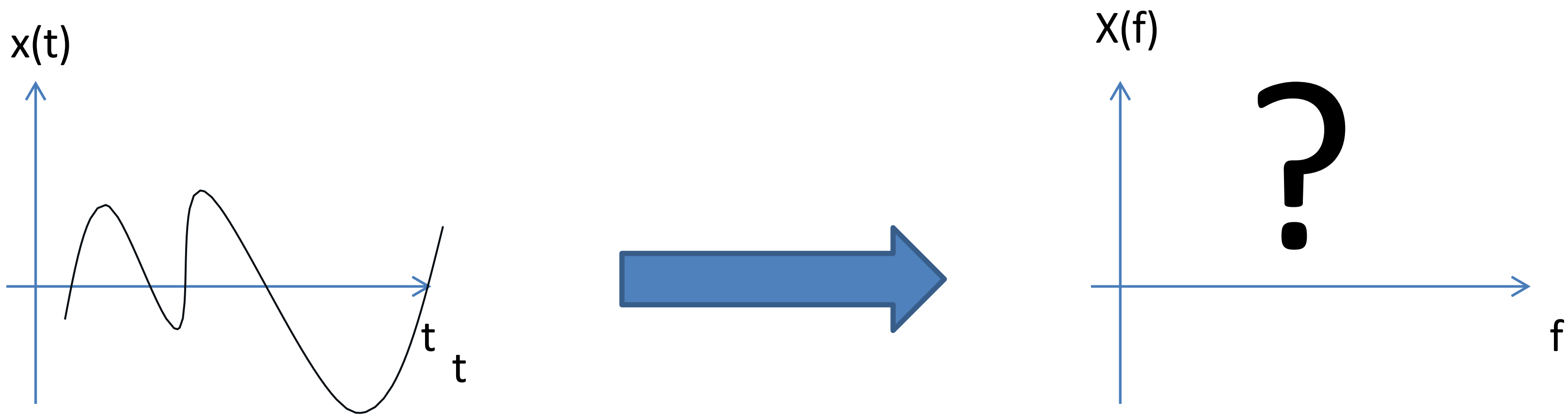
Traitement de signal
Transformée de Fourier

8 règles fondamentales pour maitriser le traitement de signal

ITI 1 Introduction II

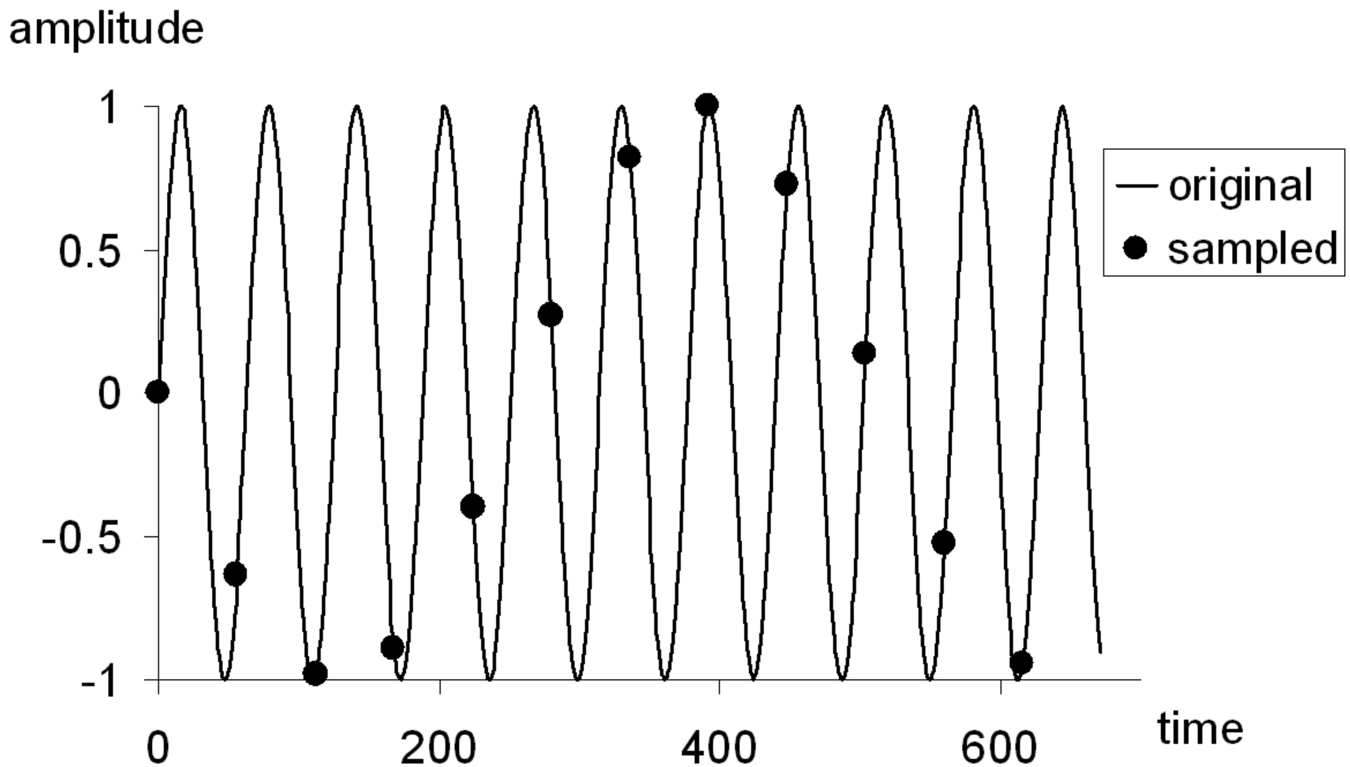
Laboratoire des télécommunications / 2023-24 Prof. T. EL MALIKI

