

5 Per practicar

5.1 Exercicis

- 1 Trobeu el polinomi d'interpolació emprant el mètode de Lagrange per les dades:

x	0	1	2	4	8
y	1	5	10	24	50

- 2 Trobeu el polinomi d'interpolació per les dades:

x	1	2	4	5
$f(x)$	0	6	12	24

emprant el mètode de les diferències dividides de Newton.

- 3 Trobeu el polinomi d'interpolació per la taula:

x	-1	2
$f(x)$	-11	14
$f'(x)$	14	5

emprant el mètode de les diferències dividides de Newton.

- 4 Calculeu $f(3)$ per interpolació quadràtica de la taula 2.1 utilitzant els punts 1, 2 i 4 en un primer càlcul i, després, els punts 2, 4, i 5, i compareu-ne els resultats. Calculeu $f(3)$ per interpolació cúbica.

Taula 2.1				
x_k	1	2	4	5
y_k	0	2	12	21

- 5** Trobeu el polinomi d'interpolació a la taula 2.2 emprant el mètode de les diferències dividides de Newton.

Taula 2.2					
x_k	0	1	2	4	8
y_k	1	5	10	24	50

- 6** Feu un esquema de diferències dividides, per calcular el polinomi de grau 4 que satisfà la taula (2.3)

Taula 2.3					
x_k	-4	-1	0	2	5
y_k	1245	33	5	9	1335

- 7** Comproveu que la funció següent

$$S(x) = \begin{cases} 1 + x - x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3, & 1 \leq x < 2, \\ 4(x-2) + 9(x-2)^2 - 3(x-2)^3, & 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

és l'spline cúbic natural que interpola en els punts $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, i $(3, 10)$.

5.2 Pràctiques i problemes

Interpolació polinomial

1 Donada la taula de la funció $f(x) = e^x$ (taula 2.4)

a) Trobeu valors aproximats de $\sqrt[3]{e}$ per interpolació lineal i cúbica, emprant els mètodes de Lagrange i de Newton.

b) Doneu fites respectives dels errors deguts a la interpolació. Compareu les fites amb l'error exacte, sabent que $\sqrt[3]{e} = 1.395612425 \dots$

Taula 2.4				
x_k	0.0	0.2	0.4	0.6
f_k	1.0000	1.2214	1.4918	1.8221

2 Interpolació inversa.

Trobeu una solució de l'equació $x - e^{-x} = 0$, sabent que

$$e^{-0.50} = 0.60653, \quad e^{-0.55} = 0.57695, \quad \text{i} \quad e^{-0.60} = 0.54881.$$

3 Fenòmen de Runge.

Construiu una taula per a la funció

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

en $x = -0.9 \div 0.9 (0.2)$. Calculeu els polinomis interpoladors de grau 3, 6 i 9 per la taula construïda. Representeu gràficament $f(x)$ i els polinomis obtinguts. Avalueu l'error que es comet en $x = -1 \div 1, (0.2)$. Què s'observa? .

Ajust de corbes - Mètode dels mínims quadrats.

4 Trobeu un polinomi de grau 2 que approximi la funció 2^x en els punts $x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Representeu gràficament el polinomi obtingut, els punts i la corba 2^x .

5 Empreu una tècnica de mínims quadrats per ajustar la taula de dades:

X	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
Y	0.40	0.50	0.90	1.28	1.60	1.66	2.02

a funcions del tipus:

1. $y = a_0 + a_1x$. Determineu a_0 i a_1 , doneu l'equació de la funció obtinguda i calculeu el vector residu en la solució.
2. $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$. Determineu a_0 , a_1 , a_2 , a_3 i a_4 , doneu l'equació de la funció obtinguda i calculeu el vector residu en la solució.
3. $y = ax^\alpha$. Determineu a i α , doneu l'equació de la funció obtinguda i calculeu el vector residu en la solució.
4. Quin dels tipus sembla el més adient. Per què?

D'examen.

6 Les dades de la taula següent estan relacionats amb l'esperança de vida al nèixer dels ciutadants de dos països

<i>any</i>	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
<i>Grecia</i>	72.3	73.6	75.1	77.0	77.6	77.9	79.2	80.4
<i>Espanya</i>	73.3	75.3	76.2	76.8	78.0	79.0	80.2	81.6

Es demana:

- (a) Useu el polinomi interpolador de grau 7 per estimar l'esperança de vida els anys 1970, 1992, 2007 per cada país. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials per cada país, que són:

<i>any</i>	1970	1992	2007	2015
<i>Grècia</i>	70.9	77.4	79.4	81.6
<i>Espanya</i>	72.0	77.4	80.9	83.4

- (b) Feu una gràfica on apareguin les dades (representats per una rodona) i les totes solucions trobades per país.

Comentari: Numèricament és millor que considereu la taula inicial amb abscisses $0, 1, \dots, 7$, o que centreu les dades. Altrement els resultats no són correctes!!