آرین فردوسی - ۹۹۳۱۰۴۵ - تمرین ۱

(1) الف) حالت - ماتریس روبه رو را درنظر میگیریم

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۳ & -۶ \\ ۴ & -۸ & ۸ \\ ۳ & -۹ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

روش ۱ $\longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۳ & -۶ \\ ۴ & -۸ & ۸ \\ ۳ & -۹ & ۱۲ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{جابجایی ردیف ۱ و ۲}} \begin{bmatrix} ۴ & -۸ & ۸ \\ ۰ & ۳ & -۶ \\ ۳ & -۹ & ۱۲ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{row3} = \text{row3} + (-\frac{3}{4})\text{row1}]{}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} ۴ & -۸ & ۸ \\ ۰ & ۳ & -۶ \\ ۰ & -۳ & ۶ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{row3} = \text{row2} + \text{row3}]{} \begin{bmatrix} ۴ & -۸ & ۸ \\ ۰ & ۳ & -۶ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \hookleftarrow$$

فرم نردبانی

روش 2 $\longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۳ & -۶ \\ ۴ & -۸ & ۸ \\ ۳ & -۹ & ۱۲ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{جابجایی ردیف ۱ و ۳}} \begin{bmatrix} ۳ & -۹ & ۱۲ \\ ۴ & -۸ & ۸ \\ ۰ & ۳ & -۶ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{row2} = \text{row2} + (-\frac{4}{3})\text{row1}]{}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} ۳ & -۹ & ۱۲ \\ ۰ & ۴ & -۸ \\ ۰ & ۳ & -۶ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{row3} = \text{row3} + (-\frac{3}{4})\text{row2}]{} \begin{bmatrix} ۳ & -۹ & ۱۲ \\ ۰ & ۴ & -۸ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ب) حالت -

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۶ \\ ۲ & -۳ & ۲ & ۱۴ \\ ۳ & ۱ & -۱ & -۲ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{row2} = \text{row2} + (-2)\text{row1}]{} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۶ \\ ۰ & -۷ & -۴ & ۲ \\ ۳ & ۱ & -۱ & -۲ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{row3} = \text{row3} + (-3)\text{row1}]{}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۶ \\ ۰ & -۷ & -۴ & ۲ \\ ۰ & -۵ & -۱۰ & -۲۰ \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{row3} = \text{row3} + (-\frac{5}{7})\text{row2}]{} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۶ \\ ۰ & -۷ & -۴ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -\frac{۵۰}{۷} & -\frac{۱۵۰}{۷} \end{bmatrix}$$

فرم نردبانی

هیچ ردیفی به صورت $[0 \dots 0 \;\; b]$ نداریم

ب) نادرست - فرض کنید $[A \quad b]$ به این شکل است

$$\begin{array}{ccc} \text{Pivot} & \text{Pivot} & \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 & 8 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

Pivot

ردیف سوم با شرط سازگار بودن $Ax=b$ تناقض دارد

ت) درست - فرض کنید مجموعه وکتورهای $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ را در اختیار داریم

$\leftarrow v_1 = 0$

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \dots + c_pv_p = 0$$

$$\rightarrow 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_p = 0$$

در نتیجه مجموعه وابسته خطی است

ث) درست

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5c_1 \\ 12c_2 \\ -2c_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تنها حالتی رخ می‌دهد که $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

ج) نادرست

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 8 & 7 & 0 \\ -5 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{echelon form}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -4x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0 \\ -3x_2 - 12x_3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x_2 = 0 \rightarrow x_1 + \underbrace{4x_2}_{0} + \underbrace{9x_3}_{0} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

مستقل خطی اند

ج) نادرست ـــ اگر بردارهای داخل $S1$ مضربی از بردارهای داخل $S2$ باشند باز هم span شان یکسان است ولی $S1 \neq S2$ است.