Vérification d’un signal : Dualité



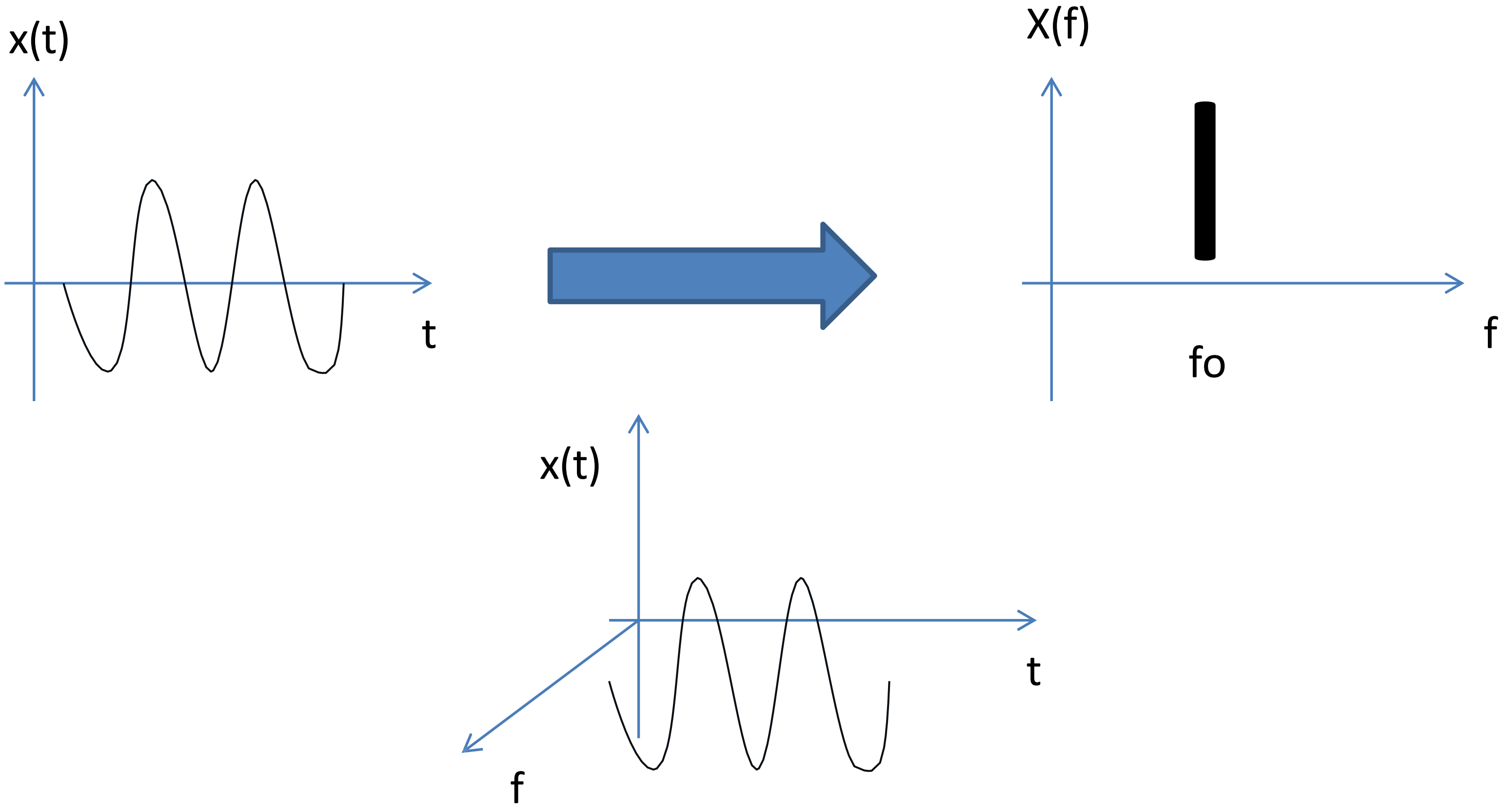
Est–ce que mon signal x(t) est un signal téléphonique?

Signal Sinusoïdal: théorème de Shannon



- Quelle est la fréquence de ce signal?
- Est-ce que ces points sont suffisants pour représenter ce signal?

