل ۲.۲: تابع ویگنر حالت‌های همدوس

در حالت کلی یک تابع گاوسی چند متغیره را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$f(x) = c \exp \left( -\frac{1}{2} x^T A x + b^T x \right) \quad (25.2)$$

در این رابطه  $b = (b_1, b_2, \dots, b_N)^T$ ،  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ ،  $A$  یک ماتریس مثبت  $n \times n$  است. بنابراین می‌توان هر حالت گاوسی را با یک بردار  $b$  و یک ماتریس  $A$  توصیف کرد. به بردار  $b$  ممان اول می‌گوییم و ماتریس  $A$  معکوس ممان دوم می‌باشد. کوادراتورهای مکان و تکانه را به شکل رابطه ۱۰.۲ و ۱۱.۲ تعریف شده است، از این‌رو می‌توان همه عملگرهای کانونی را در یک بردار به شکل زیر نوشت:

$$\hat{R} = (\hat{q}_1, \hat{p}_1, \dots, \hat{q}_N, \hat{p}_N)^T$$

همچنین می‌توانیم رابطه جابجایی بین عملگرهای را به شکل

$$[\hat{R}_k, \hat{R}_l] = i\Omega_{kl}$$

بنویسیم، که در این رابطه  $\Omega$  فرم همتافت  $N$  مدد است. ما  $d_j$  را به عنوان ممان اول حالت گاوسی  $\rho$  معرفی می‌کنیم که از رابطه زیر بدست می‌آید

$$d_j = \langle \hat{R}_j \rangle_\rho$$

و ماتریس هم وردا  $\sigma$  را به عنوان ممان دوم معرفی می‌کنیم.

$$\sigma = \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left\langle \hat{R}_i \hat{R}_j + \hat{R}_j \hat{R}_i \right\rangle_{\rho} - \left\langle \hat{R}_i \right\rangle_{\rho} \left\langle \hat{R}_j \right\rangle_{\rho} \quad (26.2)$$

### ۳.۶.۲ حالت چلاندۀ

حالت‌های همدوس، حالت‌هایی هستند که کمترین عدم قطعیت را دارند با این حال، مجموعه‌ای بزرگ‌تر از حالت‌ها هستند که کمترین عدم قطعیت را دارند اما ممکن است در آن‌ها واریانس مکان و تکانه برابر نباشد. مثلاً واریانس مکان کم و تکانه زیاد باشد یا بالعکس اما این کم و زیادی به گونه‌ای باشد که حالت باز هم کمترین عدم قطعیت را داشته باشد. این حالت‌ها را حالت چلاندۀ<sup>۳</sup> می‌گوییم. تابع ویگنر حالت چلاندۀ با رابطه زیر داده می‌شود

$$W(x, p) = \frac{2}{\pi} \exp \left( -2 \left( \frac{(x - \operatorname{Re}(\alpha))^2 \cos^2 \theta + (p - \operatorname{Im}(\alpha))^2 \sin^2 \theta}{e^{2r}} \right. \right. \\ \left. \left. + e^{2r} ((x - \operatorname{Re}(\alpha))^2 \sin^2 \theta + (p - \operatorname{Im}(\alpha))^2 \cos^2 \theta) \right) \right)$$

توصیف کامل این حالات در فصل بعدی آورده شده است. در مکانیک کوانتومی هر حالتی که می‌خواهد در فضای هیلبرت تحول یابد، توسط عملیات یکانی توصیف می‌شود. اما اشاره شد، فضایی مورد فضای فاز است. یک سوال مهمی که ممکن است ایجاد شود این است که یک تبدیل یکانی در فضای هیلبرت چگونه در فضای فاز تعریف می‌شود؟ اگر حالتی که مورد استفاده قرار می‌گیرد یک حالت گاووسی باشد، در حالت‌های گاووسی تبدیل یکانی روی فضای هیلبرت به یک تبدیل همتافته بر روی ممان اول و دوم نگاشت می‌شود. نحوه عملکرد این تبدیل در رابطه زیر نمایش داده شده است. قبل ذکر شد که هر حالت گاووسی را می‌توان توسط ممان‌های اول و دوم توصیف کرد. ممان‌های اول و دوم تبدیل یافته به شکل زیر بدست می‌آید. در اینجا<sup>۴</sup> ممان اول تبدیل یافته و<sup>۵</sup> ممان دوم تبدیل یافته است. بنابراین حالت تبدیل یافته جدید توسط ممان‌های جدید می‌تواند توصیف شود.

$$\hat{\rho} = \hat{U} \rho \hat{U}^{\dagger} \rightarrow \begin{cases} \hat{d} = Sd \\ \hat{\sigma} = S\sigma S^T \end{cases} \quad (27.2)$$

---

<sup>۳</sup> Squeezed states

## فصل ۳

### محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته

تا این فصل، با مفاهیم پایه‌ای و ابزارهای ریاضیاتی لازم برای توصیف و تحلیل سامانه‌های کوانتومی با متغیرهای پیوسته آشنا شده‌ایم. این مقدمات شامل تعریف فضای فاز، حالت‌های گاووسی، توزیع‌های شبیه‌احتمالی مانند تابع ویگنر، و ساختار ماتریس چگالی در نمایش مختصات و فضای فاز بوده‌اند. این مباحث، چارچوبی تحلیلی برای درک رفتار آماری و دینامیکی حالت‌های کوانتومی در سیستم‌های متغیر پیوسته فراهم کرده‌اند. در فصل پیش‌رو، تمرکز ما بر معرفی و بررسی عملگرهای بنیادی و گیت‌های کوانتومی در فضای متغیرهای پیوسته خواهد بود. این عملگرها شامل اپراتورهای جابجایی، چلاندنگی، چرخش فازی، و تبدیل‌های خطی در فضای فاز هستند که هر یک نقش مشخصی در تغییر حالت‌های کوانتومی ایفا می‌کنند. همچنین، گیت‌های کوانتومی مانند گیت‌های همدوس، گیت‌های درهم‌تنیده‌کننده، و گیت‌های غیرخطی در این چارچوب معرفی خواهند شد. در این فصل، نه تنها ساختار ریاضیاتی این عملگرها را بررسی می‌کنیم، بلکه اثر اعمال آن‌ها بر روی حالت‌ها، توزیع‌های آماری، و دیگر عملگرها را نیز تحلیل خواهیم کرد. این تحلیل‌ها به ما امکان می‌دهند تا رفتار سیستم را تحت تبدیل‌های کوانتومی مختلف پیش‌بینی کنیم و مسیر طراحی الگوریتم‌های کوانتومی در فضای متغیرهای پیوسته را هموار سازیم. در واقع، این فصل به‌منظمه سنگ‌بنای محاسبات کوانتومی در فضای پیوسته است و پایه‌های مفهومی و عملی لازم برای ورود به مباحث پیشرفته‌تر مانند رمزنگاری کوانتومی، آشکارسازی بهینه، و الگوریتم‌های کوانتومی مبتنی بر حالت‌های گاووسی را فراهم می‌سازد.

## ۱۰.۳ گیت‌های کوانتمی

عملیات یکانی همواره از طریق رابطه زیر

$$U = e^{-itH} \quad (1.3)$$

به یک هامیلتونین مولد مرتبط می‌شود. یکی از رویکردهای رایج این است که یکانی‌ها را براساس درجه هامیلتونین مولد طبقه‌بندی کنیم. می‌توان یک یکانی  $N$  مدی را با اعمال دنباله‌ای از گیت‌ها از یک مجموعه گیت جهان‌شمول ساخت. طبق طبقه‌بندی براساس درجه هامیلتونین یکانی‌ها به گیت‌های گاوی و غیرگاوی تقسیم می‌شوند که در ادامه برخی از مهم‌ترین‌ها بیان می‌شود.

### ۱۰.۱.۳ گیت جابه‌جاوی

در فضای فاز کوانتمی، یکی از بنیادی‌ترین عملگرها، گیت جابه‌جاوی<sup>۱</sup> است که نقش کلیدی در تولید، کنترل و پردازش حالت‌های همدوس و گاوی ایفا می‌کند. این گیت با اعمال یک جابه‌جاوی در فضای فاز، حالت اولیه را به نقطه‌ای جدید با مختصات دلخواه  $(x_0, p_0)$  منتقل می‌کند، بدون تغییر شکل تابع موج یا تابع ویگنر آن. عملگر جابه‌جاوی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) \quad (2.3)$$

که در آن  $\alpha = x_0 + ip_0$  پارامتر جابه‌جاوی است و  $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$  به ترتیب اپراتورهای خلق و فنا هستند. اعمال این گیت بر روی حالت خلا، یک حالت همدوس تولید می‌کند

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle$$

می‌توان بصورت زیر، اثبات ریاضی آن را داشت. با استفاده از لم هاسدروف-بیکر داریم

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12}([\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]])} + \dots$$

---

<sup>۱</sup> Displacement Gate

اگر  $\hat{B} = \alpha^* \hat{a}$  و  $\hat{A} = \alpha \hat{a}^\dagger$  در نتیجه

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0, \quad [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] = 0$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = |\alpha|^2$$

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}$$

بنابراین داریم

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} \quad (3.3)$$

حال بسط نمایی را می‌نویسیم

$$e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(e^{-\alpha^* \hat{a}})^l}{l!} |0\rangle$$

$$e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n (\hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle$$

$$(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle \text{ و } \hat{a} |0\rangle = 0$$

$$e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \sqrt{n!} |n\rangle$$

بنابراین اثر عملگر جابجایی ( $\alpha$ ) بر روی حالت خلا به شکل زیر است:

$$\hat{D}(\alpha) |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (4.3)$$

نابراین برای ایجاد حالت همدوس با پارامتر  $\alpha$  کافی است عملگر ( $\hat{D}(\alpha)$ ) را بر روی حالت خلا اعمال کنیم.

$$\hat{D}(\alpha) |0\rangle = |\alpha\rangle$$

اثر اعمال این عملگر بر روی عملگرهای خلق و فنا به شکل زیر است

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*$$

بنابراین به راحتی می‌توان نشان داد که تاثیر آن بر کوادراتور  $\hat{X}$  به شرح زیر است

$$\begin{aligned} \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{x} \hat{D}(\alpha) &= \frac{1}{2} \hat{D}^\dagger(\alpha) 2 \hat{x} \hat{D}(\alpha) \\ &= \frac{1}{2} \left( \hat{D}^\dagger(\alpha) (\hat{x} + i\hat{p} + \hat{x} - i\hat{p}) \hat{D}(\alpha) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) + \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \alpha + \hat{a}^\dagger + \alpha^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + \sqrt{2} Re(\alpha) \\ \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{x} \hat{D}(\alpha) &= \hat{x} + \sqrt{2} Re(\alpha) \end{aligned} \tag{5.3}$$

به راحتی می‌توان نشان داد که به طور مشابه داریم

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{p} \hat{D}(\alpha) = \hat{p} + \sqrt{2} Im(\alpha) \tag{6.3}$$

اگر عملگرهای جابجایی مکان و تکانه خالص را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\hat{X}(x) = \hat{D} \left( \frac{x}{\sqrt{2\hbar}} \right) = \exp \left( -\frac{ix\hat{p}}{\hbar} \right)$$

$$\hat{Z}(p) = \hat{D} \left( \frac{ip}{\sqrt{2\hbar}} \right) = \exp \left( -\frac{ip\hat{x}}{\hbar} \right)$$

در نتیجه

$$\hat{X}^\dagger(x) \hat{x} \hat{X}(x) = \hat{x} + x$$

$$\hat{Z}^\dagger(p) p Z(p) = \hat{p} + p$$

$\hat{X}(x)$  یک حالت را در فضای فاز با  $x$  در مکان جابه‌جا می‌کند، در حالی که  $\hat{Z}(p)$  حالت را در فضای فاز به اندازه  $p$  در تکانه جابه‌جا می‌کند. ما در ابتدای بخش اثر عملگر  $(\alpha)\hat{D}$  را بر روی حالت خلا دیدیم. حال اگر بخواهیم عملگر جابجایی را بر روی یک حالت همدوس دلخواه مانند  $|\beta\rangle$  نتیجه به چه صورت خواهد بود. در این حالت، مانند این است که دوبار عملگر جابجایی را بر روی حالت خلا اعمال کنیم یعنی

$$\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta)|0\rangle$$

پس کافی است  $\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta)$  را محاسبه کنیم. با تعریف

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$$

$$\hat{D}(\beta) = e^{\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}}$$

و استفاده از لم هاسدروف-بیکر خواهیم داشت

$$\hat{A} = \alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}$$

$$\hat{B} = \beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}$$

و توجه به روابط جابجایی بین عملگرهای خلق و فنا خواهیم داشت

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}] &= [\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}, \beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}] \\ &= \alpha\beta [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] - \alpha\beta^* [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] - \alpha^*\beta [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + \alpha^*\beta^* [\hat{a}, \hat{a}] \\ [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] &= 0 \quad , \quad [\hat{a}, \hat{a}] = 0 \quad , \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \\ [\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}, \beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}] &= \alpha\beta^* - \alpha^*\beta \\ \alpha\beta^* - \alpha^*\beta &= 2iIm(\alpha\beta^*) \end{aligned}$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 2i \operatorname{Im}(\alpha\beta^*)$$

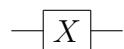
درنهایت

$$\begin{aligned}\hat{D}(\alpha) \hat{D}(\beta) &= e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} e^{e^{\beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a}}} \\ &= e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a} + \beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} \\ &= e^{(\alpha+\beta)\hat{a}^\dagger - (\alpha+\beta)^*\hat{a}} e^{i\operatorname{Im}(\alpha\beta^*)}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\hat{D}(\alpha) \hat{D}(\beta) = \hat{D}(\alpha + \beta) e^{i\operatorname{Im}(\alpha\beta^*)} \quad (7.3)$$

در شکل ۲.۲ اثر این گیت بر روی حالت‌های مختلف نشان داده شده است. این گیت در مدار کوانتومی بصورت زیر نمایش داده می‌شود



شکل ۱.۳: نحوه نمایش گیت جابه‌جایی در مدارهای کوانتومی

### ۲.۱.۳ گیت چرخشی

دومین گیتی تک‌مدى که بررسی می‌کنیم گیت چرخشی<sup>۲</sup> یا تغییر فاز<sup>۳</sup> است که به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{R}(\phi) = e^{i\phi\hat{a}^\dagger \hat{a}} \quad (8.3)$$

این گیت یکی از عملگرهای بنیادی در محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته و اپتیک کوانتومی است که وظیفه‌ی آن، اعمال یک چرخش در فضای فاز به اندازه زاویه  $\phi$  است. این چرخش باعث تغییر فاز حالت کوانتومی بدون تغییر در دامنه آن

---

<sup>۲</sup> Rotation Gate

<sup>۳</sup> Phase gate

می‌شود. تاثیر آن بر عملگرهای خلق و فنا به شکل زیر است

$$\hat{R}^\dagger(\phi) \hat{a} \hat{R}(\phi) = \hat{a} e^{i\phi}$$

$$\hat{R}^\dagger(\phi) \hat{a}^\dagger \hat{R}(\phi) = \hat{a}^\dagger e^{-i\phi}$$

اگر تاثیر این گیت را بر یک حالت همدوس بررسی کنیم داریم

$$\hat{R}(\phi) \hat{D}(\alpha) |0\rangle$$

چون  $\langle 0 | \hat{R}(\phi) | 0 \rangle = 0$  و با توجه به اینکه  $R$  یکانی است، عبارت بالا را به شکل زیر می‌توانیم بازنویسی کنیم

$$\hat{R}(\phi) \hat{D}(\alpha) |0\rangle = \hat{R}(\phi) \hat{D}(\alpha) \underbrace{\hat{R}^\dagger(\phi)}_{|0\rangle} \hat{R}(\phi) |0\rangle$$

پس کافی است  $\hat{R}(\phi) \hat{D}(\alpha) \hat{R}^\dagger(\phi)$  را محاسبه کنیم

$$\hat{R}(\phi) \hat{D}(\alpha) \hat{R}^\dagger(\phi) = \hat{R}(\phi) \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) \hat{R}^\dagger(\phi)$$

$$\begin{aligned} &= \exp\left(\alpha \hat{R}(\phi) \hat{a}^\dagger \hat{R}^\dagger(\phi) - \alpha^* \hat{R}(\phi) \hat{a} \hat{R}^\dagger(\phi)\right) \\ &= \exp\left(\left(\alpha e^{i\phi}\right) \hat{a}^\dagger - \left(\alpha e^{i\phi}\right)^* \hat{a}\right) = \hat{D}\left(\alpha e^{i\phi}\right) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\hat{R}(\phi) |\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha e^{i\phi}) |0\rangle = |\alpha e^{i\phi}\rangle \quad (9.3)$$

در نهایت به محاسبه تاثیر این گیت بر روی کوادراتورهای مکان و تکانه می‌پردازیم

$$\hat{x}_{(\phi)} = \hat{R}^\dagger(\phi) \hat{x} \hat{R}(\phi)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{R}^\dagger(\phi) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \hat{R}(\phi)$$

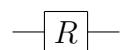
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger e^{-i\phi} + \hat{a} e^{i\phi})$$

$$\hat{R}^\dagger(\phi) \hat{x} \hat{R}(\phi) = \hat{x} \text{Cos}(\phi) - \hat{p} \text{Sin}(\phi) \quad (10.3)$$

و بطور مشابه

$$\hat{R}^\dagger(\phi) \hat{p} \hat{R}(\phi) = \hat{p} \text{Cos}(\phi) + \hat{x} \text{Sin}(\phi) \quad (11.3)$$

مدارها گیت چرخشی را به شکل زیر نمایش داده می‌شود



شکل ۲.۳: نحوه نمایش گیت چرخشی در مدارهای کوانتومی

### ۳.۱.۳ گیت چلانندگی

سومین گیتی تک‌مدی که بررسی می‌کنیم، گیت چلانندگی<sup>۴</sup> است. این گیت یکی از مهم‌ترین ابزارها در اپتیک کوانتومی و محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته است که برای کاهش نوسانات کوانتومی در یکی از مؤلفه‌های مکان یا تکانه استفاده می‌شود، در حالی که نوسانات مؤلفه دیگر افزایش می‌یابد، به طوری که اصل عدم قطعیت هایزنبرگ حفظ شود. حالت‌های چلاندۀ از اعمال این گیت برروی حالت‌ها ساخته می‌شود. کلی ترین حالت تک مد گاووسی، حالت چلاندۀ جابجا شده است که به وسیله ترکیب دو عملگر جابجایی و چلانندگی روی حالت خلا ایجاد می‌شود.

$$|\psi_{\alpha,\xi}\rangle_k \equiv |\psi_{\alpha,s,\theta}\rangle_k = D_k(\alpha) S_k(\xi) |0\rangle_k \quad (12.3)$$

---

<sup>۴</sup> Squeezing Gate

عملگر چلاندگی به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\hat{S}(\xi) = \exp \left[ \frac{1}{2} (\xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^{\dagger 2}) \right] \quad (13.3)$$

که در این رابطه  $se^{i\theta} = \xi$  شامل شدت چلاندگی  $\xi$  و زاویه فاز  $\theta$  است. این تعریف نشان می‌دهد که گیت چلاندگی شامل ترکیبی از اپراتورهای درجه دوم  $\hat{a}^2$  و  $\hat{a}^{\dagger 2}$  است که نوسانات کوانتومی را در یکی از مؤلفه‌های مکان یا تکانه کاهش می‌دهد. اثر این گیت بر روی عملگرهای خلق و فنا به شکل زیر است

$$\hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a} \hat{S}(\xi) = \hat{a} \text{Cosh } s - \hat{a}^\dagger e^{i\phi} \text{Sinh } s$$

$$\hat{S}(\xi)^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) = \hat{a}^\dagger \text{Cosh } s - \hat{a} e^{i\phi} \text{Sinh } s$$

و تاثیر آن بر روی کوادراتورها به صرت زیر می‌باشد

$$\hat{S}(\xi)^\dagger \hat{x}_\phi \hat{S}(\xi) = e^{-s} \hat{x}_\phi$$

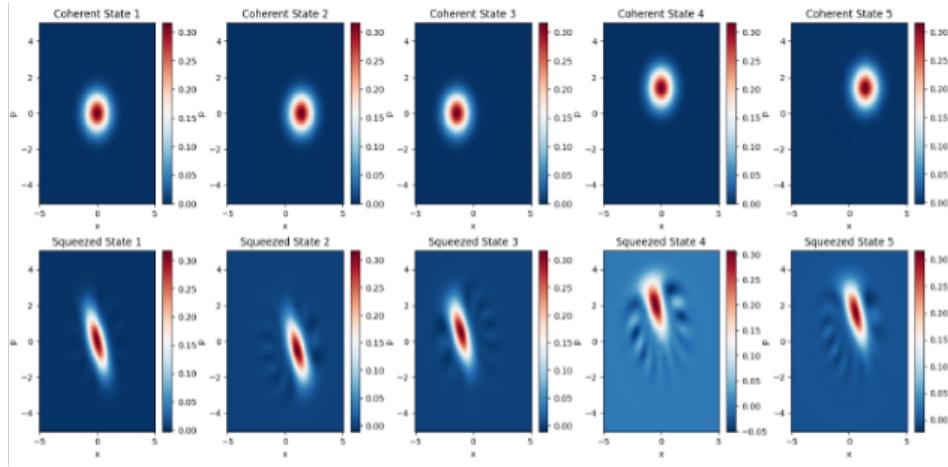
$$\hat{S}(\xi)^\dagger \hat{p}_\phi \hat{S}(\xi) = e^s \hat{p}_\phi$$

حالت چلاندہ واریانس در یک کوادراتور را کاهش می‌دهد و دیگری را افزایش می‌دهد. بهترین حالت برای درک این موضوع، دیدن حالت‌های مختلف در فضای فاز است. برای اینکه حالت‌های مختلف چلاندہ شده را در فضای فاز نمایش دهیم، نیازمند تابع ویگنر حالت‌های چلاندہ هستیم

$$W(x, p) = \frac{2}{\pi} \exp \left( -2 \left( \frac{(x - \text{Re}(\alpha))^2 \cos^2 \theta + (p - \text{Im}(\alpha))^2 \sin^2 \theta}{e^{2r}} \right. \right. \\ \left. \left. + e^{2r} ((x - \text{Re}(\alpha))^2 \sin^2 \theta + (p - \text{Im}(\alpha))^2 \cos^2 \theta) \right) \right)$$

در شکل زیر تابع ویگنر برای حالت‌های همدوس و چلاندہ رسم شده و واضح است، زمانی که عملگر چلاندگی را اعمال می‌کنیم، واریانس در یک کوادراتور کاهش و در دیگری افزایش می‌یابد گیت چلاندگی را در مدارها به شکل زیر نمایش می‌دهیم

گیت بعدی که مورد بررسی قرار می‌گیرد، گیت فاز درجه دو<sup>5</sup> است. این گیت یکی از گیت‌های تکمیلی مهم در



شکل ۳.۳: نمایش تابع ویگنر حالت چلاندنه

$$\xrightarrow{S}$$

شکل ۴.۳: نحوه نمایش گیت چلاندگی در مدارهای کوانتومی

محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته است که نقش آن اعمال یک تحول غیرخطی درجه دوم بر مؤلفه مکان یا تکانه حالت کوانتومی است. گیت فاز درجه دو است که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\hat{P}(s) = \exp\left(i \frac{s}{2\hbar} \hat{x}^2\right) \quad (14.3)$$

این گیت یک تحول غیرخطی در فضای فاز ایجاد می‌کند که باعث خم شدن تابع موج در مؤلفه مکان می‌شود. در فضای فاز، این گیت باعث چرخش غیرخطی و تغییر در انحنای تابع ویگنر می‌شود. گیت فاز درجه دو در ترکیب با گیتهای خطی مانند جابجایی و چرخشی، امکان پیاده‌سازی مدارهای غیرخطی و الگوریتم‌های پیچیده را فراهم می‌کند. گیت فاز درجه دو در کنار گیت فشرده‌سازی و گیت فاز خطی، پایه‌ی ساخت گیتهای کلی‌تر مانند گیت کلیفورد و گیتهای گاوسین را تشکیل می‌دهد. همچنین در پیاده‌سازی گیتهای جهانی برای محاسبات کوانتومی پیوسته، نقش مکمل دارد. اثر آن بر روی عملگر فنا به حالت زیر است

$$\hat{P}^\dagger(s) \hat{a} \hat{P}(s) = \hat{a} + i \frac{s}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

<sup>۵</sup> Quadratic Phase Gate

و تاثیر آن بر روی کوادراتورها به حالت زیر است که مکان را حفظ می‌کند.

$$\hat{P}^\dagger(s) \hat{x} \hat{P}(s) = \hat{x}$$

$$\hat{P}^\dagger(s) \hat{p} \hat{P}(s) = \hat{p} + s\hat{x}$$

نمایش گیت فاز درجه ۲ در مدارها به نحو زیر است.

شکل ۵.۳: نحوه نمایش گیت فاز درجه دو در مدارهای کوانتومی

### ۴.۱.۳ گیت فاز مکعبی

گیت دیگری که به آن اشاره می‌کنیم، گیت فاز مکعبی<sup>۶</sup> است. این گیت یکی از گیت‌های غیرگاووسی و تک‌مدی در محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته است که نقش حیاتی در جهانی‌سازی محاسبات کوانتومی دارد. برخلاف گیت‌های گاووسی که فقط تحول‌های خطی یا درجه دوم ایجاد می‌کنند، گیت فاز مکعبی تحول غیرخطی درجه سوم در مؤلفه مکان اعمال می‌کند.

$$\hat{V}(\gamma) = \exp\left(i \frac{\gamma}{3\hbar} \hat{x}^3\right) \quad (15.3)$$

تاثیر آن بر روی عملگر فنا و کوادراتورها به شکل زیر است

$$\hat{V}^\dagger(\gamma) \hat{a} \hat{V}(\gamma) = \hat{a} + i \frac{\gamma}{2\sqrt{2/\hbar}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2$$

$$\hat{V}^\dagger(\gamma) \hat{x} \hat{V}(\gamma) = \hat{x}$$

$$\hat{V}^\dagger(\gamma) \hat{p} \hat{V}(\gamma) = \hat{p} + \gamma \hat{x}^2$$

در ادامه تاثیر گیت فاز مکعبی را بر روی حالت خلا بررسی می‌کنیم و تاثیر آن را بر روی یک حالت گاووسی نشان می‌دهیم.

---

<sup>6</sup> Cubic Phase Gate

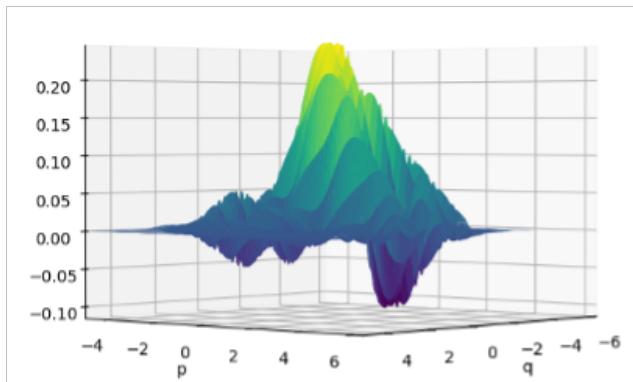
$$|\psi_\gamma\rangle = \hat{V}(\gamma)|0\rangle = \exp(i\gamma\hat{x}^3)|0\rangle$$

اکنون تابع موج را برای حالت  $\langle\psi_\gamma|$  بدست می‌آوریم

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

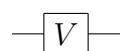
$$\psi_\gamma(x) = \langle x|\psi_\gamma\rangle = \exp(i\gamma\hat{x}^3)\psi_0(x) = \exp(i\gamma\hat{x}^3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

بهترین راه برای درک تغییرات این حالت، رسم تابع ویگنر آن است. تابع ویگنر حالت بالا با مقدار  $\gamma = 1$  در شکل زیر نشان داده شده است. واضح است که حالت ما دیگر یک حالت گاوی نیست و فرم غیرگاوی به خود گرفته است در



شکل ۶.۳: تابع ویگنر حالت خلا که بر روی آن گیت فاز مکعبی اعمال شده است.

نهایت گیت فاز مکعبی را در مدارها با شکل زیر نمایش می‌دهیم



شکل ۷.۳: نحوه نمایش گیت فاز مکعبی در مدارهای کوانتومی

### ۵.۱.۳ گیت کر

آخرین گیت تکمده که بررسی می‌کنیم، گیت کر<sup>۷</sup> است. این گیت یکی از گیت‌های غیرگاوسی و تکمده در محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته است که از برهمنش‌های غیرخطی مرتبه چهارم ناشی می‌شود. گیت کر در بسیاری از سامانه‌های نوری غیرخطی، مانند فیبرهای نوری یا کاواک‌های نانوری، به صورت طبیعی ظاهر می‌شود. نمایش این گیت بصورت زیر است

$$\hat{K}(\kappa) = \exp(i\kappa \hat{n}^2) \quad (16.3)$$

این گیت در پایه فوک کاملاً قطری است و فقط فاز حالت‌های  $\langle n |$  را به صورت  $e^{i\kappa n^2}$  تغییر می‌دهد. تاثیر آن بر روی عملگر خلق و فنا به شکل زیر است

$$\hat{K}^\dagger(\kappa) \hat{a} \hat{K}(\kappa)$$

$$\hat{K}^\dagger(\kappa) \hat{a} \hat{K}(\kappa)$$

و در نهایت تاثیر آن بر روی کوادراتورها به شکل زیر می‌باشد

$$\hat{K}(\kappa) : \begin{bmatrix} \hat{x}_\kappa \\ \hat{p}_\kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x} \text{Cosh } \phi - i\hat{p} \text{Sinh } \phi \\ \hat{p} \text{Cosh } \phi + i\hat{x} \text{Sinh } \phi \end{bmatrix}$$

که در آن

$$\phi(\hat{x}, \hat{p}) = k (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} - i\hat{x}^2 - i\hat{p}^2)$$

در ادامه تاثیر این گیت را بر روی حالت‌های همدوس بررسی می‌کنیم. بدیهی است که این گیت حالت خلا را تغییر نمی‌دهد چون  $|\hat{n}| = 0$ . تاثیر این گیت بر روی حالت‌های همدوس به شکل زیر است

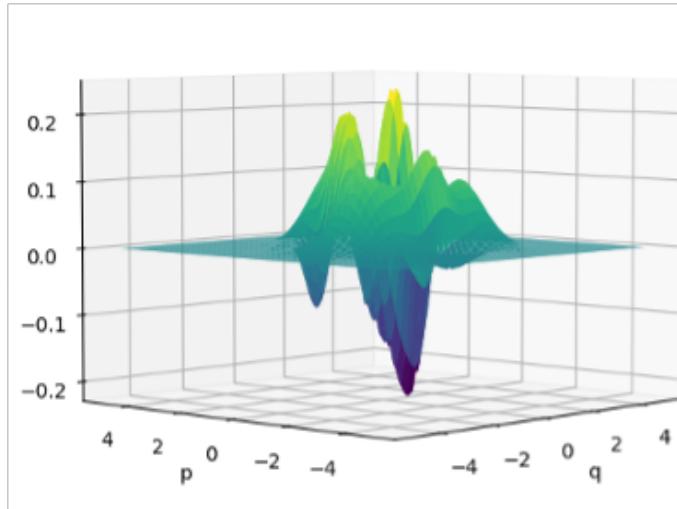
$$|\psi_\kappa\rangle = \hat{K}(\kappa)|\alpha\rangle = \exp(i\kappa\hat{n}^2)|\alpha\rangle$$

$$|\psi_\kappa\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp(i\kappa\hat{n}^2) |n\rangle$$

---

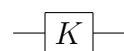
<sup>v</sup> Kerr Gate

برای درک تغییرات این حالت، تابع ویگنر آن را رسم می‌کنیم. تابع ویگنر حالت بالا با مقدار  $\kappa = 1$  در شکل زیر نشان داده شده است. هم‌ترین چیزی که در مورد این تبدیل باید به آن توجه کرد، غیر خطی بودن آن در فضای فاز است.



شکل ۸.۳: تابع ویگنر را برای حالت همدوس با پارامتر  $i + \alpha = 1$  گیت کر را اعمال شده است.

گیت کر را در مدارها با شکل زیر نمایش می‌دهیم



شکل ۹.۳: نحوه نمایش گیت کر در مدارهای کوانتومی

### ۶.۱.۳ گیت شکافنده پرتو

تا اینجا گیت‌های تک‌مدی را بررسی کرده‌ایم. در این بخش به سراغ گیت‌های دومدی می‌رویم. گیت بعدی که بررسی می‌کنیم، گیت شکافنده پرتو<sup>۸</sup> است که از پایه‌ای‌ترین گیت‌های دو مدی در اپتیک کوانتومی و محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته بهشمار می‌رود. این گیت تعامل بین دو مد کوانتومی را مدل‌سازی می‌کند و نقش کلیدی در تولید درهم‌تنیدگی، تداخل کوانتومی، و پیاده‌سازی مدارهای نوری دارد. عملگر شکافنده پرتو بر حسب عملگرهای خلق و فنا دو مدی مثلاً  $\hat{a}_1$  و  $\hat{a}_2$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{B}(\theta, \phi) = \exp \left[ \theta \left( e^{i\phi} \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger - e^{-i\phi} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) \right] \quad (17.3)$$

<sup>8</sup> Beam Splitter Gate

شکافنده پرتو عملگرهای فنا را به شکل زیر تغییر می‌دهد

$$\hat{B}(\theta, \phi)^\dagger \hat{a}_1 \hat{B}(\theta, \phi) = \hat{a}_1 \cos\theta - \hat{a}_2 e^{-i\phi} \sin\theta = t \hat{a}_1 - r^* \hat{a}_2$$

$$\hat{B}(\theta, \phi)^\dagger \hat{a}_2 \hat{B}(\theta, \phi) = \hat{a}_2 \cos\theta - \hat{a}_1 e^{i\phi} \sin\theta = t \hat{a}_2 - r \hat{a}_1$$

با تعريف  $r = e^{i\phi} \sin\theta$  و  $t = \cos\theta$  که نشان‌دهنده دامنه انتقال و انعکاس پرتو شکافنده است؛ شکافنده پرتو یک حالت همدوس را به شکل زیر تبدیل می‌کند

$$\hat{B}(\theta, \phi) |\alpha, \beta\rangle = |\alpha, \beta\rangle$$

$$\alpha = \cos\theta - \beta e^{-i\phi} \sin\theta$$

$$\beta = \beta \cos\theta + \alpha e^{i\phi} \sin\theta$$

بنابراین به عنوان مثال حالت‌های همدوس مختلف کافی است به جای  $\alpha, \beta, \theta$  و  $\phi$  مقادیر دلخواه را قرار دهیم. همچنین شکافنده پرتو بر روی عملگرهای کوادراتور به شکل زیر اثر می‌کند

$$\hat{B}(\theta, \phi)^\dagger \hat{x}_1 \hat{B}(\theta, \phi) = \hat{x}_1 \cos\theta - \sin\theta (\hat{x}_2 \cos\phi + \hat{p}_2 \sin\phi)$$

$$\hat{B}(\theta, \phi)^\dagger \hat{p}_1 \hat{B}(\theta, \phi) = \hat{p}_1 \cos\theta - \sin\theta (\hat{p}_2 \cos\phi - \hat{x}_2 \sin\phi)$$

$$\hat{B}(\theta, \phi)^\dagger \hat{x}_2 \hat{B}(\theta, \phi) = \hat{x}_2 \cos\theta - \sin\theta (\hat{x}_1 \cos\phi - \hat{p}_1 \sin\phi)$$

$$\hat{B}(\theta, \phi)^\dagger \hat{p}_2 \hat{B}(\theta, \phi) = \hat{p}_2 \cos\theta - \sin\theta (\hat{p}_1 \cos\phi + \hat{x}_1 \sin\phi)$$

در یک شکافنده پرتو  $50:50$  پارامترها به شکل  $\theta = \frac{\pi}{4}$  و  $\phi = 0$  تعریف می‌شوند بنابراین در حالت دامنه انتقال و انعکاس پرتو شکافنده برابر با  $\frac{1}{2}$  است. اثر این حالت بر روی متغیرهای مکان و تکانه به شکل زیر است

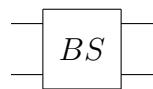
$$\hat{B}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) |x\rangle_x |x\rangle_x = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - x_2) \right\rangle \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2) \right\rangle$$

$$\hat{B}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) |p\rangle_p |p\rangle_p = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 - p_2) \right\rangle \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 + p_2) \right\rangle$$

$$\hat{B}\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right) |x\rangle_x |x\rangle_x = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2) \right\rangle \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 - x_1) \right\rangle$$

$$\hat{B}\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right) |p\rangle_p |p\rangle_p = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (p_1 + p_2) \right\rangle \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (p_2 - p_1) \right\rangle$$

در نهایت در مدارها گیت شکافنده پرتو را به شکل زیر نمایش می‌دهیم.