خ) درست $\quad \mathrm{Span}(A) \Rightarrow c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots c_nv_n = R^n$

$$\mathrm{Span}(B) \Rightarrow c_1'(v_1+v_2) + c_2'(v_2+v_3) + c_3'(v_3+v_4) + \cdots c_n'(v_n+v_1)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(c_1'+c_n')}_{K_1}v_1 + \underbrace{(c_2'+c_1')}_{K_2}v_2 + \cdots \underbrace{(c_n'+c_{n-1}')}_{K_n}v_n \Rightarrow R^n$$

د) درست

$$\underbrace{v_1 \text{ تا } v_{r-1}}_{\text{۱ تا } r-1 \text{ بردار}} \xrightarrow{\text{مستقل}} c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \cdots c_{r-1}v_{r-1} = 0 \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\text{مستقل}} c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \cdots c_{r-1} = 0$$

$$\underbrace{v_2 \text{ تا } v_r}_{\text{۱ تا } r-1 \text{ بردار}} \xrightarrow{\text{مستقل}} c_2'v_2 + c_3'v_3 + \cdots c_r'v_r = 0 \quad (**)$$

$$\to c_2' = c_3' = \cdots = c_r'$$

$$(*) + (**) \to \underbrace{(c_1+c_1')}_{0}v_1 + \underbrace{(c_2+c_2')}_{0}v_2 + \cdots \underbrace{c_r'}_{0}v_r = 0$$

$$\to v_1 \text{ تا } v_r$$

مستقل از هم اند

2

$$\left.\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3&=1\\ -4x_1-9x_2+2x_3&=-1\\ -3x_2-6x_3&=-3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1\\ -4 & -9 & 2 & -1\\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{row}2=\text{row}2+4\text{row}1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 6 & 3\\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{row}3=\text{row}2+\text{row}3]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{row}1=\text{row}1-\text{row}2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -2\\ 0 & 3 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{row}2\div 3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{reduced echelon form}}$$

$$\longrightarrow \left.\begin{aligned} &x_1-5x_3=-2 \longrightarrow x_1=5x_3-2\\ &x_2+2x_3=1 \qquad x_2=1-2x_3\\ &x_3=\text{free variable} \end{aligned}\right\} X=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5x_3-2\\ 1-2x_3\\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -2\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix} 5\\ -2\\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{parametric vector equation})$$

از آنجایی که x_3 یک متغیر free است دستگاه بی‌شمار جواب دارد

تفسیر هندسی: مضاربی از بردار $\begin{bmatrix} 5\\ -2\\ 1 \end{bmatrix}$ که با بردار $\begin{bmatrix} -2\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}$ انتقال یافته‌اند

(این ۳ صفحه که بر یک خط با یکدیگر اشتراک دارند)

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=0\\ 2x_1-x_2+x_3&=0\\ x_1+2x_3&=0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ادامه سوال 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{row2=row2-2row1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{row3=row3-row1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[row3=\frac{row2}{-3}+row3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{row1=row1+\frac{row2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{row2=\frac{row2}{-3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{row3=row3\times\frac{3}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[row1=row1-\frac{2row3}{3}]{row2=row2-\frac{row3}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(reduced echelon form)

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \end{array}\right\} \quad X=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ (parametric vector equation)

توضیح هندسی: این ۳ صفحه در مبدأ یکدیگر را قطع می‌کنند (در فضای R^3)

(a ③

$$\begin{cases} x_1 + hx_2 = 2 \\ 4x_1 + 8x_2 = K \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & h & 2 \\ 4 & 8 & K \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{row2 = row2 - 4row1} \begin{bmatrix} 1 & h & 2 \\ 0 & 8-4h & K-8 \end{bmatrix} \to \text{به حالت } [0 \;\; 0 \;\; -b] \text{ تبدیل کنیم}$$

برای اینکه جواب نداشته باشد کافی است

$8-4h=2 \Leftarrow h=2$, $K-8 \neq 0$ باشد

$K \neq 8$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 3x_1 + hx_2 = K \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & h & K \end{bmatrix} \xrightarrow{row2 = row2 - 3row1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & h-9 & K-6 \end{bmatrix}$$

حالت $[0 \;\; 0 \;\; -b]$ را می‌سازیم :

$h-9=0$, $K-6 \neq 0$

$h=9$, $K \neq 6$

---

b) متغیر آزاد نباید داشته باشیم؛

دقت سمت چپ

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 2 \\ 0 & 8-4h & K-8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (8-4h)x_2 = K-8 \Rightarrow x_2 = \frac{K-8}{(8-4h)}$$