Dualité : temps/ fréquence



Propriétés

- Relation biunivoque (dualité) : autant d'information contenue dans l'espace du temps et l'espace des fréquences
- Théorème de Parseval: conservation du produit scalaire (isométrie)
- Corollaire (x [P]=y [P]): conservation de l'énergie et la *densité spectrale d'énergie, ou spectre du signal*

Signal

- Deux sortes de signaux
  - Signal déterministe:
    - peut être défini par une fonction *x(t) qui décrit très exactement l'évolution* d'une grandeur en fonction du temps
    - Transformée de Fourier
  - Signal aléatoire:
    - Peut être modélisé par une famille de variables aléatoires indexée par le temps, chaque membre décrivant l'aspect incertain du phénomène observé à un temps donné
    - Méthodes probabilistes
- Signal en pratique
    - Somme d'un signal déterministe qui contient l'information, et d'un signal aléatoire qui modélise le bruit

Signal déterministe

- Énergie d'un signal
  - si 0 < *E , signal d'énergie finie*

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|u(t)\right|^2 dt$$

- Puissance moyenne d'un signal
  - si 0 < P , signal de puissance finie

$$P = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \left|x(t)\right|^2 dt$$

- Relation
  - Si énergie finie, alors P=0
  - Si puissance finie, alors E= est grande
- Énergie finie: modèle pour un signal réel
- Puissance finie: phénomènes stationnaires, ex: signal périodique

Les huit règles TS

- La transformée de Fourier est complexe dans le cas de calcul exact
  - TF

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft}\, \mathrm{d}f,$$

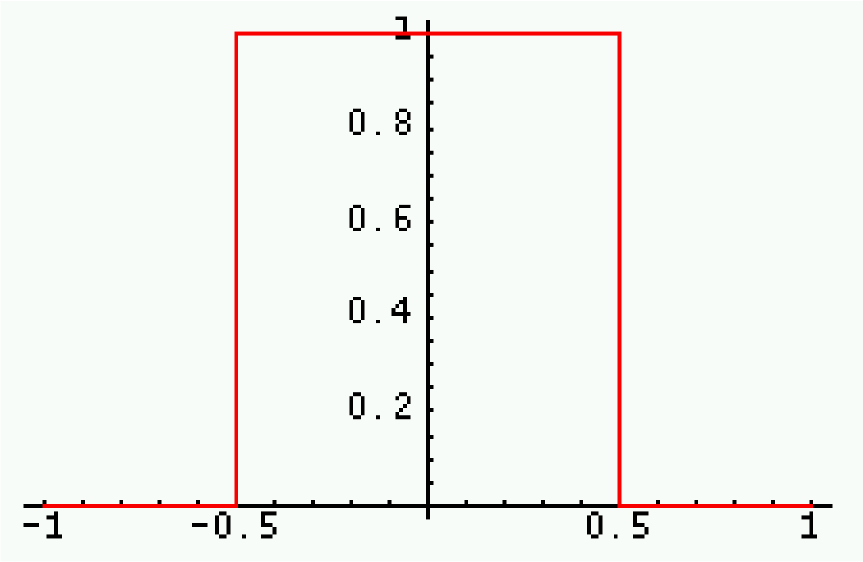
  - TF inverse

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, \mathrm{d}t.$$

- Comment faire?
- Analyse de signal et de ses fréquences

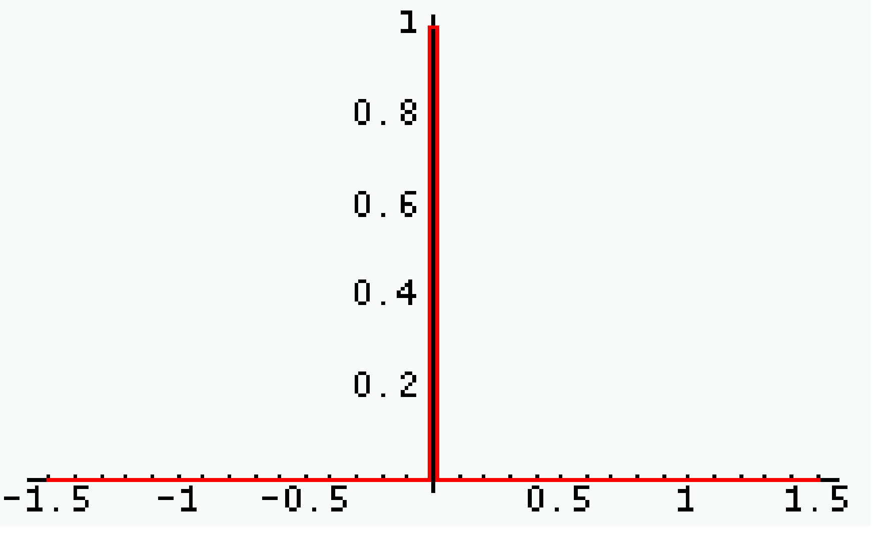
Rectangle (filtre passe bas): RECT

Fonction porte : $\Pi(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } |t| < 1/2 \\ 0 \text{ si } |t| > 1/2 \end{cases}$



