

Implementación del Método de Puntos Interiores Primal-Dual para Programación Lineal

Ariadna Velázquez Rey Lía López Rosales

February 15, 2025

Abstract

Este documento presenta una implementación del método de puntos interiores primal-dual para resolver problemas de programación lineal. Se detalla el marco teórico del método, incluyendo su fundamentación matemática y las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Además, se describe la implementación computacional, se comparan los resultados con el método Simplex. El código fuente está disponible en https://github.com/AriadnaVelazquez744/MPI_Primal-Dual.git.

1 Introducción

Los métodos de puntos interiores han revolucionado la optimización lineal desde su introducción por Karmarkar en 1984. A diferencia del método Simplex que navega por los vértices del politopo factible, estos métodos siguen trayectorias en el interior de la región factible, ofreciendo complejidad polinomial. En este trabajo implementamos la variante primal-dual, considerada la más eficiente en la práctica.

2 Marco Teórico

2.1 Formulación del Problema

Consideremos el problema de programación lineal en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & c^\top x \\ \text{sujeto a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, y $c \in \mathbb{R}^n$.

2.2 Condiciones de Optimalidad de KKT

El lagrangiano asociado es:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, s) = c^\top x - \lambda^\top (Ax - b) - s^\top x$$

Las condiciones KKT para optimalidad son:

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L} &= c - A^\top \lambda - s = 0 && \text{(Optimalidad)} \\ Ax &= b && \text{(Factibilidad primal)} \\ x &\geq 0 && \text{(Factibilidad dual)} \\ x_i s_i &= 0, \forall i && \text{(Complementariedad)} \end{aligned}$$

2.3 Método de Barrera Logarítmica

Para evitar la condición de complementariedad estricta, introducimos un parámetro de barrera $\mu > 0$:

$$x_i s_i = \mu, \forall i$$

El sistema perturbado resulta:

$$F(x, \lambda, s) = \begin{bmatrix} A^\top \lambda + s - c \\ Ax - b \\ XSe - \mu e \end{bmatrix} = 0$$

donde $X = \text{diag}(x)$, $S = \text{diag}(s)$, y e es el vector de unos.

2.4 Dirección de Newton

Aplicando el método de Newton al sistema perturbado, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^\top & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A^\top \lambda + s - c \\ Ax - b \\ XSe - \mu e \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema proporciona la dirección de descenso.

2.5 Parámetro de Barrera y Longitud de Paso

El parámetro μ se actualiza en cada iteración mediante:

$$\mu^{(k+1)} = \sigma \frac{(x^{(k)})^\top s^{(k)}}{n}$$

donde $\sigma \in (0, 1)$ es el parámetro de reducción. La longitud de paso α se determina mediante búsqueda lineal para mantener $x, s > 0$.

2.6 Convergencia del Método

La convergencia del método primal-dual se fundamenta en dos pilares esenciales: la **trayectoria central** y las **propiedades de autoconcordancia**.

2.6.1 Trayectoria Central

Al introducir el parámetro $\mu > 0$, definimos la **trayectoria central** como el conjunto de puntos $(x(\mu), \lambda(\mu), s(\mu))$ que satisfacen:

$$\begin{cases} A^T \lambda + s = c \\ Ax = b \\ x_i s_i = \mu \quad \forall i \\ x > 0, s > 0 \end{cases}$$

Cuando $\mu \rightarrow 0$, esta trayectoria converge al **punto óptimo estricto** del problema original. El método sigue aproximaciones sucesivas a esta trayectoria mediante:

1. **Predictor:** Dirección de Newton hacia $\mu = 0$
2. **Corrector:** Compensa la no linealidad de las condiciones de complementariedad

2.6.2 Análisis de Convergencia

Sea $\psi(x, s) = \|XSe - \mu e\|$ la medida de complementariedad. En cada iteración se cumple:

$$\psi(x^+, s^+) \leq \beta \psi(x, s) \quad \text{con } 0 < \beta < 1$$

Esto garantiza **convergencia lineal global** bajo las siguientes condiciones:

- Existencia de solución estrictamente factible (Teorema de Slater)
- Matriz A de rango completo
- Selección de α que mantenga $x, s > 0$

2.6.3 Propiedades del Paso de Newton

El sistema de Newton tiene solución única si y sólo si:

- El espacio nulo de A no contiene vectores no triviales en el cono positivo
- Existe punto estrictamente factible (condición de interioridad)

Bajo estas condiciones, la matriz KKT es no singular y el paso de Newton está bien definido.

