

# Computació Numèrica

## Interpolació polinòmica

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtica Aplicada II  
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

20 de març de 2023

“Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives”



© 2022 by M. Àngela Grau Gotés.

Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional.

## 1 Sessió 6

- Matriu de Vandermonde
- Pràctica 18: Interpolació Inversa
- Pràctica 19: Fenòmen de Runge
- Pràctica 20: Corba amb millor ajust.
- Exercicis

## 2 Referències

El manual de referència és

<http://www.mathworks.es/es/help/matlab/>

# MATLAB®

# Polinomis i MATLAB®

Els polinomis en `matlab` es representen com vectors fila que contenen els coeficients ordenats per ordre decreixent dels graus. Destaquem les funcions polinomials següents:

<code>poly</code>	polinomi característic ,
<code>polyval</code>	avalua el polinomi ,
<code>roots</code>	arrels del polinomi ,
<code>conv</code>	producte de dos polinomis ,
<code>deconv</code>	divisió de dos polinomis ,
<code>residue</code>	descomposició en fraccions contínues .
<code>polyinterp</code>	polinomi interpolador de lagrange (Moler) ,
<code>polyfit</code>	ajust per polinomis .

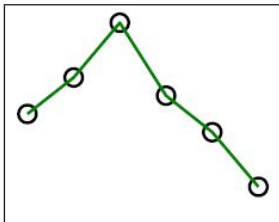
# Interpolació polinòmica a trossos

Destaquem les funcions següents:

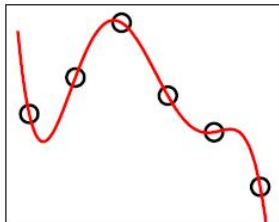
spline	spline cubic ,
pchip	polinomi cubic ,
ppval	avalua polinomis a trossos ,
interp1	interpolació lineal en una variable ,
interp2	interpolació lineal 2D ,
interp3	interpolació lineal 3D .

# Exemple - C. Moler

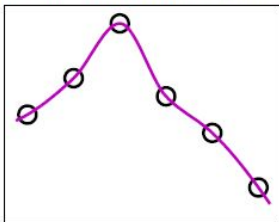
Piecewise linear interpolation



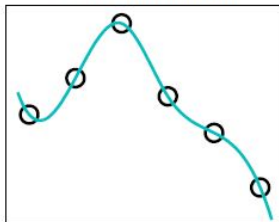
Full degree polynomial interpolation



Shape-preserving Hermite interpolation



Spline interpolation



# Interpolació polinòmica



# Matriu de Vandermonde

Consulteu el help de Matlab per a la comanda  
`vander(xp)` ;

Cerqueu les explicacions del capítol 3 del llibre de C.  
Moler

$V = \text{vander}(xp)$  ;

# Polinomis de Lagrange

Cerqueu la rutina del capítol 3 del llibre de C. Moler

`polyinterp(xp,yp,x0);`

## Exemple - C. Moler

```
x = 1:6;  
y = [16 18 21 17 15 12];  
disp([x; y])  
u = .75:.05:6.25;  
v = polyinterp(x,y,u);  
plot(x,y,'o',u,v,'r-');
```

# Pràctica

## Interpolació INVERSA

Trobeu una solució de l'equació  $x = e^{-x}$ , sabent que:

$$e^{-0.50} = 0.60653,$$

$$e^{-0.55} = 0.57695,$$

$$e^{-0.60} = 0.54881 .$$

# Pràctica

## Fenòmen de Runge

Construiu una taula  $[x, f(x)]$  per a la funció

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

en  $x = -0.9 \div 0.9 (0.2)$ . Calculeu els polinomis interpoladors de grau 3, 6 i 9 per la taula construïda. Representeu gràficament  $f(x)$  i els polinomis obtinguts. Avalueu l'error que es comet en  $x = -1 \div 1, (0.2)$ . Què s'observa? .