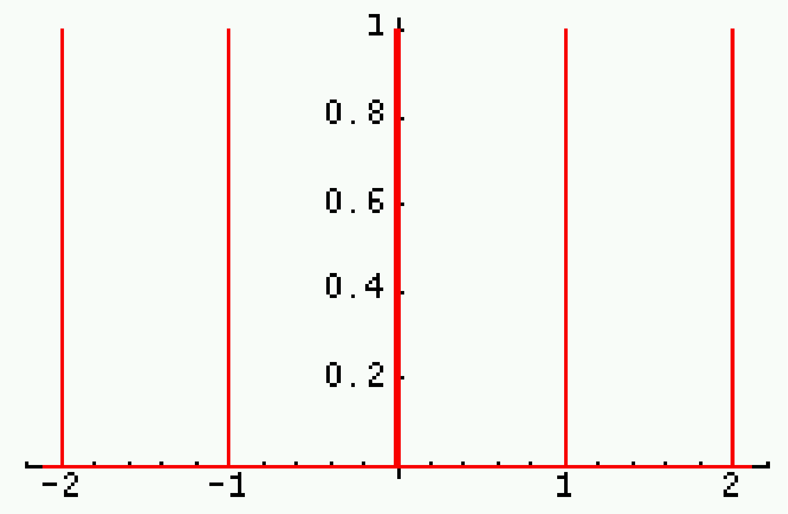
Impulsion : Dirac

Fonction : $\delta(t)$



Train d'impulsion : peigne

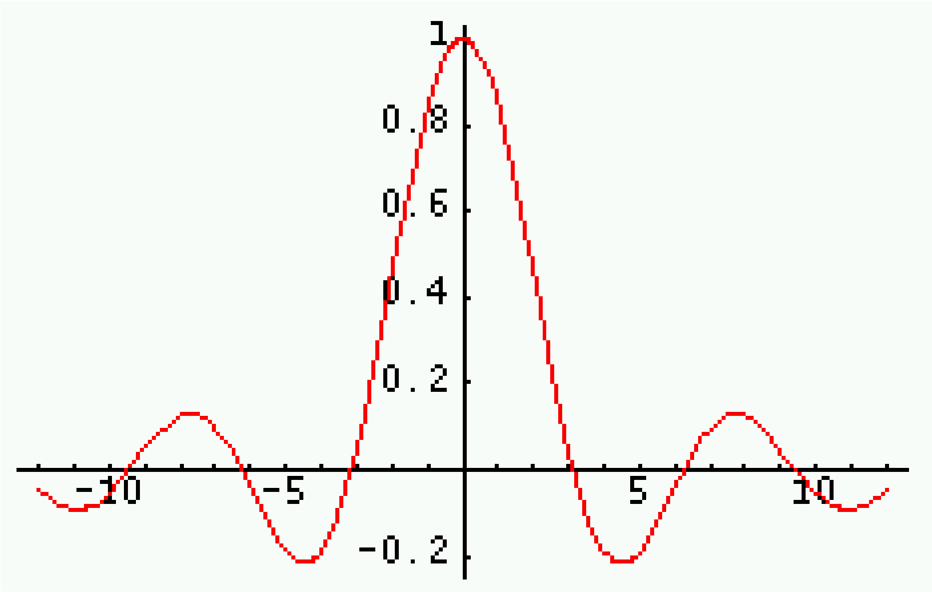
Peigne de Dirac $$Ш(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$$



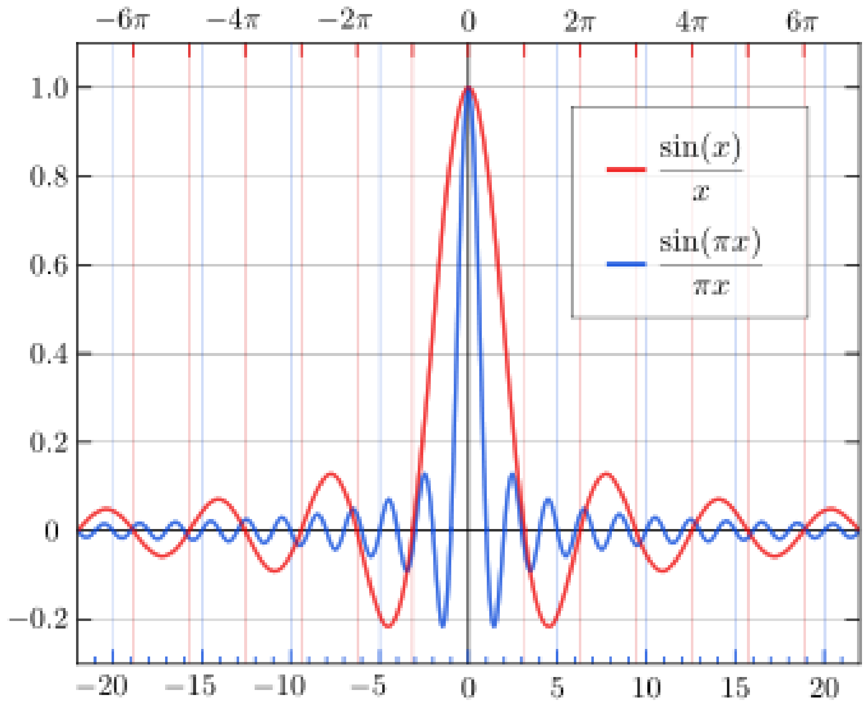
Sinus Cardinal 1: définition

Sinus cardinal :

$$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$$



Sinus cardinal 2 : SINC

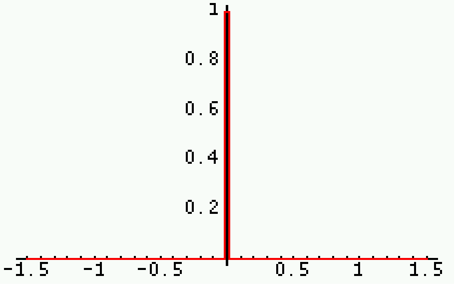
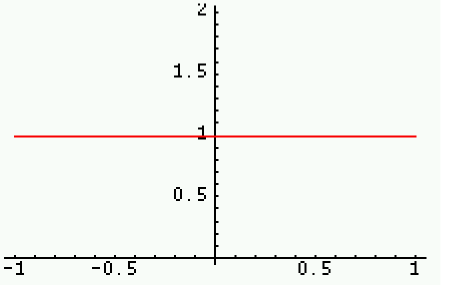