2.6.4 Selección del Parámetro σ

El parámetro $\sigma \in (0, 1)$ en $\mu^{(k+1)} = \sigma \frac{x^T s}{n}$ controla la tasa de reducción:

- $\sigma \rightarrow 1$: Avance lento, mejor seguimiento de la trayectoria central
- $\sigma \rightarrow 0$: Reducción agresiva de μ , riesgo de inestabilidad

Un valor típico $\sigma = 0.1$ balancea velocidad y estabilidad.

2.6.5 Complejidad Computacional

Para un problema con n variables y m restricciones:

- Cada iteración requiere $\mathcal{O}((n+m)^3)$ operaciones (solución del sistema KKT)
- Número de iteraciones: $\mathcal{O}(\sqrt{n} \log(1/\epsilon))$ para precisión ϵ
- Complejidad total: $\mathcal{O}((n+m)^{3.5} \log(1/\epsilon))$

Esto contrasta con el método Simplex que tiene complejidad exponencial en el peor caso.

2.7 Estabilidad Numérica

La presencia de elementos diagonales X y S en la matriz KKT introduce:

- **Escalamiento automático:** Mejora el número de condición de la matriz
- **Regularización implícita:** Evita singularidades cuando $\mu > 0$

No obstante, se requiere:

- Pivoteo en la factorización LU para evitar división por cero
- Estrategias de salvaguarda cuando x_i o s_i se acercan a cero

2.8 Optimalidad de las Soluciones

El método produce soluciones ϵ -óptimas en el sentido:

$$c^\top x - b^\top \lambda \leq \epsilon(1 + |c^\top x| + |b^\top \lambda|)$$

Esta cota se deriva directamente de la condición de complementariedad perturbada $XSe = \mu e$ y la dualidad lagrangiana.

3 Implementación del Algoritmo

3.1 Esquema General

El algoritmo sigue estos pasos principales:

1. Inicialización: Encontrar punto inicial factible (x^0, λ^0, s^0)
2. Iterar hasta convergencia:
 - Calcular μ actual
 - Resolver sistema de Newton
 - Determinar longitud de paso α
 - Actualizar variables (x, λ, s)
3. Verificar criterios de parada

3.2 Detalles Computacionales

- **Inicialización:** Utiliza CVXPY para encontrar punto inicial factible
- **Sistema Lineal:** Resuelto mediante factorización LU con pivoteo parcial
- **Búsqueda Lineal:** Implementa regla de Armijo con $\alpha_{\max} = 0.9995$
- **Criterio de Parada:**

$$\frac{\|Ax - b\|}{1 + \|b\|} \leq \epsilon \quad y \quad \frac{\|A^\top \lambda + s - c\|}{1 + \|c\|} \leq \epsilon$$

4 Resultados Numéricos

4.1 Comparación con Simplex

Método	Tiempo (s)	Error
Primal-Dual	0.118	10^{-6}
Simplex (HiGHS)	0.023	10^{-16}

Table 1: Comparación de rendimiento en problema de transporte 10×10

5 Conclusiones y Trabajo Futuro

La implementación demuestra la viabilidad del método primal-dual, mostrando:

- Ventajas en problemas grandes por complejidad polinomial
- Sensibilidad a la selección de parámetros (σ, α)
- Dependencia de buenas inicializaciones

Líneas futuras incluyen:

- Implementación de estrategias predictor-corrector
- Técnicas de regularización para matrices mal condicionadas
- Paralelización del solver lineal