Cerqueu la rutina del capítol 3 del llibre de C. Moler `rungeinterp()`

# Pràctica

## Corba amb millor ajust

X	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
Y	0.40	0.50	0.90	1.28	1.60	1.66	2.02

Empreu una tècnica de mínims quadrats per ajustar les dades a funcions del tipus:

- 1  $y = a_0 + a_1x$ . Determineu  $a_0$  i  $a_1$ , doneu l'equació de la funció obtinguda i calculeu el vector residu en la solució.
- 2  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ . Determineu  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  i  $a_4$ , doneu l'equació de la funció obtinguda i calculeu el vector residu en la solució.
- 3  $y = ax^\alpha$ . Determineu  $a$  i  $\alpha$ , doneu l'equació de la funció obtinguda i calculeu el vector residu en la solució.
- 4 Quin dels tipus sembla el més adient. Per què?
- 5 Representeu les dades i les funcions obtingudes en un mateix gràfic.

# Exercicis

# Exercici 1

Calculeu  $f(3)$  per interpolació quadràtica de la taula 6.1 utilitzant els punts 1, 2 i 4 en un primer càlcul i, després, els punts 2, 4, i 5, i compareu-ne els resultats.

$x_i$	1	2	4	5
$y_i$	0	2	12	21

Taula: dades 6.1

Finalment, calculeu  $f(3)$  per interpolació cúbica i comenteu els resultats obtinguts.

# Exercici 2

Trobeu el polinomi d'interpolació a la taula 6.2 emprant el mètode de les diferències dividides de Newton.

$x_i$	0	1	2	4	8
$y_i$	0	5	10	24	50

Taula: dades 6.2



# Exercici 3

Feu un esquema de diferències dividides, per calcular el polinomi de grau 4 que satisfà la taula següent

$x_i$	-4	-1	0	2	5
$y_i$	1245	33	5	9	1335

Taula: dades 6.3

# Exercici 4

Obteniu el polinomi interpolador de la taula de dades, després de fer un canvi d'escala

$x_i$	0	.1	.4	.5	.6	1.0	1.4	1.5	1.6	1.9	2.0
$y_i$	0	.06	.17	.19	.21	.26	.29	.29	.30	.31	.31

Taula: dades 6.4

# Exercici 5

$x_i$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y_i$	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0

Taula: dades 6.5

- 1 Obteniu el polinomi interpolador de la taula de dades anterior.
- 2 Obteniu l'spline cúbic natural.
- 3 Obteniu l'spline cúbic “shape-preserving” .
- 4 Comenteu les diferències entre les corbes que s'obtenen.

# Exercici 6

## Ajust per paràbola

Determineu una funció quadràtica que satisfaci al màxim (error quadràtic mínim) la taula següent:

X	8	10	12	16	20	40
Y	0.88	1.22	1.64	2.72	3.96	11.96

- 1 Expliqueu el mètode de resolució que feu servir.
- 2 Representeu les dades i la funció quadràtica obtinguda en un mateix gràfic.

# Exercici 7

L'any 2009 (a Berlín) Usain Bolt va situar el record dels 100m en 9.58s. Les dades de la carrera són les següents





$r$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$t(r)$	0	1.85	2.89	3.78	4.64	5.49	6.31	7.11	7.92	8.74	9.58

on la primera fila és la distància recorreguda en metres i la segona el temps emprat en segons

(font: NBC, <http://www.universalsports.com/news/article/newsid=385633.html>).

Representeu gràficament la taula de dades, cada node per un \*. Mitjançant el menú Tools de la finestra gràfica accediu a l'opció basic fitting i trobeu una corba ajusti a  $r(t)$ .

# Guies de MATLAB

-  MathWorks Documentation Center, Matlab Users's Guide online
-  MathWorks Documentation Center, Matlab Functions's Guide online
-  MathWorks Documentation Center, Matlab Users's Guide in pdf
-  MathWorks Documentation Center, Tutorials