Conservation de l'énergie

Th. de Parseval

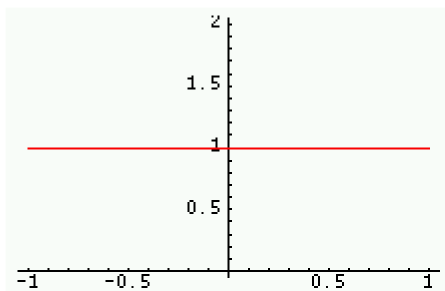
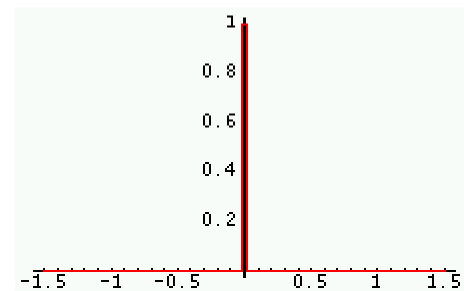
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu)\,\overline{\hat{g}(\nu)}\,d\nu$$

Règle 1: une impulsion

Fonction	Graphe de la fonction	Transformée	Graphe de la TF
$\delta(t)$		1	

- Conclusion: si on diminue dans le temps on grandit dans les fréquences

Règle 2 Inverse

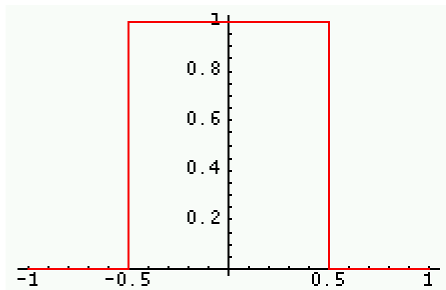
Fonction	Graphe de la fonction	Transformée	Graphe de la TF
1		$\delta(\nu)$	

- Conclusion tout ce qui est valable dans un sens est valable dans l’autre

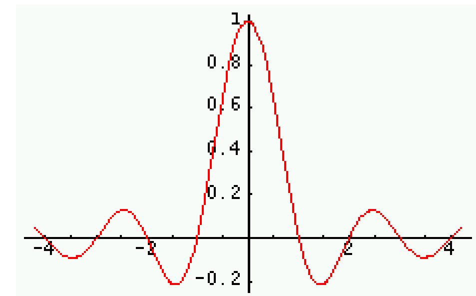
Règle 3 : un rectangle

Fonction | Graphe de la fonction | Transformée | Graphe de la TF

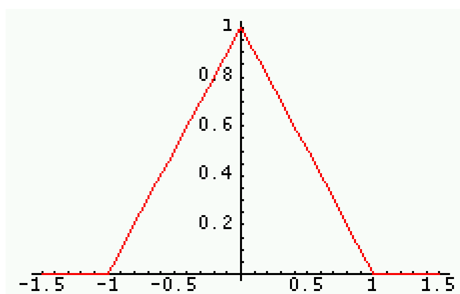
$\Pi(t)$



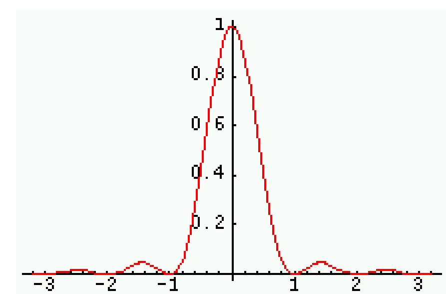
$\mathrm{sinc}(\pi\nu)$



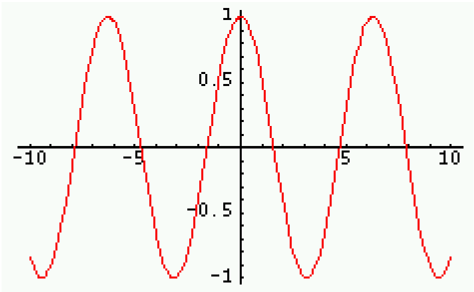
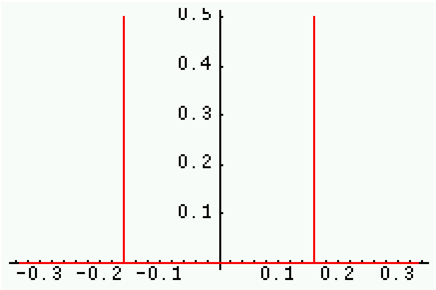
$\Lambda(t)$



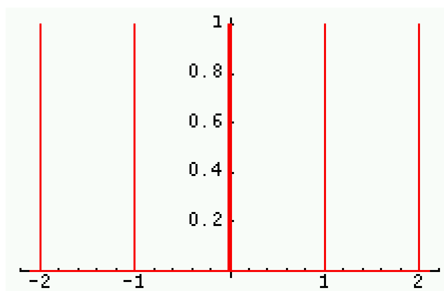
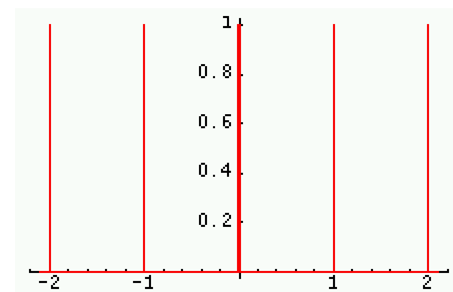
$\mathrm{sinc}^2(\pi\nu)$