$h \neq 2$, K هر عدد دلخواه

دقت سمت راست :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & h-9 & K-6 \end{bmatrix} \qquad (h-9)x_2 = K-6$$

$$x_2 = \frac{K-6}{h-9}$$

$h \neq 9$, K هر عدد دلخواه

ادامه سوال 3) c: متغیر آزاد داشته باشیم:

دستگاه سمت چپ:
$$\begin{bmatrix} 1 & h & 2 \\ 0 & 8-4h & k-8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} 8-4h=0 \rightarrow h=2 \\ k-8=0 \rightarrow k=8 \end{array}$$

دستگاه سمت راست:
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & h-9 & k-6 \end{bmatrix} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} h-9=0 \\ k-6=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} h=9 \\ k=6 \end{array}$$

---

4)

$$\begin{bmatrix} a & b & -c \\ b & c & -a \\ c & a & -b \end{bmatrix} \xrightarrow{row3=row3-\frac{c}{a}row1} \begin{bmatrix} a & b & -c \\ b & c & -a \\ 0 & a-\frac{bc}{a} & -b+\frac{c^2}{a} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{row2=row2-\frac{b}{a}row1} \begin{bmatrix} a & b & -c \\ 0 & c-\frac{b^2}{a} & -a+\frac{bc}{a} \\ 0 & a-\frac{bc}{a} & -b+\frac{c^2}{a} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{row3=row3+\frac{-(a-\frac{bc}{a})}{c-\frac{b^2}{a}}} \begin{bmatrix} a & b & -c \\ 0 & c-\frac{b^2}{a} & -a+\frac{bc}{a} \\ 0 & 0 & \frac{c^2}{a}-b+\frac{(\frac{bc}{a}-a)^2}{c-\frac{b^2}{a}} \end{bmatrix}$$

سطر ۱ و ۲ نباید $[0 \ 0 \ 0]$ باشد - سطر ۱ تا ۲ قابل تبدیل به حالت $\begin{bmatrix} * & 0 & k_1 \\ 0 & * & k_2 \end{bmatrix}$ هستند

ادامه سوال ۴

$$b - \frac{c^2}{a} = \frac{\left(\frac{bc}{a} - a\right)^2}{c - \frac{b^2}{a}} = \frac{a\left(\frac{bc}{a} - a\right)^2}{ac - b^2}$$

$$\frac{ab-c^2}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{ab-c^2}{a} = \frac{a\left(\frac{b^2c^2}{a^2} - 2bc + a^2\right)}{ac-b^2}$$

$$\Rightarrow a^2bc - ab^3 - ac^3 + \cancel{b^2c^2} = \cancel{b^2c^2} - 2a^2bc + a^4$$

$$\Rightarrow a^4 - 3a^2bc + ab^3 + ac^3 = 0 \xrightarrow{a \neq 0} a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\xrightarrow{\text{اویلر}} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2\right) = 0$$

اگر سمت راست صفر باشد $\times \quad a = b = c = 0$

اگر سمت چپ صفر باشد $a+b+c=0 \ \checkmark$

5

قسمت اول: در صورتی که دستگاه سازگار باشد و بخواهیم جواب یکتا داشته باشیم باید
در ماتریس افزوده در هر ستون یک Pivot داشته باشیم تا متغیر free نداشته باشیم و وقتی
که تعداد معادلات کمتر از مجهولات است، و بخواهیم ماتریس افزوده را به فرم نردبانی تبدیل کنیم متوجه
می شویم که حتما ستونی وجود داشته باشد که Pivot نداشته باشد

برای دستگاه ۳ مجهول ۲ معادله

$$\left\{\begin{array}{l} ax_1+bx_2+cx_3=e \\ fx_1+gx_2+hx_3=i \end{array}\right. \quad \begin{bmatrix} a & b & c & e \\ f & g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{row2=row2+\left(-\frac{f}{a}\right)row1} \begin{bmatrix} a & b & c & e \\ 0 & g-\frac{bf}{a} & h-\frac{cf}{a} & i-\frac{ef}{a} \end{bmatrix}$$

در ردیف دوم یا $h-\frac{cf}{a}$ و یا $g-\frac{bf}{a}$ باید Pivot باشد در این صورت یا x_2
free است یا x_3 که در این حالات دستگاه بی شمار جواب
دارد