شکل ۱۰.۳: نحوه نمایش گیت شکافنده پرتو در مدارهای کوانتومی

### ۷.۱.۳ گیت چلانندگی دومدی

گیت دو مدی بعدی که بررسی می‌کنیم، گیت چلانندگی دومدی<sup>۹</sup> است. این گیت یکی از مهم‌ترین ابزارها در تولید حالت‌های درهم‌تنیده در اپتیک کوانتومی و محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته است. برخلاف گیت چلانندگی تک‌مدی که نوسانات را در یک مد کاهش می‌دهد، گیت دومدی باعث درهم‌تنیدگی نوسانات بین دو مد می‌شود. این گیت به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\hat{S}_2(z) = \exp\left(z\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger - z^*\hat{a}_1\hat{a}_2\right) = \exp\left(r\left(e^{i\phi}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger - e^{-i\phi}\hat{a}_1\hat{a}_2\right)\right) \quad (18.3)$$

که در آن  $r = re^{i\phi}$ ،  $z \in [0, 2\pi]$  و  $r > 0$  است. همچنین می‌توان این گیت را برحسب گیت‌های چلانندگی تک‌مد و شکافنده پرتو تجزیه کرد که این حالت برابر است با

$$\hat{S}_2(z) = \hat{B}^\dagger\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \left[ \hat{S}(z) \otimes \hat{S}(-z) \right] \hat{B}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \quad (19.3)$$

---

<sup>۹</sup> Two-Mode Squeezing Gate

گیت چلاندگی دو مدي عملگرهای خلق و فنا را به شکل زیر تغیر می‌دهد

$$\hat{S}_2(z)^\dagger \hat{a}_1 \hat{S}_2(z) = \hat{a}_1 \cosh(r) - \hat{a}_2^\dagger e^{i\phi} \sinh(r)$$

$$\hat{S}_2(z)^\dagger \hat{a}_2 \hat{S}_2(z) = \hat{a}_2 \cosh(r) - \hat{a}_1^\dagger e^{i\phi} \sinh(r)$$

همچنین از تاثیر اين گیت بر روی حالت خلا دو مدي داريم

$$|TMSV\rangle = \hat{S}_2(z)|0,0\rangle = \frac{1}{\cosh(r)} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{i\phi} \tanh(r))^n |n,n\rangle \quad (20.3)$$

دو گیت بعدی که بررسی شده است از نوع کیت‌های کنترل شده است که یک کیومد را به عنوان کیومد کنترل انتخاب می‌کند و کیومد دیگر را به عنوان هدف انتخاب می‌کند.

### CX گیت ۸.۱.۳

گیت  $X$  کنترل شده که با  $CX$  نمایش داده می‌شود و همچنین به عنوان گیت جمع یا گیت اضافه کننده شناخته می‌شود، یک جایه‌جایی کنترل شده در مکان به وجود می‌آورد و توسط رابطه زیر داده می‌شود.

$$CX(s) = \int d x |x\rangle \langle x| \bigotimes D\left(\frac{sx}{\sqrt{2}\hbar}\right) = \exp\left(-\frac{is}{\hbar}x_1 \bigotimes p_2\right) \quad (21.3)$$

به اين گیت، گیت جمع می‌گويند چون اثر آن بر روی یک حالت در پایه‌های مکان برابراست با

$$CX(s)|x_1, x_2\rangle_x = |x_1, x_2 + sx_1\rangle_x \quad (22.3)$$

اين گیت را می‌توان برحسب عملگر چلاندگی تک مدد و شکافنده پرتو به شکل زير نوشت

$$CX(s) = \hat{B}\left(\frac{\pi}{2} + \theta, 0\right) \left(\hat{S}(r, 0) \bigotimes \hat{S}(-r, 0)\right) \hat{B}(\theta, 0) \quad (23.3)$$

که در اينجا

$$\sin 2\theta = \frac{-1}{\cosh r} \quad , \quad \cos 2\theta = \tanh(r) \quad , \quad \sinh(r) = -\frac{s}{2}$$

در نهایت تاثیر این عملگر بر روی عملگرهای خلق و فنا و همچنین کوادراتورها به شکل زیر است

$$CX(s)^\dagger \hat{x}_1 CX(s) = \hat{x}_1$$

$$CX(s)^\dagger \hat{p}_1 CX(s) = \hat{p}_1 - s\hat{p}_2$$

$$CX(s)^\dagger \hat{x}_2 CX(s) = \hat{x}_2 + s\hat{x}_1$$

$$CX(s)^\dagger \hat{p}_2 CX(s) = \hat{p}_2$$

$$CX(s)^\dagger \hat{a}_1 CX(s) = \hat{a}_1 + \frac{s}{2} (\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2)$$

$$CX(s)^\dagger \hat{a}_2 CX(s) = \hat{a}_2 + \frac{s}{2} (\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1)$$

### ۹.۱.۳ CZ گیت

آخرین گیت دومدی که در این بخش بررسی شده است، گیت کنترل شده  $Z$  میباشد که با  $CZ$  نمایش داده میشود و به آن کنترل-فاز نیز گفته میشود. گیت کنترل-فاز به صورت زیر تعریف میشود

$$CZ(s) = \iint dx dy e^{isx_1 x_2 / \hbar} |x_1, x_2\rangle \langle x_1, x_2| = \exp\left(is x_1 \bigotimes x_2 / \hbar\right) \quad (24.3)$$

همچنین میتوان با استفاده از گیت  $CX$  و چرخشی، این گیت را به شکل زیر بازنویسی کرد

$$CZ(s) = R_{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right) CX(s) R_{(2)}^\dagger\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (25.3)$$

توجه شود که گیت چرخشی فقط بر روی مددوم تاثیر میگذارد. همچنین اثر این گیت بر روی حالتی که در پایه های مکان نوشته شده باشد برابراست با

$$CZ(s) |x_1, x_2\rangle_x = e^{isx_1 x_2 / \hbar} |x_1, x_2\rangle_x \quad (26.3)$$

در نهایت تاثیر این عملگر بر روی عملگرهای خلق و فنا و همچنین کوادراتورها از روابط زیر بدست می‌آید

$$CZ(s)^\dagger \hat{x}_1 CZ(s) = \hat{x}_1$$

$$CZ(s)^\dagger \hat{p}_1 CZ(s) = \hat{p}_1 + s\hat{x}_2$$

$$CZ(s)^\dagger \hat{x}_2 CZ(s) = \hat{x}_2$$

$$CZ(s)^\dagger \hat{p}_2 CZ(s) = \hat{p}_2 + s\hat{x}_1$$

$$CZ(s)^\dagger \hat{a}_1 CZ(s) = \hat{a}_1 + i\frac{s}{2} (\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2)$$

$$CZ(s)^\dagger \hat{a}_2 CZ(s) = \hat{a}_2 + i\frac{s}{2} (\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1)$$

## ۲.۳ اندازه‌گیری‌های متغیر پیوسته

در سیستم‌های کوانتومی متغیر پیوسته، اندازه‌گیری‌ها نقش حیاتی در استخراج اطلاعات، اجرای پروتکل‌های کوانتومی، و کنترل حالت‌های کوانتومی دارند. برخلاف سیستم‌های گسسته که اندازه‌گیری‌ها معمولاً روی کیوبیت‌ها انجام می‌شود، در متغیر پیوسته از اندازه‌گیری‌هایی استفاده می‌شود که به طور مستقیم با مؤلفه‌های مکان و تکانه مرتبط‌اند. این اندازه‌گیری‌ها شامل تشخیص هموداین<sup>۱۰</sup>، تشخیص هتروداین<sup>۱۱</sup> و شمارش فوتون<sup>۱۲</sup> می‌شوند. در ادامه به بررسی هریک خواهیم پرداخت.

### ۱.۲.۳ تشخیص هموداین

آشکارسازی هموداین یک تکنیک کلیدی برای اندازه‌گیری یکی از کوادراتورها در یک سیستم کوانتومی متغیر پیوسته است. در اندازه‌گیری هموداین، سیگنال نوری که باید اندازه‌گیری شود، با یک لیزر مرجع<sup>۱۳</sup> که فاز و فرکانس آن به‌دقیقت کنترل شده، ترکیب می‌شود. این ترکیب در یک آشکارساز تفاضلی انجام می‌شود، که اختلاف شدت‌های دو پرتو را اندازه‌گیری می‌کند. در ابتدا، دو مد داریم؛ اول مد سیگنال که مشخص‌کننده حالت کوانتومی ورودی است ( $a_s$ ) و مد نوسانگر محلی

<sup>۱۰</sup> Homodyne Detection

<sup>۱۱</sup> Heterodyne Detection

<sup>۱۲</sup> Photon Counting

<sup>۱۳</sup> Local Oscillator

یا موضعی که یک پرتوی همدوس قدرتمند با دامنه بزرگ ( $\alpha$ ) و فاز مشخص ( $\theta$ )، نمایش داده شده به صورت ( $a_{LO}$ ) است. این دو مقدار یک تقسیم‌کننده پرتو  $50:50$  می‌شوند. اثر تقسیم‌کننده پرتو بر عملگرهای نابودی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$a_1 = \frac{a_{LO} + a_s}{\sqrt{2}} \quad , \quad a_2 = \frac{a_{LO} - a_s}{\sqrt{2}}$$

که در این روابط  $a_1$  و  $a_2$  خروجی‌های تقسیم‌کننده پرتو هستند. خروجی‌های تقسیم‌کننده پرتو به دو فوتودیود ارسال می‌شوند که تعداد فوتون‌ها  $n_1$  و  $n_2$  را اندازه‌گیری می‌کنند. عملگر تعداد فوتون به شکل زیر تعریف می‌شود

$$n_1 = a_1^\dagger a_1 \quad , \quad n_2 = a_2^\dagger a_2$$

با جایگذاری از روابط بالا  $n_1$  و  $n_2$  بدست می‌آید

$$n_1 = \frac{1}{2} \left( a_{LO}^\dagger a_{LO} + a_s^\dagger a_s + a_{LO}^\dagger a_s + a_s^\dagger a_{LO} \right) \quad (27.3)$$

$$n_2 = \frac{1}{2} \left( a_{LO}^\dagger a_{LO} + a_s^\dagger a_s - a_{LO}^\dagger a_s - a_s^\dagger a_{LO} \right) \quad (28.3)$$

اختلاف جریان‌های فوتودیودها، سیگنال خروجی را مشخص می‌کند. این اختلاف برابر است با

$$n_1 - n_2 = a_{LO}^\dagger a_s + a_s^\dagger a_{LO} \quad (29.3)$$

این رابطه نشان می‌دهد که اختلاف جریان‌ها حاوی اطلاعات مربوط به تداخل بین سیگنال و نوسانگر محلی است. از آنجا که نوسانگر محلی یک پرتوی همدوس قدرتمند است ( $1 \gg |\alpha|$ ) می‌توان عملگر  $a_{LO}$  را با مقدار میانگین آن ( $\alpha$ ) جایگزین کرد. بنابراین

$$\langle a_{LO} \rangle = \alpha e^{-i\theta}$$

با جایگذاری این مقدار در تفاضل جریان‌ها، رابطه زیر بدست می‌آید.

$$n_1 - n_2 \approx \alpha e^{-i\theta} a_s + \alpha e^{i\theta} a_s^\dagger \quad (30.3)$$

با استفاده از تعریف عملگر کوادراتور  $x_s^{(\theta)}$  داریم

$$x_s^{(\theta)} = x_s \cos \theta + p_s \sin \theta$$

از طرفی عملگر مکان و تکانه به شکل

$$x_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_s + a_s^\dagger) \quad , \quad p_s = \frac{1}{\sqrt{2}i} (a_s - a_s^\dagger)$$

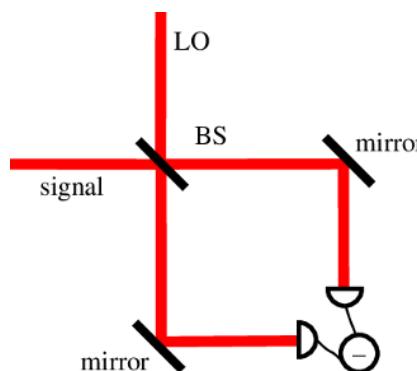
تعریف شده‌اند، بنابراین سیگنال خروجی برابر است با

$$n_1 - n_2 \propto \alpha x_s^{(\theta)} \quad (31.3)$$

در نتیجه مقدار چشم داشتی اختلاف جریان‌ها به شکل زیر محاسبه می‌شود

$$\langle n_1 - n_2 \rangle = 2|\alpha| \langle x_s^{(\theta)} \rangle \quad (32.3)$$

این رابطه نشان می‌دهد که سیگنال خروجی مستقیماً به کوادراتور  $x_s^{(\theta)}$  مربوط است که زاویه  $\theta$  آن توسط فاز نوسان‌گر محلی تعیین می‌شود. زاویه فاز نوسان‌گر محلی تعیین می‌کند که کدام کوادراتور اندازه‌گیری شود. با تغییر فاز نوسان‌گر محلی، می‌توان هر کوادراتور دلخواهی  $x_s$  یا  $p_s$  را اندازه‌گیری کرد. تشخیص هموداین به دلیل قابلیت اندازه‌گیری دقیق و حساسیت بالا، یکی از ابزارهای کلیدی در سیستم‌های متغیر پیوسته است و در آزمایش‌های مرتبط با اطلاعات کوانتمی و فیزیک حالت‌های نوری کاربرد فراوان دارد.



شکل ۱۱.۳: نمایی شماتیک از آشکارساز هموداین

### ۲۰.۲.۳ تشخیص هتروداین

تشخیص هتروداین مشابه به تشخیص هموداین است، اما در اینجا هدف اندازه‌گیری همزمان دو کوادراتور است. این دو عملگر به دلیل رابطه‌ی عدم قطعیت که دارند، نمی‌توانند به‌طور دقیق و همزمان اندازه‌گیری شوند و این باعث ایجاد عدم قطعیت می‌شود. خروجی یک اندازه‌گیری هتروداین معمولاً به صورت تابع  $Q$  نمایش داده می‌شود. تابع  $Q$  یکی از توزیع‌های شباهت‌امالی است که ویژگی‌های حالت کوانتموی را در فضای مختلط فضای حالت کوانتموی می‌سازد.

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle \quad (۳۳.۳)$$

که در آن  $\alpha$  یک مقدار مختلط است که مشخص کننده‌ی مقادیر مکان و تکانه است و  $\rho$  اپراتور چگالی است که وضعیت سیستم کوانتموی را توصیف می‌کند. روند کار در تشخیص هتروداین دقیقاً مشابه با تشخیص هموداین است. در تشخیص هتروداین، یک سیگنال کوانتموی که می‌خواهیم آن را اندازه‌گیری کنیم ( $a_s$ )، با یک نوسان‌گر محلی که یک حالت همدوس است ( $a_{LO}$ ) ترکیب می‌شود. این ترکیب در یک تقسیم‌کننده پرتو ۵۰:۵۰ صورت می‌گیرد. شبیه به تشخیص هموداین، بعد از تقسیم در پرتو، خروجی‌های تقسیم‌کننده به صورت زیر خواهند بود

$$a_1 = \frac{a_{LO} + a_s}{\sqrt{2}} \quad , \quad a_2 = \frac{a_{LO} - a_s}{\sqrt{2}} \quad (۳۴.۳)$$

جريان تولید شده در فوتودیودها به تعداد فوتون‌های عبوری از آن‌ها بستگی دارد. عملگرهای تعداد فوتون برای این دو پرتوی خروجی به صورت رابطه (۲۹.۳) نوشته می‌شود و با انجام محاسبات مشابه بخش قبل، در نهایت برای دریافت سیگنال خروجی، تفاضل این دو جريان اندازه‌گیری شده را محاسبه می‌کنیم که سیگنال خروجی به‌شكل زیر در می‌آید

$$n_1 - n_2 \propto \alpha (x_s \cos\theta + p_s \sin\theta) \quad (۳۵.۳)$$

در حقیقت، تشخیص هتروداین و تشخیص هموداین شبیه به هم هستند، اما تفاوت‌های اصلی در نحوه اندازه‌گیری و نوع اطلاعاتی که از سیستم استخراج می‌کنیم وجود دارد. در این روش هر دو کوادراتور  $\hat{x}$  و  $\hat{p}$  به‌طور همزمان اندازه‌گیری می‌شوند. این اندازه‌گیری نیاز به استفاده از دو فرکانس مختلف دارد. یک فرکانس برای نوسان‌گر محلی و یک فرکانس برای سیگنال، که این باعث می‌شود که بتوانیم به‌طور همزمان هر دو کوادراتور را اندازه‌گیری کنیم. هر دو روش در نهایت به یک هدف مشابه دست می‌یابند، اندازه‌گیری یکی یا هر دو از کوادراتورهای سیستم کوانتموی. در هر دو روش، از یک نوسان‌گر محلی برای تقویت سیگنال استفاده می‌شود و پس از تداخل آن با سیگنال، اختلاف جريان‌ها اندازه‌گیری می‌شود

اما در تشخیص هتروداین، دو فرکانس مختلف استفاده می‌شود و به همین دلیل قادر به اندازه‌گیری همزمان مکان و تکانه هستیم. در حالی که در هموداین تنها یک کوادراتور اندازه‌گیری می‌شود که بستگی به فاز نوسان‌گر محلی دارد.

### ۳.۲.۳ شمارش فوتون

در تشخیص شمارش فوتون، برخلاف روش‌های هموداین و هتروداین که به اندازه‌گیری کوادراتورهای  $\hat{x}$  و  $\hat{p}$  می‌پردازنند، هدف این است که تعداد فوتون‌هایی که در یک حالت کوانتمی خاص حضور دارند شمارش شود. این روش به طور مستقیم ویژگی‌های ذره‌ای (نه موجی) نور را بررسی می‌کند. تشخیص شمارش فوتون یکی از ساده‌ترین و رایج‌ترین روش‌ها در فیزیک کوانتمی است که برای آشکارسازی تک‌فوتونی یا پرتوهای ضعیف استفاده می‌شود. عملگر شمارش فوتون در حالت کوانتمی، معمولاً با عملگر فوک که تعداد فوتون‌ها را اندازه‌گیری می‌کند، توصیف می‌شود. اگر  $\hat{n}$  عملگر تعداد فوتون باشد، تعداد فوتون‌ها به صورت زیر مشخص می‌شود

$$n = a^\dagger a$$

در این روش، از آشکارسازهای فوتونی برای شبیه‌سازی این عملگر استفاده می‌شود. آشکارساز فوتون به طور معمول دو ویژگی اصلی دارد:

- ۱- کارایی کوانتمی (۷): در صد فوتون‌هایی که از سیگنال مورد نظر به درستی شناسایی می‌شوند.
- ۲- شمارش پس‌زمینه<sup>۱۴</sup>: فوتون‌های اضافی که به دلیل نویزهای پس‌زمینه و بی‌نظمی‌ها در دستگاه آشکارساز ایجاد می‌شوند. در تشخیص شمارش فوتون، آشکارساز معمولاً به گونه‌ای تنظیم می‌شود که وقتی حداقل یک فوتون به آن برسد، پاسخ دهد. این آشکارساز معمولاً آشکارسازهای فوتودیود یا مشابه آن است که با تشخیص تغییرات در جریان الکتریکی، تعداد فوتون‌ها را می‌شمارد. عملگر شمارش فوتون می‌تواند به صورت یک مجموعه‌ای از اپراتورهای  $POVM$  مدل شود که نتیجه آن فقط مقادیر عددی صحیح  $n = 0, 1, 2, \dots$  است. این مقادیر نمایانگر تعداد فوتون‌هایی است که توسط دستگاه شناسایی شده‌اند. عملگر  $POVM$  برای شمارش فوتون به طور کلی به این صورت نوشته می‌شود

$$E_n = |n\rangle\langle n| \quad (36.3)$$

که در آن  $|n\rangle$  یک حالت فوک است که تعداد  $n$  فوتون را نشان می‌دهد. در دنیای واقعی، آشکارساز فوتون معمولاً تحت تأثیر نویز پس‌زمینه قرار دارد. نویز پس‌زمینه ناشی از فوتون‌هایی است که از محیط یا از خود آشکارساز به طور تصادفی

<sup>۱۴</sup> Dark counts

شناسایی می‌شوند. به عبارت دیگر، زمانی که یک فوتون وارد آشکارساز نمی‌شود، ممکن است هنوز سیگنالی به دلیل نویز پس‌زمینه ثبت شود. این نویز می‌تواند دقت اندازه‌گیری شمارش فوتون را کاهش دهد. برای مدل‌سازی این نویز، می‌توان یک متغیر تصادفی  $n_{dark}$  ر محاسبات وارد کرد که مربوط به فوتون‌های پس‌زمینه است. در نهایت، مقدار مورد انتظار تعداد فوتون‌ها در حضور نویز به این شکل خواهد بود

$$\langle n_{total} \rangle = \langle n \rangle + \langle n_{dark} \rangle \quad (37.3)$$

### ۳.۳ درهم‌تنیدگی در سیستم‌های متغیر پیوسته

درهم‌تنیدگی در سیستم‌های متغیر پیوسته یکی از بنیادی‌ترین پدیده‌های مکانیک کوانتومی است که نقش کلیدی در توسعه فناوری‌های ن کوانتومی ایفا می‌کند. برخلاف سامانه‌های گسسته که بر پایه کیوبیت‌ها بنا شده‌اند، در اینجا حالت‌های کوانتومی با متغیرهایی چون مکان، تکانه یا مدهای میدان نوری توصیف می‌شوند و فضای هیلبرت آن‌ها بی‌نهایت بعدی است. این ویژگی امکان ایجاد همبستگی‌های قوی و پایدار میان زیرسامانه‌ها را فراهم می‌آورد و بستر مناسبی برای کاربردهایی چون ارتباطات امن کوانتومی، محاسبات مبتنی بر مدهای نوری و سنجش‌های فوق‌دقیق ایجاد می‌کند. از این رو مطالعه درهم‌تنیدگی پیوسته نه تنها از منظر نظری اهمیت دارد، بلکه در مسیر تحقق عملی فناوری‌های کوانتومی آینده نیز نقشی تعیین‌کننده خواهد داشت. در این بخش به بررسی درهم‌تنیدگی کوانتومی پرداخته خواهد شد.

#### ۱.۳.۳ ایجاد درهم‌تنیدگی

یکی از عملیات‌های اصلی در پردازش اطلاعات کوانتومی ایجاد درهم‌تنیدگی است. هنگامی که درمورد درهم‌تنیدگی در سیستم‌های متغیر پیوسته صحبت می‌شود، یکی از موارد قابل بحث پارادوکس  $EPR$ <sup>۱۵</sup> است. در سال ۱۹۳۵ انسٹیوشن پودولسکی و روزن مقاله‌ای با عنوان "آیا توصیف مکانیک کوانتومی یک واقعیت فیزیکی را می‌توان کامل درنظر گرفت" منتشر کردند که مدعی بود مکانیک کوانتومی ناقص است. آن‌ها برای نشان دادن ادعای خود یک حالت بسیار جالبی را معرفی می‌کنند. یک سیستم کوانتومی که از دو ذره به نام‌های ۱ و ۲ تشکیل شده‌است را درنظر بگیرید. از رابطه جابه‌جایی مکان و تکانه می‌دانیم

$$[\hat{x}_1, \hat{p}_1] = [\hat{x}_2, \hat{p}_2] = i\hbar \neq 0$$

---

<sup>۱۵</sup> Einstein–Podolsky–Rosen

این رابطه به این معنی است که نمی‌توانیم یک حالت کوانتومی داشته باشیم که مکان و تکانه را همزمان باهم تعیین کنیم.  
با این حال یک ترکیب خطی از عملگرهای کوادراتور به شکل زیر می‌سازیم

$$[\hat{x}_1 - \hat{x}_2, \hat{p}_1 + \hat{p}_2] = 0$$

از آنجایی که رابطه جابه‌جایی فوق صفر است، یعنی یک حالت کوانتومی وجود دارد که ویژه حالت همزمان  $\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + \hat{p}_1$  است. این رابطه به ما می‌گوید که اختلاف مکان  $\hat{x}_1 - \hat{x}_2$  و مجموع تکانه  $\hat{p}_1 + \hat{p}_2$  می‌توانند به طور همزمان اندازه‌گیری شوند. آن‌ها در مقاله‌ی خود پیش‌بینی وجود چنین حالتی را دلیل بر ناقص بودن مکانیک کوانتومی می‌دانستند. حالتی که به عنوان حالت *EPR* معرفی شد دارای دو ویژگی بود که در آن حالت اختلاف مکان و مجموع تکانه یک مقدار ثابت محدود می‌شدند. به عنوان مثال، اختلاف مکان و مجموع تکانه صفر باشد. این حالت دارای ویژگی بود که باعث می‌شد انسیستین، روزن و پودولسکی مدعی شوند که مکانیک کوانتومی ناقص است. استدلال آن‌ها به این شکل بود: فرض کنید  $\hat{x}_1$  از ذره ۱ چنین حالت کوانتومی را اندازه‌گیری می‌کنیم. سپس، کوادراتور  $\hat{x}_2$  از ذره ۲ بلافاصله و با دقت کامل مشخص می‌شود. به همین ترتیب اگر تکانه  $\hat{p}_1$  ذره ۱ را اندازه‌گیری کنیم بلافاصله تکانه  $\hat{p}_2$  ذره ۲ معلوم می‌شود. این رفتار که به عمل شبح‌وار از راه دور<sup>۱۶</sup> معروف است، نشان می‌دهد که انتخاب مشاهده‌گر روی ذره اول، بلافاصله وضعیت ذره دوم را تغییر می‌دهد، حتی اگر این دو ذره از هم بسیار دور باشند. امروزه، بسیاری از فیزیک‌دانان این پدیده را نه به عنوان یک پارادوکس، بلکه به عنوان نشانه‌ای از تفاوت‌های اساسی بین فیزیک کلاسیک و کوانتومی می‌دانند. حالت *EPR* به یکی از پایه‌های اصلی درهم‌تنیدگی در سیستم‌های متغیر پیوسته تبدیل شده است. این حالت معادل کوانتومی حالات بل در سیستم‌های گسسته است. برای سیستم‌های  $d$  ترازه گسسته، حالت‌های بل تعمیم یافته با

$$|\psi_{nm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} e^{\frac{2\pi i n k}{d-1}} |k, k \oplus m\rangle \quad (38.3)$$

داده می‌شود. که این رابطه حالت‌های بل برای سیستم‌های گسسته با بعد  $d$  را نشان می‌دهد و در آن  $k$  مقادیر پایه در فضای حالت،  $m$  و  $n$  مقادیر پارامترهای مربوط به تغییرات فاز و جابه‌جایی،  $\oplus$  جمع مازولار و  $\frac{1}{\sqrt{d}}$  ثابت بهنجارش است. به عنوان مثال برای  $d=2$  داریم: در فضای دو بعدی حالت‌های پایه  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  با جایگذاری مقادیر مختلف  $m$  و  $n$  حالت‌های زیر بدست می‌آید که همان حالت‌های بل در فضای دو بعدی است.

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle)$$

<sup>۱۶</sup> Spooky Action at a Distance

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle)$$

در سیستم‌های کوانتومی گسسته حالات بل به عنوان حالت‌های درهم‌تنیده دو کیویت تعریف می‌شوند. در سیستم‌های متغیر پیوسته، این حالات به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$|\psi_{u,v}\rangle = \frac{1}{N} \int dq e^{-iuq} |q, q+v\rangle_q \quad (39.3)$$

در اینجا  $n$ ،  $k$  و  $m$  به متغیرهای  $q$  و  $v$  تبدیل شده‌اند و علامت جمع با یک انتگرال جایگزین شده است. در این رابطه  $N$  ثابت بهنجارش است. با توجه به اینکه حالت‌های  $EPR$ ، حالت‌های درهم‌تنیده در سامانه متغیر پیوسته هستند بنابراین از ویژگی آن‌ها استفاده می‌کنیم و اختلاف مکان و مجموع تکانه را برابر با مقدار ثابتی قرار می‌دهیم.

$$\langle \hat{q}_1 - \hat{q}_2 \rangle = -v$$

$$\langle \hat{p}_1 + \hat{p}_2 \rangle = u$$

$$\text{var}(\hat{q}_1 - \hat{q}_2), \text{var}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2) = 0$$

به این معنی است که مکان و تکانه دوسیستم کاملاً همبستگی دارند. حالت‌های  $|\psi_{u,v}\rangle$  نسخه متغیر پیوسته حالت‌های بل هستند. با استفاده از گیت  $CX$  می‌توانیم حالت  $|\psi_{u,v}\rangle$  را بر حسب ویژه حالت‌های مکان و تکانه  $_q|v\rangle$  و  $_p|u\rangle$  بنویسیم

$$|\psi_{u,v}\rangle = \frac{1}{N} \int dq e^{-iuq} \exp(-2iq_1 p_1) |q, v\rangle_q = CX \left( \int dq e^{-iuq} |q\rangle_q \right) |v\rangle_q = CX |u\rangle_p |v\rangle_q \quad (40.3)$$

با توجه به اینکه ویژه حالت‌های کواراتورها به هنجار نیستند و نمی‌توانیم آن‌هارا به صورت فیزیکی تشخیص دهیم، پس حالت‌های  $EPR$  هم غیر فیزیکی هستند. با این وجود ما می‌توانیم حالت‌های  $EPR$  تقریبی را ایجاد کنیم. اکنون باید یک پیاده‌سازی نوری واقعی برای این حالت پیدا کنیم. اول از همه یادآوری می‌کنیم که می‌توانیم از حالت‌های چلاند به عنوان ویژه حالت‌های تقریبی عملگرهای مکان و تکانه استفاده کنیم. در عمل از حالت‌های چلاند شده برای تقریب زدن موقعیت‌ها و تکانه‌ها استفاده می‌شود. گیت  $CX$  را می‌توان بر حسب عملگرهای خلق و فنا نوشت که نشان می‌دهد یک عملگر چلاندنگی دو مدی است.

$$CX_{ij} = \exp(-2i\hat{q}_i \hat{p}_j) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \hat{a}_i \hat{a}_j - \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j - \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger \right) \right] \quad (41.3)$$

این کار مشابه با ایجاد درهمتنیدگی دوکیوبیتی است که در ان ابتدا یک گیت هادامارد به کوبیت کنترل اعمال می شود و سپس یک  $CX$  اعمال می شود. با این حال برای ایجاد گیت  $CX$  متغیر پیوسته به چلانندگی زیادی نیاز داریم که در عمل به سختی ایجاد می شود بنابراین بررسی خواهیم کرد که آیا می توانیم دو حالت همدوس چلاند را با عناصر اپتیکی خطی مانند شیفت کننده های فاز و تقسیم کننده پرتو، درهمتنیده کنیم یا خیر. دوتابع ویگنر مجزا ( $W_1(q_1, p_1)$  و  $W_2(q_2, p_2)$ ) را در نظر بگیرید که مربوط به دو حالت چلاند هستند. فرض کنید که این ها به ترتیب در مکان تکانه چلاند شده اند.

$$W_1(q_1, p_1) = \frac{2}{\pi} \exp \left[ -2\Delta^2 (q_1 - q_\alpha)^2 - \frac{2(p_1 - p_\alpha)^2}{\Delta^2} \right] \quad (42.3)$$

$$W_2(q_2, p_2) = \frac{2}{\pi} \exp \left[ -\frac{(q_2 - q_\alpha)^2}{2\Delta^2} - 8\Delta^2 (p_2 - p_\alpha)^2 \right] \quad (43.3)$$

که در اینجا  $q_\alpha$  و  $p_\alpha$  مقادیر میانگین مکان و تکانه، همچنین  $\Delta$  پارامتر چلاندگی است. با ترکیب دو حالت چلاند  $W_2(q_2, p_2)$  و  $W_1(q_1, p_1)$  و اعمال یک دوران در فضای فاز، تابع ویگنر کل به صورت زیر به دست می آید

(44.3)

$$W(q_1, p_1; q_2, p_2) = W(q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta, p_1 \cos \theta + p_2 \sin \theta; q_2 \cos \theta - q_1 \sin \theta, p_2 \cos \theta - p_1 \sin \theta)$$

اگر  $\theta = \frac{\pi}{2}$  را در نظر بگیریم، تابع ویگنر چرخشی  $W = W(q'_1, p'_1; q'_2, p'_2)$  به رابطه زیر تبدیل می شود

$$W = \frac{4}{\pi^2} \exp \left[ -\frac{\left( \frac{(q'_1 - q'_2)}{\sqrt{2}} - q_\alpha \right)^2}{2\Delta^2} - \frac{2 \left( \frac{(p'_1 + p'_2)}{\sqrt{2}} - p_\alpha \right)^2}{\Delta^2} \right] \times$$

$$\exp \left[ -2\Delta^2 \left( \frac{(q'_1 + q'_2)}{\sqrt{2}} - q_\alpha \right)^2 - 8\Delta^2 \left( \frac{(p'_1 - p'_2)}{\sqrt{2}} - p_\alpha \right)^2 \right] \quad (45.3)$$

که در آن

$$q'_1 = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}} \quad , \quad q'_2 = \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{2}} \quad , \quad p'_1 = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{2}} \quad , \quad p'_2 = \frac{p_2 - p_1}{\sqrt{2}}$$

مختصات چرخشی هستند. در حد چلانندگی بینهایت یعنی  $\infty \rightarrow \Delta^2$  تابع ویگنر به حاصل ضرب دو تابع دلتا  $\delta(q'_1 - q'_2 - q_\alpha) \delta(p'_1 + p'_2 - p_\alpha)$  کاهش می یابد، به این معنی که تفاوت مکان ها به شدت در اطراف  $q_\alpha$  و

تکانه کل به شدت در اطراف  $p_\alpha$  به اوج می‌رسد.