Règle 4 : cosinus

Fonction	Graphe de la fonction	Transformée	Graphe de la TF
$\cos(t)$		$\frac{1}{2}\delta(\nu - \frac{1}{2\pi}) + \frac{1}{2}\delta(\nu + \frac{1}{2\pi})$	

Règle 5 : train d'impulsions

Fonction	Graphe de la fonction	Transformée	Graphe de la TF
$\text{Ш}(t)$		$\text{Ш}(\nu)$	

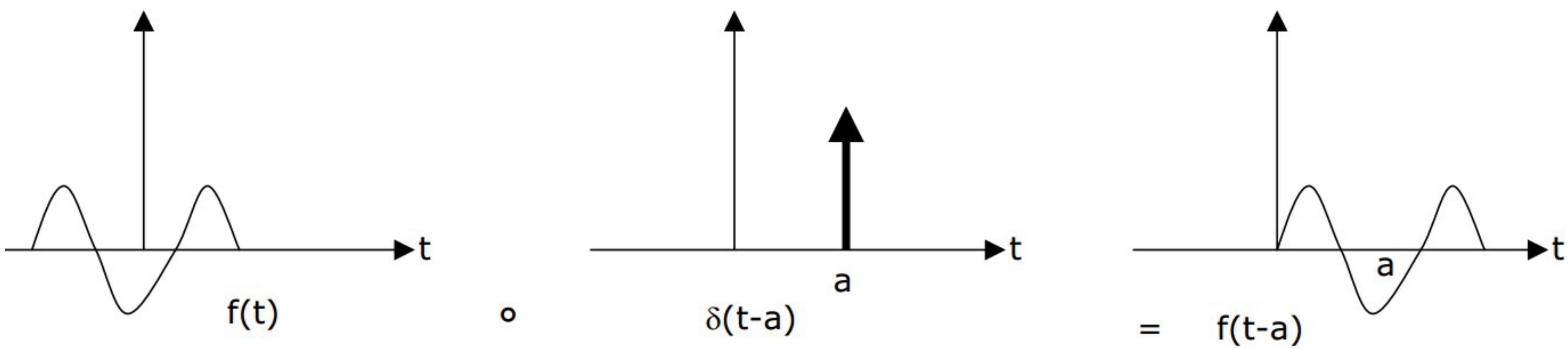
Règle 6 / 7

Fonction	Transformée
$a\,f(t) + b\,g(t)$	$a\,\hat{f}(\nu) + b\,\hat{f}(\nu)$
$(f * g)(t)$	$\hat{f}(\nu).\hat{g}(\nu)$

- La transformée de Fourier est linéaire
- La transformée de la convolution de deux fonctions est le produit respective de leur transformée

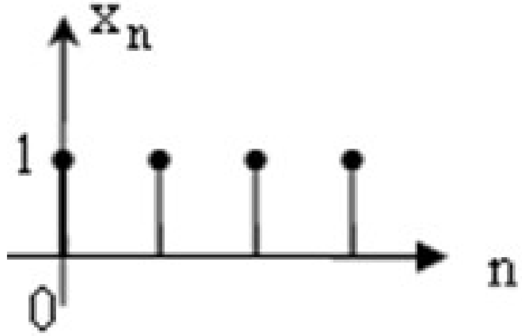
Règle 8

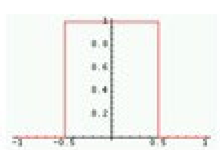
- Copier - Coller

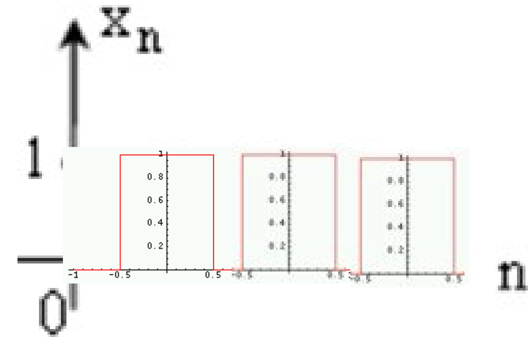


Corollaire :Règle 8

- Convolution d'une fonction avec des trains d'impulsions est une fonction somme des copier-coller







