به نام خدا

تمرین اول

جبر خطی کاربردی – بهار ۱۴۰۱

توضیحات

- پاسخ به تمرین ها باید به صورت انفرادی صورت گیرد و درصورت مشاهده هرگونه **تقلب** نمره **صفر** برای کل تمرین منظور خواهد شد.
- پاسخ ها مرتب و خوانا باشند.
- در صورت وجود هرگونه ابهام، از طریق ایمیل la.spring1401.aut@gmail.com سوال خود را بپرسید.
- مهلت ارسال پاسخ ها تا ساعت **23:55 تاریخ ۱۵ اسفند ۱۴۰۰** می‌باشد.
- پاسخ خود را به صورت یک فایل pdf و با فرمت **HW?_Name_StudentNumber** آپلود کنید. (مثال: HW1_BardiaArdakanian_9831072).

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱- درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید و در صورت درست بودن آن را اثبات کنید و در صورت نادرست بودن برای آن‌ها مثال نقض بیاورید.

الف) فرم نردبانی هر ماتریس یکتا است.

ب) دستگاه معادلات متناظر با ماتریس افزوده $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ ناسازگار است.

پ) تساوی $Ax = b$ سازگار است اگر ماتریس افزوده $[A \;\; b]$ در هر سطر یک درایه $pivot$ داشته باشد.

ت) هر مجموعه شامل وکتور ۰، وابسته خطی است.

ث) بردارهای $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ در فضای $\mathbb{R}^4$ مستقل خطی هستند.

ج) بردارهای $\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ در فضای $\mathbb{R}^4$ مستقل خطی نیستند.

چ) اگر S_1 و S_2 زیر مجموعه‌هایی از بردارهای $\mathbb{R}^n$ باشند که $span(S_1) = span(S_2)$ آنگاه $S_1 = S_2$

خ) اگر $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک مجموعه از بردارها عضو $\mathbb{R}^n$ که مستقل خطی باشند و $span(A) = \mathbb{R}^n$ آنگاه $B = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1\}$ نیز مجموعه مستقل خطی است که $span(B) = \mathbb{R}^n$.

ه) اگر هر $r - 1$ بردار از مجموعه بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_r$ مستقل خطی باشند آنگاه $v_1, v_2, \dots, v_r$ مستقل خطی است.

۲- در زیر دو دستگاه معادلات مشاهده می‌کنید. برای این دستگاه‌ها ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل دهید، افزوده آن‌ها را به شکل کاهش یافته سطری پلکانی در بیاورید، در مورد تعداد جواب‌های این دستگاه‌ها بحث کنید، آن‌ها را به شکل پارامتریک برداری بیان کنید و در نهایت یک توصیف هندسی از این جواب‌ها ارائه دهید.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = -1 \\ -3x_2 - 6x_3 = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

۳- در دستگاه معادلات زیر h و k را به گونه‌ای انتخاب کنید که:

a) معادلات جواب نداشته باشند.

b) معادلات جواب یکتا داشته باشند.

c) بیش از یک جواب داشته باشند.

❖ به هر قسمت به طور جداگانه پاسخ دهید.

$$\begin{cases} x_1 + hx_2 = 2 \\ 4x_1 + 8x_2 = k \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 3x_1 + hx_2 = k \end{cases}$$

۴- سه خط راست زیر را در صفحه xy در نظر بگیرید:

$$L_1: ax + by + c = 0$$
$$L_2: bx + cy + a = 0$$
$$L_3: cx + ay + b = 0$$

نشان دهید این سه خط در یک نقطه متقاطع‌اند اگر و تنها اگر $a + b + c = 0$.

۵- به دستگاه معادلاتی که تعداد معادلات کمتر از مجهول‌ها باشد فرومعین *underdetermined* و به دستگاه معادلاتی که تعداد معادلات آن بیش از مجهول‌ها باشد فرامعین *overdetermined* گفته می‌شود.
ثابت کنید دستگاه معادلات فرومعین در صورت سازگار بودن دارای تعداد جواب بی‌نهایت است همچنین مشخص کنید آیا یک دستگاه فرامعین می‌تواند سازگار باشد؟ وجود یا عدم وجود این موضوع را با دستگاهی با ۳ معادله و ۲ مجهول نشان دهید.