### ۲.۳.۳ تشخیص درهم‌تنیدگی

در اینجا یک سوال اساسی ممکن است پیش بیاید و آن این است که چگونه تایید کنیم که یک سیستم درهم‌تنیده است یا خیر؟ برای پاسخ به این سوال ابتدا شرط جداپذیری دو سیستم را معرفی می‌کنیم:

یک حالت کوانتومی را به عنوان حالت جداپذیر دو زیرسیستم  $A$  و  $B$  معرفی می‌کنیم اگر و تنها اگر به ازای دو مجموعه  $\{\hat{\rho}_i^A\}$  و  $\{\hat{\rho}_i^B\}$  از  $A$  و  $B$  بتوانیم ماتریس چگالی حالت کوانتومی را به شکل زیر بنویسیم

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_i^A \otimes \hat{\rho}_i^B \quad (46.3)$$

راستی آزمایی تجربی درهم‌تنیدگی کوانتومی با استفاده از تعریف بالا به دلایل متعدد کابوس آزمایش‌گرایان است چون برای استفاده از این رابطه به  $\hat{m}$  نیاز داریم ولی ما در سامانه‌های متغیر پیوسته با کوادراتورها معمولاً کار می‌کنیم و  $\hat{x}$  و  $\hat{m}$  را اندازه‌گیری می‌کنیم. بنابراین اولین کار سخت پیدا کردن و حدس زدن یک  $\hat{m}$  است که حالت سیستم را توضیف کند. اما این تنها کار سخت پیش‌روی ما نیست. دومین کار سخت، انتخاب پایه‌هایی است که بتوانیم در آن پایه‌ها  $\hat{m}$  را به شکل رابطه (۴۶.۳) تجزیه کنیم. حالا که استفاده از این رابطه سخت است به سراغ شاهدهای درهم‌تنیدگی<sup>۱۷</sup> می‌رویم. ما در شاهدهای درهم‌تنیدگی به دنبال یک سری معیار هستیم که برای ما درهم‌تنیده بودن یا جداپذیر بودن حالات را مشخص کند. اولین معیاری که معرفی می‌شود، معیار ترانهاده جزئی مثبت<sup>۱۸</sup> است.

### ۳.۳.۳ معیار ترانهاده جزئی مثبت

معیار ترانهاده جزئی مثبت که به آن معیار پرز-هوردسکی<sup>۱۹</sup> هم می‌گویند، یکی از ابزارهای ریاضی کلیدی برای شناسایی وجود درهم‌تنیدگی در حالت‌های کوانتومی است. این معیار در سال ۱۹۹۶ توسط آشر پرز و خانواده هورودسکی ارائه شد و کاربرد ویژه‌ای در شناسایی درهم‌تنیدگی در سیستم‌های دو بخشی دارد. برای یک سیستم دوبخشی  $AB$  که با ماتریس  $\hat{\rho}_{AB}$  توصیف می‌شود، فضای کلی سیستم به صورت حاصل‌ضربی از فضاهای دو زیرسیستم تعریف می‌شود:

$$H_{AB} = H_A \otimes H_B$$

<sup>۱۷</sup> Entanglement Withness

<sup>۱۸</sup> Positive Partial Transpose(PPT)

<sup>۱۹</sup> Peres-Horodecki criterion

ماتریس چگالی  $\hat{\rho}_{AB}$  را می‌توان در پایه‌های محلی به صورت زیر نوشت:

$$\rho = \sum_{i,j,k,l} p_{kl}^{ij} |i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle l|$$

ترانهاده جزئی نسبت به زیرسیستم  $B$  به این معنا است که عملگرهای مربوط به زیرسیستم  $B$  در ماتریس چگالی ترانهاده می‌شوند، در حالی که زیرسیستم  $A$  تغییری نمی‌کند. معیار  $PPT$  بیان می‌کند که اگر  $\hat{\rho}_{AB}$  یک حالت کوانتومی جدانشدنی باشد، انتقال جزئی آن  $\hat{\rho}_{AB}^{T_B}$  همچنان یک ماتریس مثبت نیمه‌معین <sup>۲۰</sup> خواهد بود اما اگر  $\hat{\rho}_{AB}$  یک حالت کوانتومی درهم‌تنیده باشد، انتقال جزئی آن دیگر مثبت نیمه‌معین نیست و حداقل یکی از مقادیر ویژه ماتریس  $\hat{\rho}_{AB}^{T_B}$  منفی خواهد بود. در سیستم‌های با ابعاد پایین مانند دو کیوبیت یا یک کیوتربیت و یک کیوتربیت معیار  $PPT$  شرط لازم و کافی برای درهم‌تنیدگی است. به عبارت دیگر اگر حالت درهم‌تنیده باشد، انتقال جزئی مثبت نیمه‌معین نخواهد بود. ولی اگر حالت جدانشدنی باشد، انتقال جزئی مثبت نیمه‌معین خواهد بود. در سیستم‌های با ابعاد بالا معیار  $PPT$  تنها یک شرط لازم برای درهم‌تنیدگی است و دیگر کافی نیست. برخی حالات درهم‌تنیده وجود دارند که انتقال جزئی مثبت دارند. این حالات به عنوان حالات درهم‌تنیده با  $PPT$  شناخته می‌شوند و به دسته‌ی درهم‌تنیدگی موسوم به درهم‌تنیدگی مرزی تعلق دارند.

### ۴.۳.۳ معیار ون‌لوک–فوراساوا

در سیستم‌های کوانتومی، برخی از معیارها مانند  $PPT$  یا دیگر معیارهای مبتنی بر تجزیه ماتریس چگالی  $\hat{\rho}$  برای بررسی درهم‌تنیدگی نیازمند تخمین دقیق  $\hat{\rho}$  هستند. این فرآیند به اندازه‌گیری‌های متعدد و محاسبات پیچیده نیاز دارد. از سوی دیگر، در آزمایش‌های  $CV$ ، کوادراتورهای میدان الکترومغناطیسی  $\hat{x}$  و  $\hat{p}$  به راحتی قابل اندازه‌گیری هستند. معیار ون‌لوک–فوراساوا <sup>۲۱</sup> به دنبال توسعه روشنی است که از نتایج مستقیم اندازه‌گیری کوادراتورها برای بررسی درهم‌تنیدگی استفاده کند. این رویکرد به‌ویژه برای سیستم‌های چند مدلی طراحی شده است، جایی که معیارهای سنتی ممکن است ناکارآمد باشند. این معیار، مشابه معیارهایی مانند معیارهای دوان–سایمون <sup>۲۲</sup>، به‌طور خاص براساس اندازه‌گیری کوادراتورهای سیستم تعریف شده و نیازی به دانش مستقیم ماتریس چگالی حالت کوانتومی ندارد. معیار  $VLF$  از ترکیب‌های خطی

<sup>۲۰</sup> positive semi-definite

<sup>۲۱</sup> Van Loock–Furusawa(VLF)

<sup>۲۲</sup> Duan–Simon

کوادراتورهای مکان  $\hat{x}_j$  و  $\hat{p}_j$  برای بررسی درهمتندگی استفاده می‌کند. این ترکیب‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{X} = \sum_{j=1}^N g_j \hat{x}_j \quad (47.3)$$

$$\hat{P} = \sum_{j=1}^N h_j \hat{p}_j \quad (48.3)$$

که در آن  $g_j$  و  $h_j$  ضرایب وزنی مرتبط با هر مد  $j$  هستند. برای حالت‌های کوانتومی که میان دو گروه مدها  $A$  و  $B$  جدانشدنی نیستند، معیار  $VLF$  بیان می‌کند که جمع واریانس‌های  $\hat{X}$  و  $\hat{P}$  باید کمتر از یک آستانه خاص باشد

$$\langle \Delta^2 \hat{X} \rangle + \langle \Delta^2 \hat{P} \rangle \geq \hbar \left( \sum_{j \in A} |g_j h_j| + \sum_{k \in B} |g_k h_k| \right) \quad (49.3)$$

اگر جمع واریانس‌های ترکیب‌های خطی کوادراتورها کمتر از مقدار آستانه باشد، نشان‌دهنده وجود درهمتندگی کوانتومی بین دو گروه  $A$  و  $B$  است. با بررسی تمام حالت‌های دو گروهی ممکن، می‌توان به درهمتندگی چند مدی کامل دست یافت. از جمله مزایای معیار  $VLF$  می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- سادگی آزمایشگاهی: معیار  $VLF$  تنها به اندازه‌گیری کوادراتورهای مدهای مختلف نیاز دارد که به راحتی با آشکارسازهای هموداین انجام می‌شود
- عدم نیاز به تخمین ماتریس چگالی: این معیار نیازی به بازسازی کامل حالت کوانتومی ندارد.
- تشخیص چند مدی: این معیار به طور خاص برای بررسی درهمتندگی در سیستم‌های چند مدی طراحی شده است. برای سیستم‌هایی مانند حالت‌های خوشی، این معیار بسیار کارآمد است، زیرا واریانس برخی ترکیبات خطی کوادراتورها به صفر میل می‌کند. لازم به ذکر است که معیار  $VLF$  تنها یک شرط کافی برای تشخیص درهمتندگی است. بنابراین، ممکن است در برخی موارد نتواند تمام حالت‌های درهمتندگی را شناسایی کند.

## ۴.۳ فرابرد کوانتمی

اکنون به یکی از مهم‌ترین کاربردهای درهم‌تنیدگی یعنی فرابرد کوانتمی<sup>۲۳</sup> می‌پردازیم. فرابرد کوانتمی تکنیکی برای انتقال اطلاعات بین دو نقطه دور از هم است. در فرابرد کوانتمی آلیس و باب که در دو نقطه دور از یکدیگر قرار دارند، بین خودشان یک حالت درهم‌تنیده به اشتراک می‌گذارند و همچنین بین آن‌ها یک کانال ارتباطی کلاسیک برقرار است. فرض کنید آلیس می‌خواهد یک حالت کوانتمی ناشناخته را برای باب بفرستد. با توجه به اینکه هیچ اندازه‌گیری وجود ندارد که همزمان همه اطلاعات حالت را به آلیس بدهد (فرضیه برافکنش<sup>۲۴</sup>) و همچنین قضیه عدم شبیه‌سازی حالت بنابراین تنها راه باقی‌مانده برای اینکه اطلاعات حالت را به باب بدهد این است که خود حالت را برای باب بفرستد. این همان کاری است که در فرایند فرابرد کوانتمی انجام می‌شود.

### ۱۰.۴.۳ فرابرد کوانتمی در سامانه‌های متغیر گسته

ابتدا پروتکل فرابرد کوانتمی در سامانه‌های گسته معرفی می‌شود. فرض کنید که آلیس باید یک کیوبیت که در حالت زیر آماده شده است به باب بفرستد

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

برای مشاهده طرز کار این پدیده، حالت سه کیوبیتی زیر را در نظر بگیرید

$$|\psi\rangle_a \otimes |\Psi^-\rangle_{AB} = (\alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a) \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |1\rangle_B - |1\rangle_A |0\rangle_B) \quad (50.3)$$

که در آن آلیس کیوبیت  $a$  را در اختیار دارد که قرار است ارسال شد، همچنین آلیس و باب کیوبیت‌های  $A$  و  $B$  که به شکل یک حالت درهم‌تنیده  $|\Psi^-\rangle_{AB}$  بین آن‌ها به اشتراک گذاشته شده است در اختیار دارند. رابطه‌ی بالا را می‌توانیم به شکل زیر بر حسب پایه بل برای کیوبیت‌های آلیس بازنویسی کنیم

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_a \otimes |\Psi^-\rangle_{AB} &= \frac{1}{2} |\Psi^-\rangle_{aA} (-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) + \frac{1}{2} |\Psi^+\rangle_{aA} (-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) \\ &\quad + \frac{1}{2} |\Phi^-\rangle_{aA} (\alpha|1\rangle_B + \beta|0\rangle_B) + \frac{1}{2} |\Phi^+\rangle_{aA} (\alpha|1\rangle_B - \beta|0\rangle_B) \end{aligned}$$

با نوشتن به این صورت، آلیس می‌تواند با اندازه‌گیری دو کیوبیت خودش در پایه حالت بل، کیوبیت باب را در یک حالت

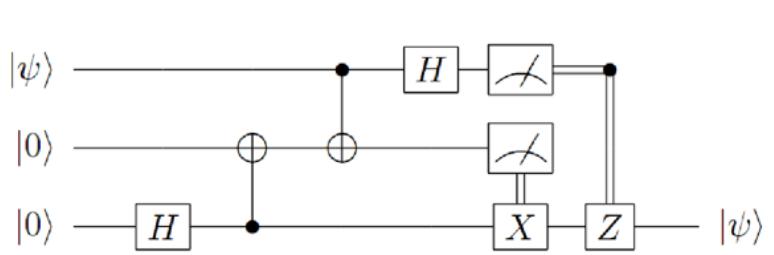
<sup>۲۳</sup> quantum teleportation

<sup>۲۴</sup> projection postulate

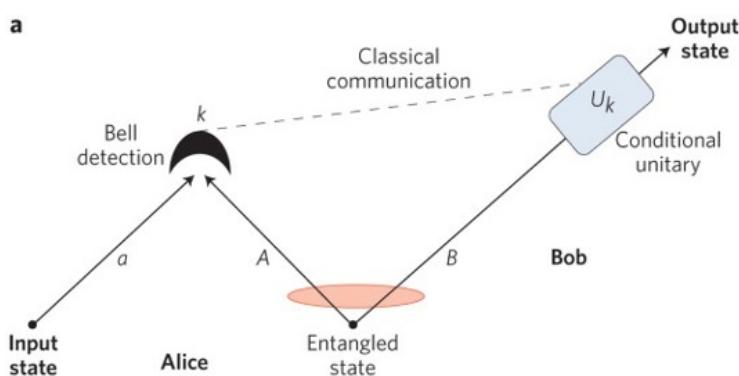
وابسته به  $\alpha$  و  $\beta$  آمده کند. چهار نتیجه هم احتمال، مربوط به حالت‌های  $|\Phi^+\rangle_{aA}$  و  $|\Phi^-\rangle_{aA}$ ،  $|\Psi^+\rangle_{aA}$  و  $|\Psi^-\rangle_{aA}$  کیوبیت باب را در چهار حالت متناظر  $\alpha|1\rangle_B - \beta|0\rangle_B$ ،  $\alpha|1\rangle_B + \beta|0\rangle_B$ ،  $-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B$ ،  $-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B$  باقی می‌گذارند. این چهار حالت از طریق اثر یکی از چهار عملگر پائولی به حالت کیوبیت اصلی در معادله (۵۰.۳) مرتبط می‌شوند.

$$\begin{aligned}\hat{I}(-\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) &= -(\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) \\ \hat{\sigma}_z(-\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) &= -(\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) \\ \hat{\sigma}_x(\alpha|1\rangle_B + \beta|0\rangle_B) &= (\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) \\ \hat{\sigma}_y(\alpha|1\rangle_B - \beta|0\rangle_B) &= -i(\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B)\end{aligned}\quad (51.3)$$

تنها کارآلیس این است که به باب بگوید کدام یک از این چهار عملگر هم احتمال به کیوبیت او (باب) اعمال شده است و نتیجه، در محل باب، نسخه‌ای از کیوبیت اصلی آلیس است. در شکل ۱۲.۳ و ۱۳.۳ طرحی از فرآبرد کوانتمی و همچنین مدار فرآبرد کوانتمی نشان داده شده است.



شکل ۱۲.۳: مدار فرآبرد کوانتمی



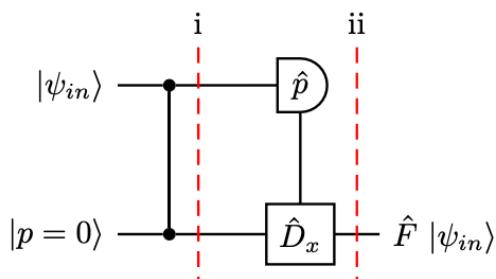
شکل ۱۳.۳: نحوه اجرای پروتکل فرآبرد کوانتمی

### ۲۰.۴.۳ فرابرد کوانتمی در سامانه‌های متغیر پیوسته

فرابرد یکی از پروتکل‌های بنیادی در نظریه اطلاعات کوانتمی است که نه تنها امکان انتقال حالت‌های کوانتمی را فراهم می‌کند، بلکه به عنوان ابزاری کلیدی برای ساخت مدل‌های محاسبات کوانتمی نیز به کار گرفته می‌شود. در چارچوب متغیرهای پیوسته، دو نسخه اصلی از این پروتکل معروفی شده است که به آن‌ها نیمه‌فرابرد<sup>۲۵</sup> و فرابرد کامل<sup>۲۶</sup> گفته می‌شود. در ادامه به بررسی این دو پرداخته می‌شود.

#### ۱۰.۴.۳ نیمه فرابرد کوانتمی

در نیمه‌فرابرد، تنها بخشی از عملیات فرابرد انجام می‌شود و عنصر اصلی مدار، گیت  $CZ$  است. این نسخه در واقع تعمیم مستقیمی از مدل محاسبات کوانتمی مبتنی بر کیوبیت‌ها در چارچوب محاسبات کوانتمی مبتنی بر اندازه‌گیری<sup>۲۷</sup> ( $MBQC$ ) به حوزه متغیر پیوسته محسوب می‌شود. از لحاظ تاریخی، نخستین تلاش‌ها برای پیاده‌سازی ( $MBQC$ ) در نسخه متغیر پیوسته بر پایه همین مدار نیمه‌فرابرد شکل گرفتند، زیرا ساختار آن شباهت زیادی به مدل کیوبیتی داشت و امکان انتقال مفاهیم از جهان کیوبیت‌ها به متغیرهای پیوسته را فراهم می‌کرد. با این حال، اجرای عملی این پروتکل به دلیل نیاز به گیت‌های غیرخطی و کنترل دقیق بر گیت  $CZ$ ، پیچیدگی‌های فنی قابل توجه ای دارد. مدار نیمه‌فرابرد بکی از ابتدایی‌ترین روش‌ها برای فرابرد کوانتمی در سیستم‌های متغیر پیوسته است. این مدار شامل گیت  $CZ$  و یک حالت کمکی می‌باشد. شکل ۱۰.۳ مدار نیمه‌فرابرد را نشان می‌دهد.



شکل ۱۰.۳: مدار نیمه فرابرد کوانتمی

<sup>۲۵</sup> Half teleportation

<sup>۲۶</sup> Full teleportation

<sup>۲۷</sup> Measurement-Based Quantum Computation

در این شکل  $\langle \psi_{in} |$  نشان دهنده حالت انتقالی یا مد ورودی است و  $|0 = p|$  مد کمکی را نشان می‌دهد. گیت  $CZ$  بر روی دو مد (ورودی و کمکی) اعمال می‌شود. این گیت باعث ایجاد همبستگی بین کوادراتورهای مکان  $\hat{x}$  و تکانه  $\hat{p}$  این دو مد می‌شود. با توجه به روابط تبدیل گیت  $CZ$  خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 CZ(s)^\dagger \hat{x}_1 CZ(s) &= \hat{x}_1 \\
 CZ(s)^\dagger \hat{p}_1 CZ(s) &= \hat{p}_1 + s\hat{x}_2 \\
 CZ(s)^\dagger \hat{x}_2 CZ(s) &= \hat{x}_2 \\
 CZ(s)^\dagger \hat{p}_2 CZ(s) &= \hat{p}_2 + s\hat{x}_1 \\
 CZ(s)^\dagger \hat{a}_1 CZ(s) &= \hat{a}_1 + i\frac{s}{2} (\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2) \\
 CZ(s)^\dagger \hat{a}_2 CZ(s) &= \hat{a}_2 + i\frac{s}{2} (\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1)
 \end{aligned} \tag{۵۲.۳}$$

عملگرهای کوادراتور در قسمت (i) نمودار به شکل زیر تبدیل می‌شوند.

$$\hat{x}_{in}^{(i)} = \hat{x}_{in}$$

$$\hat{p}_{in}^{(i)} = \hat{p}_{in} + \hat{x}_{Anc}$$

$$\hat{x}_{Anc}^{(i)} = \hat{x}_{Anc}$$

$$\hat{p}_{Anc}^{(i)} = \hat{p}_{Anc} + \hat{x}_{in}$$

بعد از اعمال گیت  $CZ$  مقدار عملگر  $\hat{p}_{in}^{(i)}$  را اندازه‌گیری می‌شود. وقتی که یک عملگر اندازه‌گیری می‌شود، نتیجه اندازه‌گیری که یک اسکالر است با عملگر جایگزین می‌شود. در این مورد  $m_p$  به عنوان نتیجه اندازه‌گیری درنظر می‌گیریم و مقدار  $\hat{p}_{in}^{(i)}$  با  $m_p$  جایگزین می‌کنیم. بنابراین با توجه به رابطه فوق

$$m_p = \hat{p}_{in} + \hat{x}_{Anc}$$

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که

$$m_p - \hat{p}_{in} = \hat{x}_{Anc}$$

می‌توان عملگرهای کوادراتور مد کمکی را پس از اندازه‌گیری مد ورودی یعنی در مرحله (ii)، دوباره به شکل زیر نوشت

$$\hat{x}_{Anc}^{(ii)} = \hat{x}_{Anc}$$

$$\hat{p}_{Anc}^{(ii)} = \hat{p}_{Anc} + \hat{x}_{in}$$

با استفاده از معادلات فوق داریم

$$\hat{x}_{Anc}^{(ii)} = m_p - \hat{p}_{in}$$

$$\hat{p}_{Anc}^{(ii)} = \hat{p}_{Anc} + \hat{x}_{in}$$

باید تاکید شود که توزیع احتمال  $m_p$  فارغ از هرگونه پیاده‌سازی مدار در شکل ۱۴.۳ به شدت به حالت ورودی و حالت فرعی بستگی دارد. با این حال می‌توانیم به وسیله یک تغییر جابه‌جایی در مد کمکی،  $m_p$  پاک شود. از این عدد استفاده می‌شود تا حالت کوانتمی کمکی اصلاح شود. این اصلاح شامل یک "جابه‌جایی" است که حالت کمکی را به حالتی نزدیکتر به حالت اصلی تبدیل می‌کند. هدف این است که اثر نویز یا خطا از بین برده شود و حالت خروجی با حالت اصلی تطبیق داده شود. به عنوان یک تشییه ساده تصور کنید می‌خواهید یک بسته را از یک نقطه به نقطه دیگر بفرستید، اما در مسیر بسته ممکن است کمی کچ شود یا آسیب ببیند. اندازه‌گیری شبیه به این است که وضعیت بسته را بررسی کنید و ببینید چقدر کچ شده است. عملیات پیشخور<sup>۲۸</sup> یعنی این خطا را اصلاح کنید (مثلاً بسته را صاف کنید) تا دوباره به حالت درست برگردد. در نهایت با اعمال عملیات جابه‌جایی روابط به شکل زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned}\hat{x}_{out} &= -\hat{p}_{in} \\ \hat{p}_{out} &= \hat{x}_{in} + \hat{p}_{Anc}\end{aligned}\tag{۵۳.۳}$$

در صورتی که از ویژه حالت کوادراتور  $\hat{p}$  یعنی  $\langle 0 | p | 0 \rangle$  به عنوان حالت کمکی استفاده شود،  $\hat{p}_{Anc}$  همیشه صفر خواهد بود و رابطه ورودی-خروجی مدار نیمه فرابرد به سادگی تبدیل فوریه مد ورودی است. اکنون اهمیت مدار نیمه فرابرد مشخص شد، به وسیله یک مدار نیمه فرابرد می‌توان تبدیل فوریه کوانتمی در یک سامانه متغیر پیوسته انجام داد. با این حال ویژه حالت‌های کوادراتورها غیرفیزیکی هستند و معمولاً در اجرای واقعی با حالت‌های چلاندۀ جایگزین می‌شوند. اگر یک حالت چلاندۀ با پارامتر چلاندن<sup>۲۹</sup> را به عنوان حالت فرعی خود استفاده کنیم، رابطه ورودی و خروجی به شکل

---

<sup>۲۸</sup> Feed forward

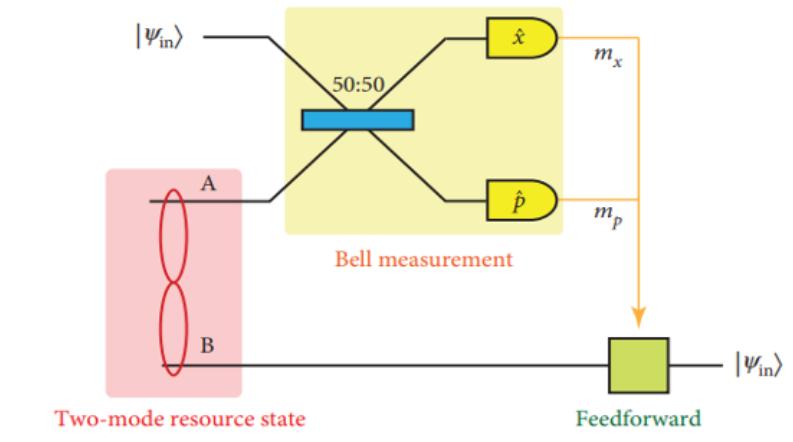
$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out} \\ \hat{p}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{p}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{p}_{Anc} e^{-r} \end{pmatrix} \quad (54.3)$$

از نکات جالب که می توان به آن اشاره کرد این است که صرف نظر از اینکه چه چیزی به عنوان حالت فرعی استفاده شود، اثر حالت فرعی فقط در کوادراتور  $\hat{p}$  ظاهر می شود. این به دلیل این واقعیت است که اثر حالت فرعی در کوادراتور  $\hat{x}$  از طریق عملیات پیشخور پاک می شود. دلیل اینکه مدار شکل ۱۴.۳ ک مدار نیمه فرابرد نامیده می شود این است که با دوبار تکرار یک مدار مشابه یک عملیات واحد دریافت می کنیم. چون  $\hat{I} = \hat{F}^2$  که در آن  $\hat{F}$  تبدیل فوریه کوانتمی است. با این حال در سامانه های نوری، دو مرتبه تکرار یک مدار نیمه فرابرد معادل با پیاده سازی فرابرد کوانتمی نیست.

#### ۲.۲.۴.۳ فرابرد کامل کوانتمی

در فرابرد کامل به طور کامل عملیات فرابرد را پیاده سازی می کند و عنصر اصلی مدار آن شکافنده پرتو ( $BS$ ) است. شکافنده پرتو یک ابزار اپتیکی خطی و بسیار ساده تر از گیت های غیرخطی است و همین ویژگی باعث شده که بیشتر آزمایش های عملی فرابرد کوانتمی در حوزه  $CV$  بر پایه مدار فرابرد کامل طراحی شوند. این پروتکل نه تنها از نظر پیاده سازی ساده تر است، بلکه امکان استفاده از منابع اپتیکی استاندارد و تکنیک های اندازه گیری همدوسی را نیز فراهم می کند. به همین دلیل، فرابرد کامل به عنوان پایه ای برای بسیاری از آزمایش های انتقال حالت های کوانتمی، تولید شبکه های در هم تنیده بزرگ و حتی ساخت مدارهای محاسبات کوانتمی مبتنی بر اندازه گیری در حوزه  $CV$  به کار گرفته شده است. تفاوت اصلی این مدار با مدار نیمه فرابرد در این است که در این مدار به جای گیت  $CZ$  از شکاف پرتو استفاده شده است. در تنظیمات نوری استفاده از شکافنده پرتو بسیار آسان تر از گیت  $CZ$  است. مدار فرابرد کامل در شکل ۱۵.۳ نشان داده شده است

در شکل ۱۵.۳  $|\psi_{in}\rangle$  نشان دهنده حالتی است که بین آليس و باب فرابرد می شود بدون اینکه حالت اصلی به طور مستقیم منتقل شود. این انتقال از طریق در هم تنیدگی کوانتمی و اصول اندازه گیری بل انجام می شود. همچنین یک منبع در هم تنیده دومدی داریم که یک مد آن در اختیار آليس و یک مد آن در اختیار باب است. فرض کنید که در اینجا مد  $A$  در اختیار آليس و مد  $B$  در اختیار باب است. در اولین مرحله حالت ورودی و مد  $A$  در یک شکافنده پرتو ۵۰ : ۵۰ با یکدیگر ترکیب می شوند. تقسیم کننده پرتو اطلاعات حالت ورودی و مد  $A$  را با هم ترکیب می کند. پس از آن عملگرهای کوادراتور هر مد با هدف کشف اطلاعات مشترک بین حالت ورودی و مد  $A$  اندازه گیری می شود. این اندازه گیری توأمان، اندازه گیری بل نامیده می شود. اندازه گیری بل متغیر پیوسته در واقع تصویرگر مد ورودی و مد  $A$  بر روی حالت  $EPR$



شکل ۱۵.۳: مدار فرابرد کوانتومی

جایه‌جا شده است. این مشابه فرابرد کوانتومی گستته و مبتنی بر کیوبیت است که در آن اندازه‌گیری بل، اندازه‌گیری تصویرگر روی یکی از چهار حالت بل است. اکنون اگر نتایج اندازه‌گیری  $m_x$  و  $m_p$  درنظر گرفته شود، با توجه به اینکه مد  $A$  و حالت ورودی درهم‌تنیده شده‌اند داریم

$$\begin{aligned}\sqrt{2}m_x &= \hat{x}_{in} - \hat{x}_A \\ \sqrt{2}m_p &= \hat{p}_{in} + \hat{p}_A\end{aligned}\tag{۵۵.۳}$$

به راجتی می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\hat{x}_B + \sqrt{2}m_x &= \hat{x}_{in} - \hat{x}_A + \hat{x}_B \Rightarrow \hat{x}_B = \hat{x}_{in} - \sqrt{2}m_x + (\hat{x}_B - \hat{x}_A) \\ \hat{p}_B + \sqrt{2}m_p &= \hat{p}_{in} + \hat{p}_A + \hat{p}_B \Rightarrow \hat{p}_B = \hat{p}_{in} - \sqrt{2}m_p + (\hat{p}_A + \hat{p}_B)\end{aligned}\tag{۵۶.۳}$$

اکنون کوادراتورهایی که دست باب است، بدست آمد. در فرابرد کیوبیتی آليس نتایج اندازه‌گیری خود را از طریق یک کanal کلاسیک به باب مخابره می‌کرد و باب با توجه به نتیجه اندازه‌گیری آليس عملیات مناسب را بر روی کیوبیت خود انجام می‌داد. در اینجا عملیات پیشخور نقش همان ارتباط کلاسیک را برای ما انجام می‌دهد و نتایج اندازه‌گیری یعنی  $m_p$  و  $m_x$  با استفاده از عملیات پیشخور به باب مخابره شده و باب با توجه به مقادیر اندازه‌گیری شده، عملگر جایی

متناسب را اعمال می‌کند. پس از اعمال جابه‌جایی و پاکسازی مقادیر  $m_x$  و  $m_p$  داریم

$$\begin{aligned}\hat{x}_B &= \hat{x}_{in} + (\hat{x}_B - \hat{x}_A) \\ \hat{p}_B &= \hat{p}_{in} + (\hat{p}_A + \hat{p}_B)\end{aligned}\quad (57.3)$$

اگر حالت منبع فرعی دو مدل را بتوان به گونه‌ای انتخاب کرد که در آن

$$\begin{aligned}\hat{x}_B - \hat{x}_A &= 0 \\ \hat{p}_A + \hat{p}_B &= 0\end{aligned}\quad (58.3)$$

آنگاه عملگرهای کوادراتور مد خروجی همانند کوادراتورهای مد ورودی است. به این معنی که حالت کوانتومی مد ورودی با موفقیت به مد خروجی تبدیل شده است. حالت فرعی ایده‌آل که شرط معادلات (58.3) حالت‌های  $EPR$  است یعنی اگر از حالت‌های به عنوان حالت منبع دومدی استفاده کنیم می‌توانیم حالت ورودی را دقیقاً فرابرد کنیم اما از آنجایی که دستیابی به حالت‌های  $EPR$  ایده‌آل امکان‌پذیر نیست، بنابراین پروتکل فرابرد کوانتومی همیشه شامل نوعی نویز است که با توزیع  $\hat{x}_A - \hat{x}_B$  و  $\hat{p}_A + \hat{p}_B$  تعیین می‌شود. در عمل حالت‌های  $EPR$  ایده‌آل با حالت‌های چلاندہ دومدی تقریب زده می‌شود، در این صورت واریانس‌های  $(\Delta^2(\hat{x}_B - \hat{x}_A))$  و  $(\Delta^2(\hat{p}_A + \hat{p}_B))$  میزان نویز در سیستم را تعیین می‌کند. همچنین باید دقت شود که در اینجا دقت اندازه‌گیری آليس بدون خطا فرض شده است، اگر اندازه‌گیری‌های آليس دقیق نباشند، جابه‌جایی توسط باب نیز دقیق نخواهد بود. اکنون به توصیف تابع ویگنر حالت خروجی می‌پردازیم. تابع ویگنر حالت خروجی به شکل

$$W_{out}(x_{out}, p_{out}) = \iint dx dp W_{in}(x, p) \Phi(x_{out} - x, p_{out} - p) \quad (59.3)$$

بدست می‌آید که در این رابطه  $W_{in}$  تابع ویگنر حالت ورودی و  $\Phi$  تابع ویگنر مرتبط با حالت منبع دو مدل است. اگر حالت منبع در هم‌تئیده ایده‌آل باشد، مانند یک حالت  $EPR$ ، تابع ویگنر  $\Phi$  به یک دلتا-تابع تبدیل می‌شود

$$\Phi_{EPR}(x, p) \propto \delta(x) \delta(p)$$

در این صورت

$$W_{in}(x_{out}, p_{out}) = W_{out}(x_{out}, p_{out})$$

این بدان معناست که حالت ورودی بدون هیچگونه نویزی منتقل می‌شود. در عمل، از حالت‌های فشرده دومدی برای تقریب زدن حالت  $EPR$  استفاده می‌شود. در این شرایط،تابع ویگنر منبع با رابطه زیر متناسب است

$$\Phi_{TMSS}(x_{out} - x, p_{out} - p) \propto e^{-\frac{(x_{out} - x)^2 + (p_{out} - p)^2}{2\hbar e^{-2r}}} \quad (60.3)$$

که  $r$  نشان‌دهنده پارامتر فشردگی است. هرچه  $r$  بزرگ‌تر باشد، پهنای توزیع کوچک‌تر و دقیق‌تر است.