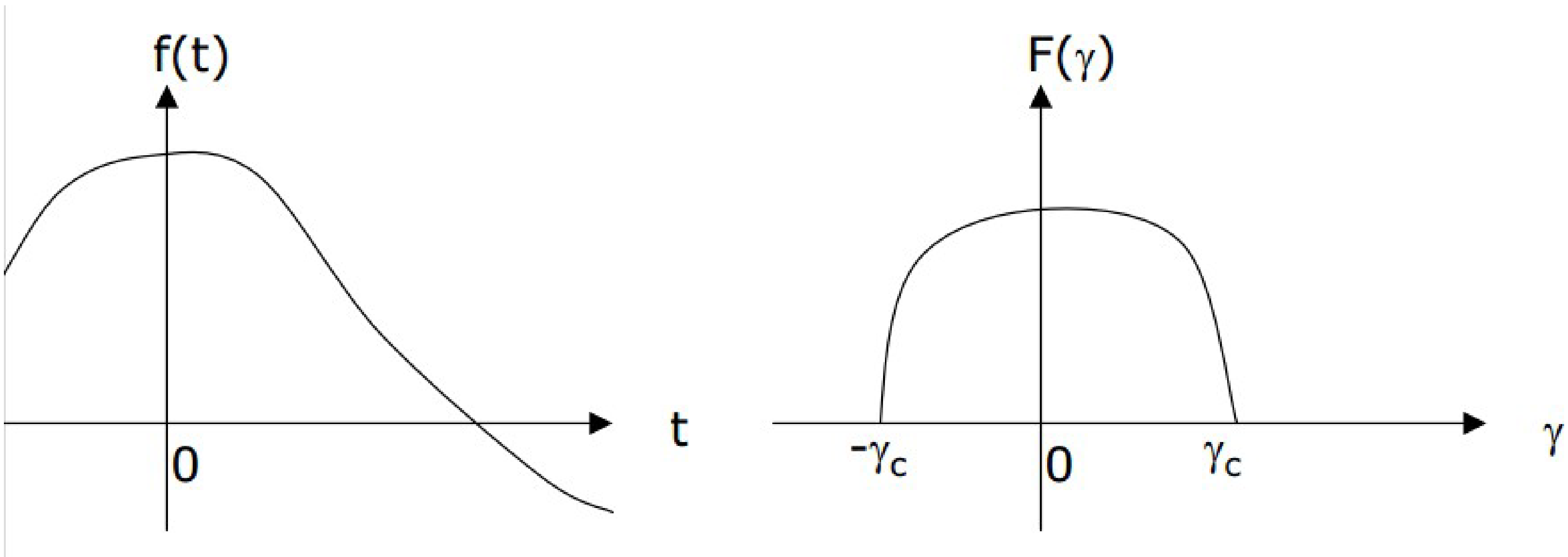
Appliquer les règles pour

- Transformée d’un Triangle
- Échantillonnage d’un Sinus
- Echantillonnage d’un Sinc

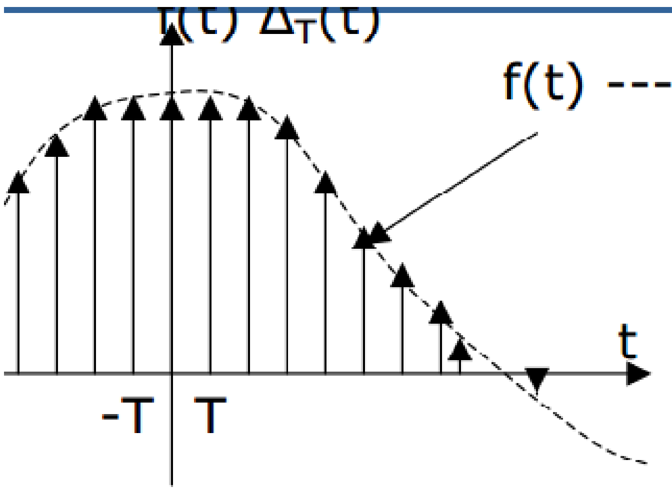
Théorème d’échantillonnage

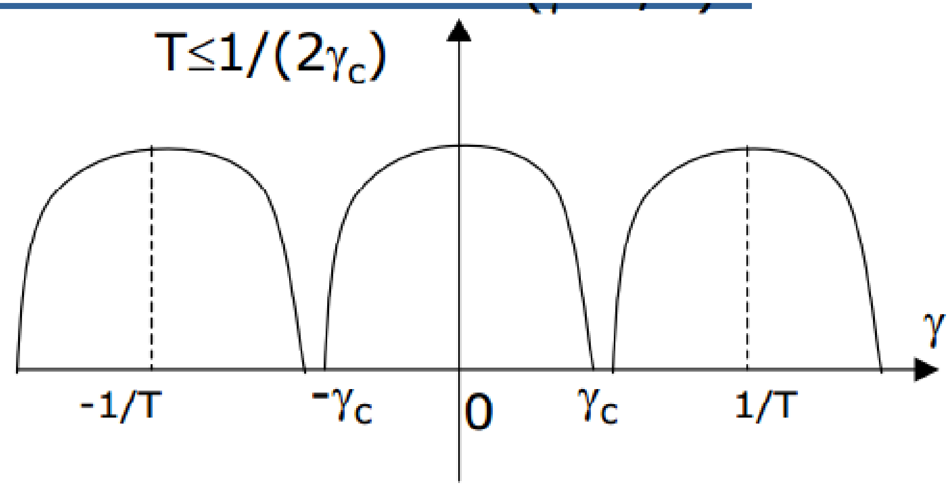
- Un signal dont la fréquence maximale est fmax peut être échantillonné par fe telle que
  - Fe > 2 Fmax
  - Moyennant un filtre passe bas on peut trouver notre signal.