قسمت دوم:

$$\left.\begin{array}{l} ax_1+bx_2=K_1 \\ cx_1+dx_2=K_2 \\ ex_1+fx_2=K_3 \end{array}\right\} \quad \begin{bmatrix} a & b & K_1 \\ c & d & K_2 \\ e & f & K_3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{row2=row2+\left(\frac{-c}{a}\right)row1} \begin{bmatrix} a & b & K_1 \\ 0 & d-\frac{bc}{a} & K_2-\frac{K_1c}{a} \\ e & f & K_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{row3=row3+\left(\frac{-e}{a}\right)row1}$$

Pivot

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} a & b & K_1 \\ 0 & d-\frac{bc}{a} & K_2-\frac{K_1c}{a} \\ 0 & f-\frac{be}{a} & K_3-\frac{K_1e}{a} \end{bmatrix} \xrightarrow[d-\frac{bc}{a}\neq 0]{row3=row3+\left(\frac{\frac{be}{a}-f}{d-\frac{bc}{a}}\right)row2} \begin{bmatrix} a & b & K_1 \\ 0 & d-\frac{bc}{a} & K_2-\frac{K_1c}{a} \\ 0 & 0 & \left(K_3-\frac{K_1e}{a}\right)+\frac{\left(\frac{be}{a}-f\right)K_2 \ldots}{d-\frac{bc}{a}} \end{bmatrix}$$

ادامه سوال 5

$$\begin{bmatrix} a & b & k_1 \\ 0 & d-\frac{bc}{a} & k_2-\frac{k_1c}{a} \\ 0 & 0 & k_3-\frac{k_1e}{a}+\dfrac{\left(\frac{be}{a}-f\right)\left(k_2-\frac{k_1c}{a}\right)}{d-\frac{bc}{a}} \end{bmatrix}$$

باید صفر باشد تا دستگاه سازگار باشد

$$\Rightarrow \frac{k_1e}{a}-k_3=\dfrac{\left(\frac{be-fa}{a}\right)\left(\frac{k_2a-k_1c}{a}\right)}{\frac{ad-bc}{a}}$$

$$\Rightarrow \frac{k_1e-k_3a}{\cancel{a}}=\frac{(be-fa)(k_2a-k_1c)}{\cancel{a}(ad-bc)}$$

$$\Rightarrow adek_1-\cancel{bcek_1}-a^2dk_3+abck_3=abek_2-\cancel{bcek_1}-a^2fk_2+acfk_1$$

$$\xrightarrow{a\neq 0} dek_1-adk_3+bck_3=bek_2-afk_2+cfk_1$$

$$\Rightarrow (de-cf)k_1+(af-be)k_2+(bc-ad)k_3=0$$

در این حالت دستگاه سازگار است.

b) a) از برهان خلف استفاده می‌کنیم (فرض کنیم $Ax=b$ به ازای هر b حداکثر یک جواب دارد

حکم ← ستون A وابسته خطی اند)

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$Ax = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

اگر $b=0$ باشد آنگاه چون A وابسته خطی است حتما یک جواب non trivial دارد ، از طرفی

می‌تواند تمام x_1 ، x_2 ، ... x_n نیز صفر باشند در دستگاه $Ax=b$ صدق کند.

بنابراین دستگاه ۲ تا جواب دارد که با فرض اولیه در تناقض است در نتیجه ستون‌های A مستقل خطی اند.

---

b) $$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

- چون A در هر ستون Pivot دارد در صورتی که آن را به فرم نردبانی کاهش یافته تبدیل کنیم (بالا و پایین هر Pivot صفر می‌شود)

به حالت

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_n \end{bmatrix}$$

جواب ندارد

یا حالت

$$n\left\{\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_n \end{bmatrix}}_{n}}_{\text{حداکثر یک جواب دارد}}\right.$$

⑦ ① ماتریس افزوده را تشکیل می دهیم

$(Ax=0)$

$$\begin{bmatrix} a & b & d & 0 \\ 0 & c & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \end{bmatrix}$$

Pivot

چون مستقل خطی است $\longrightarrow f \neq 0$ باشد $\longrightarrow x_3 = 0$

زیرا در غیر اینصورت x_3 متغیر آزاد می شود و دیگر مستقل خطی نیستند

از ردیف دوم $\rightarrow \quad cx_2 + \underbrace{ex_3}_{0} = 0 \xRightarrow{\text{مستقل خطی}} c \neq 0,\ x_2 = 0$