## فصل ۴

### الگوریتم‌ها و مدل‌های محاسباتی متغیر پیوسته

مدل‌های محاسباتی مبتنی بر متغیرهای پیوسته، به جای کار با مقادیر صفر و یک، از کمیت‌هایی مانند مکان، تکانه یا شدت میدان استفاده می‌کنند. این رویکرد فضای هیلبرت بی‌نهایت بعدی را در اختیار قرار می‌دهد و امکان طراحی الگوریتم‌هایی را فراهم می‌سازد که در مدل‌های گسسته قابل دسترس نیستند. الگوریتم‌های نمونه‌برداری بوزونی، پروتکل‌های رمزنگاری کوانتومی و مدل‌های یادگیری ماشین کوانتومی از جمله نمونه‌های برجسته‌ی این حوزه‌اند. مزیت اصلی این چارچوب در آن است که می‌تواند پلی میان محاسبات دیجیتال و آنالوگ ایجاد کند. از یک سو، ابزارهای اپتیک کوانتومی و نوسانگرهای هارمونیک بستر طبیعی برای پیاده‌سازی این مدل‌ها هستند؛ و از سوی دیگر، کاربردهای عملی آن‌ها در شبیه‌سازی‌های علمی، بهینه‌سازی مسائل پیچیده و پردازش داده‌های آنالوگ روزبه‌روز در حال گسترش است. در این فصل ابتدا یک دید جامع از الگوریتم‌های کوانتومی ارائه خواهد شد و در ادامه در سیستم‌های متغیر پیوسته الگوریتم‌ها بررسی خواهد شد و نهایتاً مدل‌های محاسباتی متغیر پیوسته ارائه خواهد شد.

#### ۱۰.۴ الگوریتم‌های کوانتومی

روح رایانه‌های کوانتومی، فارغ از بستری که بر روی آن پیاده‌سازی می‌شوند، الگوریتم‌ها هستند. همچنین سرعت براساس الگوریتم‌ها تعریف می‌شود. الگوریتم‌های کوانتومی یکی از جذاب‌ترین و نویدبخش‌ترین شاخه‌های علوم رایانه و فیزیک کوانتومی هستند که با هدف حل مسائلی طراحی شده‌اند که یا به صورت کلاسیک غیرقابل حل‌اند یا حل آن‌ها نیازمند منابع محاسباتی بسیار زیادی است. این الگوریتم‌ها با بهره‌گیری از اصول فیزیک کوانتومی مانند برهمنهی، درهم‌تنیدگی و تداخل، روش‌های جدید و خلاقانه‌ای برای پردازش اطلاعات ارائه می‌دهند. اولین ایده‌ها درباره محاسبات کوانتومی به دهه ۱۹۸۰ میلادی بازمی‌گردد، ریچارد فاینمن، یکی از برجسته‌ترین فیزیکدانان قرن بیستم، در سال ۱۹۸۲ ایده‌ای مطرح کرد

که امروزه به شبیه‌سازهای کوانتمی معروف است. او پیشنهاد داد که برای مطالعه سیستم‌های کوانتمی، به جای استفاده از رایانه‌های کلاسیک (که در این زمینه محدودیت دارند)، باید دستگاه‌هایی بسازیم که بر اساس قوانین مکانیک کوانتمی عمل کنند. این ایده الهام‌بخش بسیاری از تحقیقات در زمینه محاسبات کوانتمی شد و امروزه به عنوان مبنایی برای رایانه‌های کوانتمی شناخته می‌شود. اولین الگوریتم‌های کوانتمی در اوایل دهه ۱۹۹۰ ارائه شدند، در حالی که سخت‌افزار مرتبط وجود نداشت. ایده‌های اولیه از یوری مانین و پاول بنیوف (۱۹۷۹-۱۹۸۱) شکل گرفتند. این دانشمندان ایده استفاده از سیستم‌های کوانتمی برای انجام محاسبات را مطرح کردند. پاول بنیوف، ایده استفاده از مکانیک کوانتمی را برای شبیه‌سازی سیستم‌های فیزیکی ارائه کرد و یوری مانین به نقش احتمالی رایانه‌های کوانتمی برای حل مسائلی که برای رایانه‌های کلاسیک بسیار دشوار هستند اشاره کرد. در دهه ۱۹۸۰، دویچ کار روی مفاهیم اولیه محاسبات کوانتمی را ادامه داد و ایده رایانه کوانتمی جهانشمول را معرفی کرد. او الگوریتم‌های اولیه‌ای مانند الگوریتم دویچ (۱۹۸۵) را ارائه داد که توانایی حل مسائل خاص را به شکلی کارآمدتر از کلاسیک‌ها نشان می‌داد. در الگوریتم دویچ-جوزا (۱۹۹۲)، توانایی بررسی سریع‌تر ویژگی‌های یک تابع نسبت به روش‌های کلاسیک به نمایش گذاشته شد. از دیگر الگوریتم‌های معروف آن زمان می‌توان به الگوریتم شور اشاره کرد. این الگوریتم توسط پیتر شور معرفی شد و یکی از مهم‌ترین پیشرفت‌ها در محاسبات کوانتمی به شمار می‌رود. کاربرد این الگوریتم در فاکتورگیری اعداد صحیح (مثلًا تجزیه یک عدد به عوامل اول آن) است و از این جهت اهمیت دارد که بسیاری از سیستم‌های رمزنگاری (مانند RSA) به سختی فاکتورگیری اعداد متکی هستند. الگوریتم شور این کار را با زمان‌بندی نمایی کمتر از الگوریتم‌های کلاسیک انجام می‌دهد. الگوریتم بعدی گروور است که توسط لوو گروور طراحی شد و به جستجوی کارآمد در یک پایگاه داده اختصاص دارد. پایگاه گروور که در حالت کلاسیک نیازمند جستجوی خطی ( $N$ ) است، در حالت کوانتمی به  $O(\sqrt{N})$  کاهش می‌یابد. این الگوریتم تأثیرات بزرگی در بهبود مسائلی مانند جستجوی الگوریتمی و بهینه‌سازی دارد. در سال ۲۰۱۳ و ۲۰۱۴ الگوریتم‌های وردشی کوانتمی جدیدی معرفی شدند که قلب تپنده الگوریتم‌های حال حاضر هستند که در ادامه بطور مفصل بیان خواهند شد. تعداد الگوریتم‌های کوانتمی در مقایسه با الگوریتم‌های کلاسیک بسیار کمتر است. تا به امروز که این متن نگارش شده است یعنی سال ۲۰۲۵، باع وحش الگوریتم‌های کوانتمی<sup>۱</sup> ۷۱ الگوریتم مختلف را فهرست کرده است. نکته‌ی خیلی مهم درباره الگوریتم‌ها این است که اکثر الگوریتم‌های معرفی شده، کیوبیتی هستند و برای سامانه‌های گسسته تعریف شده است و تعداد انگشت شماری الگوریتم وجود داره که برای سامانه‌های متغیر پیوسته تعریف شده‌اند. قبل از پرداختن به جزئیات درباره الگوریتم‌های متغیر پیوسته، چند تعریف و مفهوم ارائه می‌شود. اولین مفهومی که به آن پرداخته شده است، مفهوم پیچیدگی است.

---

<sup>۱</sup> Quantum Algorithm Zoo

## ۱.۱.۴ کلاس‌های پیچیدگی کلاسیک

پیچیدگی محاسباتی یکی از شاخه‌های اصلی نظریه محاسبات است که به مطالعه منابع لازم (مانند زمان و فضا) برای حل مسائل توسط الگوریتم‌ها می‌پردازد. این شاخه به طبقه‌بندی مسائل بر اساس میزان سختی محاسباتی آن‌ها کمک می‌کند و مفاهیمی مانند سختی و آسانی را برای الگوریتم‌ها و مسائل تعریف می‌کند. دو منبع اصلی که در پیچیدگی محاسباتی مورد بررسی قرار می‌گیرند عبارت‌اند از زمان محاسباتی که تعداد گام‌های موردنیاز برای اجرای الگوریتم را مشخص می‌کند و فضای محاسباتی که میزان حافظه‌ای که الگوریتم در طول اجرا نیاز دارد را مشخص می‌کند. کلاس‌های پیچیدگی گروه‌بندی‌هایی از مسائل هستند که بر اساس منابع موردنیاز برای حل آن‌ها تعریف می‌شوند. برخی از کلاس‌های اصلی پیچیدگی در بخش زیر ذکر شده است.

### • کلاس $P$

این کلاس شامل مسائلی است که توسط یک ماشین تورینگ قطعی ( $DTM$ ) در زمان چندجمله‌ای حل می‌شوند. به زبانی دیگر این کلاس بیانگر مسائل آسان یا قابل حل از دیدگاه محاسبات کلاسیک است. به عنوان مثال مرتب‌سازی لیست اعداد، ضرب ماتریس‌ها در این دسته قرار می‌گیرند.

### • کلاس $NP$

شامل مسائلی است که اگر یک جواب پیشنهادی داده شود، می‌توان در زمان چندجمله‌ای درستی آن را بررسی کرد. مسائل  $NP$  لزوماً توسط ماشین‌های کلاسیک در زمان چندجمله‌ای حل نمی‌شوند، اما بررسی جواب آن‌ها سریع است.

### • کلاس $NP - Complete$

این کلاس شامل دشوارترین مسائل در  $NP$  است. اگر بتوان یک مسئله کامل- $NP$  را در زمان چندجمله‌ای حل کرد، تمام مسائل  $NP$  قابل حل خواهد بود. از جمله مثال‌های این کلاس مسئله فروشنده دوره‌گرد است.

### • کلاس $NP - Hard$

که حداقل به سختی مسائل کامل- $NP$  هستند، اما الزاماً در  $NP$  قرار ندارند (یعنی ممکن است جواب آن‌ها قابل تأیید نباشد). مثلاً مسائل بهینه‌سازی که جواب دقیق آن‌ها محاسبه‌ناپذیر است.

### • کلاس $PSPACE$

شامل مسائلی است که می‌توانند با استفاده از حافظه چندجمله‌ای حل شوند، صرف نظر از زمان لازم برای حل آن‌ها. به عنوان مثال: حل بازی‌هایی با تعداد محدودی حرکت.

● کلاس *EXPTIME*

که شامل مسائلی است که برای حل آن‌ها به زمان نمایی نیاز است. حل بازی شطرنج با تحلیل تمام حرکات ممکن در این دسته قرار می‌گیرد

#### ۲۰.۱.۴ کلاس‌های پیچیدگی کوانتومی

در محاسبات کوانتومی، کلاس‌های پیچیدگی به مطالعه مسائل و منابع موردنیاز برای حل آن‌ها در مدل محاسبات کوانتومی می‌پردازند. این کلاس‌ها تعمیمی از کلاس‌های پیچیدگی کلاسیک مانند  $P$  و  $NP$  هستند و بر اساس توانایی رایانه‌های کوانتومی تعریف می‌شوند.

● کلاس  $BQP$  شامل تمام مسائلی است که می‌توانند توسط یک رایانه کوانتومی در زمان چندجمله‌ای با احتمال خطای محدود (کمتر از  $\frac{1}{3}$ ) حل شوند. این کلاس معادل "مسائل قابل حل توسط رایانه‌های کوانتومی" در نظر گرفته می‌شود و هر مسئله‌ای که در  $P$  حل می‌شود، در  $BQP$  نیز قابل حل است. همچنین  $BQP$  مسائل خاصی را شامل می‌شود که در  $P$  یا حتی  $NP$  نیستند ولی در رابطه با  $BQP$ ،  $PSPACE$  به احتمال زیاد زیرمجموعه‌ای از  $PSPACE$  است. مسائل معروف مانند الگوریتم شور (برای فاکتورگیری عددی) و الگوریتم گروور (برای جستجوی پایگاه داده) در این کلاس قرار دارند. رابطه  $BQP$  با کلاس‌های کلاسیک به شکل زیر است

$$P \subseteq BQP \subseteq PSPACE$$

اما رابطه دقیق  $BQP$  با  $NP$  هنوز مشخص نیست.

● کلاس  $QMA$  این کلاس، نسخه کوانتومی کلاس  $NP$  است. جایی که یک ماشین کوانتومی می‌تواند یک گواه کوانتومی را دریافت کرده و درستی آن را در زمان چندجمله‌ای بررسی کند. گواه کوانتومی می‌تواند مزایای بیشتری نسبت به گواه کلاسیک داشته باشد، زیرا شامل اطلاعات برهم‌نهی یا درهم‌تنیده است. اگر گواه درست باشد، ماشین کوانتومی با احتمال بالا آن را می‌پذیرد اما اگر گواه غلط باشد، احتمال پذیرش آن پایین است. مسائل مربوط به بررسی ویژگی‌های حالت‌های کوانتومی مانند انرژی حالت پایه یک سیستم کوانتومی در این دسته از پیچیدگی قرار می‌گیرند.

● کلاس  $BQP$  و  $BQP - hard$  در کلاس  $BQP - complete$  مسائل آنقدر سخت هستند که اگر یکی از آن‌ها توسط یک رایانه کوانتومی حل شود، تمام مسائل در  $BQP$  نیز قابل حل خواهد بود. مثالی از

*BQP* – *complete* کوانتومی است و *BQP* – *hard* بسیار مهم در *BQP* است که نه تنها در *BQP* قرار دارند، بلکه سختترین مسائل این کلاس نیز هستند.

### ۳.۱.۴ طبقه‌بندی الگوریتم‌ها

طبقه‌بندی و دسته‌بندی‌های مختلفی برای الگوریتم‌های کوانتومی وجود دارد در این بخش یکی از این دسته‌بندی‌ها که بر اساس کاربرد الگوریتم‌ها است، معرفی شده است.

#### ۱.۳.۱.۴ الگوریتم‌های مبتنی بر اوراکل

اولین مورد، الگوریتم‌های مبتنی بر اوراکل<sup>۲</sup> است. الگوریتم‌های مبتنی بر اوراکل در محاسبات کوانتومی یک کلاس از الگوریتم‌ها هستند که برای حل مسائل خاص با استفاده از اطلاعات یک تابع یا اوراکل طراحی شده‌اند. اوراکل به‌طور کلی یک «جعبه سیاه» است که به ازای ورودی‌های خاص، خروجی‌هایی تولید می‌کند. این الگوریتم‌ها از قدرت هم‌زمانی و تداخل کوانتومی برای بهره‌برداری از اوراکل استفاده می‌کنند. این الگوریتم‌ها برای حل مسئله باید یک یا چند بار اوراکل را فراخوانی کنند. تعداد فراخوانی‌ها در الگوریتم‌های کوانتومی معمولاً بسیار کمتر از تعداد لازم در الگوریتم‌های کلاسیک است. این الگوریتم‌ها از توانایی‌های کوانتومی مانند تداخل و برهمنهی استفاده می‌کنند تا پاسخ را با تعداد کمتری از فراخوانی‌ها پیدا کنند، این امر باعث افزایش کارایی آن‌ها در مقایسه با همتایان کلاسیک می‌شود. این الگوریتم‌ها غالب برای مسائلی استفاده می‌شوند که دارای یک فضای جستجوی بسیار بزرگ و پاسخ واحد هستند. به عنوان مثال الگوریتم‌های دویچ-جوزا، سیمون، برنشتین-وزیرانی و گروور از این دسته الگوریتم‌ها هستند.

#### ۲.۳.۱.۴ الگوریتم‌های شبیه‌سازی سیستم‌های فیزیک کوانتومی

دسته بعدی الگوریتم‌هایی هستند که وظیفه آن‌ها شبیه‌سازی سیستم‌های فیزیک کوانتومی است. شبیه‌سازی فیزیک کوانتومی یکی از کاربردهای کلیدی محاسبات کوانتومی است که به مطالعه و مدل‌سازی سیستم‌های فیزیکی پیچیده در سطح کوانتومی می‌پردازد. این کاربرد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، زیرا بسیاری از فرآیندها در شیمی، مواد پیشرفت، و زیست‌فیزیک در این مقیاس رخ می‌دهند و محاسبات کلاسیک اغلب قادر به مدل‌سازی دقیق آن‌ها نیست. شبیه‌سازی کوانتومی به معنای بازسازی رفتار یک سیستم کوانتومی واقعی روی یک سیستم کوانتومی قابل کنترل (مانند یک رایانه کوانتومی) است. این شبیه‌سازی‌ها به‌طور خاص در موارد زیر مفید هستند

- بررسی برهمنش‌های اتم‌ها و مولکول‌ها

<sup>۲</sup> Oracle

- مطالعه رفتارهای مواد مغناطیسی یا ابررساناها

- شبیه‌سازی ساختارها و واکنش‌های شیمیایی

برای شبیه‌سازی فیزیک کوانتمی از الگوریتم‌ها و روش‌های مختلفی استفاده می‌شود، از جمله شبیه‌سازی هامیلتونی که وظیفه آن توصیف و حل معادلات حاکم بر سیستم‌های کوانتمی است و مدل‌سازی دینامیک سیستم‌های مولکولی کاربرد دارد. همچنین از الگوریتم‌های تخمین فاز کوانتمی که برای یافتن مقادیر ویژه سیستم‌های کوانتمی استفاده می‌شود و در محاسبه انرژی حالت پایه یک مولکول کاربرد دارد، در شبیه‌سازی فیزیک کوانتمی استفاده می‌شود. روش‌های ترکیبی کلاسیک-کوانتمی، روش‌هایی مانند  $VQE$ <sup>۳</sup> که از ترکیب محاسبات کلاسیک و کوانتمی برای بهینه‌سازی استفاده می‌کنند دیگر دسته از الگوریتم‌ها هستند که طبقه شبیه‌ساز فیزیک کوانتمی قرار می‌گیرند.

### ۳.۳.۱.۴ الگوریتم‌های شبیه‌سازی مولکول‌های زیستی

سومین دسته شبیه‌سازی مولکول‌های زیستی است. شبیه‌سازی مولکول‌های زیستی با استفاده از محاسبات کوانتمی یکی از چالش‌برانگیزترین و در عین حال امیدوارکننده‌ترین کاربردهای این فناوری است. هدف این شبیه‌سازی‌ها، مطالعه ساختارها و رفتار مولکول‌های زیستی پیچیده مانند پروتئین‌ها، پپتیدها،<sup>۴</sup> و ریبوزوم‌ها<sup>۵</sup> در سطوح اتمی است. این شبیه‌سازی‌ها به درک بهتر فرآیندهای زیستی و شیمیایی و طراحی داروها و مواد زیستی جدید کمک می‌کنند.

### ۴.۳.۱.۴ الگوریتم‌های یادگیری ماشین کوانتمی

دسته پنجم از این طبقه‌بندی یادگیری ماشین کوانتمی<sup>۶</sup> است. یادگیری ماشین کوانتمی  $QML$  ترکیبی از دو حوزه‌ی قدرتمند، یادگیری ماشین و محاسبات کوانتمی است. این شاخه با هدف استفاده از مزایای محاسبات کوانتمی برای بهبود الگوریتم‌ها و مدل‌های یادگیری ماشین توسعه یافته است. محاسبات کلاسیک در یادگیری ماشین با چالش‌های متعددی از جمله حجم عظیم داده‌ها، زمان بر بودن آموزش مدل‌ها و محدودیت در مدل‌سازی سیستم‌های پیچیده روبرو است. محاسبات کوانتمی می‌تواند این چالش‌ها را با استفاده از خواص کوانتمی مانند برهم‌نگی، درهم‌تنیدگی و تداخل حل کند. از کاربردهای یادگیری ماشین کوانتمی می‌توان به بهبود سرعت الگوریتم‌های آموزش شبکه‌های عصبی و مدل‌های یادگیری ماشین، کاربرد در داده‌های با ابعاد بالا، ترکیب شبکه‌های عصبی کلاسیک با محاسبات کوانتمی برای مدل‌سازی بهتر داده‌های پیچیده، حل مسائل بهینه‌سازی که در یادگیری ماشین کلاسیک چالش‌برانگیز هستند و استفاده از

<sup>۳</sup> Variational Quantum Eigensolver(VQE)

<sup>۴</sup> peptides

<sup>۵</sup> Ribosome

<sup>۶</sup> Quantum Machine Learning(QML)

محاسبات کوانتومی برای مدل‌سازی بهتر زبان و پردازش متن اشاره کرد. الگوریتم‌های مهم در یادگیری ماشین کوانتومی، الگوریتم تقویت دامنه<sup>۷</sup>، الگوریتم  $HHL$ <sup>۸</sup>، شبکه‌های عصبی کوانتومی<sup>۹</sup> ( $QNN$ )، الگوریتم تخمین فاز کوانتومی و ماشین بردار پشتیبان کوانتومی<sup>۱۰</sup> ( $QSVM$ ) است.

#### ۵.۳.۴ الگوریتم‌های فاکتورگیری اعداد صحیح

ششمین دسته از این طبقه‌بندی فاکتورگیری اعداد صحیح است. فاکتورگیری اعداد صحیح با استفاده از محاسبات کوانتومی، یکی از معروف‌ترین کاربردهای این فناوری است که می‌تواند تأثیر قابل توجه‌ای بر امنیت اطلاعات و رمزنگاری داشته باشد. الگوریتم اصلی که این وظیفه را انجام می‌دهد، الگوریتم شور است. این الگوریتم با استفاده از ویژگی‌های خاص محاسبات کوانتومی می‌تواند فاکتورهای اول یک عدد صحیح بزرگ را به سرعت پیدا کند.

#### ۶.۳.۱.۴ الگوریتم‌های وردشی کوانتومی

الگوریتم‌های وردشی کوانتومی نمونه‌ای برجسته از رویکردهای هیبریدی هستند که محاسبات کوانتومی و کلاسیکی را در کنار هم به کار می‌گیرند. در این الگوریتم‌ها، بخش کوانتومی وظیفه‌ی تولید حالت‌ها و اجرای مدارهای پارامتری را بر عهده دارد، در حالی که بخش کلاسیکی با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی عددی، پارامترهای مدار را تنظیم می‌کند. این تعامل مداوم میان دو بخش، امکان حل مسائل پیچیده‌ای را فراهم می‌سازد که با روش‌های صرفاً کلاسیک یا کوانتومی به سادگی قابل دسترس نیستند. اهمیت الگوریتم‌های وردشی کوانتومی به ویژه در سامانه‌های کوانتومی مقیاس متوسط و نویزی ( $NISQ$ ) آشکار می‌شود؛ جایی که محدودیت در تعداد کیویت‌ها و وجود نویز مانع از اجرای الگوریتم‌های کوانتومی بزرگ مقیاس می‌شود. در چنین شرایطی، الگوریتم‌های وردشی با بهره‌گیری از قدرت بهینه‌سازی کلاسیکی و قابلیت‌های کوانتومی، راهکاری عملی و کارآمد ارائه می‌دهند. از مهم‌ترین نمونه‌های این دسته می‌توان به الگوریتم وردشی برای شبیه‌سازی انرژی حالت‌های کوانتومی ( $VQE$ )، الگوریتم وردشی برای بهینه‌سازی ترکیبیاتی ( $QAOA$ )، و رویکردهای نوین در ترکیب یادگیری ماشین با مدارهای وردشی اشاره کرد. این الگوریتم‌ها نه تنها در پژوهش‌های بنیادی، بلکه در کاربردهای عملی مانند شبیه‌سازی مواد، طراحی دارو، و حل مسائل بهینه‌سازی پیچیده نیز جایگاه ویژه‌ای یافته‌اند. با توجه به اهمیت این الگوریتم‌ها در یک بخش جدا بطور کامل بیان خواهد شد.

<sup>۷</sup> Amplitude Amplification

<sup>۸</sup> Harrow-Hassidim-Lloyd

<sup>۹</sup> Quantum Neural Networks( $QNN$ )

<sup>۱۰</sup> Quantum Support Vector Machine( $QSVM$ )

## ۲۰.۴ الگوریتم‌های کوانتوسی متغیر پیوسته

در ابتدای بحث اشاره شد که تعداد انگشت شماری الگوریتم وجود داره که برای سامانه‌های متغیر پیوسته تعریف شده‌اند. از جمله این الگوریتم‌ها، الگوریتم‌های گروور و دویچ-جوزا است که در ادامه هریک از این دو الگوریتم توضیح داده شده است.

### ۱۰.۴.۱ الگوریتم گروور متغیر پیوسته

در این الگوریتم، مسئله مطرح شده عبارت است از پیدا کردن یک داده خاص در یک پایگاه داده بدون ساختار. برای توضیح داده‌های دارای ساختار و بدون ساختار، دفترچه تلفن را در نظر بگیرید که در آن نام‌ها به ترتیب الفبایی، به همراه شماره تلفن‌هایشان فهرست شده‌اند. پیدا کردن شماره یک شخص معین کار ساده‌ای است؛ چرا که داده‌ها به صورت الفبایی مرتب شده است. با این وجود، پیدا کردن یک شخص با شماره تلفن معلوم، سخت است؛ چرا که شماره‌ها مرتب نیستند. بر روی یک رایانه کلاسیک، جستجو در یک پایگاه داده نامرتب نمی‌تواند در زمان کمتر از زمان خطی یا  $O(N)$  یعنی با بررسی تک تک ورودی‌ها انجام گیرد. الگوریتم گروور بیان می‌کند که روی یک رایانه کوانتوسی این عمل با پیچیدگی زمانی  $O(\sqrt{N})$  قابل انجام است و به طور حدی، سریع‌ترین الگوریتم قابل پیاده‌سازی برای جستجوی پایگاه داده نامرتب روی یک رایانه کوانتوسی است. در ادامه به تعمیم الگوریتم جستجوی گروور برای حالتی است که اطلاعات کوانتوسی با استفاده از متغیرهای دارای طیف پیوسته (مانند مکان، تکانه یا دامنه میدان الکترومغناطیسی) نمایش داده می‌شوند؛ می‌پردازیم. این الگوریتم به دنبال پیدا کردن یک حالت هدف  $x_f$  در فضای پیوسته  $K$  است. ما می‌خواهیم از میان مجموعه‌ای از مقادیر (در اینجا نقاط پیوسته روی یک محور یا در یک فضا)، یک مقدار خاص  $x_f$  را پیدا کنیم. این مقدار خاص توسط تابعی مشخص می‌شود

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x_f \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

در محاسبات کوانتوسی گسسته، ما از تعداد محدودی حالت استفاده می‌کنیم. اما در محاسبات متغیر پیوسته، فضای حالت بی‌نهایت بعدی است. در اینجا، هر مقدار  $x$  یک حالت  $\langle x |$  را در فضای هیلبرت پیوسته تعریف می‌کند که شرط زیر را برقرار می‌سازند.

$$\langle \acute{x} | x \rangle = \delta(\acute{x} - x)$$

برای ایجاد حالتی مشابه جستجوی گسسته در محاسبات CV فضای جستجو به  $N$  ناحیه مجزا تقسیم می‌شود که هر کدام معادل یک حالت هدف  $x$  است. الگوریتم با استفاده از برهم‌نہی و درهم‌تنیدگی، بازده جستجو را بهبود می‌بخشد. تبدیل فوریه نقش اصلی را در این الگوریتم ایفا می‌کند. برای یک حالت پایه پیوسته  $\langle x |$  تبدیل فوریه به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{F}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \int dy e^{2ixy} |y\rangle \quad (1.4)$$

که در آن  $x$  و  $y$  متغیرهای پیوسته هستند و  $n$  تعداد ریجسترهای CV است. همچنین این تبدیل، پایه مکان  $\langle x |$  را به پایه تکانه  $\langle y |$  نگاشت می‌کند. این تبدیل، اساسی‌ترین ابزار برای حرکت در فضای فاز و تغییر دیدگاه بین متغیرهای مکان و تکانه است. اگر تبدیل فوریه را بر روی یک حالت اولیه  $\langle x_i |$  اعمال کنیم، دامنه احتمال برای یافتن سیستم در حالت هدف  $|x_f\rangle$  به صورت زیر است

$$\langle x_f | \mathcal{F} | x_i \rangle = \mathcal{F}_{fi} = \frac{e^{2ix_i x_f}}{\sqrt{\pi^n}} \quad (2.4)$$

بنابراین، احتمال یافتن سیستم در حالت  $|x_f\rangle$  برابر است با

$$|\mathcal{F}_{fi}|^2 = \frac{1}{\pi^n}$$

این نشان می‌دهد که بدون استفاده از تقویت کوانتومی (مثل الگوریتم گروور)، باید  $O(\pi^N)$  آزمایش انجام شود تا حالت هدف پیدا شود. اوراکل، حالتی از فضای جستجو را که هدف است، علامت‌گذاری می‌کند. این کار با معکوس کردن علامت دامنه احتمال حالت هدف انجام می‌شود. در سیستم‌های CV عملگر وارونگی برای یک حالت  $|x\rangle$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$I_x = 1 - 2P_{\Delta x} \quad (3.4)$$

که در آن  $P_{\Delta x}$  عملگر تصویر است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$P_{\Delta x} = \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} dx' |x'\rangle \langle x'|$$

در سیستم‌های گسسته، عملگر تصویر به صورت  $P_x = |x\rangle\langle x|$  تعریف می‌شود. در CV، به دلیل ماهیت پیوسته فضا،  $P_x$  برای یک نقطه خاص تعریف‌پذیر نیست، زیرا هر حالت دارای گسترشی نامحدود است. عملگر  $P_{\Delta x}$  حالت را به بازه‌ای حول  $x_0$  محدود می‌کند. این بازه  $\Delta x$  نشان‌دهنده دقیق دستگاه اندازه‌گیری است. اوراکل فاز حالت هدف  $|x_f\rangle$  را معکوس می‌کند

$$I_x|x_f\rangle = \begin{cases} -|x\rangle & \text{if } x = x_f \\ |x\rangle & \text{if } x \neq x_f \end{cases} \quad (4.4)$$

عملگر جستجو  $\mathcal{C}$  با ترکیب تبدیل فوریه، وارونگی هدف، و وارونگی انتخابی طراحی شده است

$$\mathcal{C} = -I_{x_i} \mathcal{F}^\dagger I_{x_f} \mathcal{F} \quad (5.4)$$

هر بار اعمال  $\mathcal{C}$ ، دامنه احتمال حالت هدف را تقویت می‌کند و به تدریج حالت سیستم را به سمت حالت هدف نزدیک‌تر می‌کند. فرض کنید حالت اولیه  $|x_i\rangle$  باشد. اثر  $\mathcal{C}$  بر روی  $|x_i\rangle$  به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \mathcal{C}|x_i\rangle &= \left(1 - \frac{4}{\pi^n}\right)|x_i\rangle + \frac{2}{\sqrt{\pi^n}} \int_{x_{f1}}^{x_{f2}} dx' e^{2ix_i x'_f} \mathcal{F}^\dagger |x'_f\rangle \\ \mathcal{C}|x_i\rangle &= \left(1 - \frac{4}{\pi^n}\right)|x_i\rangle + \text{correction term} \end{aligned} \quad (6.4)$$

این نشان می‌دهد که عملگر جستجو، حالتی از برهمنهی را ایجاد می‌کند که شامل ترکیبی از حالت اولیه و هدف است. بخش اول کاهش دامنه حالت اولیه و بخش اصلاحات افزایش دامنه حالت هدف را به دنبال دارد. یعنی با هر بار اعمال  $\mathcal{C}$  دامنه حالت هدف تقویت می‌شود و دامنه حالت اولیه و سایر حالت‌ها کاهش پیدا می‌کند. برای اندازه‌گیری پیشرفت الگوریتم، از فاصله فوبینی-استادی بین حالت اولیه  $|x_i\rangle$  و حالت هدف  $|x_f\rangle$  استفاده می‌شود. در فضای هیلبرت، فاصله بین دو حالت کوانتومی بر اساس زاویه بین بردارهای حالت محاسبه می‌شود. فاصله فوبینی-استادی نشان می‌دهد که فاصله به زاویه بین بردارهای حالت مرتبط است. اگر دو حالت  $|\psi_1\rangle$  و  $|\psi_2\rangle$  داشته باشیم، فاصله فوبینی-استادی از رابطه

زیر بدست می‌آید

$$d^2(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = 4 \left( 1 - \left| \left\langle \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|} \middle| \frac{\psi_2}{\|\psi_2\|} \right\rangle \right|^2 \right) \quad (7.4)$$

اگر دو حالت  $\langle \psi_1 |$  و  $\langle \psi_2 |$  عمود باشند، آنگاه  $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$  برابر با صفر است و فاصله بیشینه است و اگر دو حالت برابر باشند، آنگاه فاصله صفر است. الگوریتم گروور تلاش می‌کند تا حالت سیستم را از حالت اولیه  $|x_i\rangle$  به حالت هدف  $\langle x_f |$  برساند. این فرآیند مانند یک چرخش تدریجی در فضای حالت است. هر بار اعمال عملگر  $C$ ، سیستم به اندازه مشخصی در فضای حالت حرکت می‌کند. این حرکت را می‌توان به صورت فاصله بین حالت اولیه  $|x_i\rangle$  و حالتی که بعد از یک مرحله به دست می‌آید  $\langle x_i |^{(1)}$  محاسبه کرد

$$d^2 \left( |x_i\rangle, |x_i\rangle^{(1)} \right) \approx O \left( \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \right) \quad (8.4)$$

این مقدار نشان می‌دهد که هر مرحله، سیستم یک قدم کوچک اما معنادار به سمت حالت هدف حرکت می‌کند. برای رساندن سیستم از حالت اولیه  $\langle x_i |$  به حالت هدف  $\langle x_f |$ ، باید فاصله کل بین این دو حالت طی شود. فاصله کل بین  $\langle x_i |$  و  $\langle x_f |$  برابر است با

$$d^2 (|x_i\rangle, |x_f\rangle) = 4 \left( 1 - \frac{1}{\pi^n} \right)$$

با توجه به اینکه هر گام  $O \left( \frac{1}{\sqrt{\pi^n}} \right)$  پیشرفت ایجاد می‌کند، تعداد کل گام‌ها  $N_s$  به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$N_s = \frac{d^2 (|x_i\rangle, |x_f\rangle)}{d^2 (|x_i\rangle, |x_i\rangle^{(1)})} \approx O \left( \sqrt{\pi^n} \right) \quad (9.4)$$

این نتیجه بسیار مهم است چون در روش کلاسیک برای یافتن حالت هدف باید  $O(\pi^n)$  بررسی انجام شود ما با استفاده از الگوریتم گروور در سیستم‌های کوانتومی، تنها  $O(\sqrt{\pi^n})$  گام کافی است.