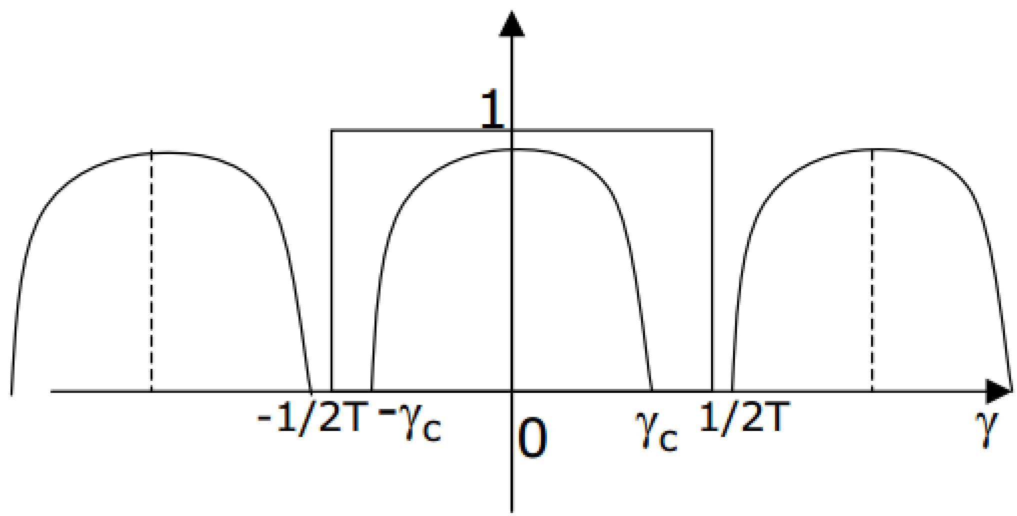
Spectre d'un signal f(t)



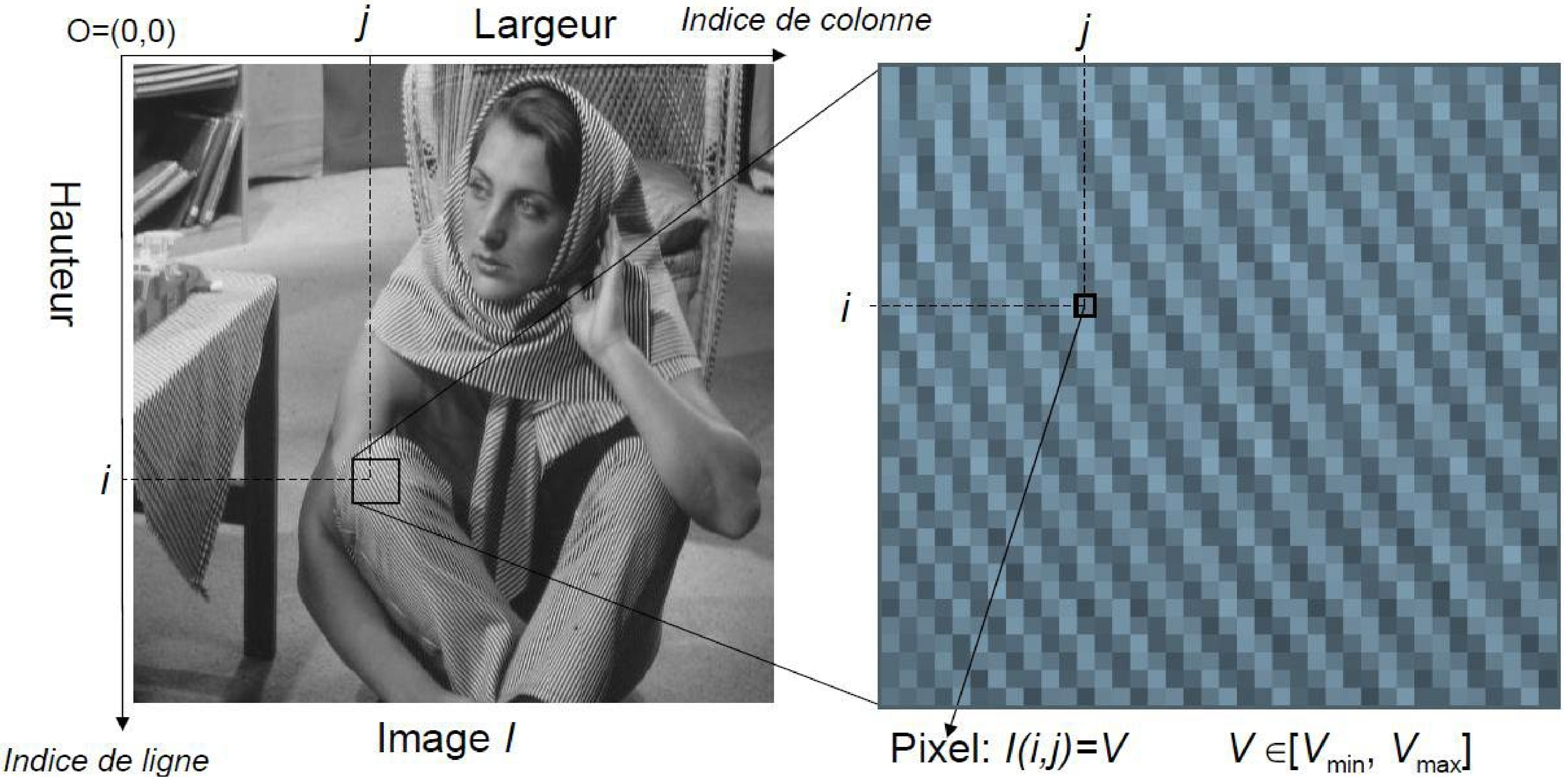
Echantillonnage dans le temps







Exemple d'image



Conclusion

- Vous êtes prêts pour trouver la transformée de Fourier de la majorité des signaux dans le domaine applicatif des télécommunications.
- La théorie vous donnera un autre élan dans ce domaine
- La pratique des laboratoires est aussi importante.