۶- فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ است که:

a) برای هر b در R^m معادله $Ax = b$ حداکثر یک جواب دارد، ثابت کنید ستون‌های ماتریس A باید مستقل خطی باشند.

b) n تا از ستون‌های آن محوری هستند، ثابت کنید برای هر b در $\mathbb{R}^n$ معادله $Ax = b$ حداکثر یک جواب دارد.

۷- (۱) و (۲) فرض کنید مجموعه بردارها مستقل خطی باشند در مورد $a, \ldots, f$ چه می‌توان گفت؟

۱.

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

۲.

$$\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \\ 1 \end{bmatrix}$$

۸-

الف) ثابت کنید اگر مجموعه بردارهای $v_1, v_2, \ldots, v_k$ مستقل خطی باشند و

$$v_{k+1} \notin span\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

آنگاه مجموعه‌ی $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$ یک مجموعه‌ی مستقل خطی است.

ب) ماتریس M یک ماتریس $n \times n$ می‌باشد. برداری مانند b را در فضای $\mathbb{R}^n$ درنظر بگیرید به طوری که دستگاه معادلات خطی ناشی از ستون های M ناسازگار باشد. آیا برداری مانند a در $\mathbb{R}^n$ وجود خواهد داشت که معادله‌ی $Mx = a$ دارای یک جواب یکتا شود؟ (توضیح دهید)

۹- اگر $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ تبدیل خطی باشد به این صورت که :

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} \qquad , \qquad L\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}$$

الف) بردار $L\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)$ را بدست آورید.

ب) فرمول $L\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$ را بدست آورید.

۱۰- فرض کنید u و v بردارهایی مستقل خطی در $\mathbb{R}^3$ باشند و فرض کنید P صفحه‌ای باشد که از این دو بردار و مرکز مختصات می‌گذرد. نقاط P را به صورت پارامتری اینگونه نشان می‌دهیم $x = su + tv$. نشان دهید تبدیل خطی $P, T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ را یا به یک صفحه گذرنده از مبدا یا یک خط گذرنده از مبدا یا به خود مبدا مختصات نگاشت می‌کند. برای اینکه تصویر P نیز یک صفحه باشد $T(u), T(v)$ باید چه شرایط داشته باشند؟

۱۱- در مورد هر یک از تبدیل‌های زیر خطی بودن یا نبودن را بررسی کنید. در صورت خطی بودن ماتریس استاندارد آن‌ها را بیابید.

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$T(x,y) = (3x - 2y, x + 3, 8y)$$

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$T(x,y,z) = (x - y + 2z, 2x + y, -x - y + 2z)$$

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$T(x,y) = (|x|, y)$$

۱۲ (امتیازی)- مربع‌های جادویی (*magic square*) یکی از ساختارهای جالب ترکیبیاتی در ریاضی هستند که در بخش‌ها گوناگون ریاضی کاربرد دارند و ارتباط حالبی بین مربع جادویی و ساختارهای گراقیکی و ... وجود دارد، حتی این ساختارها در علوم دیگر از جمله مکانیک و کامپیوتر نیر کاربرد دارند و هنوز تعداد زیادی مسئله حل نشده ادر این زمینه وجود دارد. مربع جادویی یا وفقی جدولی است $n \times n$ که خانه‌های آن با اعداد مثبت ۱ تا n^2 پر شده است به نحوی که مجموع اعداد هر ستون عمودی و هر سطر افقی و قطر آن عدد ثابتی را نشان می‌دهد. برای مثال شکل زیر یک مربع جادویی 3×3 است:

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

❖ اگر تعداد مربع‌های جادویی 6×6 را بیابید نمره کل تکالیف شما کامل در نظر گرفته می‌شود :)

اگر M_i یک ماتریس $i \times i$ باشد که درایه‌های آن اعداد متناظر بر روی یک مربع جادویی $i \times i$ باشد آنگاه حاصل ضرب‌های ماتریسی زیر را بیابید:

$$M_1 \times [1], \quad M_2 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad M_3 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad M_n \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

همچنین تعیین کنید یک ماتریس M_i با کدامیک از اعمال سطری پلکانی همچنان به شکل جادویی می‌ماند.