#### ۱.۱.۲.۴ مثال جستجوی کوانتومی در یک بازه پیوسته

در این مثال، الگوریتم گروور برای یک فضای هیلبرت پیوسته  $H = L^2(R)$  به کار گرفته شده است. هدف پیدا کردن یک حالت در یک ناحیه مشخص  $S \subset R$  است، نه فقط یک نقطه. این تعیین برای کاربردهای عملی بسیار مهمتر است. فضای جستجوی : فضای هیلبرت در فضای توابع موج مربع-انتگرال‌پذیر  $(R) H = L^2$  با پایه مکان  $\{|x\rangle\}_{x \in R}$

است جستجو با یک حالت اولیه مشخص  $|\psi_0\rangle$  (مانند یک موجک گوسی) آغاز می‌شود که نمایانگر توزیع احتمال اولیه در فضای مکان است.

$$\psi_0(x) = \langle x | \psi_0 \rangle = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

جواب مسئله، یک بازه قابل اندازه‌گیری  $R \subset S$  است. هدف این است که با کمترین تعداد فراخوانی اوراکل، دامنه احتمال تابع موج در این ناحیه متمرکز شود. برای تعریف حالت‌های جواب، از یک تصویرگر پیوسته استفاده می‌کنیم که روی ناحیه  $S$  عمل می‌کند

$$\Pi_S = \int_S |x\rangle \langle x| dx$$

الگوریتم بر پایه دو عملگر ساخته شده است:

اوراکل : این عملگر فاز حالت را در داخل ناحیه  $S$  به اندازه  $\pi$  می‌چرخاند و بیرون آن را بدون تغییر باقی می‌گذارد.

$$O_S = I - 2\Pi_S$$

اینجا ( $\hat{q}$ )  $\chi_S$  عملگر تابع مشخصه است که اگر مکان در  $S$  باشد، مقدار ۱ و در غیر این صورت مقدار صفر دارد.  
پخش‌کننده: این عملگر یک بازتاب حول بردار حالت اولیه  $|\psi_0\rangle$  انجام می‌دهد.

$$R_0 = 2|\psi_0\rangle \langle \psi_0| - I$$

یک گام کامل از الگوریتم با اعمال پی‌درپی این دو عملگر تعریف می‌شود

$$G = R_0 O_S$$

همانند نسخه گسسته، دینامیک کامل الگوریتم در یک زیرفضای دو بعدی که توسط حالت درون ناحیه ( $|\psi_S\rangle$ ) و حالت بیرون ناحیه ( $|\psi_{\perp}\rangle$ ) تولید می‌شود، رخ می‌دهد. ابتدا، احتمال اولیه یافتن حالت در ناحیه  $S$  را محاسبه می‌شود

$$\mu = \langle \psi_0 | \Pi_S | \psi_0 \rangle = \int_S |\psi_0(x)|^2 dx \quad (10.4)$$

این احتمال، زاویه اولیه را تعریف می‌کند. این مقدار، زاویه  $\theta$  را از طریق  $\sin^2 \theta = \mu$  تعریف می‌کند. هر بار اعمال عملگر  $G$  حالت را به اندازه زاویه  $2\theta$  در این زیرفضا می‌چرخاند. پس از  $k$  تکرار، احتمال یافتن ذره در ناحیه  $S$  پس از  $k$  تکرار

برابر است با

$$P_k = \sin^2((2k+1)\theta)$$

این احتمال با انتخاب تعداد بهینه تکرارها بیشینه می شود

$$k^* = \left[ \frac{\pi}{4\theta} - \frac{1}{2} \right] = \Theta(\mu^{-1/2})$$

این نتیجه نشان می دهد که بهبود سرعت درجه دوم الگوریتم گروور در فضای پیوسته نیز کاملاً برقرار است. برای ملموس کردن، تصور کنید یک سیم بسیار بلند (بینهایت) داریم و به ما گفته شده که در نقطه‌ای از این سیم، یک نقص یا ناخالصی بسیار کوچک وجود دارد. وظیفه ما پیدا کردن مکان این نقص است. ما هیچ ایده‌ای نداریم که نقص کجاست. بنابراین، با یک حالت کاملاً پخش شده و نامتمرکز شروع می‌کنیم. یک موجک گوسی بسیار عریض بهترین گزینه است. فرض می‌کنیم  $\sigma = 2$  باشد (واریانس بزرگ به معنای عدم قطعیت زیاد است).

$$\psi_0(x) = \frac{1}{(4)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{8}\right)$$

فرض کنیم به ما گفته شده نقص در یک بازه بسیار کوچک به عرض ۰.۰۱ در اطراف نقطه  $x = 4$  قرار دارد.

$$S = [4.00, 4.01]$$

این یک جستجوی بسیار چالش برانگیز است، زیرا حالت اولیه ما در  $x = 0$  متمرکز است، در حالی که هدف ما در  $x = 4$  قرار دارد. این مقدار برابر است با انتگرال مجدورتابع موج ما روی ناحیه  $S$ . از آنجایی که بازه بسیار کوچک است، می‌توان آن را با حاصلضرب ارتفاع تابع در عرض بازه تقریب زد

$$\int_{4.00}^{4.01} |\psi_0(x)|^2 dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{4.00}^{4.01} e^{-x^2/4} dx \approx 0.00516$$

$$\mu \approx height * width = 0.00516 * 0.01 \approx 5.16 * 10^{-5}$$

شانس اولیه برای یافتن نقص تقریباً ۱ به  $20,000$  است! با محاسبه زاویه خواهیم داشت که

$$\theta = \arcsin(\sqrt{\mu}) = \arcsin\left(\sqrt{5.16 * 10^{-5}}\right) \approx 0.00718 rad$$

این یک زاویه بسیار کوچک است که نشان دهنده سختی جستجوست. از فرمول بهینه گروور استفاده کرده تا بینیم چند بار باید چرخه اوراکل-تقویت را تکرار کنیم

$$k^* = \left[ \frac{\pi}{4\theta} - \frac{1}{2} \right] = \left[ \frac{\pi}{4 * 0.00718} - \frac{1}{2} \right] \approx 108$$

الگوریتم به ما می‌گوید که به  $10^8$  تکرار نیاز داریم. پس از  $10^8$  تکرار، احتمال یافتن نقص در ناحیه  $S$  برابر است با

$$P_{108} = \sin 22k + 1 = \sin 22108 + 1 = \sin 222170.00718 = \sin 221.558$$

از آنجایی که  $1.5708 \approx \frac{\pi}{2}$ ، این مقدار بسیار به ۱ نزدیک است و احتمال موفقیت ما تقریباً ۹۹.۹۹ درصد خواهد بود. این مثال نشان می‌دهد که الگوریتم گروور متغیر پیوسته قادر است یک ناحیه بسیار کوچک  $S$  را در یک فضای جستجوی بسیار بزرگ پیدا کند. حتی زمانی که شناسن اولیه موفقیت بسیار ناچیز است ( $0.00005 \approx \mu$ )، الگوریتم با تعداد معقولی تکرار ( $k = 108$ )، احتمال موفقیت را به طور چشمگیری به نزدیک  $100$  درصد می‌رساند. این قدرت تقویت دامنه جوهره اصلی مزیت کوانتمی این الگوریتم است.

#### ۲۰.۲.۴ الگوریتم دویچ-جوزا متغیر پیوسته

الگوریتم دویچ-جوزا یک الگوریتم کوانتمی است که برای تعیین این طراحی شده که آیا یکتابع داده شده ثابت (یعنی خروجی یکسان برای همه ورودی‌ها) یا متعادل (یعنی تعداد مساوی خروجی‌های  $0$  و  $1$  در دامنه آن) است. به صورت کلاسیک، این تشخیص ممکن است به  $2^n$  ارزیابی تابع در بدترین حالت نیاز داشته باشد. اما نسخه کوانتمی تنها به یک بار ارزیابی نیاز دارد که از طریق برهمنهی کوانتمی و تداخل انجام می‌شود. این بخش، الگوریتم را به سیستمی تعمیم می‌دهد که در آن متغیرها طیف پیوسته دارند. این متغیرها پیوسته با ابزارهایی مانند تبدیل فوریه و گیت‌های مشابه گیت‌های کوانتمی در سیستم‌های گسسته مدیریت می‌شوند. همانند بخش قبل، فضای حالت بی‌نهایت بعدی است. هر مقدار  $x$  یک حالت  $\langle x | \cdot \rangle$  را در فضای هیلبرت پیوسته تعریف می‌کند که شرط زیر را برقرار می‌سازند.

$$\langle \dot{x} | x \rangle = \delta(\dot{x} - x)$$

همچنین دوباره از تبدیل فوریه کوانتوسی استفاده می‌کنیم و تبدیل فوریه را به شکل معادله زیر می‌نویسیم

$$\mathcal{F}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dy e^{2ixy} |y\rangle$$

ابزار بعدی که در این الگوریتم به آن نیاز داریم، گیت XOR است که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$|x\rangle |y\rangle \longrightarrow |x\rangle |x+y\rangle$$

گیت XOR ، نسخه‌ای از گیت Controlled-NOT برای سیستم‌های کوانتوسی با متغیرهای پیوسته است. این گیت برای ترکیب اطلاعات دو حالت کوانتوسی استفاده می‌شود و ابزار کلیدی در اجرای الگوریتم دویچ-جوزا است. گیت XOR ، نسخه‌ای از گیت Controlled-NOT برای سیستم‌های کوانتوسی با متغیرهای پیوسته است. این گیت برای ترکیب اطلاعات دو حالت کوانتوسی استفاده می‌شود و ابزار کلیدی در اجرای الگوریتم دویچ-جوزا است. دو حالت کوانتوسی  $|x\rangle$  و  $|y\rangle$  به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شوند؛ پس از اعمال گیت XOR حالت کنترل  $|x\rangle$  بدون تغییر باقی می‌ماند و حالت هدف  $|y\rangle$  به  $|x+y\rangle$  تغییر می‌کند، یعنی مقدار حالت کنترل به حالت هدف افزوده می‌شود. اوراکل کوانتوسی  $U_f$  یک عملگر یکانی است که اطلاعات مربوط به تابع  $(x)$   $f$  را روی حالت‌های ورودی رمزگذاری می‌کند. این اوراکل به صورت زیر تعریف شده است

$$U_f |x\rangle |y\rangle \longrightarrow |x\rangle |y + f(x)\rangle$$

این تعریف مشابه عملکرد اوراکل در نسخه گسته الگوریتم دویچ-جوزا است، اما در اینجا عملیات روی متغیرهای پیوسته انجام می‌شود. یکی از ویژگی‌های مهم اوراکل کوانتوسی این است که روی برهمنهی حالت‌ها و همچنین به صورت خطی عمل می‌کند. مثلاً

$$U_f (\mathcal{F}|x\rangle |z\rangle) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dy e^{2ixy} |y\rangle |z + f(y)\rangle$$

در ادامه مراحل اجرای الگوریتم دویچ-جوزا در یک سامانه متغیر پیوسته توضیح داده شده است. ابتدا آليس دو حالت کوانتوسی را آماده می‌کند. یک حالت پرسش  $|x_0\rangle$  ، و یک حالت هدف  $\left|\frac{\pi}{2}\right\rangle$  حالت پرسش نشان‌دهنده یک متغیر پیوسته  $x_0$  است که آليس می‌خواهد تابع  $(x)$   $f$  را روی آن ارزیابی کند. این حالت به عنوان ورودی به اوراکل ارسال می‌شود و نشان‌دهنده دامنه متغیر پیوسته  $x$  است و حالت هدف برای رمزگذاری خروجی تابع  $(x)$   $f$  استفاده می‌شود. مقدار اولیه آن برابر  $\frac{\pi}{2}$  است، اما پس از اعمال اوراکل به مقدار  $\frac{\pi}{2} + (x)$   $f$  تغییر می‌کند. حالت ترکیبی اولیه سیستم به صورت زیر

است

$$|x_0\rangle \left| \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

سپس آلیس تبدیل فوریه  $\mathcal{F}$  را روی هر دو حالت اعمال می‌کند تا برهمنهی ایجاد کند. پس از این مرحله، حالت سیستم ترکیبی برابر است با

$$\mathcal{F}|x_0\rangle \mathcal{F}\left| \frac{\pi}{2} \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int dx dy e^{2ix_0x+i\pi y} |x\rangle |y\rangle$$

باب اوراکل  $U_f$  را برای ارزیابی تابع  $(x)^f$  روی حالت ترکیبی اعمال می‌کند و نتیجه می‌دهد.

$$U_f\left(\mathcal{F}|x_0\rangle \mathcal{F}\left| \frac{\pi}{2} \right\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dx e^{2ix_0x+i\pi f(x)} |x\rangle \mathcal{F}\left| \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

می‌توان نوشت

$$U_f(|x\rangle \mathcal{F}\left| \frac{\pi}{2} \right\rangle) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dy e^{i\pi y} U_f(|x\rangle \otimes |y\rangle) = (-1)^{f(x)} |x\rangle \mathcal{F}\left| \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

در مرحله بعد آلیس تبدیل فوریه معکوس را برای استخراج اطلاعات تابع از حالت سیستم اعمال می‌کند. این تبدیل باعث می‌شود که اطلاعات رمزگذاری شده در فازهای حالت سیستم آشکار شود و این عامل تغییر فاز مستقیماً به مقدار تابع

$f(x)$  بستگی دارد

$$|q\rangle = \frac{1}{\pi} \int dx dx' e^{2ix(x_0-x')} (-1)^{f(x)} |x\rangle \mathcal{F}\left| \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

حالت سیستم پس از تبدیل فوریه معکوس، آمده اندازه‌گیری است و اطلاعات درباره نوع تابع (ثبت یا متعادل) در آن ذخیره شده است. آلیس حالت پرسش را اندازه‌گیری می‌کند تا نتیجه نهایی را استخراج کند. اندازه‌گیری با استفاده از

عملگر تصویرگر زیر انجام می‌شود

$$P_{\Delta x} = \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} dy |y\rangle \langle y|$$

آلیس حالت سیستم را روی مقدار اولیه  $x_0$  تصویر می‌کند. این تصویر کردن باعث می‌شود بسته به اینکه  $f(x)$  ثابت یا متعادل باشد، نتیجه  $\langle x_0 \pm |x_0\rangle$  (برای تابع ثابت) یا حالتی متعادل با  $\langle x_0 |$  (برای تابع متعادل) خواهد بود. این مراحل نشان می‌دهند که چگونه برهمنهی، اوراکل، و تبدیل فوریه به صورت هماهنگ عمل می‌کنند تا اطلاعات تابع  $(x)^f$  به صورت کارآمد در حالت کوانتمی رمزگذاری شود. با این الگوریتم، تشخیص ویژگی تابع تنها با یک بار اجرای اوراکل ممکن است، که مزیت قابل توجهی نسبت به روش‌های کلاسیک ارائه می‌دهد.

## ۱.۲.۲.۴ مثال عددی الگوریتم دویچ-جوزا در فضای متغیر پیوسته

برای روشن تر شدن نحوه عملکرد الگوریتم دویچ-جوزا در حوزه متغیر پیوسته، یک مثال عددی ساده آورده شده است. هدف، تمایز بین یک تابع ثابت و یک تابع متعادل با تنها یک بار فراخوانی اوراکل است. فضای محاسباتی، فضای مکان تک بعدی  $x \in R$  است. حالت ورودی اولیه،  $\langle \psi_0 |$ ، با یک تابع موج گوسی بهنجار شده و باریک حول مبدأ  $0 = x_0$  تقریب زده شده است

$$\psi_0(x) = \langle x | \psi_0 \rangle = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

این تابع موج، تقریب مناسبی از یک ویژه حالت مکان  $\langle \psi_0 |$  است؛ هرچه پارامتر  $\sigma$  کوچکتر باشد، این تقریب دقیق تر خواهد بود. دو دسته از توابع  $f(x)$  که توسط اوراکل کوانتمی پیاده سازی می شوند، مقایسه می شود

- تابع ثابت: برای سادگی،  $f(x) \equiv 0$  برای تمام مقادیر  $x$  در نظر گرفته می شود. در این حالت، اوراکل یک تبدیل همانی است

$$(-1)^{f(x)} = +1$$

- تابع متعادل: یک نمونه ساده از تابع متعادل، تابع پله ای است

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ 1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

که منجر به یک اوراکل فازی به شکل تابع علامت می شود

$$g(x) \equiv (-1)^{f(x)} = \begin{cases} +1 & \text{if } x < 0 \\ -1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

الگوریتم با اعمال دنباله ای از تبدیل ها بر روی حالت اولیه اجرا می شود: ابتدا تبدیل فوریه کوانتمی، سپس اوراکل ( $U_f$ ) و در نهایت معکوس تبدیل فوریه اجرا می شود. پس از این توالی، اندازه گیری در پایه مکان انجام می شود. دامنه احتمال بازگشت سیستم به حالت اولیه (یعنی اندازه گیری مکان در  $x_0 = 0$ ) متناسب با انتگرال هم پوشانی زیر است

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) g(x) dx$$

بنابراین، احتمال مشاهده این نتیجه تقریباً برابر با  $|A|^2$  خواهد بود. این کمیت، آزمون ما برای تمایز بین دو دسته تابع است. برای ملموس شدن نتایج، پارامتر پهنه‌ای موجک را  $\sigma = 0.1$  می‌کنیم که یک تقریب بسیار خوب از ویژه حالت مکان در مبدأ فراهم می‌کند.

تابع ثابت: از آنجایی که  $g(x) = 1$  است، دامنه احتمال برابر با انتگرال خود تابع موج اولیه است. با توجه به نرمالیزه بودن  $|\psi_0(x)|^2$ ، این انتگرال غیرصفر است: تابع ثابت: از آنجایی که  $g(x) = 1$  است، دامنه احتمال برابر با انتگرال خود تابع موج اولیه است. با توجه به نرمالیزه بودن  $|\psi_0(x)|^2$ ، این انتگرال غیرصفر است

$$A_{\text{constant}} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) dx = 0.595$$

در نتیجه، احتمال بازگشت به حالت اولیه مقداری قابل توجه است

$$P_{\text{constant}} = |A_{\text{constant}}|^2 \approx 0.354$$

تابع متعادل: با توجه به اینکه  $(x)\psi_0$  یک تابع زوج (متقارن حول مبدأ) است، تداخل کاملاً ویرانگر رخ می‌دهد

$$A_{\text{balanced}} = \int_{-\infty}^0 \psi_0(x) dx - \int_0^{\infty} \psi_0(x) dx$$

بنابراین، احتمال مشاهده ذره در مبدأ صفر است

$$P_{\text{balanced}} = |A_{\text{balanced}}|^2 = 0$$

## ۳.۴ الگوریتم‌های وردشی کوانتومی متغیر پیوسته

در دهه گذشته ساخت افزارهای کوانتومی<sup>۱۱</sup> در عملکرد بهینه کیوبیت‌ها، مدت زمان همدوسی و تعداد کیوبیت‌های بکار گرفته شده، پیشرفت‌های زیادی داشته‌اند. مدارهای کوانتومی با استفاده از کیوبیت‌های ابررسانا و یون‌های به دام افتاده ساخته شده اند اگرچه محدودیت‌های بنیادی مهندسی اجازه بکارگیری زمان همدوسی دلخواه و یا تعداد کیوبیت دلخواه را نداده است اما در حال حاضر این مسائل هم از موضوعات روز در فناوری‌های کوانتومی هستند. الگوریتم‌های کوانتومی با سرعت بسیار زیاد و زمان کم قادر به حل مسائلی هستند که الگوریتم‌های کلاسیکی از حل آنها عاجزند اما

---

<sup>۱۱</sup> Quantum hardware

باید توجه داشت برای بکارگیری الگوریتم کوانتمومی به صدها یا شاید هزارها کیوبیت احتیاج است. علاوه بر این، باید خطاهایی که در حین انجام الگوریتم به وقوع می‌پیوندد را نیز تصحیح کرد. به عنوان مثال، در بکارگیری الگوریتم سور برای حل یک مسئله که روی رایانه کلاسیکی به سختی قابل حل است به شش میلیون کیوبیت احتیاج است در حالی که در حال حاضر فقط ۱۰۰۰ کیوبیت در اختیار است. از طرفی این ایده مطرح شد که امکان پیاده سازی تعداد از مسائل با سرعت نمایی نسبت به رایانه‌های کلاسیکی وجود دارد که در آن از بطور همزمان از رایانه کوانتمومی و کلاسیکی استفاده می‌شود که به الگوریتم‌های وردشی کوانتمومی یا الگوریتم‌های ترکیبی کوانتمومی-کلاسیکی معروف شده است. در این الگوریتم‌ها، آماده سازی حالت اولیه سیستم کوانتمومی و اندازه‌گیری‌های کوانتمومی روی یک رایانه کوانتمومی انجام شده و قسمت بهینه‌سازی و به روزرسانی پارامترهای حالت کوانتمومی در رایانه کلاسیکی انجام می‌شود. در این دسته از الگوریتم‌ها، حالت اولیه با توجه به مسئله ساخته می‌شود که یک حالت پارامتری است. بعد از این کار، حالت پارامتری به یک رایانه کوانتمومی فرستاده می‌شود و اندازه‌گیری کوانتمومی انجام می‌گیرد. نتایج اندازه‌گیری که تابعی از پارامترهاست به یک رایانه کلاسیکی فرستاده می‌شود. رایانه کلاسیکی با انجام بهینه سازی روی تابع، یک سری پارامتر جدید بازتولید می‌کند. این پارامترها به رایانه کوانتمومی بازگردانده شده و حلقه تا یافتن پارامتر بهینه تکرار می‌شود. مطالعاتی که تا به امروز انجام شده اند نشان می‌دهد برای انجام محاسبات کوانتمومی که در آن به  $n$  کیوبیت احتیاج است، می‌توان با استفاده از  $n - k$  کیوبیت به اضافه منابع کلاسیکی، محاسبات را انجام داد که  $k$  تعداد کیوبیت‌های کمکی است. این رویکرد قابل تعمیم است و اجازه می‌دهد تمام مدارهای کوانتمومی را به زیر مدارهایی کوچکتر تجزیه کرد. نکته مهم این است که هزینه محاسبات با افزایش تعداد گیت‌ها بصورت نمایی افزایش می‌یابد، پس باید تعداد گیت‌ها در زیر مدارها کمینه شوند. برای به کارگیری الگوریتم‌های وردشی کوانتمومی از رایانه کوانتمومی مقیاس-متوسط نوفه ای<sup>۱۲</sup> (NIQS) استفاده می‌شود که در چند سال آینده بصورت عمده در دسترس خواهد بود که در ادامه به توضیح آن می‌پردازیم. واژه نوفه ای<sup>۱۳</sup> مربوط به این موضوع است که در آن وسایل کوانتمومی می‌توانند تحت تاثیر محیط مختل شوند برای مثال تغییرات کوچک در دما یا انحراف میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی می‌توانند باعث حذف اطلاعات کوانتمومی شوند که از این فرآیند با عنوان ناهمدوسی یاد می‌شود. برای غلبه به این موضوع ما باید بتوانیم تصحیح خطای کوانتمومی انجام دهیم. اساساً باید تشخیص دهیم که سیستم مورد نظر چه مقدار دچار اختلال شده است و سپس آن را تصحیح کنیم. مقیاس-متوسط<sup>۱۴</sup> مربوط به تعداد کیوبیت‌هاست که اغلب موارد محدود به صد کیوبیت و یا کمتر می‌شود. اما در نهایت باید میلیون‌ها کیوبیت را در نظر گرفت و خطای آن را تصحیح کرد که با نام خطای قابل تصحیح شناخته می‌شود. در اغلب محاسبات کوانتمومی عبارت near-term NIQS به کار برده می‌شود زیرا این وسایل در چند سال آینده در دسترس خواهند

<sup>۱۲</sup> Noisy Intermediate Scale Quantum

<sup>۱۳</sup> Noisy

<sup>۱۴</sup> Intermediate Scale

بود و همچنین به تصحیح خطای نیازی نخواهند داشت. بکارگیری رایانه کوانتومی NIQS در تمامی بسترهای فیزیکی که برای ساخت یک رایانه مطرح است از قبیل کیوبیت‌های ابررسانا و یا در رایانه‌های کوانتومی فوتونیکی فراهم است. باید توجه داشت که کوچک بودن رایانه کوانتومی به اندازه فیزیکی آن مربوط نیست بلکه به تعداد کیوبیت‌های آن اطلاق می‌شود. در رایانه کوانتومی NIQS باید نوفه را حذف کرده و آن را به عنوان یک عامل با اثر محدود چه برای وسایل کلاسیکی و چه برای وسایل کوانتومی درنظر گرفت. این دستگاهها توانسته‌اند به برخی از دستاوردهای چشمگیر، نظری برتری کوانتومی، در وظایف خاص دست یابند؛ برای مثال، حل مسائلی که حتی قوی‌ترین ابررایانه‌ها قادر به انجام آن‌ها نیستند. با این حال، مزیت کوانتومی عملی، یعنی برتری در کاربردهای واقعی، هنوز تحقق نیافته است. علاوه بر این، دستیابی به رایانه‌های کوانتومی مقاوم در برابر خطای کوئنتومی کامل الگوریتم‌های کوانتومی را دارد، همچنان به سال‌ها یا حتی دهه‌ها تحقیق و توسعه نیاز دارد.

### ۱۰.۳.۴ الگوریتم‌های وردشی کوانتومی

در پاسخ به محدودیت‌های دستگاه‌های NISQ الگوریتم‌های وردشی کوانتومی<sup>۱۵</sup> (VQA) معرفی شده‌اند. این الگوریتم‌ها به عنوان رویکردی انعطاف‌پذیر و کاربردی برای بهره‌گیری از پتانسیل دستگاه‌های فعلی شناخته می‌شوند. VQA ترکیبی از محاسبات کوانتومی و بهینه‌سازی کلاسیک هستند که ویژگی‌های زیر را دارند

- مدارهای پارامتری کم عمق: این الگوریتم‌ها از مدارهای کوانتومی پارامتری استفاده می‌کنند که عمق کمی دارند و بنابراین نویز را کاهش می‌دهند.
- بهینه‌سازی هیریدی: تخمین پارامترهای مدار کوانتومی توسط یک رایانه کلاسیک انجام می‌شود که این امر امکان استفاده بهینه از منابع موجود را فراهم می‌کند.
- قابلیت انعطاف‌پذیری بالا: این الگوریتم‌ها را می‌توان برای طیف گسترده‌ای از مسائل، نظری شبیه‌سازی‌های شیمی کوانتومی، حل مسائل بهینه‌سازی و یادگیری ماشین، تطبیق داد.
- با وجود پتانسیل بالا، ها VQA همچنان با چالش‌های متعددی مواجه هستند که باید برطرف شوند
- قابلیت آموزش: یکی از مشکلات اساسی این الگوریتم‌ها، به دام افتادن در صفحات خشک<sup>۱۶</sup> است، جایی که گرادیان هزینه به صفر نزدیک می‌شود و آموزش مدل غیرممکن می‌شود
- دقت: تضمین دقت نتایج نهایی همچنان یک مسئله حیاتی است.
- کارایی: کاهش هزینه‌های محاسباتی و تعداد اندازه‌گیری‌های لازم برای بهینه‌سازی یک هدف مهم است.

<sup>۱۵</sup> Variational Quantum Algorithm

<sup>۱۶</sup> Barren Plateaus

الگوریتم‌های وردشی کوانتومی یک چارچوب عمومی و قابل تنظیم برای حل مسائل مختلف ارائه می‌دهند. این الگوریتم‌ها با انعطاف‌پذیری بالا، قابلیت تطبیق با انواع ساختارهای الگوریتمی را دارند. با وجود تفاوت‌هایی که بین ساختارهای این الگوریتم‌ها وجود دارد، عناصر اساسی مشترکی در تمامی آن‌ها دیده می‌شود. در این بخش، اجزای اصلی VQA مورد بررسی قرار می‌گیرند. فرایند طراحی یک الگوریتم VQA با مشخص کردن مسئله‌ای که قصد حل آن را داریم آغاز می‌شود. این شامل دسترسی به توصیف کامل مسئله و گاهی اوقات مجموعه‌ای از داده‌های آموزشی است. برای مثال، یک مسئله ممکن است شبیه‌سازی یک سیستم کوانتومی، حل یک مسئله بهینه‌سازی یا یافتن مقادیر ویژه یک هامیلتونی باشد. اولین قدم، تعریفتابع هزینه  $C(\theta)$  است که به نوعی راه حل مسئله را در خود کدگذاری می‌کند. تابع هزینه در ها VQA مشابه با نقش تابع هدف در روش‌های یادگیری ماشین است، زیرا وظیفه آن ارزیابی کیفیت پاسخ در هر مرحله از فرایند بهینه‌سازی است. پس از تعریف تابع هزینه، یک آنساتز<sup>۱۷</sup> (مدار پارامتری کوانتومی) انتخاب می‌شود که با مجموعه‌ای از پارامترها ( $\theta$ ) قابل تنظیم است. این آنساتز به طور سیستماتیک آموزش داده می‌شود تا مقدار تابع هزینه به حداقل برسد. یکی از ویژگی‌های متمایز ها VQA استفاده از یک ساختار ترکیبی است که در آن ریانه کوانتومی برای اجرای مدار کوانتومی و تخمین مقدار تابع هزینه یا گرادیان‌های آن استفاده می‌شود و کامپیوتر کلاسیک وظیفه بهینه‌سازی پارامترهای مدار را بر عهده دارد. این ساختار ترکیبی به دلیل سطح نویز پایین‌تر و نیاز به عمق کم مدار، با سخت‌افزارهای فعلی NISQ بسیار سازگار است. تابع هزینه یکی از اجزای اساسی و تعیین‌کننده در ساختار الگوریتم‌های وردشی کوانتومی است. این تابع، پل ارتباطی میان مسئله اصلی و فرآیند بهینه‌سازی است و راه حل مسئله را به شکلی ریاضی کدگذاری می‌کند. تابع هزینه، مشابه یادگیری ماشین کلاسیک، مقادیر پارامترهای قابل آموزش ( $\theta$ ) را به اعداد حقیقی نگاشت می‌کند. این تابع به صورت یک سطح چندبعدی تعریف می‌شود که هدف اصلی، یافتن نقاط کمینه آن است. به عبارت دیگر، مقدار تابع هزینه نشان‌دهنده کیفیت راه حل پیشنهادی است. در الگوریتم‌های VQA تابع هزینه معمولاً به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C(\theta) = f(\{\rho_k\}, \{O_k\}, U(\theta))$$

که در آن  $U(\theta)$  مدار کوانتومی پارامتری وابسته به  $\theta$ ،  $\{\rho_k\}$  مجموعه‌ای از حالت‌های ورودی،  $\{O_k\}$  مجموعه‌ای از عملگرهای مشاهده‌پذیر و تابعی که به ساختار مسئله بستگی دارد و مقدار هزینه را تعیین می‌کند، است. در بسیاری از

<sup>۱۷</sup> Ansatz

موارد، تابع هزینه می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود

$$C(\theta) = \sum_k f_k \left( \text{Tr} [O_k U(\theta) \rho_k U^\dagger(\theta)] \right) \quad (11.4)$$

که در آن  $f_k$  توابع تعریف شده برای هر مشاهده‌پذیر هستند. یک تابع هزینه مناسب باید ویژگی‌های زیر را داشته باشد وفاداری: حداقل مقدار تابع هزینه باید معادل راه حل مسئله باشد. به عبارت دیگر، کمینه‌سازی  $C(\theta)$  باید به یافتن پاسخ درست مسئله منجر شود.

قابلیت تخمین کارآمد: تخمین مقدار  $C(\theta)$  باید با استفاده از اندازه‌گیری‌های محدود بر روی کامپیوتر کوانتمی و پردازش‌های کلاسیک قابل انجام باشد. این ویژگی در دستگاه‌های NISQ که با محدودیت‌های منابع روبرو هستند، اهمیت ویژه‌ای دارد.

معناداری عملیاتی: تابع هزینه باید به گونه‌ای طراحی شود که کاهش مقدار آن نشان‌دهنده بهبود کیفیت راه حل باشد. قابلیت آموزش: سطح هزینه باید به گونه‌ای باشد که بتوان به راحتی پارامترهای  $(\theta)$  را بهینه‌سازی کرد. برای مثال، وجود صفحات خشک می‌تواند بهبود پارامترها را دشوار کند.

مزیت کوانتمی: تابع هزینه نباید به سادگی توسط رایانه‌های کلاسیک محاسبه شود؛ چرا که این امر منجر به از بین رفتن مزیت کوانتمی الگوریتم خواهد شد.

برای سازگاری با سخت‌افزارهای NISQ، مدارهای کوانتمی استفاده شده در تخمین  $C(\theta)$  باید عمق کم و الزامات محاسباتی محدودی داشته باشند. به دلیل نویز و زمان همدوسي کوتاه کیوبیت‌ها، مدارها نباید بیش از حد عمیق باشند، همچنین طراحی مدارها باید به نحوی باشد که تعداد کیوبیت‌های کمکی مورد نیاز به حداقل برسد و در نهایت تخمین تابع هزینه یا گرادیان‌های آن باید با استفاده از حداقل تعداد اندازه‌گیری ممکن انجام شود. تابع هزینه نقش کلیدی در عملکرد و موفقیت الگوریتم‌های VQA می‌کند. طراحی مناسب این تابع باید تضمین‌کننده دقت، کارایی و قابلیت آموزش الگوریتم باشد. علاوه بر این، در نظر گرفتن محدودیت‌های سخت‌افزاری دستگاه‌های NISQ در تعریف و تخمین تابع هزینه ضروری است. بخش‌های بعدی به بررسی چگونگی طراحی آنساتزها و ارتباط آنها با تابع هزینه می‌پردازد. در الگوریتم‌های وردشی کوانتمی، انتخاب آنساتز نقش اساسی در عملکرد و کارایی الگوریتم ایفا می‌کند. آنساتز به ساختار مدار کوانتمی پارامتری اشاره دارد که به عنوان تابعی از مجموعه‌ای از پارامترها  $C(\theta)$  طراحی می‌شود. این مدار، فضای جستجوی الگوریتم را تعریف کرده و مستقیماً بر قابلیت آموزش، دقت و پیچیدگی محاسباتی الگوریتم تأثیر می‌گذارد. آنساتز به صورت یک عملگر یکانی  $(\theta) U$  تعریف می‌شود که به طور پارامتری بر حالت‌های ورودی  $(\rho_k)$  اعمال می‌شود. این عملگر وظیفه تولید حالت‌های کوانتمی را دارد که برای بهینه‌سازی تابع هزینه استفاده می‌شوند. فرم کلی آنساتز را

معمولاً می‌توان به صورت ترکیبی از لایه‌های گیت‌های پارامتری و غیرپارامتری بیان کرد

$$U(\theta) = U_l(\theta_l) \dots U_2(\theta_2) U_1(\theta_1)$$

با

$$U_l(\theta_l) = \prod_m e^{-i\theta_m H_m} W_m$$

که در آن  $l$  تعداد لایه‌ها یا عمق آنساتز و  $U_l(\theta_l)$  یک واحد پارامتری یا غیرپارامتری در لایه  $l$  است. هر لایه از آنساتز می‌تواند شامل چندین گیت کوانتمی باشد که به صورت متواالی یا موازی روی کیویت‌ها اعمال می‌شوند. اجزای کلیدی آنساتز از دو بخش اصلی تشکیل شده است. اول گیت‌های پارامتری ( $e^{-i\theta_m H_m}$ ) که این گیت‌ها شامل پارامترهای قابل تنظیم ( $\theta_m$ ) هستند که در طی فرآیند بهینه‌سازی توسط الگوریتم تنظیم می‌شوند و همچنین عملگر ( $H_m$ ) یک عملگر هرمیتی است که به صورت محلی یا غیر محلی عمل می‌کند. گیت‌های پارامتری با تنظیم دقیق پارامترها، ظرفیت آنساتز برای نمایش حالت‌های مختلف کوانتمی را افزایش می‌دهند. دوم گیت‌های غیرپارامتری ( $W_m$ ) که شامل اپراتورهایی هستند که بدون پارامترهای قابل تنظیم عمل می‌کنند و وظیفه اصلی این گیت‌ها، آماده‌سازی یا تغییر ساختار حالت کوانتمی برای مراحل بعدی است. گیت‌های غیرپارامتری با ایجاد درهم‌تنیدگی، فضای حالت قابل دسترس را گسترش می‌دهند.