از ردیف ۱ $\rightarrow \quad ax_1 + \underbrace{bx_2}_{0} + \underbrace{dx_3}_{0} = 0 \xrightarrow[\text{مستقل خطی}]{a \neq 0} x_1 = 0$

e و d و b دلخواه هستند

---

② ماتریس افزوده را تشکیل می دهیم

$$\begin{bmatrix} a & b & d & 0 \\ 1 & c & e & 0 \\ 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[raw2 = raw2 + \frac{1}{a} raw1]{a \neq 0} \begin{bmatrix} a & b & d & 0 \\ 0 & c-\frac{b}{a} & e-\frac{d}{a} & 0 \\ 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[b \neq ac]{raw3 = raw3 + \left(\frac{1}{\frac{b}{a}-c}\right) raw2} \begin{bmatrix} a & b & d & 0 \\ 0 & c-\frac{b}{a} & e-\frac{d}{a} & 0 \\ 0 & 0 & f+\left(\frac{e-\frac{d}{a}}{\frac{b}{a}-c}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow (c-\frac{b}{a})x_2 + \underbrace{(e-\frac{d}{a})x_3}_{0} = 0 \Rightarrow c-\frac{b}{a} \neq 0$

$ac \neq b$

$x_2 = 0$ است

$\rightarrow x_3 = 0$

(ادامه سوال 7) 2)

از ردیف 1 = $ax_1 + \underbrace{bx_2}_{0} + \underbrace{dx_3}_{0} = 0$

$$ax_1 = 0 \xrightarrow{\text{مستقل خطی}} a \neq 0$$

$a \neq 0$ ، $ac \neq b$ و d, e, f مقادیر دلخواه

---

8) الف) از برهان خلف استفاده می‌کنیم: از مجموعه‌های $v_1, v_2, \ldots v_k$ مستقل خطی باشد و $v_{k+1} \notin \operatorname{span}\{v_1, v_2, \ldots v_k\}$ باشد، آنگاه $\{v_1, v_2, \ldots v_{k+1}\}$ وابسته خطی است.

$$Ax = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + \ldots x_k v_k + x_{k+1} v_{k+1} = 0$$

x_{k+1} باید قطعاً مخالف 0 باشد زیرا می‌دانیم $\{v_1, v_2, \ldots v_k\}$ مستقل خطی اند و در این حالت $(x_{k+1} = 0)$ به $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots x_k v_k = 0$ می‌رسیم که فقط جواب trivial دارد پس $\{v_1, v_2, \ldots v_{k+1}\}$ نیز مستقل خطی می‌شود.

اگر $x_{k+1} \neq 0$ باشد در آن صورت می‌توان نوشت:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots x_k v_k = -x_{k+1} v_{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{-x_{k+1}} v_1 + \frac{x_2}{-x_{k+1}} v_2 + \ldots \frac{x_k}{-x_{k+1}} v_k = v_{k+1}$$

که این حالت با فرض مسئله که $v_{k+1} \notin \operatorname{span}\{v_1, \ldots v_k\}$ است در تناقض است پس $\{v_1, v_2, \ldots v_{k+1}\}$ مستقل خطی اند.

۸) ب) فرض کنید ماتریس M به این صورت است

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

باشد

و معادله $Mx=b$ اکنون به صورت

$$\begin{cases} m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + \cdots m_{1n}x_n = b_1 \\ m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + \cdots m_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ m_{n1}x_1 + m_{n2}x_2 + \cdots m_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

است

این دستگاه چون ناسازگار است به صورت هندسی می‌توانیم این گونه توصیف کنیم که شامل n خط موازی است در فضای R^n و بردار b انگار یک بردار انتقال برای این بردارهای موازی هم جهت و از طرفی می‌دانیم بردارهای موازی یا جواب ندارند (ناسازگارند) یا بی‌شمار جواب دارند بنابراین برداری مانند a نمی‌توان یافت که $Mx=a$ جواب یکتا داشته باشد.