#### ۲.۳.۴ انواع آنساتز

آنستز در الگوریتم‌های وردشی کوانتمی، همان حدس اولیه یا مدار کوانتمی پارامتری است که فضای جستجو را تعریف می‌کند. انتخاب درست آنساتز تعیین می‌کند که آیا الگوریتم قادر به تقریب مناسب خواهد بود یا نه. در ادامه به معرفی انواع آنساتز خواهیم پرداخت.

- آنساتز کارآمد سخت افزاری

یکی از پرکاربردترین انواع آنساتز در الگوریتم‌های کوانتمی وردشی (VQAs) است که به منظور بهره‌برداری بهینه از سخت‌افزارهای کوانتمی طراحی شده است. این آنساتز با در نظر گرفتن محدودیت‌ها و معماری خاص دستگاه‌های کوانتمی، ساختاری ساده و کارآمد ارائه می‌دهد که امکان پیاده‌سازی روی دستگاه‌های NISQ را فراهم می‌کند. این آنساتز برای کاهش عمق مدار و سازگاری با محدودیت‌های سخت‌افزاری طراحی شده است. ویژگی‌های اصلی آن شامل موارد زیر است

۱ - استفاده از گیت‌های بومی سخت‌افزار که به طور مستقیم توسط معماری دستگاه پشتیبانی می‌شوند. ۲ - کاهش

پیچیدگی ترجمه مدارها: برخلاف انساتزهای عمومی که نیاز به ترجمه گیت‌ها به گیت‌های بومی دارند، این آنساتز مستقیماً از گیت‌های سخت‌افزاری پشتیبانی شده استفاده می‌کند. ۳- طراحی بهینه برای کاهش عمق مدار و در نتیجه کاهش نویز و خطای محاسباتی ساختار کلی این آنساتز از لایه‌های متناوب گیت‌های پارامتری و گیت‌های غیرپارامتری تشکیل شده است که قابلیت سازگاری با هر معماری سخت‌افزاری را دارد. این آنساتز از گیت‌هایی استفاده می‌کند که مستقیماً توسط سخت‌افزار پشتیبانی می‌شوند، بنابراین نیازی به ترجمه مدار به گیت‌های بومی وجود ندارد همچنین کاهش عمق مدار باعث کاهش تأثیر نویز می‌شود که در دستگاه‌های NISQ اهمیت زیادی دارد. یکی از مشکلات اصلی آنساتز کارآمد سخت‌افزاری، گیر افتادن در صفحات خشک است. این مشکل زمانی رخ می‌دهد که گرادیان تابع هزینه در مراحل اولیه بهینه‌سازی بسیار کوچک شود و بهینه‌سازی به کندی پیش رود. دلیل این مشکل به پیچیدگی چشم‌انداز هزینه و تعاملات غیر محلی بین کیوبیت‌ها مربوط می‌شود. این آنساتز معمولاً مسئله‌ناوابسته است و از اطلاعات خاص مسئله استفاده نمی‌کند. بنابراین، در مسائلی که نیاز به ساختارهای خاص دارند، ممکن است عملکرد بهینه نداشته باشد.

#### ● آنساتز خوشی یکانی جفت شده<sup>۱۸</sup>

UCC یکی از پرکاربردترین انساتزهای مسئله‌محور در الگوریتم‌های وردشی کوانتمی است که به‌طور خاص در حوزه شیمی کوانتمی برای تخمین انرژی حالت پایه مولکول‌ها و پیدا کردن حالت‌های الکترونی آن‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. این آنساتز مبتنی بر روش‌های کلاسیک کوپل-کلاستر بوده و برای سیستم‌های کوانتمی طراحی شده است تا از ظرفیت بالای کامپیوترهای کوانتمی بهره ببرد. در روش UCC حالت پایه سیستم به صورت یک حالت برانگیخته شده از یک حالت مرجع (معمولًاً حالت هارتی-فوك<sup>۱۹</sup>) بیان می‌شود. این فرایند با استفاده از یک عملگر یکانی انجام می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$|\psi(\theta)\rangle = e^{T_{(\theta)} - T_{(\theta)}^\dagger} |\psi(0)\rangle$$

که در اینجا  $(0)|\psi\rangle$ ، حالت مرجع سیستم، معمولاً حالت هارتی-فوك است و  $T_{(\theta)}$  عملگر خوشی که بر اساس ترکیب خطی عملگرهای برانگیختگی تعریف می‌شود، هستند

$$T_{(\theta)} = \sum_k T_k (\theta)$$

و  $(\theta) T_k$  عملگرهای برانگیختگی تک الکترونی و چند الکترونی هستند. عملگرهای تک برانگیختگی  $T_1$  که تغییر حالت

<sup>۱۸</sup> Unitary Coupled Clustered Ansatz (UCC)

<sup>۱۹</sup> Hartree-Fock

یک الکترون را از یک اوربیتال اشغال شده به یک اوربیتال غیر اشغال شده مدل سازی می کنند. عملگرهای دو برانگیختگی  $T_2$  که به تغییر هم زمان دو الکترون از اوربیتال های اشغال شده به اوربیتال های غیر اشغال شده می پردازند.

$$T_1 = \sum_{i,j} \theta_i^j a_i^\dagger a_j$$

$$T_2 = \sum_{i,j,k,l} \theta_{i,j}^{k,l} a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l$$

برای پیاده سازی این آنساتز در رایانه های کوانتمی، عملگرهای فرمیونی باید به عملگرهای اسپینی تبدیل شوند. دو روش رایج برای این تبدیل عبارت اند از

تبدیل جردن - ویگنر : به طور مستقیم عملگرهای فرمیونی را به زنجیرهای از عملگرهای اسپینی تبدیل می کند.

تبدیل براوی - کیتایف : نسخه بهینه تری است که تعداد گیت های کوانتمی مورد نیاز را کاهش می دهد

عملگر یکانی  $e^{T_{(\theta)} - T_{(\theta)}^\dagger}$  به طور مستقیم در دستگاه های کوانتمی پیاده سازی نمی شود، زیرا شامل اپراتورهای نمایی است که قابل تجزیه نیستند. برای حل این مشکل، از بسط تروتر<sup>۲۰</sup> استفاده می شود. این بسط امکان تجزیه عملگر پیچیده به توالی گیت های یکانی ساده تر را فراهم می کند که می توان آنها را در ساخت افزارهای کوانتمی پیاده سازی کرد. این آنساتز به طور خاص برای مدل سازی سیستم های کوانتمی طراحی شده است و قابلیت بسیار بالایی در تخمین دقیق انرژی حالت پایه دارد و برخلاف روش های کلاسیک، قابلیت نمایش برانگیختگی های چند الکترونی پیچیده را دارد. انواع مختلف این آنساتز مانند UCCSD (شامل تک برانگیختگی و دو برانگیختگی) یا UCCGSD (برانگیختگی های عمومی) برای مسائل مختلف استفاده می شوند. تعداد پارامترهای قابل تنظیم ( $\theta_m$ ) در UCC با افزایش اندازه سیستم به طور نمایی افزایش می یابد که باعث پیچیدگی محاسباتی می شود، همچنین بهینه سازی این پارامترها ممکن است به دلیل وجود صفحات خشک دشوار باشد. استفاده از بسط تروتر ممکن است خطاهایی را در نتیجه نهایی وارد کند. تعداد بیشتری از مراحل تروتر می تواند دقت را افزایش دهد، اما عمق مدار را نیز بیشتر می کند. آنساتز UCC به طور خاص در حوزه شیمی کوانتمی برای مسائل تخمین انرژی حالت پایه مولکول ها، شبیه سازی دینامیک مولکولی و تحلیل ویژگی های الکترونی سیستم های پیچیده بکار می رود.

### ● آنساتز عملگر متناوب کوانتمی<sup>۲۱</sup>

الگوریتم بهینه سازی تقریبی کوانتمی<sup>۲۲</sup> یکی از برجسته ترین الگوریتم های کوانتمی برای حل مسائل بهینه سازی

<sup>۲۰</sup> Trotter Expansion

<sup>۲۱</sup> Quantum Alternating Operator Ansatz

<sup>۲۲</sup> Quantum Approximate Optimization Algorithm (QAOA)

ترکیبیاتی است. این الگوریتم که توسط ادوارد فرهی و همکارانش معرفی شد، از یک آنساتز تناوبی برای هدایت حالت اولیه به سمت حداقل انرژی یک تابع هزینه استفاده می‌کند. ساختار QAOA به طور مستقیم از روش آدیباتیک کوانتمی الهام گرفته شده و از ویژگی‌های محاسبات کوانتمی برای جستجوی فضای حالت استفاده می‌کند. QAOA برای حل مسائل بھینه‌سازی ترکیبیاتی طراحی شده است، به ویژه مسائل سختی-NP که در آن‌ها هدف یافتن یک راه حل تقریبی برای یک مسئله دشوار است. هدف این الگوریتم، یافتن حالتی از سیستم کوانتمی است که تابع هزینه تعریف شده را حداقل کند. این تابع هزینه توسط یک هامیلتونی به نام هامیلتونی مسئله ( $H_P$ ) مدل‌سازی می‌شود. آنساتز QAOA شامل تناوب بین دو عملگر اصلی است. عملگر مسئله ( $e^{-i\gamma_l H_p}$ ) که وابسته به هامیلتونی مسئله است و وظیفه هدایت سیستم به سمت راه حل بھینه را بر عهده دارد و عملگر آمیختگی ( $e^{-i\beta_l H_M}$ ) که از یک هامیلتونی آمیختگی ( $H_M$ ) استفاده می‌کند و حالت کوانتمی را در فضای حالت جستجو می‌کند. حالت کوانتمی پس از  $p$  لایه به صورت زیر تعریف می‌شود

$$U(\gamma, \beta) = \prod_{l=1}^p e^{-i\beta_l H_M} e^{-i\gamma_l H_p}$$

QAOA یکی از قدرتمندترین ابزارهای کوانتمی برای مسائل بھینه‌سازی است. ساختار تناوبی و وابستگی مستقیم آن به هامیلتونی مسئله، آن را برای مسائل سخت-NP مناسب کرده است. با وجود چالش‌هایی در بھینه‌سازی و عمق مدار، QAOA به طور فعال در تحقیقات محاسبات کوانتمی مورد مطالعه است و پتانسیل بالایی برای حل مسائل واقعی در حوزه‌هایی مانند شبکه، زمان‌بندی، و هوش مصنوعی دارد.

#### ● آنساتز هامیلتونی وردشی ۲۳

این آنساتز یک رویکرد قدرتمند و مسئله محور برای شبیه‌سازی حالت‌های پایه یا دینامیک کوانتمی در الگوریتم‌های وردشی کوانتمی است. این آنساتز به طور خاص برای بهره‌گیری از ساختار هامیلتونی سیستم طراحی شده است و از اطلاعات مربوط به اجزای هامیلتونی برای ساخت مدارهای کوانتمی استفاده می‌کند. آنساتز از ساختار ریاضی هامیلتونی سیستم برای طراحی مدار کوانتمی استفاده می‌کند. این هامیلتونی، که معمولاً به صورت جمعی از عملگرهای هرمیتی تعریف می‌شود، پایه و اساس طراحی این آنساتز است. حالت خروجی این آنساتز به صورت زیر تعریف می‌شود

$$|\psi(\theta)\rangle = U(\theta)|\psi(0)\rangle$$

$$U(\theta) = \prod_l \left( \prod_k e^{-\theta_{l,k} H_k} \right)$$

---

<sup>۲۳</sup> Variational Hamiltonian Ansatz

استفاده از ساختار هامیلتونی باعث می‌شود فضای جستجو محدود به حالت‌های مرتبط با مسئله شود، که این امر زمان محاسبات را کاهش می‌دهد. این آنساتز به دلیل استفاده مستقیم از هامیلتونی سیستم، تطابق خوبی با مسائل فیزیکی و شیمی کوانتومی دارد و به دلیل ساختار لایه‌ای و استفاده از گیت‌های ساده، پیاده‌سازی آنساتز در ساخت افزارهای فعلی امکان‌پذیر است. آنساتز در حوزه‌های مختلفی از جمله شیمی کوانتومی: تخمین انرژی حالت پایه مولکول‌ها، مدل‌های فیزیک ماده چگال: شبیه‌سازی سیستم‌های الکترونی پیچیده و شبیه‌سازی دینامیک سیستم‌های کوانتومی: بررسی تحولات زمانی در سیستم‌های باز یا بسته، کاربرد دارد.

#### ● آنساتز ساختار متغیر<sup>۲۴</sup>

یکی از آنساتزهای نوآورانه در الگوریتم‌های وردشی کوانتومی است که در آن ساختار مدار به همراه پارامترهای قابل تنظیم بهینه می‌شود. این آنساتز برخلاف آنساتزهای سنتی که ساختار از پیش تعریف شده‌ای دارند، به طور تطبیقی طراحی می‌شود و می‌تواند با نیازهای خاص مسئله هماهنگ شود. در آنساتز نه تنها مقادیر پارامترهای مدار، بلکه خود ساختار مدار (تعداد گیت‌ها، نوع گیت‌ها و ترتیب آن‌ها) نیز بخشنی از فرآیند بهینه‌سازی است. به این ترتیب، مدار نهایی به طور خاص برای مسئله مورد نظر طراحی می‌شود. ساختار مدار در طول فرآیند بهینه‌سازی به طور پویا تغییر می‌کند. این بهینه‌سازی شامل: اضافه یا حذف گیت‌ها، تغییر ترتیب گیت‌ها و تنظیم تعداد لایه‌ها است. این آنساتز می‌تواند به طور خاص با ویژگی‌های مسئله سازگار شود و از منابع محاسباتی به طور بهینه استفاده کند. این روش یک رویکرد قدرتمند و انعطاف‌پذیر برای طراحی مدارهای کوانتومی است که قابلیت تطبیق با مسائل مختلف را دارد. این آنساتز با کاهش پیچیدگی غیر ضروری و طراحی مدارهای اختصاصی، عملکرد الگوریتم‌های VQA را بهبود می‌بخشد. با این حال، بهینه‌سازی پیچیده و نیاز به الگوریتم‌های پیشرفته از چالش‌های اصلی این رویکرد محسوب می‌شوند. تحقیقات آینده می‌تواند بر توسعه روش‌های کارآمدتر برای کاهش زمان محاسبات و مقابله با چالش‌های بهینه‌سازی متمرکز شود.

<sup>۲۴</sup> Variable Structure Ansatz

## ● آنساتز زیر منطقی و کنترل بهینه کوانتمی ۲۵

آنستاز زیر منطقی و کنترل بهینه کوانتمی دو رویکرد متمایز و پیشرفته برای طراحی آنساتز در الگوریتم‌های وردشی کوانتمی هستند. هر دو رویکرد به دنبال بهبود دقت، کاهش تأثیر نویز، و تطبیق بهتر با سخت‌افزارهای کوانتمی موجود هستند. این رویکردها به طور خاص برای سیستم‌های نویزی و پیچیده در دستگاه‌های NISQ طراحی شده‌اند. آنساتز زیر منطقی به جای کار با کیوبیت‌های فیزیکی، از کیوبیت‌های زیرمنطقی استفاده می‌کند. این کیوبیت‌ها از طریق استفاده از کدهای تصحیح خطای کوانتمی تعریف می‌شوند و به طور موثری نویز و خطاهای سخت‌افزاری را کاهش می‌دهند. در این روش، یک زیرمجموعه از کیوبیت‌های فیزیکی با هم ترکیب می‌شوند تا یک کیوبیت منطقی تشکیل دهند. مدار کوانتمی سپس بر اساس این کیوبیت‌های منطقی طراحی می‌شود و استفاده از عملگرهای تصحیح خطای طول اجرای مدار، صحت عملیات را تضمین می‌کند. کنترل بهینه کوانتمی یک رویکرد برای بهبود دقت و کارایی مدارهای کوانتمی است. این روش از تکنیک‌های پیشرفته کنترل بهینه برای تنظیم دقیق گیت‌ها، پارامترها، و توالی اعمال آنها استفاده می‌کند. در این روش، دینامیک سیستم کوانتمی به طور مستقیم مدل‌سازی می‌شود. آنساتز زیر منطقی و کنترل بهینه کوانتمی دو رویکرد مکمل برای طراحی و اجرای مدارهای کوانتمی با دقت بالا هستند. آنساتز زیر منطقی با استفاده از کیوبیت‌های منطقی نویز را کاهش می‌دهد، در حالی که کنترل بهینه کوانتمی با بهینه‌سازی دقیق دینامیک گیت‌ها و مدارها، عملکرد سیستم را بهبود می‌بخشد. هرچند این روش‌ها دارای چالش‌هایی هستند، اما پیشرفت در توسعه سخت‌افزار و الگوریتم‌های بهینه‌سازی می‌تواند استفاده عملی آن‌ها را در دستگاه‌های NISQ ممکن کند

## ● آنساتز ترکیبی

آنستاز ترکیبی به آنساتز‌هایی اشاره دارد که از ترکیب دو یا چند نوع آنساتز مختلف ایجاد می‌شوند. هدف اصلی این رویکرد بهره‌برداری از مزایای هر یک از آنساتز‌های ترکیبی است تا عملکرد کلی بهبود یابد. این آنساتزها برای حل مسائل پیچیده، که ممکن است ویژگی‌های متنوعی داشته باشند، طراحی شده‌اند. آنساتز ترکیبی، ترکیبی از آنساتزهای مسئله‌محور و مسئله‌ناوابسته یا سایر رویکردهای موجود مانند زیر منطقی و آنساتز کارآمد سخت‌افزاری هستند. این ترکیب به گونه‌ای انجام می‌شود که نقاط قوت هر آنساتز حفظ شده و نقاط ضعف آن جبران شود. این آنساتز می‌تواند به طور خاص برای حل مسائل متنوع طراحی شود و به نیازهای مختلف پاسخ دهد، همچنین آنساتز ترکیبی می‌تواند از دقت بالای آنساتزهای مسئله‌محور و سادگی و پیاده‌سازی آسان آنساتزهای مسئله‌ناوابسته بهره ببرند و ترکیب آنساتزهای مختلف می‌تواند به کاهش عمق مدار و افزایش سازگاری با دستگاه‌های NISQ کمک کند. انواع آنساتز ترکیبی:

- ۱- ترکیب کارآمد سخت‌افزاری و آنساتزهای مسئله‌محور: بخش اول مدار از گیت‌های ساده و سخت‌افزاری تشکیل شده است و بخش دوم شامل گیت‌هایی است که اطلاعات مسئله را کدگذاری می‌کنند. مثال: استفاده از آنساتز کارآمد

<sup>۲۵</sup> Sub-Logical Ansatz and Quantum Optimal Control

سخت افزاری برای ایجاد در هم تنیدگی و سپس استفاده از آنساتز مسئله محور برای شبیه سازی حالت پایه یک سیستم.

۲- ترکیب زیر منطقی و آنساتز وردشی: در این روش، کیوبیت های منطقی به جای کیوبیت های فیزیکی استفاده می شوند و مدار بهینه سازی می شود تا فضای جستجو کاهش یابد.

۳- ترکیب آنساتز های مسئله محور مختلف: برای مسائل پیچیده، ممکن است نیاز به ترکیب چندین آنساتز مسئله محور وجود داشته باشد. برای مثال، ترکیب چند آنساتز برای حل مسائل شبیه کوانتمی که جنبه های بهینه سازی ترکیباتی نیز دارد.

آن ساتز ترکیبی یک ابزار قدرتمند برای طراحی مدارهای انعطاف پذیر و کارآمد در الگوریتم های VQA است. این آنساتزها با ترکیب مزایای آنساتزهای مختلف می توانند عملکرد بهتری در حل مسائل پیچیده ارائه دهند. هر چند طراحی و پیاده سازی آنها چالش هایی به همراه دارد، اما با پیشرفت های بیشتر در الگوریتم های بهینه سازی و سخت افزارهای کوانتمی، این رویکرد نقش برجسته ای در محاسبات کوانتمی خواهد داشت.

#### ● آنساتز حالت های مختلف

به آنساتزهایی اطلاق می شود که برای مدل سازی حالات مخلوط کوانتمی طراحی شده اند. در حالی که حالت های خالص ( $|\psi\rangle$ ) با یک بردار حالت واحد توصیف می شوند، حالات مخلوط توسط ماتریس چگالی ( $\rho$ ) بیان می شوند. این آنساتزها به ویژه برای شبیه سازی سیستم های کوانتمی باز که تحت تأثیر نویز یا اختلالات محیطی قرار دارند، ضروری هستند. حالت مخلوط به صورت زیر تعریف می شود

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

در الگوریتم های وردشی کوانتمی برای حالات مخلوط، آنساتزها معمولاً به گونه ای طراحی می شوند که قادر به تولید ماتریس چگالی دقیق برای شبیه سازی سیستم های باز باشند. یک آنساتز برای مدل سازی حالات مخلوط می تواند به صورت ترکیبی از مدارهای کوانتمی معمولی (برای حالات خالص) و عملیات اضافی برای اعمال نویز یا تداخل محیط با سیستم باشد. این آنساتز می تواند شامل یک مرحله اول برای ایجاد یک بردار حالت اولیه با استفاده از یک آنساتز استاندارد مثل آنساتز کارآمد سخت افزاری یا QAOA یک مرحله دوم برای اعمال عملیات شبیه سازی نویز مانند ناهمدوسی یا جابجایی های احتمالی برای مدل سازی اختلالات محیطی که باعث ایجاد حالات مخلوط می شود، باشد. در نهایت، این فرآیند می تواند به صورت یک ماتریس چگالی جمع شده از حالات مختلف نوشته شود

$$\rho(\theta) = \sum_i p_i(\theta) |\psi_i(\theta)\rangle\langle\psi_i(\theta)|$$

که در آن  $(\theta)_i$  احتمال‌های وابسته به پارامترهای مدار و  $\langle (\theta)_i | \psi \rangle$  حالت‌های کوانتومی تولیدشده توسط مدار است.

### ۳.۳.۴ گرادیان

گرادیان‌ها یکی از مفاهیم کلیدی در الگوریتم‌های وردشی کوانتومی هستند. محاسبه گرادیان‌ها به‌ویژه در فرایند بهینه‌سازی آنساترها بسیار اهمیت دارد، زیرا از آن‌ها برای بهره‌گیری از پارامترهای مدار استفاده می‌شود تا تابع هزینه به حداقل برسد. در VQA، این گرادیان‌ها به عنوان بخشی از فرآیند بهینه‌سازی برای یافتن مقادیر بهینه پارامترها در مدارهای کوانتومی به کار می‌روند. گرادیان‌ها در الگوریتم‌های بهینه‌سازی نشان‌دهنده نرخ تغییر تابع هزینه  $C(\theta)$  نسبت به پارامترهای بهینه‌سازی  $(\theta)$  هستند. به عبارت دیگر، گرادیان‌ها به ما می‌گویند که چطور باید پارامترها را تغییر دهیم تا تابع هزینه سریع‌تر به حداقل خود برسد. برای یک تابع هزینه  $C(\theta)$  از مدار، گرادیان به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{C(\theta + \delta) - C(\theta)}{\delta}$$

در الگوریتم‌های کوانتومی، محاسبه مستقیم گرادیان‌ها معمولاً نیاز به روش‌های خاصی دارد زیرا محاسبه دقیق گرادیان‌ها با استفاده از روش‌های کلاسیک در سیستم‌های کوانتومی به طور مستقیم ممکن نیست.

- روش‌های محاسبه گرادیان در الگوریتم‌های وردشی کوانتومی

روش‌های محاسبه گرادیان به دو روش اصلی کلاسیک و کوانتومی تقسیم می‌شود. ابتدا دو مورد از روش‌های اصلی محاسبه کلاسیک گرادیان ذکر شده است. اولین روش کلاسیک، روش تغییر محدود است. در این روش، گرادیان‌ها به طور عددی و با استفاده از اختلاف محدود محاسبه می‌شوند. این روش معمولاً ساده‌ترین و قابل اجراترین روش برای محاسبه گرادیان‌ها است.

$$\frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i} \approx \frac{C(\theta + \delta) - C(\theta)}{\delta}$$

که در آن  $\delta$  مقدار کوچکی است که برای محاسبه تغییرات در تابع هزینه استفاده می‌شود. روش دوم، روش گرادیان دقیق (گرادیان تحلیلی) است. در این روش، گرادیان‌ها به طور دقیق با استفاده از قواعد ریاضی تحلیل می‌شوند. این روش معمولاً زمانی استفاده می‌شود که تابع هزینه به طور دقیق قابل تجزیه باشد. این روش دقیق‌تری دارد اما در مسائل پیچیده ممکن است محاسبات سنگینی داشته باشد. در سیستم‌های کوانتومی، محاسبه مستقیم گرادیان‌ها به دلیل نیاز به اندازه‌گیری‌های چندگانه و پیچیدگی محاسبات کوانتومی دشوار است. در اینجا دو روش اصلی برای محاسبه گرادیان‌ها در VQA بررسی می‌شود. روش اول تغییر محدود کوانتومی است که در این روش، گرادیان‌ها به طور مشابه با روش‌های

کلاسیک، اما به طور کوانتو می محاسبه می شوند. این روش شامل اندازه‌گیری‌هایی است که تغییرات کوچک در پارامترهای مدار ایجاد کرده و سپس مقادیر تابع هزینه محاسبه می شود.

$$\frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\langle C(\theta + \delta) \rangle - \langle C(\theta) \rangle}{\delta}$$

که در آن  $\langle C(\theta) \rangle$  میانگین اندازه‌گیری‌های تابع هزینه است. روش اصلی بعدی قانون تغییر پارامتر است. این روش سخت افزاری و محاسباتی کارآمد برای محاسبه گرادیان‌ها در مدارهای کوانتو می باشد و بسته به گیت‌های یکانی است. به طور خاص، اگر  $\theta_l$  یک پارامتر در مدار کوانتو می باشد گرادیان تابع هزینه نسبت به  $\theta_l$  با استفاده از قانون جابه‌جایی پارامتر به صورت زیر محاسبه می شود

$$\frac{\partial C}{\partial \theta_l} = \sum_k \frac{1}{2 \sin \alpha} (Tr [O_k U^\dagger (\theta_+) \rho_k U (\theta_+)] - Tr [O_k U^\dagger (\theta_-) \rho_k U (\theta_-)])$$

که در آن  $e_l = \alpha e_l \theta_+$  و  $0$  در مکان  $l$  در سایر موقعیت‌ها است، همچنین  $\alpha$  یک عدد حقیقی است که مقدار جابه‌جایی پارامتر را تعیین می کند. این روش گرادیان تحلیلی را به جای تقریبی فراهم می کند و سخت افزاری کارآمد است، زیرا تنها به اجرای دو مدار کوانتو می باشد  $+ \alpha$  و  $- \alpha$  در نقطه  $\pi/4$ ، دقت  $\alpha = \pi/4$  است، زیرا ضریب  $\frac{1}{\sin \alpha}$  کمینه می شود. گرادیان‌ها برای بروزرسانی پارامترهای مدار در الگوریتم‌های مانند (VQE) و (QAOA) استفاده می شوند، همچنین اطلاعات گرادیانی به درک بهتر ویژگی‌های تابع هزینه و رفتار آن در فضای پارامترها کمک می کنند. در ادامه به بررسی بهینه‌سازها در چارچوب الگوریتم‌های وردشی کوانتو می پرداخته شده است.

#### ۴.۳.۴ بهینه‌سازی

بهینه‌سازها یکی از عناصر کلیدی در VQA ها هستند و انتخاب آنها تأثیر مستقیمی بر دقت، کارایی و همگرایی الگوریتم دارد. بهینه‌سازی در های VQA فرآیند به حداقل رساندن تابع هزینه ( $C(\theta)$ ) است که توسط پارامترهای مدار کوانتو می شود. تعیین می شود. موفقیت یک VQA به شدت به انتخاب یک بهینه‌ساز مناسب بستگی دارد، زیرا:

- پیچیدگی‌های تابع هزینه: توابع هزینه در VQAs : اغلب شامل حداقل‌های موضعی متعدد هستند و محیط بهینه‌سازی ممکن است تصادفی باشد (به دلیل نویز سخت افزار یا خطاهای اندازه‌گیری).
- چالش‌های جدید در VQAs : مواردی مانند پهنگ‌های بی‌بار، نویز سخت افزاری، و محدودیت تعداد اندازه‌گیری‌ها مشکلاتی منحصر به فرد در فرآیند بهینه‌سازی ایجاد می کنند.

بهینه‌سازها را به دو دسته اصلی می‌توان تقسیم کرد: روش‌های کاهش گرادیان و سایر روش‌ها. روش‌های کاهش گرادیان یکی از رایج‌ترین و بنیادی‌ترین روش‌های بهینه‌سازی است که در الگوریتم‌های وردشی کوانتمی نقش حیاتی ایفا می‌کند. این روش‌ها برای به حداقل رساندن تابع هزینه ( $\theta$ )  $C$ ، با استفاده از گرادیان‌های تابع نسبت به پارامترهای قابل تنظیم  $\theta$ ، طراحی شده‌اند. در محیط‌های کوانتمی، روش‌های کاهش گرادیان به دلیل امکان محاسبه گرادیان‌های دقیق، کارایی بالایی دارند. روش‌های کاهش گرادیان در الگوریتم‌های VQA به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند: گرادیان کاهشی ساده و گرادیان کاهشی تصادفی (SGD) که گرادیان کاهشی ساده ساده‌ترین نسخه الگوریتم گرادیان کاهشی است و به صورت مستقیم از گرادیان تابع هزینه برای بهروزرسانی پارامترها استفاده می‌کند؛ ولی در گرادیان کاهشی تصادفی به جای محاسبه گرادیان دقیق، از یک تقریب تصادفی برای گرادیان استفاده می‌شود. این موضوع بهویژه در محیط‌های کوانتمی که تعداد اندازه‌گیری‌ها محدود است، مفید است. در نتیجه روش‌های گرادیان کاهشی به دلیل سادگی، کارایی، و قابلیت تطبیق با دستگاه‌های کوانتمی یکی از اصلی‌ترین روش‌های بهینه‌سازی در الگوریتم‌های VQA محسوب می‌شوند. این روش‌ها با وجود چالش‌هایی مانند پهنگ‌های بی‌بار و نویز سخت‌افزاری، با بهبودهایی مانند استفاده از بهینه‌سازهای پیشرفته و گرادیان طبیعی کوانتمی بهبود یافته‌اند. این روش‌ها نقش کلیدی در بهینه‌سازی پارامترهای مدارهای کوانتمی ایفا می‌کنند و ابزار مهمی برای حل مسائل پیچیده در شیمی کوانتمی، بهینه‌سازی، و یادگیری ماشین هستند. سایر روش‌ها به معرفی روش‌های جایگزین برای بهینه‌سازی در الگوریتم‌های وردشی کوانتمی می‌پردازد. این روش‌ها به طور خاص برای مقابله با محدودیت‌ها و چالش‌هایی طراحی شده‌اند که در استفاده از روش‌های مبتنی بر گرادیان ممکن است به وجود بیاید. این دسته از روش‌ها شامل تکنیک‌هایی است که گرادیان‌ها را به طور مستقیم استفاده نمی‌کنند یا از روش‌های پیشرفته‌تر برای تنظیم پارامترها بهره می‌گیرند. یادگیری فرادانش، یک روش پیشرفته است که در آن یک شبکه عصبی آموزش می‌بیند تا از تاریخچه بهینه‌سازی و گرادیان‌های فعلی، قوانین بهروزرسانی مناسب را برای پارامترها بیاموزد. این رویکرد اجازه می‌دهد تا بهینه‌ساز به مرور زمان برای کلاس خاصی از مسائل، عملکرد بهتری پیدا کند. SPSA یکی از روش‌های جایگزین برای گرادیان کاهشی است که در آن گرادیان به صورت تقریبی و بر اساس مشتق‌های جزئی در یک جهت تصادفی محاسبه می‌شود. این روش به جای محاسبه گرادیان کامل، یک تقریب ساده‌تر از آن ارائه می‌دهد که تنها به یک مشتق نیاز دارد. روش‌های گرادیان-آزاد برای مسائل خاصی طراحی شده‌اند که در آن‌ها تابع هزینه به صورت ترکیبی خطی از مقادیر چشم‌داشتی تعریف می‌شود

#### ۵.۳.۴ کاربرد الگوریتم‌های وردشی کوانتمی

به عنوان ابزاری بسیار قدرتمند برای بهره‌برداری از کامپیوترهای کوانتمی در دوره NISQ (دستگاه‌های کوانتمی با نویز متوسط و مقیاس محدود) معروفی شده‌اند. این بخش کاربردهای متنوعی را که VQAs می‌توانند در مسائل مختلف

علمی، ریاضی و مهندسی ارائه دهنده. یکی از ویژگی‌های برجسته VQAs این است که این الگوریتم‌ها انعطاف‌پذیری بالایی برای حل طیف وسیعی از مسائل ارائه می‌دهند. از جمله مزایای کلیدی این الگوریتم‌ها می‌توان به پوشش گسترده کاربردها، استفاده از ساخت افزارهای کوانتومی فعلی و تطبیق با نیازهای مسئله اشاره کرد. کاربردهای VQAs را می‌توان به دسته‌های زیر تقسیم کرد

#### ۱- پیدا کردن حالت‌های پایه و برانگیخته

یکی از برجسته‌ترین کاربردهای VQAs محاسبه حالت‌های پایه و حالت‌های برانگیخته در سیستم‌های کوانتومی است. این وظایف در شیمی کوانتومی و فیزیک مواد کاربرد گسترده‌ای دارند. الگوریتم‌هایی مانند (VQE) که از اولین الگوریتم VQA است که برای تخمین انرژی حالت پایه طراحی شده است، کاربرد دارند.

#### ۲- شبیه‌سازی دینامیک‌های کوانتومی

شبیه‌سازی دینامیک‌های کوانتومی شامل مطالعه تکامل زمانی سیستم‌های کوانتومی است. روش‌های زیر در این بخش ارائه شده‌اند

رویکرد تکراری : شبیه‌سازی دینامیک به صورت تکراری و مرحله‌به‌مرحله.

انتقال سریع وردشی : روش‌هایی که با کاهش زمان محاسبات شبیه‌سازی سریع‌تری ارائه می‌دهند.

#### ۳- مسائل ریاضی

می‌توانند برای حل مسائل ریاضی مانند حل سیستم‌های معادلات خطی و ضرب ماتریس-بردار استفاده شوند. به عنوان مثال: در مسئله سیستم‌های خطی، هدف پیدا کردن حالتی است که یک معادله خطی خاص را برآورده کند.

#### ۴- بهینه‌سازی

الگوریتم‌های VQAs برای حل مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی مانند مسائل Max-Cut یا مسائل رضایت محدودیت‌ها استفاده می‌شوند. الگوریتم معروف در این حوزه (QAOA) است.

#### ۵- یادگیری ماشین کوانتومی

می‌توانند در حوزه یادگیری ماشین کوانتومی برای طراحی شبکه‌های عصبی کوانتومی و مدل‌های تولیدی مانند شبکه‌های متخصص مولد (GANs) استفاده شوند. این روش‌ها پتانسیل بالایی برای بهبود کارایی و دقت یادگیری ماشین در مقایسه با روش‌های کلاسیک دارند.

### ۶.۳.۴ الگوریتم QAOA در سامانه متغیر پیوسته

مدارهای وردشی تاکنون در حوزه‌های مختلف از جمله شیمی محاسباتی، فاکتورگیری اعداد صحیح، پیاده‌سازی الگوریتم جستجوی گروور، طراحی اتوانکودرهای کوانتومی، و شبکه‌های عصبی کوانتومی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. بهویژه،

این مدارها در مسائل بهینه‌سازی کاربرد گسترده‌ای دارند. الگوریتم‌های بهینه‌سازی تقریبی کوانتومی (QAOA) به عنوان بخشی از این مدارها شناخته می‌شوند. پژوهش‌های بسیاری به بررسی عملکرد QAOA و توسعه نسخه‌های بهبودیافته و توسعه‌یافته آن پرداخته‌اند. اگرچه الگوریتم QAOA در مسائل بهینه‌سازی گستته به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است، بسیاری از مسائل دنیای واقعی — بهویژه در حوزه‌هایی مانند مالی، یادگیری ماشین، و مهندسی — ماهیت پیوسته دارند. این مسائل شامل یافتن حداقل یک تابع حقیقی در یک فضای پیوسته است. بنابراین، برای گسترش تأثیر الگوریتم‌های کوانتومی در این حوزه‌ها، لازم است روش‌های فعلی به مسائل بهینه‌سازی پیوسته تعمیم داده شوند. این بخش یک الگوریتم بهینه‌سازی تقریبی کوانتومی برای مسائل پیوسته ارائه می‌دهد. این الگوریتم بر اساس روش عملگرهای متناوب عمل می‌کند که ویژگی اصلی QAOA است. در این روش تابع هدف به عنوان یک هامیلتونی هزینه کدگذاری می‌شود. الگوریتم با اجرای متناوب تکامل زمانی تحت دو عملگر غیرجابجاپذیر (هامیلتونی هزینه و هامیلتونی اختلاط) پیش می‌رود و بازه‌های زمانی هر مرحله به عنوان پارامترهای وردشی تنظیم می‌شوند روش‌های گرادیان کاهشی در یادگیری عمیق عمل می‌کند. نقطه شروع در جهت گرادیان تابع هزینه به روزرسانی می‌شود و یک جابه‌جایی اضافی وابسته به تکانه نیز به این تغییر اضافه می‌گردد. اگر حالت اولیه الگوریتم به صورت یک برهم‌نهی از چندین نقطه شروع تنظیم شود، الگوریتم می‌تواند به عنوان گرادیان کاهشی در برهم‌نهی تفسیر شود. این ویژگی نشان‌دهنده اجرای موازی فرآیند بهینه‌سازی برای نقاط مختلف است. در حقیقت، تکامل حاصل برابر با دینامیک کوانتومی یک ذره در حضور یک پتانسیل است که تابع هزینه را توصیف می‌کند. این الگوریتم نه تنها برای مسائل پیوسته مناسب است، بلکه امکان حل مسائل گستته و محدودشده را نیز فراهم می‌آورد. از دیگر توانایی‌های آن می‌توان به دستیابی به سرعت‌های کوانتومی مشابه الگوریتم گروور و نمونه‌گیری از توزیع‌هایی اشاره کرد که شبیه‌سازی آن‌ها با کامپیوترهای کلاسیک در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر نیست.

#### ● تعریف مسئله بهینه‌سازی پیوسته

فرض کنید تابعی به صورت  $R \mapsto R^N$  داده شده است که  $x$  یک بردار بعدی- $N$  در فضای اعداد حقیقی است. هدف مسئله بهینه‌سازی پیوسته این است که مقدار حداقل  $f(x)$  را پیدا کنیم. این حداقل، با یک نقطه  $x^*$  بیان می‌شود، به‌طوری‌که:

$$f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^N} f(x)$$

در چارچوب مکانیک کوانتومی، این مسئله به یافتن یک حالت کوانتومی  $\langle \psi |$  معادل است که میانگین مقدار یک هامیلتونی هزینه  $H_C$  را کمینه کند. این هامیلتونی به شکل زیر تعریف می‌شود

$$H_C = f(x)$$

که در آن  $\hat{x}$  عملگر مکان است. هدف این است که مقدار میانگین انرژی، یعنی  $\langle \psi | H_C | \psi \rangle$ ، کمینه شود. الگوریتم از روش عملگرهای متناوب برای حل این مسئله استفاده می‌کند. در این روش، دو هامیلتونی اصلی به صورت متناوب بر روی سیستم اعمال می‌شوند

هامیلتونی هزینه ( $H_C$ ): تابع هدف را نمایش می‌دهد و بهینه‌سازی سیستم را هدایت می‌کند.

هامیلتونی اختلاط ( $H_M$ ): یک هامیلتونی مکمل است که با  $H_C$  جابجا نمی‌شود و باعث تغییرات اضافی در سیستم می‌شود. یکی از انتخاب‌های رایج برای این هامیلتونی، هامیلتونی جنبشی است

$$H_M = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N p_j^2 = \frac{1}{2} \hat{p}^2$$

که در آن  $p_j$  عملگر تکانه متناظر با متغیر  $x_j$  است. برای درک نحوه تأثیر این هامیلتونی‌ها، تکامل عملگرهای مکان  $\hat{x}$  و تکانه  $\hat{p}$  در تصویر هایزنبرگ بررسی می‌شود. تحت هامیلتونی اختلاط ( $H_M$ ) تکامل عملگر مکان به صورت زیر است

$$e^{i\gamma \hat{p}^2/2} \hat{x} e^{-i\gamma \hat{p}^2/2} = \hat{x} + \gamma \hat{p} \quad (12.4)$$

این رابطه نشان می‌دهد که عملگر مکان  $\hat{x}$  به اندازه‌ای متناسب با تکانه  $\hat{p}$  و ضریب  $\gamma$  تغییر می‌کند. تحت هامیلتونی هزینه ( $H_C$ ) تکامل عملگر تکانه  $\hat{p}$  به صورت زیر است

$$e^{i\eta f(x)} \hat{p} e^{-i\eta f(x)} = \hat{p} - \eta \nabla f(\hat{x}) \quad (13.4)$$

این رابطه نشان‌دهنده تغییر تکانه در جهت گرادیان منفی تابع هدف است. با ترکیب این دو تکامل، قانون کلی بهروزرسانی عملگر مکان به دست می‌آید

$$x \rightarrow \hat{x} + \gamma \hat{p} - \eta \nabla f(\hat{x}) \quad (14.4)$$

این قانون معادل الگوریتم گرادیان کاهشی با تکانه است. هر قسمت از تابع موج با کاهش در جهت گرادیان محلی خود، با یک جابجایی وابسته به تکانه اضافی، به روز می‌شود. در این الگوریتم یک حالت ورودی  $\langle \psi_0 |$  تعریف می‌شود. سپس

عملگر یکانی QAOA که به شکل زیر تعریف شده است، اعمال می‌شود.

$$\hat{U}(\eta, \gamma) = \prod_{j=1}^P e^{-i\gamma_j \hat{H}_M} e^{-i\eta_j \hat{H}_C}$$

در این عملگر  $P$  تعداد مراحل الگوریتم است. پس از اعمال عملگر یکانی، حالت خروجی به شکل زیر بدست می‌آید

$$|\psi_{\eta,\gamma}\rangle = \hat{U}(\eta, \gamma) |\psi_0\rangle$$

پس از اعمال الگوریتم، رجیسترها در پایه مکان  $\hat{x}$  اندازه‌گیری می‌شوند و نمونه‌های  $x$  با احتمالی متناسب با  $|\langle x | \psi_0 \rangle|^2$  هامیلتونی تولید می‌شوند، سپس این فرایند می‌تواند تکرار شود. پارامترهای  $\eta$  و  $\gamma$  نقش مهمی در کارایی الگوریتم ایفا می‌کنند.  $\gamma$  شدت تغییرات تکانه را کنترل می‌کند و  $\eta$  نقش نرخ یادگیری را دارد و تعیین می‌کند که سیستم چه مقدار در جهت گرادیان حرکت کند. این پارامترها می‌توانند به صورت تطبیقی با استفاده از روش‌های کلاسیک مانند گرادیان کاهشی تنظیم شوند. همچنین می‌توان اشاره کرد که در اصل، هر هامیلتونی غیرجابجاپذیر با  $H_C$  می‌تواند به عنوان هامیلتونی اختلاط استفاده شود.

#### • بهینه‌سازی با قیود: یک چارچوب کوانتومی جامع

الگوریتم QAOA ارائه شده، علاوه بر حل مسائل بهینه‌سازی پیوسته بدون قید، برای مسائل بهینه‌سازی پیوسته با قیود نیز طراحی شده است. این نوع مسائل در بسیاری از کاربردهای دنیای واقعی از جمله مهندسی، یادگیری ماشین، اقتصاد و علوم اجتماعی اهمیت بالایی دارند. بهینه‌سازی با قیود مستلزم یافتن حداقل یکتابع هدف در حالی است که مجموعه‌ای از محدودیت‌ها، شامل قیود تساوی و قیود نابرابری، بر متغیرهای بهینه‌سازی اعمال می‌شوند. در چارچوب الگوریتم QAOA، این قیود از طریق اضافه کردن پتانسیلهای محدودکننده انرژی به هامیلتونی هزینه  $H_C$  مدل‌سازی می‌شوند. یک مسئله بهینه‌سازی پیوسته با قیود به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} f(x)$$

که  $(x)$  تابع هدفی است که باید کمینه شود و قیود زیر بر  $x$  اعمال می‌شوند

۱ - قیود تساوی که بیان می‌کنند که هر متغیر  $(x)_i$  باید مقدار ثابتی  $c_i$  را بپذیرد.

$$\{g_i(x) = c_i\}_{i=1}^n$$

۲- قیود نابرابری که تضمین می‌کنند که هر متغیر  $(x)$   $h_j$  باید حداقل مقدار  $d_j$  را برآورده کند.

$$\{h_j(x) \geq d_j\}_{j=1}^m$$

برای وارد کردن این قیود در الگوریتم QAOA یک تغییر اساسی در هامیلتونی هزینه  $H_C$  اعمال می‌شود. قیود به صورت پتانسیل‌های محدودکننده به هامیلتونی اضافه می‌شوند

$$H_C \mapsto f(x) + V_E(x) + V_I(x)$$

که در آن  $V_E(x)$  پتانسیل محدودکننده مربوط به قیود تساوی و  $V_I(x)$  پتانسیل محدودکننده مربوط به قیود نابرابری است. این پتانسیل‌ها با اضافه کردن انرژی اضافی در نقاطی که قیود نقض می‌شوند، سیستم را مجبور می‌کنند تا به نواحی ای حرکت کند که این قیود را برآورده سازد. همان‌طور که در رابطه (۱۳.۴) نشان داده شد، گرادیان پتانسیل‌ها دینامیک تابع موج را تغییر می‌دهد. این گرادیان، تغییراتی در مکان تابع موج  $\hat{x}$  ایجاد می‌کند و آن را به سمت ناحیه‌ای هدایت می‌کند که قیود را ارضا کند. برای اعمال قیود تساوی  $c_i(x) = g_i$ ، یک پتانسیل محدودکننده به شکل زیر تعریف می‌شود

$$V_E(x) = \sum_{i=1}^n \lambda (g_i(x) - c_i)^2$$

که در آن  $\lambda$  یک ضریب بزرگ است که شدت تأثیر این قید را تنظیم می‌کند. این پتانسیل یک دره با انرژی کم در نقاطی ایجاد می‌کند که قیود تساوی را برآورده می‌کنند. گرادیان این پتانسیل وقتی قیود ارضا شوند ( $c_i(x) = g_i$ ) صفر می‌شود و انرژی سیستم به حداقل مقدار ممکن می‌رسد. برای اعمال قیود نابرابری  $d_j \geq h_j(x)$  از پتانسیل محدودکننده زیر استفاده می‌شود

$$V_I(x) = \sum_{j=1}^m \mathcal{R} [\beta (d_j - h_j(x))]$$

که در آن  $\mathcal{R}(x)$  تابع یکسوساز است که به صورت  $\mathcal{R}(x) = \max\{0, x\}$  تعریف می‌شود، همچنین  $\beta$  ضریبی بزرگ است که شدت تأثیر قید نابرابری را تعیین می‌کند. این پتانسیل در نقاطی که قیود برآورده نمی‌شوند، یک شیب مثبت ایجاد می‌کند و سیستم را به سمت ناحیه معتبر هدایت می‌کند. گرادیان این پتانسیل فقط زمانی غیرصفر است که  $d_j \geq h_j(x)$  باشد. تابع یکسوساز  $\mathcal{R}(x) = \max\{0, x\}$  در پیاده‌سازی‌های عددی و کوانتومی ممکن است به صورت دقیق پیاده‌سازی نشود. بنابراین از تقریب‌های تحلیلی هموار استفاده می‌شود. یکی از انتخاب‌های رایج برای این تقریب،

استفاده از تابع سوئیش است

$$\mathcal{R}(x) = \xi(x) \equiv x \cdot \sigma(x), \quad \sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

که در آن  $\sigma(x)$  تابع سیگموئید است. اضافه کردن پتانسیل‌های محدودکننده به هامیلتونی هزینه، گرادیان کلی سیستم را به شکل زیر تغییر می‌دهد

$$\nabla H_C = \nabla f(x) + \nabla V_E(x) + \nabla V_I(x)$$

که  $\nabla f(x)$  حرکت سیستم را به سمت کمینه تابع هدف هدایت می‌کند و  $\nabla V_E(x)$  سیستم را به ناحیه‌ای هدایت می‌کند که قیود تساوی ارضا شود و  $\nabla V_I(x)$  دینامیک سیستم را به ناحیه‌ای می‌برد که قیود نابرابری برقرار باشند. این ترکیب تضمین می‌کند که سیستم همزمان تابع هدف را کمینه کرده و قیود مسئله را برآورده می‌کند. این روش، یک چارچوب عمومی برای حل مسائل بهینه‌سازی با قیود در الگوریتم QAOA فراهم می‌کند. با استفاده از پتانسیل‌های محدودکننده و گرادیان‌های اصلاح شده، سیستم کوانتمی به طور طبیعی به سمت نواحی ای هدایت می‌شود که هم تابع هدف کمینه شده و هم قیود مسئله ارضا می‌شوند. انعطاف‌پذیری در انتخاب پتانسیل‌ها و استفاده از تقریب‌های تحلیلی مانند سوئیش، این الگوریتم را برای مسائل عملی و پیچیده قابل اعتماد و کارآمد می‌سازد. اگرچه الگوریتم معرفی شده به طور خاص برای حل مسائل بهینه‌سازی پیوسته طراحی شده است، اما انعطاف‌پذیری آن به اندازه‌ای است که می‌تواند برای مسائل بهینه‌سازی گسسته نیز مورد استفاده قرار گیرد. یکی از مهم‌ترین کلاس‌های مسائل گسسته که در بسیاری از حوزه‌ها کاربرد دارند، مسائل بهینه‌سازی چندجمله‌ای بازی بدون قید (PUBO) است. الگوریتم QAOA با استفاده از این چارچوب، مسائل بهینه‌سازی گسسته مانند PUBO و QUBO را در فضای پیوسته کدگذاری کرده و حل می‌کند. این فرآیند شامل نگاشت عملگرهای گسسته به عملگرهای پیوسته، تعریف پتانسیل‌های محدودکننده، و تنظیم دقیق پارامترها برای حفظ دینامیک گسسته در فضای پیوسته است. انعطاف‌پذیری در انتخاب پارامترها و همیلتونی‌ها، این الگوریتم را به ابزاری قدرتمند برای حل مسائل بهینه‌سازی پیچیده در زمینه‌های متنوع تبدیل می‌کند. و در نهایت در رابطه با QAOA و پیچیدگی محاسباتی دو نکته قابل توجه وجود دارد. الگوریتم‌های تقریبی بهینه‌سازی کوانتمی، (QAOA) به دلیل ماهیت ابتکاری خود، معمولاً از طریق آزمایش عملکردشان بر روی مسائل خاص ارزیابی می‌شوند. با این حال، الگوریتم گروور که به عنوان یک حالت خاص از QAOA قابل بازنویسی است، بهبود زمانی در حد مرتبه نسبت به الگوریتم‌های کلاسیک ارائه می‌دهد. همچنین مدارهای CV-IQP یکی از قوی‌ترین کلاس‌های محاسبات کوانتمی برای متغیرهای پیوسته هستند. مطالعات نظری نشان داده‌اند که شبیه‌سازی مدارهای CV-IQP با کامپیوتراهای کلاسیک در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر نیست، مگر اینکه سلسله‌مراتب چندجمله‌ای به سطح سوم فرو بریزد. بنابراین خروجی مدار CV-IQP<sup>۲۶</sup> به طور اثبات شده‌ای

برتری کوانتومی را نشان می‌دهد. به دلیل شباهت QAOA به CV-IQP حتی یک مرحله از الگوریتم QAOA نمی‌تواند به طور کارآمد توسط دستگاه‌های کلاسیک شبیه‌سازی شود. برای نمایش شهودی عملکرد الگوریتم، یک مسئله بهینه‌سازی ساده تک‌بعدی را در نظر می‌گیریم. هدف، یافتن مقدار کمینه تابع هزینه  $f(x)$  است. این مثال نشان می‌دهد که چگونه یک گام از الگوریتم CV-QAOA ذره کوانتومی را به سمت نقطه بهینه هدایت می‌کند، که این فرآیند معادل یک گام در الگوریتم گرادیان کاهشی با تکانه است.

- به کارگیری CV-QAOA روی تابع یک‌بعدی

هدف نشان دادن این است که یک لایه CV-QAOA با هامیلتونی هزینه  $H_C = f(\hat{x})$  و هامیلتونی اختلاط  $H_M = \frac{1}{2}p^2$  رفتار معادل یک گام «گرادیان نزولی با مومنتوم» را بر روی مؤلفه‌های تابع موج پیاده‌سازی می‌کند و در نتیجه توزیع پایه مکان  $|\psi(x)|^2$  را به سمت نواحی مینیمم تابع  $f$  هدایت می‌کند. این مثال نشان می‌دهد که چگونه یک گام از الگوریتم CV-QAOA ذره کوانتومی را به سمت نقطه بهینه هدایت می‌کند، که این فرآیند معادل یک گام در الگوریتم گرادیان کاهشی با تکانه است. تابع هدف یک‌بعدی را به صورت

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

در نظر می‌گیریم. مشتق و نقاط بحرانی این تابع عبارت‌اند از

$$\nabla f(x) = x$$

و نقاط مینیمم محلی در  $x = 0$  واقع‌اند (و مقدار تابع در این نقاط  $0 = f(0)$ ). هامیلتونی هزینه و اختلاط به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$H_C = f(\hat{x}) = \frac{1}{2}\hat{x}^2, H_M = \frac{1}{2}p^2$$

فرض می‌کنیم سیستم در حالت اولیه  $\psi_{in}$  قرار دارد که یک بسته موج گوسی (حالت همدوس) است که در مکان  $x_0 = 2$  متتمرکز شده و تکانه اولیه آن صفر است. بنابراین، مقادیر چشم‌داشتی اولیه عبارتند از

$$\langle \hat{x} \rangle_{in} = 2pin = 0$$

برای یک گام از الگوریتم ( $p = 1$ )، پارامترهای زمانی به صورت  $\gamma_1 = 0.5$  (مدت زمان تکامل تحت هامیلتونی هزینه)

---

<sup>۲۶</sup> Continuous-Variable Instantaneous Quantum Polynomial

$\beta_1 = 0.5$  (مدت زمان تکامل تحت هامیلتونی اختلاط) انتخاب می‌شود. سپس اثر عملگر یکانی

$$\hat{U}(\gamma_1, \beta_1) = \prod_{j=1}^P e^{-i\beta_1 \hat{H}_M} e^{-i\gamma_1 \hat{H}_C}$$

بر روی مقادیر چشم‌داشتی مکان و تکانه به شکل زیر است. در قدم اول  $e^{-i\gamma_1 \hat{H}_C}$  اعمال می‌شود. در این مرحله، سیستم به اندازه  $\gamma_1$  تحت هامیلتونی هزینه تکامل می‌یابد. تکانه سیستم در جهت گرادیان منفی تابع هزینه تغییر می‌کند. تغییر در مقدار چشم‌داشتی تکانه با تقریب مرتبه اول به شکل زیر در می‌آید

$$\Delta p \approx -\gamma_1 \nabla f(x_{\text{in}}) = -0.5 \times (2) = -1.0$$

از آنجایی که  $\hat{H}_C$  تنها به  $\hat{x}$  وابسته است، مقدار چشم‌داشتی مکان تغییر نمی‌کند. یعنی ذره کوانتومی در مکان اولیه خود یک "ضریب" در جهت منفی (به سمت نقطه کمینه) دریافت کرده است. در قدم دوم  $e^{-i\beta_1 \hat{H}_M}$  اعمال می‌شود. اکنون سیستم به اندازه  $\beta_1$  تحت هامیلتونی اختلاط تکامل می‌یابد. تغییر در مقدار چشم‌داشتی مکان با تقریب مرتبه اول به شکل زیر در می‌آید

$$\Delta \langle \hat{x} \rangle \approx \beta_1 \langle p \rangle' = 0.5 \times (-1.0) = -0.5$$

از آنجایی که  $\hat{H}_M$  تنها به  $\hat{p}$  وابسته است، مقدار چشم‌داشتی تکانه در این مرحله تغییر نمی‌کند. پس از این مرحله، مقادیر چشم‌داشتی نهایی - پس از یک گام کامل QAOA - عبارتند از

$$\langle \hat{x} \rangle_{\text{out}} = 2 + (-0.5) = 1.5, \quad \langle p \rangle_{\text{out}} = -1.0$$

پس از یک گام از الگوریتم CV-QAOA، مقدار چشم‌داشتی مکان ذره از  $x = 1.5$  به  $x = 1.0$  منتقل شده است که یک حرکت واضح به سمت نقطه کمینه تابع در  $x = 0$  می‌باشد. این فرآیند دقیقاً معادل یک گام از الگوریتم گرادیان کاهشی با تکانه است. در متن،  $(\hat{x}) \rightarrow \hat{x} + \beta \hat{p} - \beta \gamma \nabla f(\hat{x})$ ، هامیلتونی این فرآیند را به صورت کلی توصیف می‌کند. در این مثال با توجه به  $p_{\text{in}} = 0$  داریم

$$\langle \hat{x} \rangle_{\text{out}} = \langle x \rangle_{\text{in}} - \beta \gamma \nabla f(x) = 2 - 0.5 \times 0.5 \times 2 = 1.5$$

که دقیقاً با نتیجه گام به گام ما مطابقت دارد. این مثال عددی ساده، به طور شفاف نشان می‌دهد که چگونه دینامیک

کوانتومی حاصل از هامیلتونی‌های هزینه و اختلاط، یک الگوریتم بهینه‌سازی کلاسیک قدرتمند را در سطح کوانتومی شبیه‌سازی می‌کند.

## ۴.۴ مدل‌های محاسباتی متغیر پیوسته

محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته عمده‌تاً در دو الگری مکمل پیاده‌سازی می‌شود یعنی مدل مبتنی بر گیت و مدل مبتنی بر اندازه‌گیری (یک طرفه). در مدل مبتنی بر گیت، محاسبات از طریق اعمال دنباله‌ای از گیت‌های گاووسی و غیرگاووسی بر روی حالت‌های اولیه همدوس یا چلاندۀ انجام می‌شود. این رویکرد که به مدارهای کیوبیتی شبیه است، مبنای نظری مستقیمی برای طراحی الگوریتم‌ها فراهم می‌کند، اما پیاده‌سازی تجربی گیت‌های غیرخطی جهانشمول در سیستم‌های خطی مانند اپتیک، چالشی کلیدی محسوب می‌شود. در مقابل، مدل مبتنی بر اندازه‌گیری با چالش‌های اجرای گیت‌های دشوار مقابله می‌کند؛ در این پارادایم، یک حالت خوش‌های درهم‌تئیده به عنوان منبع محاسباتی آماده شده و کل محاسبه صرفاً از طریق اندازه‌گیری‌های همدوس متوالی بر روی بخش‌های این شبکه و اعمال تصحیح بازخورد کلاسیکی بر اساس نتایج آنها پیش می‌رود. این روش که به طور ذاتی برای سیستم‌های نوری خطی مناسب‌تر است، اجرای عملیاتی و پایدار محاسبات پیچیده را بدون نیاز به گیت‌های غیرخطی لحظه‌ای امکان‌پذیر می‌سازد و اساس بیشتر پیشرفت‌های تجربی اخیر در حوزه پردازش اطلاعات کوانتومی با نور به شمار می‌رود. در این بخش به معروفی این مدل‌های محاسباتی پرداخته می‌شود.

### ۱۰.۴.۴ مدل محاسباتی متغیر پیوسته مبتنی بر گیت

اولین مدل محاسباتی که به آن اشاره شده است، مدل محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته مبتنی بر گیت است. محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته مبتنی بر گیت<sup>۲۷</sup> یا CVQC یک چارچوب اساسی برای محاسبات کوانتومی است که در حوزه متغیرهای پیوسته عمل می‌کند. برای اجرای هر نوع محاسبه کوانتومی دلخواه در چارچوب متغیرهای پیوسته، نیاز به یک مجموعه گیت جهانشمول است. مجموعه گیت جهانی مجموعه‌ای از گیت‌های کوانتومی است که قادر به پیاده‌سازی هر عملیاتی در فضای هیلبرت متغیر پیوسته باشد. در CVQC محاسبات جهانی به ترکیبی از عملیات گاووسی و حداقل یک عملیات غیرگاووسی متکی است. از جمله عملگرهای گاووسی می‌توان به گیت‌های جابه‌جایی، چلاندگی، چرخشی و تقسیم کننده پرتو اشاره کرد و همچنین برای گیت‌های غیرگاووسی می‌توان از گیت فاز مکعبی به عنوان یک مثال نام برد. ترکیب عملیات گاووسی و غیرگاووسی امکان پیاده‌سازی هر نوع تبدیلی را در فضای متغیر پیوسته فراهم می‌کند. بنابراین اگر

<sup>۲۷</sup> Gate-Based Continuous-Variable Quantum Computing

بخواهیم یک مدل محاسباتی جهانشمول داشته باشیم، باید مجموعه گیت‌هایی که در مدل استفاده می‌شود یک مجموعه جهانشمول باشد تا به وسیله آن‌ها هر نوع محاسباتی را پیاده سازی کرد. مدل مداری یکی از چارچوب‌های اساسی در محاسبات کوانتومی است که در آن محاسبات به صورت توالی‌ای از گیت‌های کوانتومی انجام می‌شود. این مدل که ابتدا برای سیستم‌های گسسته (مانند کیوبیت‌ها) معرفی شد، در محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته (CVQC) نیز با استفاده از متغیرهای پیوسته نظریه مکان و تکانه در فضای فاز گسترش یافته است. در این مدل، عملیات کوانتومی به عنوان مدارهایی از گیت‌های پیوسته در نظر گرفته می‌شوند که بر روی حالات کوانتومی اعمال می‌شوند. این مدل پایه‌ای برای درک چگونگی انجام محاسبات کوانتومی در چارچوب CVQC ارائه می‌دهد. در این مدل محاسبات با آماده‌سازی یک یا چند حالت اولیه آغاز می‌شود. این حالت معمولاً یکی از حالات رایج در سیستم‌های متغیر پیوسته، مانند حالت همدوس یا حالت چلاندی یا حالت فوک است. گیت‌ها بلوک‌های سازنده مدارهای کوانتومی هستند که محاسبات را انجام می‌دهند و عملیات در این مدل از طریق گیت‌های متغیر پیوسته اجرا می‌شوند. گیت‌ها از طریق اتصالاتی به هم متصل می‌شوند که توالی عملیات را مشخص می‌کنند. این اتصالات می‌توانند نشان‌دهنده وابستگی زمانی بین گیت‌ها باشند. نتیجه نهایی مدار از طریق اندازه‌گیری بدست می‌آید. خروجی می‌تواند شامل اطلاعات پردازش شده در قالب متغیرهای کوادراتور یا تعداد فوتون‌ها باشد. بسیاری از گیت‌های موردنیاز در این مدل با استفاده از ابزارهای نوری مانند آینه‌های نیمه‌شفاف و تقویت‌کننده‌های نوری به راحتی قابل پیاده‌سازی هستند. همچنین مدارها به صورت مازولار طراحی می‌شوند و این امکان را فراهم می‌کنند که محاسبات پیچیده‌تر با ترکیب بلوک‌های ساده‌تر انجام شوند. مدل مداری در سیستم‌های متغیر پیوسته قابلیت گسترش به تعداد زیادی از حالات و گیت‌ها را دارد. یک مدار در CVQC را می‌توان به صورت یک دنباله ریاضی از عملگرها نمایش داد که بر حالات اولیه اعمال می‌شوند. به‌طور کلی، حالت خروجی مدار را می‌توان به صورت زیر

نوشت

$$|\psi_{out}\rangle = U_n \dots U_2 U_1 |\psi_{in}\rangle$$

که در آن  $U_i$  عملگر مربوط به گیت  $i$  است.

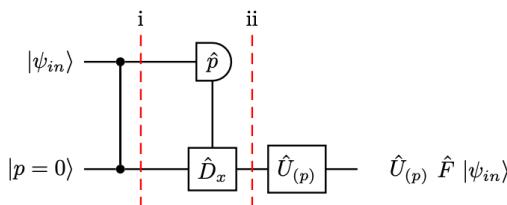
#### ۲.۴.۴ محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته مبتنی بر اندازه‌گیری

مدل‌های متغیر پیوسته مبتنی بر اندازه‌گیری (یک طرفه) پارادایمی کاربردی در محاسبات کوانتومی نوری هستند که در آن محاسبات نه با اجرای گیت‌های متوالی، بلکه از طریق اندازه‌گیری‌های متوالی بر روی یک حالت خوش‌های درهم‌تنیده انجام می‌شود. در این روش، ابتدا یک شبکه (خوشه) از حالت‌های فشرده‌شده درهم‌تنیده به عنوان منبع محاسباتی آماده می‌شود. سپس با انجام اندازه‌گیری‌های همدوس روی بخش‌هایی از این شبکه و اعمال تصحیح مبتنی بر بازخورد کلاسیکی بر اساس نتایج اندازه‌گیری، عملیات محاسباتی موردنظر به‌طور قطعی اجرا می‌گردد. این رویکرد به ویژه در اپتیک کوانتومی

مزیت بزرگی دارد، زیرا ساخت حالت‌های خوش‌های و انجام اندازه‌گیری‌های خطی، از اجرای گیت‌های منطقی پیچیده، به طور تجربی ساده‌تر و پایدارتر است و مبنای بسیاری از آزمایش‌های پیشرفته در شبیه‌سازی کوانتومی و پردازش اطلاعات نوری محسوب می‌شود. برای درک رویکرد محاسبات مبتنی بر اندازه‌گیری ابتدا مدار نیمه‌فرابرد را به یاد آورید. اهمیت مدار نیمه‌فرابرد از این جهت بود که در نهایت خروجی آن تبدیل فوریه حالت ورودی بود. یعنی

$$|\psi_{out}\rangle = \hat{\mathcal{F}} |\psi_{in}\rangle$$

حال فرض کنید که عملگر یکانی مانند  $U_{(p)}$  که تنها تابعی از کوادراتور تکانه است در انتهای مدار اعمال می‌کنیم مانند شکل زیر



شکل ۱۰.۴: استفاده از مدار نیمه‌فرابرد در محاسبات کوانتومی. در این شکل عملگر یکانی دلخواه  $\hat{U}_{(p)}$  در انتهای مدار اعمال شده است

اگر حالت کمکی ما ویژه حالت عملگر تکانه باشد، می‌توان حالت خروجی را به شکل زیر نوشت

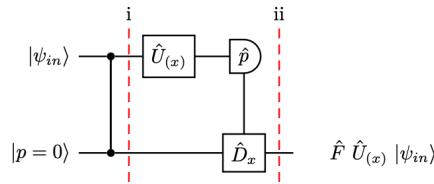
$$|\psi_{out}\rangle = \hat{U}_{(p)} \hat{\mathcal{F}} |\psi_{in}\rangle$$

چون  $U_{(p)}$  که تنها تابعی از کوادراتور تکانه است، اگر با عملگر تبدیل فوریه جابه‌جا شود، در نهایت داریم

$$|\psi_{out}\rangle = \hat{U}_{(p)} \hat{\mathcal{F}} |\psi_{in}\rangle = \hat{\mathcal{F}} \hat{U}_{(x)} |\psi_{in}\rangle$$

پس اعمال  $\hat{U}_{(p)}$  در انتهای مدار نیمه‌فرابرد، معادل با اعمال عملگر  $\hat{U}_{(x)}$  به حالت ورودی است؛ یعنی ورودی مدار نیمه‌فرابرد  $\hat{U}_{(x)} |\psi_{in}\rangle$  باشد. از طرفی عملگر یکانی CZ فقط به کوادراتور مکان  $x$  وابسته است بنابراین عملگر  $\hat{U}_{(x)}$  با عملگر CZ جابه‌جا می‌شود. مدار شکل ۱۰.۴ بصورت شکل ۲.۴ زیر تغییر می‌کند

این رابطه نشان می‌دهد که می‌توان عملیات  $\hat{U}_{(p)}$  را به جای خروجی مدار، در بخش اندازه‌گیری اعمال کرد. به عبارت دیگر، اگر مبنای اندازه‌گیری تغییر کند، به جای اعمال  $\hat{U}_{(x)}$  روی حالت کوانتومی، اثر آن در نتایج اندازه‌گیری منعکس

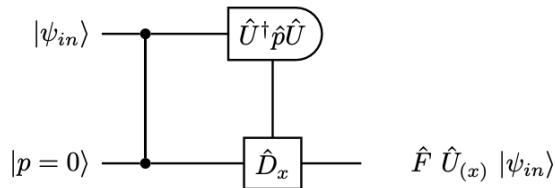


شکل ۲.۴: استفاده از مدار نیمه‌فرابرد در محاسبات کوانتومی. در این شکل عملگر یکانی از انتهای مدار به ابتدای مدار منتقل شده است

می‌شود. این تغییر مبنای اندازه‌گیری را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$m_p \hat{U}_{(x)}^\dagger |p = m_p\rangle = [\hat{U}_{(x)}^\dagger p \hat{U}_{(x)}] \hat{U}_{(x)}^\dagger |p = m_p\rangle$$

با توجه به یکانی بودن عملگر  $\hat{U}_{(x)}$  بدیهی است که دو طرف این رابطه با یکدیگر برابر هستند. این معادله نشان می‌دهد که اعمال  $\hat{U}_{(x)}$  روی حالت قبل از اندازه‌گیری، معادل استفاده از یک تصویرگر تغییر یافته در اندازه‌گیری است یا به عبارت دیگر اعمال  $\hat{U}_{(x)}$  قبل از اندازه‌گیری معادل با تغییر پایه‌های اندازه‌گیری است. مدار این مرحله معادل با شکل ۳.۴ است. پس به طور خلاصه یک عملگر یکانی دلخواه بر روی حالت ورودی اعمال می‌شد و دیده شد که این عملگر را می‌توان با