---

۹) ابتدا ماتریس تبدیل را پیدا کنیم (Ax) - A یک ماتریس 3×2 باید باشد

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \longrightarrow L\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a+0(b)=1 \\ c+0(d)=1 \\ e+0(f)=2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a=1 \\ c=1 \\ e=2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 1 & d \\ 2 & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1+b=2 \\ 1+d=3 \\ 2+f=2 \end{matrix} \begin{cases} b=1 \\ d=2 \\ f=0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

۹) الف)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ب)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x+2y \\ 2x \end{bmatrix}$$

---

۱۰) از خطی بودن تبدیل T داریم:

$$T(\vec{a}+\vec{b}) = T(\vec{a}) + T(\vec{b})$$

$$T(c\vec{a}) = c\,T(\vec{a})$$

$$T(\vec{x}) = T(s\vec{u}+t\vec{v}) = T(s\vec{u}) + T(t\vec{v}) = s\,T(\vec{u}) + t\,T(\vec{v})$$

اگر $s=t=0$ باشد $T(\vec{x})$ خود مبدأ می‌شود

اگر $T(\vec{u}), T(\vec{v})$ مستقل خطی باشند این ۲ بردار یک صفحه تشکیل می‌دهند و چون مستقل خطی اند پس می‌توان گفت که $s=t=0$ باشد پس این صفحه از مبدأ نیز عبور می‌کند

اگر $T(\vec{u}), T(\vec{v})$ وابسته خطی باشند در این صورت این ۲ بردار مضربی از هم هستند و ترکیب شان یک خط را تشکیل می‌دهد (فرض کنید $T(\vec{u}) = k\,T(\vec{v}) \Leftarrow T(\vec{x}) = (sk+t)T(\vec{v})$ ، اگر $sk=-t$ انتخاب کنید این خط مبدأ عبور می‌کند)

11

1 خطی نیست مثال نقض: $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$$T(1,1)=\begin{bmatrix}1\\4\\8\end{bmatrix}\ \xrightarrow[\text{نیست}]{\times 2}$$

$$2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\longrightarrow T(2,2)=\begin{bmatrix}2\\5\\16\end{bmatrix}$$

اثبات دیگر: $\vec{a}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\ \vec{b}=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}$

$$T(\vec{a}+\vec{b})=\begin{bmatrix}3(x_1+x_3)-2(x_2+x_4)\\x_1+x_3+3\\8x_2+8x_4\end{bmatrix}\neq\underbrace{\begin{bmatrix}3x_1-2x_2\\x_1+3\\8x_2\end{bmatrix}}_{T(\vec{a})}+\underbrace{\begin{bmatrix}3x_3-2x_4\\x_3+3\\8x_4\end{bmatrix}}_{T(\vec{b})}$$

2

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix},\ \vec{b}=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}$$

$$T(\vec{a}+\vec{b})=\begin{bmatrix}(x_1+x_2)-(y_1+y_2)+2(z_1+z_2)\\2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\\-(x_1+x_2)-(y_1+y_2)+2(z_1+z_2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1-y_1+2z_1+x_2-y_2+2z_2\\2x_1+y_1+2x_2+y_2\\-x_1-y_1+2z_1-x_2-y_2+2z_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}x_1-y_1+2z_1\\2x_1+y_1\\-x_1-y_1+2z_1\end{bmatrix}}_{T(\vec{a})}+\underbrace{\begin{bmatrix}x_2-y_2+2z_2\\2x_2+y_2\\-x_2-y_2+2z_2\end{bmatrix}}_{T(\vec{b})}$$

تبدیل خطی است

ادامه سوال ۱۲ (2) ماتریس تبدیل A T آن را بیابید

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & i & j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & i & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 + cz_1 \\ ex_1 + fy_1 + gz_1 \\ hx_1 + iy_1 + jz_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 - y_1 + 2z_1 \\ 2x_1 + y_1 \\ -x_1 - y_1 + 2z_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{lll} a=1 & f=1 & j=2 \\ b=-1 & g=0 & \\ c=2 & h=-1 & \\ e=2 & i=-1 & \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

---

(3)

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{a}+\vec{b}) = \begin{bmatrix} |x_1+x_2| \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{a}) + T(\vec{b}) = \begin{bmatrix} |x_1| + |x_2| \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$|x_1+x_2|$ الزاما با $|x_1|+|x_2|$ برابر نیست پس تبدیل خطی نیست