شکل ۳.۴: استفاده از مدار نیمه‌فرابرد در محاسبات کوانتومی. در این شکل عملگر یکانی در قلب اندازه‌گیری جای گرفته است

تغییر در پایه‌های اندازه‌گیری پیاده سازی کرد. حال اگر بتوان با استفاده از تغییر عملگر دلخواه  $\hat{U}$  مجموعه‌ای از گیت‌های جهانشمول را به عنوان خروجی دریافت کرد، آنگاه با استفاده از مدار نیمه‌فرابرد می‌توان محاسبات کوانتومی جهانشمول را پیاده سازی کرد. برای این منظور نیازمند تولید عملگرهای جایه‌جایی، برش<sup>۲۸</sup>، فاز مکعبی و تبدیل فوریه هستیم. مدار نیمه‌فرابرد، تبدیل فوریه را تولید می‌کند، یعنی خروجی مدار تبدیل فوریه است. با انتخاب

$$\hat{U}_{(x)} = D_p(m_p) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} m_p \hat{x}\right) \quad (15.4)$$

<sup>۲۸</sup> Shear operation

که در آن  $\hat{x}$  عملگر مکان و  $m_p$  مقدار جابه‌جایی است، مقدار  $\hat{U}_{(x)}^\dagger \hat{p} \hat{U}_{(x)}$  به شکل زیر بدست می‌آید. فرض کنید  
 $B = \hat{p}$  و  $A = \frac{i}{\hbar} m_p \hat{x}$  با استفاده از لم بیکر-کمپل-هاسدورف داریم

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{p}] = \left[ \frac{i}{\hbar} m_p \hat{x}, \hat{p} \right] = \frac{i}{\hbar} m_p [\hat{x}, \hat{p}] = \frac{i}{\hbar} m_p i \hbar = -m_p$$

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{p}]] = \left[ \frac{i}{\hbar} m_p \hat{x}, -m_p \right] = 0$$

$$e^{\hat{A}} \hat{p} e^{-\hat{A}} = \hat{p} + [\hat{A}, \hat{p}] = \hat{p} - m_p$$

بنابراین

$$\hat{U}_{(x)}^\dagger \hat{p} \hat{U}_{(x)} = \hat{D}_{(x)}^\dagger \hat{p} \hat{D}_{(x)} = \hat{p} + m_p$$

که نشان می‌دهد با انتخاب  $\hat{U}_{(x)}$  به شکل رابطه (۱۵.۴) به راحتی می‌توان عملگر جابه‌جایی را ساخت. عملگر بعدی که برای محاسبات کوانتومی جهانشمول به آن نیاز داریم عملگر برش است. با در نظر گرفتن

$$\hat{U}_{(x)} = P(\gamma) = \exp\left(\frac{i}{2\hbar} \gamma \hat{x}^2\right)$$

همانند حالت قبل با انتخاب  $B = \hat{p}$  و  $A = \frac{i}{2\hbar} \gamma \hat{x}^2$  همچنین استفاده از لم بیکر-کمپل-هاسدورف

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{p}] = \left[ \frac{i}{2\hbar} \gamma \hat{x}^2, \hat{p} \right] = \frac{i}{2\hbar} \gamma [\hat{x}^2, \hat{p}] = \frac{i}{2\hbar} \gamma \cdot 2i\hbar \hat{x} = -\gamma \hat{x}$$

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{p}]] = \left[ \frac{i}{2\hbar} \gamma \hat{x}^2, -\gamma \hat{x} \right] = 0$$

$$e^{\hat{A}} \hat{p} e^{-\hat{A}} = \hat{p} + [\hat{A}, \hat{p}] = \hat{p} - \gamma \hat{x}$$

بنابراین

$$\hat{U}_{(x)}^\dagger \hat{p} \hat{U}_{(x)} = \hat{p} + \gamma \hat{x}$$

در آخرین قدم اگر

$$\hat{U}_{(x)} = U(\gamma) = \exp\left(\frac{i}{3\hbar}\gamma\hat{x}^3\right)$$

انتخاب شود، همانند محاسبات قبلی می‌توان به رابطه زیر رسید

$$\hat{U}_{(x)}^\dagger \hat{p} \hat{U}_{(x)} = \hat{p} + \gamma \hat{x}^2 \quad (16.4)$$

در اینجا نکته‌ای که وجود دارد این است که اندازه‌گیری‌هایی که در مدار نیمه‌فرابرد وجود دارد، اندازه‌گیری هموداین است و ما تنها می‌توان عملیات گاوسی را با استفاده از مدار نیمه‌فرابرد پیاده‌سازی کرد. این به این دلیل است که اندازه‌گیری‌های گوسمی نمی‌توانند غیرگاوسی را وارد سیستم کنند. پس با وجود مزایایی از جمله اینکه این مدارها نسبت به مدارهای فرابرد کامل ساده‌تر هستند و برای عملیات پایه مانند تبدیل فوریه مناسب‌اند اما به دلیل عدم توانایی در ساخت عملگرهای غیر گاوسی نمی‌تواند به عنوان یک رویکرد محاسباتی جهان‌شمول مورد استفاده قرارگیرد. عملیات غیرگاوسی نیاز به اندازه‌گیری در یک پایه غیرمتعارف دارد یا باید از یک مدار کمکی برای اعمال این تغییرات استفاده شود.

اکنون که با استفاده از مدار نیمه‌فرابرد نمی‌توان محاسبات جهان‌شمول انجام داد و تمامی عملگرهای موردنیاز را ساخت به سراغ مدار فرابرد کامل می‌رویم، هدف این است که مشخص شود با مدار فرابرد کامل می‌توان هر عملگری را ساخت یا خیر. مدار فرابرد کامل از یک منبع دو-مدى، اندازه‌گیری‌های هموداین و عملیات پیشخور تشکیل شده است. این مدار امکان انتقال یک حالت کوانتومی از یک مد ورودی به مد خروجی را فراهم می‌کند، در حالی که نوع عملیات اعمال شده بر این حالت به پایه اندازه‌گیری و تنظیمات منع بستگی دارد.

فرض کنید که اندازه‌گیری‌های هموداین مدار فرابرد کامل، با تغییر پایه‌ای به شکل  $(\theta_1)\hat{x}_1$  و  $(\theta_2)\hat{x}_2$  اصلاح شده است که در آن  $\theta$   $\hat{x}(\theta) = \hat{x} \cos \theta + \hat{p} \sin \theta$  در این صورت رابطه ورودی-خروجی مدار به شکل زیر بدست می‌آید

$$\hat{q}_{out} = V(\theta_+, \theta_-) \hat{q}_{in} + \begin{pmatrix} \hat{x}_B - \hat{x}_A \\ \hat{p}_B - \hat{p}_A \end{pmatrix} \quad (17.4)$$

در این رابطه  $V(\theta_+, \theta_-)$  و  $\hat{q}_{in}$  برابر است با

$$V(\theta_+, \theta_-) = R\left(\theta_+ - \frac{\pi}{2}\right) S(lntan\theta_-) R(\theta_+)$$

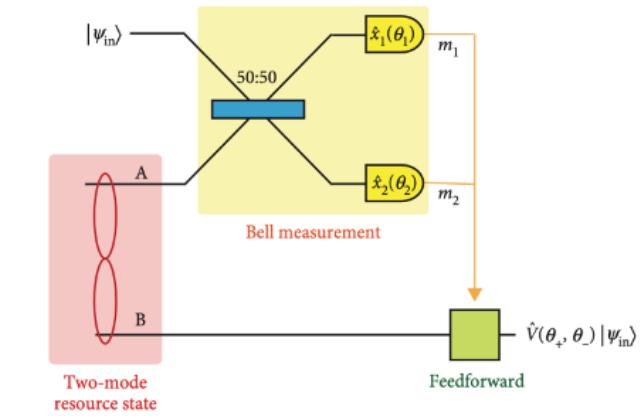
با

$$\theta_{\pm} = \frac{(\theta_2 \pm \theta_1)}{2}$$

در اینجا  $R(\theta)$  ماتریس چرخش و  $S(r)$  ماتریس چلانندگی است که به صورت زیر عمل می‌کند

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad S(r) = \begin{pmatrix} e^{-r} & 0 \\ 0 & e^r \end{pmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌شود در این رابطه عملگرهای چرخش و چلانندگی که جزو عملگرهای جهان‌شمول بودند وجود دارند همچنین با تغییر پایه اندازه‌گیری به پایه‌های مختلف، ماتریس  $(\theta_+, \theta_-) V$  به طور مؤثر عملیات‌هایی مانند چرخش، فشرده‌سازی و تغییر در پایه اندازه‌گیری را اعمال می‌کند. این تغییرات باعث می‌شود که ورودی و خروجی حالت کوانتومی به‌طور غیرمستقیم از هم جدا شوند و عملیات‌های پیچیده‌تری مانند گیت‌های کوانتومی گوسی و غیرگوسی پیاده‌سازی شوند. به طور خلاصه، این قضیه نشان می‌دهد که چگونه با تغییر پایه اندازه‌گیری در مدار فرابرد، می‌توان عملیات‌های مختلفی را بر حالت‌های ورودی اعمال کرد و آنها را به خروجی‌ها انتقال داد. این تغییرات در اندازه‌گیری‌ها می‌توانند به پیاده‌سازی گیت‌های پیچیده و غیرگاؤسی منجر شوند که در بسیاری از الگوریتم‌های کوانتومی پیشرفته مورد استفاده قرار می‌گیرند. شکل ۴.۴ مدار فرابرد اصلاح شده را نشان می‌دهد. در بخش بعدی رویکرد محاسبات کوانتومی با استفاده از حالت‌های خوش‌های معرفی شده است.



شکل ۴.۴: استفاده از مدار فرابرد کامل در محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری

### ۳.۴.۴ محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته مبتنی بر حالت‌های خوش‌های

حالت‌های خوش‌های یکی از مباحث کلیدی در محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری است. در این بخش حالت‌های خوش‌های به عنوان یک ابزار برای انجام عملیات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری با استفاده از اندازه‌گیری‌ها و پیش‌پردازش‌های کلاسیکی معرفی شده‌اند. این حالت‌ها از اهمیت بالایی در توسعه الگوریتم‌های کوانتومی برخوردارند و به ویژه در سیستم‌های محاسباتی مبتنی بر خوش‌های کوانتومی و محاسبات مبتنی بر مدارهای انتقال کوانتومی کاربرد دارند. حالت‌های خوش‌های مجموعه‌ای از حالت‌های درهم‌تینیده چندمدمی هستند که به‌طور خاص در محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری کاربرد دارند. در این سیستم‌ها، اطلاعات کوانتومی نه تنها به وسیله‌ی گیت‌های کوانتومی بلکه از طریق اندازه‌گیری‌های مختلف بر روی حالت‌های خوش‌های استخراج می‌شود. به عبارت ساده، حالت‌های خوش‌های مجموعه‌ای از سیستم‌های کوانتومی هستند که به‌طور غیر محلی به هم مرتبط شده‌اند. در یک خوش‌کوانتومی، همه اجزای سیستم با یکدیگر درهم‌تینیده هستند و برای انجام هر گونه محاسبه، اندازه‌گیری‌هایی روی این حالت‌ها انجام می‌شود. محاسبات کوانتومی حالت خوش‌های بر پایه اجرای عملیات کوانتومی از طریق اندازه‌گیری‌های محلی روی یک حالت درهم‌تینیده چندکیوبیت، معروف به حالت گراف، بنا شده است. حالت‌های گراف می‌توانند توسط یک گراف  $G = (V, E)$  توصیف شوند، که در آن  $V$  مجموعه‌ای از رأس‌ها و  $E$  مجموعه‌ای از یال‌ها است. رأس‌ها نشان‌دهنده کیوبیت‌ها هستند و یال‌ها ارتباط بین آن‌ها را نشان می‌دهند. هر رأس گراف ابتدا به حالت  $|+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  مقداردهی می‌شود سپس یک گیت CSIGN برای هر یال اعمال می‌شود.

چارچوب تثیت کننده<sup>۲۹</sup> : در گراف‌های گسسته، تثیت کننده‌ها عملگرهایی هستند که یک حالت کوانتومی را ثابت نگه می‌دارند. این مجموعه یک گروه آبلی تشکیل می‌دهند.

$$K |\phi\rangle = |\phi\rangle$$

که  $K$  یک عملگر پایدارکننده و  $\langle \phi |$  حالت گراف کویت‌ها است. این عملگرها معمولاً از ترکیب عملگرهای پاولی مانند  $X$  و  $Z$  ساخته می‌شوند. برای یک گراف با  $n$  رأس، مجموعه  $\{K_1, K_2, \dots, K_n\}$  یک گروه آبلی تشکیل می‌دهند که به عنوان گروه تثیت کننده شناخته می‌شود. در نسخه متغیر پیوسته، حالت‌های خوش‌های مشابه با متغیرهای گسسته تعریف می‌شوند، اما از حالت‌های پیوسته مانند  $|0\rangle_p$  و عملیات CZ برای ایجاد درهم‌تینیدگی استفاده می‌شود. اندازه‌گیری‌ها در پایه‌های  $p$  و  $q$  انجام می‌شوند که معادل اندازه‌گیری‌های  $X$  و  $Z$  در مدل متغیر گسسته هستند. هر رأس گراف نشان‌دهنده یک کیومد است و هر یال گراف نشان‌دهنده یک تعامل درهم‌تینیده بین دو مود است که توسط عملگر

<sup>۲۹</sup> Stabilizer formalism

CZ اجرا می‌شود. مشابه حالت‌های گراف کیوبیت، فرمالیسم ثبیت کننده برای سیستم‌های CV می‌تواند برای مشخص کردن هر حالت گراف CV به طور کامل استفاده شود. برای حالت‌های گراف CV ثبیت کننده‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$K_i = X_i(s) \prod_{j \in N(i)} Z_j(s) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

که  $(i)$   $N$  مجموعه همسایه‌های رأس  $i$  است، همچنین  $(s)$   $X_i$  و  $Z_j(s)$  عملگرهای جابه‌جایی در فضای مکان و تکانه هستند. برای توصیف بهتر، مفهوم باطل کننده به عنوان یک مجموعه خطی از عملگرهای هرمیتی معرفی می‌شود که حالت گراف را توصیف می‌کنند. فضای باطل کننده یک حالت گراف متغیر پیوسته  $\langle \phi |$  با  $n$  مود، یک فضای برداری  $n$ -بعدی است که از مجموعه‌ای از عملگرهای هرمیتی  $H_i$  ساخته می‌شود

$$H_i = p_i \sum_{j \in N(i)} q_j \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

که در آن  $q_j$  عملگر مکان برای مود  $j$  و  $p_i$  عملگر تکانه برای مود  $i$  است. هر ترکیب خطی از باطل کننده‌های  $H_i$  یعنی  $H = \sum_i c_i H_i$  نیز یک باطل کننده معتبر است که شرط  $0 = \langle \phi | H = \sum_i c_i \langle \phi | H_i$  تحلیل ویژگی‌های گراف CV هستند. به عنوان مثال اتصال یا حذف یال‌ها و رأس‌ها مستقیماً در باطل کننده‌ها بازتاب پیدا می‌کند. هر گراف CV به طور کامل با مجموعه باطل کننده‌هایش تعریف می‌شود. در فصل اول گفته شد که تابع ویگنر ابزاری است که یک حالت کوانتومی را در فضای فاز  $(q, p)$  توصیف می‌کند. برای یک گراف CV ایده‌آل با  $n$  مود، تابع ویگنر به صورت زیر تعریف می‌شود

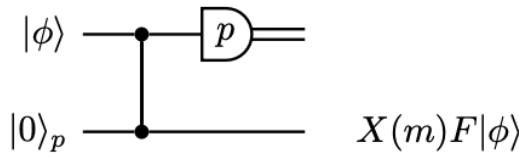
$$W(q, p) = \prod_{i=1}^n \epsilon(q_i) \delta(H_i)$$

که  $\epsilon(q_i)$  توزیع یکنواخت در فضای مکان است و  $\delta(H_i)$  وزیع دلتا که شرایط باطل کننده‌ها را اعمال می‌کند. برای گراف‌های CV ایده‌آل، تابع ویگنر بسیار تکین است و در گراف‌های غیرایده‌آل (مثلاً با فشرده‌سازی محدود)، تابع ویگنر با جایگزینی  $(H_i)$   $\delta$  توسط یک توزیع گاوی به روزرسانی می‌شود. اندازه‌گیری‌های موضعی  $(q)$  یا  $(p)$  ابزار اصلی برای تغییر گراف‌های CV و پیاده‌سازی عملیات کوانتومی هستند. با اندازه‌گیری  $q_i$  روی مود  $i$  رأس  $i$  و تمام یال‌های متصل به آن حذف می‌شوند. اندازه‌گیری تکانه امکان کوتاه کردن گراف‌ها را فراهم می‌کند همچنین به طور خاص، برای گراف‌های خطی، اندازه‌گیری  $p$  در رأس میانی باعث حذف آن رأس و اتصال مستقیم دو رأس همسایه می‌شود. در حالت‌های گراف تعیین‌یافته، به جای استفاده از حالت‌های  $\langle 0 |$ ، می‌توان از حالت‌های عمومی‌تر  $\langle \phi_i |$  استفاده کرد. تابع ویگنر برای این

$$W(q, p) = \prod_{i=1}^n W_i(q_i, p_i)$$

که  $W_i(q_i, p_i)$  تابع ویگنر حالت  $(\phi_i)$  است. اکنون که حالات‌های خوش‌های یا حالات‌های گراف معرفی شد در ادامه به توضیح نحوه محاسبات کوانتومی با استفاده از این حالات‌ها پرداخته می‌شود اما قبل از شروع بحث اصلی، اندازه‌گیری تطبیقی معرفی می‌شود. اندازه‌گیری‌های تطبیقی یکی از اجزای کلیدی محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری (MBQC) هستند. در این روش، انتخاب پایه اندازه‌گیری برای هر گره از گراف به نتایج اندازه‌گیری‌های قبلی بستگی دارد. این فرآیند برای تضمین اجرای صحیح عملیات یکانی ضروری است. در محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری، نتایج اندازه‌گیری‌ها حالت‌های سیستم باقی‌مانده را تعیین می‌کنند، برای جبران اثر نتایج تصادفی اندازه‌گیری‌ها، باید پایه اندازه‌گیری گره‌های بعدی تطبیق داده شود. پس از اندازه‌گیری یک گره، حالت کیومود باقی‌مانده دچار تغییراتی می‌شود (مانند جابه‌جایی یا چرخش)، این تغییرات باید با انتخاب مناسب پایه اندازه‌گیری‌های بعدی جبران شوند. فرض کنید می‌خواهیم یک عملیات گوسی ساده، مثل چرخش حالت ( $R(\theta)$ ) را اجرا کنیم: ابتدا گره‌ای در گراف اندازه‌گیری می‌شود و نتیجه آن، مثلاً  $m$  ثبت می‌شود؛ این نتیجه بر چرخش حالت خروجی تأثیر می‌گذارد اما برای اینکه خروجی درست باشد، پایه اندازه‌گیری گره بعدی باید به گونه‌ای تغییر کند که این اثر جبران شود. در سیستم‌های نوری اندازه‌گیری تطبیقی معمولاً با استفاده از آشکارسازهای هموداین انجام می‌شود سپس نتایج اندازه‌گیری به سیستم کنترل داده می‌شود و این سیستم تنظیمات آشکارسازها (مانند زاویه چرخش پایه) را برای اندازه‌گیری بعدی اصلاح می‌کند. اندازه‌گیری‌های تطبیقی تضمین می‌کنند که حتی در حضور نویزهای اندازه‌گیری و اثرات غیرقطعی حالت‌های کوانتومی، محاسبات صحیح و دقیق باقی می‌مانند. بدون این فرآیند، بسیاری از گیت‌های ضروری (خصوصاً غیرگوسی) قابل پیاده‌سازی نیستند. برای انجام محاسبات کوانتومی با استفاده از گراف‌ها در قدم اول حالت‌های ورودی را آماده می‌کنیم. کیومودهایی که به گره‌های ورودی  $V_{in}$  اختصاص داده شده‌اند، حالت اولیه یا حالت ورودی  $(|\phi\rangle)$  را رمزگذاری می‌کنند. این حالت ممکن است یک حالت چلاندۀ شده، یک حالت همدوس یا هر حالت کوانتومی دیگر باشد. سایر گره‌ها (غیر ورودی‌ها) با یک حالت صفر در پایه تکانه  $|0\rangle_p$  مقداردهی اولیه می‌شوند. این حالت صفر معمولاً حالت خلاً است که در فضای فشرده‌شده جایگزین شده است. قدم دوم اعمال گیت CZ است. اثر این گیت ایجاد درهم‌تنیدگی بین دو کیومود است و حالت خروجی دو کیومود وابستگی متقابل بین مقادیر  $p$  و  $q$  پیدا می‌کند. گیت‌های CZ برای تمام یال‌های  $E$  موجود در گراف  $(V, E) = G$  اعمال می‌شوند، همچنین ترتیب اعمال این گیت‌ها اهمیتی ندارد، زیرا گیت‌های CZ جابجاپذیر هستند. هدف این است که یک حالت گراف پیوسته تولید شود. این حالت پایه و منبع محاسبات کوانتومی مبتنی بر اندازه‌گیری است. قدم سوم انتخاب اندازه‌گیری است.

اگر اندازه‌گیری در پایه  $p$  انجام شود، عملگر اندازه‌گیری به شکل  $(q) + f$  است و اگر اندازه‌گیری در پایه  $q$  انجام شود، عملگر به صورت  $(p) + f$  تعریف می‌شود که  $(q) f$  یا  $(p) f$  معمولاً چندجمله‌ای‌هایی از متغیرهای  $q$  و  $p$  هستند که به عملیات مورد نظر وابسته‌اند. گره‌هایی که اندازه‌گیری می‌شوند، از گراف حذف می‌شوند و اندازه‌گیری‌ها عملیات مورد نظر را بر روی کیومودهای باقی‌مانده اعمال می‌کنند. انتخاب پایه اندازه‌گیری به نتایج اندازه‌گیری‌های قبلی وابسته است همچنین سیستم کنترل این اطلاعات را پردازش کرده و پایه اندازه‌گیری بعدی را تنظیم می‌کند. آخرین قدم در این راستا رمزگذاری حالت خروجی است. پس از اعمال اندازه‌گیری‌ها گره‌های باقی‌مانده در مجموعه  $V_{out}$  حاوی حالت خروجی هستند. حالت انتهایی معادل با این است که عملگر یکانی همچون  $U$  بر روی حالت ورودی اعمال شده باشد  $\langle \phi | U$ . اگر با استفاده از مجموعه اندازه‌گیری‌هایی که انجام داده می‌شود بتوان مجموعه از گیت‌های جهان‌شمول را تولید کرد آنگاه می‌توان گفت که با استفاده از مدل محاسباتی مبتنی بر اندازه‌گیری، می‌توان محاسبات کوانتمی جهان‌شمول انجام داد. پیاده‌سازی گیت‌های تک مدل گاؤسی و همچنین گیت CZ بسیار سرراست است. برای پیاده‌سازی گیت‌های تک مدل گاؤسی از یک گراف دو گره‌ای استفاده می‌شود. با انتخاب حالت ورودی، اعمال گیت CZ و همچنین اندازه‌گیری، گراف دو گره‌ای ماشیبه به شکل ۵.۴ در می‌آید.



شکل ۵.۴: گراف دو گره‌ای که بر آن گیت CZ و همچنین اندازه‌گیری اعمال شده است.

این دقیقاً همان مدار نیمه‌فرابرد است که در بخش قبلی اثبات شد که به وسیله‌ی این مدار می‌توان به راحتی گیت‌های تک مدل گاؤسی را تولید کرد. حال برای نشان دادن جهان‌شمول بودن محاسبات کافی است تا گیت‌های غیرگاؤسی و CZ تولید شود. برای پیاده‌سازی گیت CZ کافی است دو گره را به عنوان ورودی و خروجی در گراف تعریف کنیم، گراف دو گره‌ای با یال بین آن‌ها به صورت پیش‌فرض یک گیت CZ را اجرا می‌کند. پس هیچ اندازه‌گیری خاصی نیاز نیست بنابراین پیاده‌سازی گیت CZ در این مدل کاملاً ساده و مستقیم است و نیازی به اقدامات اضافی ندارد. برای جهان‌شمول بودن به حداقل یک گیت غیرگاؤسی نیاز داریم، گیت فاز مکعبی می‌تواند تمام عملیات غیرگاؤسی تک مدل را ممکن کند. این گیت اجازه می‌دهد ویژگی‌های غیرخطی در فضای فاز اعمال شوند. این گیت نمی‌تواند صرفاً با اندازه‌گیری‌های ساده  $q$  یا  $p$  اجرا شود. بلکه به پایه اندازه‌گیری پیچیده‌تری نیاز دارد. برای پیاده‌سازی گیت فاز مکعبی، از یک گراف سه گره‌ای استفاده می‌کنیم. یک گره برای ورودی، یک گره میانی و یک گره خروجی که حالت نهایی را نگه می‌دارد. اگر به خاطر

داشته باشد در بخش قبلی که محاسبه بر اساس مدار نیمه‌فرابرد توضیح داده شد، گفته شد که در مدار نیمه‌فرابرد محدود به اندازه‌گیری‌های گاووسی هستیم اما در ابتدای بخش، جایی که پیاده‌سازی گراف‌ها توضیح داده شد، اشاره شد که در قسمت اندازه‌گیری مجاز به استفاده از اندازه‌گیری‌هایی هستیم که معمولاً چندجمله‌ای‌هایی از متغیرهای  $q$  و  $p$  هستند که به عملیات مورد نظر وابسته‌اند. بنابراین برخلاف مدار نیمه‌فرابرد این دفعه می‌توان اندازه‌گیری  $\hat{x}^2 + \hat{p}^2$  را اجرا کرد. این اندازه‌گیری باعث می‌شود که در حالت خروجی اثر گیت فاز مکعبی دیده شود. بنابراین این مدل محاسبات جهان‌شمول است، زیرا می‌تواند هر عملیات یکانی دلخواه را با استفاده از اندازه‌گیری‌های محلی و تطبیقی پیاده‌سازی کند.

#### ۴.۴.۴ مدل محاسبات کوانتمومی ترکیبی

محاسبات کوانتمومی ترکیبی، سیستم‌های متغیر گسته (DV) (کیوبیت) را با سیستم‌های متغیر پیوسته (CV) ترکیب می‌کند تا از نقاط قوت هر دو پارادایم استفاده کند. این ادغام به محققان اجازه می‌دهد تا سیستم‌های کوانتمومی قدرتمند و همه کاره ایجاد کنند. مدل‌های هیبریدی با هدف ترکیب این دو رویکرد، ساختاری انعطاف‌پذیر و قدرتمند ایجاد می‌کنند که می‌تواند محدودیت‌های هر کدام از این سیستم‌ها را کاهش دهد. در این مدل اطلاعات می‌توانند به طور هم‌زمان در سیستم‌های CV و DV کدگذاری شوند. برای مثال: سیستم‌های CV ممکن است اطلاعات پیوسته (مثل فاز یک میدان نوری) را حمل کنند، در حالی که سیستم‌های DV می‌توانند نشان‌دهنده کیوبیت‌های منطقی باشند (مثل حضور یا عدم حضور فoton). مثال: حالت (GKP) گوتسمن-کیتايف-پرسکیل یک کیوبیت منطقی را در یک سیستم CV کدگذاری می‌کند. مدل‌های هیبریدی محاسبات کوانتمومی نقشی کلیدی در آینده فناوری کوانتمومی ایفا خواهند کرد. این مدل‌ها با ترکیب کارایی و مقیاس‌پذیری سیستم‌های CV و دقت و قابلیت اطمینان سیستم‌های DV به پیشرفت این فناوری کمک می‌کنند.

## پیوست

موضوع غالب برای تلاش های نرم افزاری کوانتمی، هدف قرار دادن دستگاه های کوانتمی مبتنی بر کیوبیت است. یکی از رویکردهای برجسته، مدل متغیر پیوسته (CV) محاسبات کوانتمی است. در مدل CV واحد پردازش اطلاعات پایه یک حالت بوزونیک بی بعدی است که آن را به ویژه برای اجرای کاربردهای مبتنی بر نور مناسب می کند. مدل CV قدرت محاسباتی مدل کیوبیت را حفظ می کند، در حالی که تعدادی ویژگی منحصر به فرد را ارائه می دهد. به عنوان مثال، مدل CV برای شبیه سازی سیستم های بوزونیک (میدان های الکترو مغناطیسی، اتم های به دام افتاده، نوسان گرهای هارمونیک، چگالش های بوز-انیشتین، فونون ها یا تشیدیگرهای نوری مکانیکی) و برای تنظیماتی که در آن عملگرهای کوانتمی پیوسته - مانند مکان و تکانه - مناسب هستند، قابل ارائه است. حتی در محاسبات کلاسیک، پیشرفت های اخیر از یادگیری عمیق، قدرت و انعطاف پذیری نمایش مستمر محاسبات را در مقایسه با مدل محاسباتی گستته که از لحاظ تاریخی غالب بوده، نشان داده اند.

نام یک معماری نرم افزار منبع باز در زمینه محاسبات کوانتمی فوتونیک است که توسط شرکت Strawberry Fields در شهر تورنتو، کانادا در سال ۲۰۱۹ توسعه یافت. این پلتفرم، که تحت لیسانس آپاچی نسخه ۰.۲ منتشر شده، به عنوان یک بستر نرم افزاری کوانتمی عمل می کند و به زبان برنامه نویسی پایتون پیاده سازی شده است. مرکز بر مدل محاسباتی CV ویژگی برجسته آن یک زبان برنامه نویسی کوانتمی نوآورانه به نام Blackbird می باشد. برای ایجاد زمینه سخت افزار محاسباتی کوانتمی فوتونیک آینده، Strawberry Fields همچنین شامل مجموعه ای از سه بک-اند Strawberry Fields TensorFlow و NumPy است که با استفاده از TensorFlow پیاده سازی شده اند. شبیه ساز کوانتمی CV دارای یک موتور داخلی برای تبدیل برنامه های بلک برد برای اجرا در هر یک از شبیه سازهای بک-اند یا در صورت موجود بودن، بر روی کامپیوترهای کوانتمی فوتونیک است. برای همراهی با کتابخانه، یک سرویس آنلاین برای کاوش تعاملی و شبیه سازی مدارهای CV موجود است و اولین چارچوب نرم افزار کوانتمی است که از محاسبات کوانتمی فوتونیکی با متغیرهای پیوسته پشتیبانی می کند. این پلتفرم از سه جزء اصلی تشکیل شده است:

- یک API برای برنامه نویسی کوانتمی بر اساس یک زبان ساده به نام بلک برد.

● مجموعه ای از سه کامپیوتر کوانتومی مجازی بک-اند ، ساخته شده در TensorFlow و NumPy که هر کدام کاربردهای تخصصی را هدف قرار می دهند.

● موتوری که می تواند برنامه های نوشته شده به بلکبرد را در بک-اند های مختلف (از جمله سه شبیه ساز تعییه شده ، و در آینده نزدیک پردازنده های اطلاعات کوانتومی فوتونیک) کامپایل کند.

این کتابخانه همچنین شامل نمونه هایی از چندین الگوریتم ، از جمله فرابرد ، نمونه برداری بوزونی (گاووسی) ، چند جمله ای کوانتومی لحظه ای<sup>۳۰</sup> ، شبیه سازی هامیلتونی و بهینه سازی مدار کوانتومی متغیر است. در معماری strawberry fields دو شبیه ساز عددی ارائه شده است. یک بکاند گاووسی و یک بکاند مبتنی بر Fock. این دو فرمول به دلیل استفاده از فضای بی نهایت هیلبرت برای مدل CV محاسبات کوانتومی منحصر به فرد هستند و چالش های فنی خاص خود را دارند.

● بکاند گاووسی روش ها و توابع پیشرفت های را برای محاسبه وفاداری و احتمالات حالت فوک ، که شامل محاسبات هافنیان<sup>۳۱</sup> کلاسیک غیرقابل حل است ، ارائه می کند.

● بکاند فوک اجازه می دهد تا عملیاتی مانند فشرده سازی و تقسیم پرتوها در پایه فوک انجام شود. مجموعه ای از تجزیه مدارهای مهم را که در محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته ظاهر می شوند - مانند تجزیه Clements و Bloch-Messiah ، Williamson یادگیری ماشینی TensorFlow نوشته شده است ، امکان محاسبات نمادین ، تمایز خودکار و پس انتشار را از طریق شبیه سازی های کوانتومی CV فراهم می کند.

تمامی موارد مورد نیاز در محاسبات کوانتومی متغیر پیوسته شامل تعریف کیومد ، گیت ها و اندازه گیری در این کتابخانه قرار داده شده است . برای دسترسی به فایل نوت بوک آموزش این کتابخانه می توانید به لینک زیر مراجعه کنید.  
<https://github.com/AriaQuanta/Introduction-to-Continuous-Variable-Quantum-Computing>

---

<sup>۳۰</sup> Instantaneous quantum polynomial

<sup>۳۱</sup> Hafnian

## كتاب نامه

- [1] Nielsen, M.A. and I.L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*.  
2010: Cambridge university press.
- [2] Shor, P.W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring.  
in *Proceedings 35th annual symposium on foundations of computer science*. 1994. Ieee.
- [3] Grover, L.K. A fast quantum mechanical algorithm for database search. in *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing*. 1996.
- [4] Monroe, C. and J. Kim, Scaling the ion trap quantum processor. *Science*, 2013.  
339(6124): p. 1164–1169.
- [5] Braunstein, S.L. and P. Van Loock, Quantum information with continuous variables.  
*Reviews of modern physics*, 2005. 77(2): p. 513–577.
- [6] Weedbrook, C., et al., Gaussian quantum information. *Reviews of Modern Physics*,  
2012. 84(2): p. 621–669.
- [7] Mari, A. and J. Eisert, Positive Wigner functions render classical simulation of quantum computation efficient. *Physical review letters*, 2012. 109(23): p. 230503.
- [8] Menicucci, N.C., S.T. Flammia, and O. Pfister, One-way quantum computing in the optical frequency comb. *Physical review letters*, 2008. 101(13): p. 130501.
- [9] Gottesman, D., A. Kitaev, and J. Preskill, Encoding a qubit in an oscillator. *Physical Review A*, 2001. 64(1): p. 012310.

- [10] Cerf, N.J., G. Leuchs, and E.S. Polzik, *Quantum information with continuous variables of atoms and light*. 2007: World Scientific.
- [11] Bachor, H.-A. and T.C. Ralph, *A guide to experiments in quantum optics*. 2019: John Wiley & Sons.
- [12] Walls, D. and G.J. Milburn, Quantum Optics and Quantum Foundations, in *Quantum Optics*. 2025, Springer. p. 225–244.