CAPÍTULO COMPLETO: MÁQUINAS DE TURING
CURSO DE GRAMÁTICAS Y LENGUAJES FORMALES - Código IS405 - Grupo 01

Programa de Ingeniería de Sistemas y Computación
Profesor Hugo Humberto Morales Peña
Semestre Agosto/Diciembre 2021

Máquinas de Turing

Los lenguajes regulares son un subconjunto propio de los lenguajes independientes del contexto, por lo tanto, los autómatas finitos son menos potentes que los autómatas de pila, con respecto a la capacidad de reconocer lenguajes. Las Máquinas de Turing sirven para reconocer lenguajes y son mucho más generales que los autómatas finitos y autómatas de pila.

Al pasar de autómatas finitos a autómatas de pila se introdujo un dispositivo de almacenamiento, la pila, que proporcionó la posibilidad de "recordar" la cantidad de información necesaria para el reconocimiento de los lenguajes independientes del contexto.

No existe un Autómata De Pila que reconozca el lenguaje $L = \{a^n \cdot b^n \cdot c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, en la pila se guardan símbolos para llevar la cuenta de las a'es, luego estos símbolos son desapilados para garantizar que se tiene la misma cantidad de b's, pero después no hay símbolos para garantizar que se tiene la misma cantidad de c's, pues la pila está vacía. Lo que se necesita es un mecanismo (al estilo de punteros) que no elimine los símbolos de la pila sino que permita moverse entre ellos.

El manejo dado a la memoria por las máquinas de Turing es sencillo, consiste en una colección de celdas de almacenamiento que se extiende infinitamente en ambas direcciones (es una cinta infinita). Cada celda es capaz de almacenar un único símbolo. La colección no tiene una celda primera ni última, por lo tanto, tiene una capacidad de almacenamiento ilimitada. A los contenidos de las celdas se puede acceder en cualquier orden. Además, tendrá, asociada con la cinta, una cabeza de lectoescritura que puede moverse sobre la cinta y por cada movimiento leerá o escribirá un símbolo.

Definición

Una Máquina de Turing es una 7-tupla $M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ s,\ ƀ,\ F,\ \delta)$, donde:

- Q: Conjunto finito de estados.
- Σ: Alfabeto de entrada.
- Γ: Alfabeto de la cinta.
- s: Estado inicial, $s \in Q$.
- ƀ: Símbolo blanco $ƀ \in \Gamma$ y $ƀ \notin \Sigma$.
- F: Conjunto de estados finales o de aceptación, $F \subseteq Q$.

- δ: Función parcial de transición definida por:
  $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L,\ R\}$[1]

En la definición se supone que el valor inicial de todas las celdas de la cinta es el símbolo ƀ. Se exige que $ƀ \notin \Sigma$, donde $\Sigma \subseteq \Gamma - \{ƀ\}$ y $\delta(q,\ \sigma) = (p,\ t,\ x)$ donde $q,\ p \in Q,\ \ \sigma,\ t \in \Gamma$ y x es la dirección del desplazamiento de la cabeza de lectoescritura. Asumir que la cinta se extiende de izquierda a derecha.

Una función "parcial" no está necesariamente definida para todo elemento del que realiza la transformación, por lo tanto, puede que δ no tenga una imagen para algún par ordenado de $Q \times \Gamma$.

Como las transiciones dependen únicamente del estado actual y del contenido de la celda sobre la que se encuentra la cabeza de lectoescritura, entonces cualquier cadena de entrada se debe presentar a la Máquina de Turing sobre su cinta.

Ejemplo 1:

Construir una Máquina de Turing que reconozca única y exclusivamente las palabras del lenguaje:

$$L = \{a^n \cdot b^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$$

Estrategia:

En la estrategia se utilizará **la destrucción o borrado** de la primera '`a`' del comienzo de la palabra y compensará destruyendo (es decir, borrando) la última '`b`' de la palabra, para poder lograr esto se borra la '`a`' del comienzo y se transita a un estado el cual tiene un lazo que le permite ir moviendo la cabeza de lectoescritura a la derecha sobre cada uno de los símbolos de la palabra hasta alcanzar el símbolo blanco de la cinta ('ƀ'), con el símbolo blanco de la cinta se transita a otro estado moviendo la cabeza de lectoescritura a la izquierda y quedando ubicada sobre la última '`b`' de la palabra, en dicho estado se transita a otro estado destruyendo (es decir, sobre escribiendo en la cinta el símbolo blanco 'ƀ' en lugar del símbolo '`b`'), ahora en ese estado se tiene que construir un lazo para devolver la cabeza de lectoescritura hasta quedar posicionada sobre el símbolo blanco de la cinta, después se debe transitar a otro estado moviendo la cabeza de lectoescritura a la derecha y quedando posiblemente sobre la primera '`a`' y volver a comenzar todo el proceso de nuevo. El reconocimiento de la palabra termina cuando ya no hay ninguna otra letra '`a`', aceptando la palabra si la cabeza de lectoescritura quedó sobre el símbolo blanco de la cinta o rechazando si por el contrario quedó sobre un símbolo '`b`'.

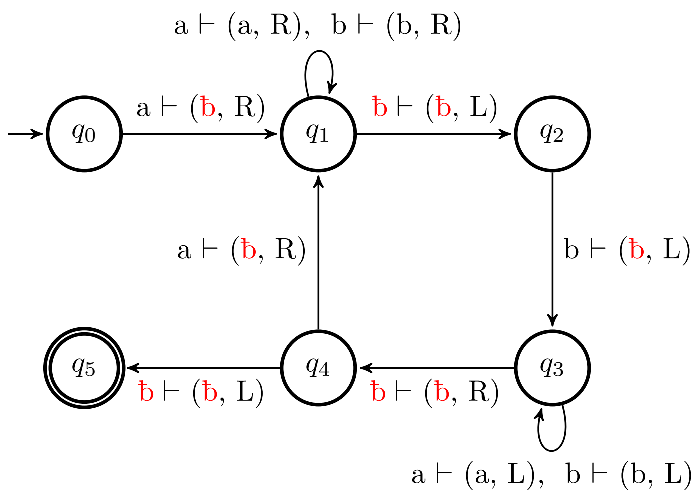
A continuación se presenta una Maquina de Turing que se apoya en la **estrategia destructiva** presentada anteriormente.

Sea la Máquina de Turing $M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ s,\ ƀ,\ F,\ \delta)$ donde:
$Q = \{q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5\}$,
$\Sigma = \{a,\ b\}$,
$\Gamma = \{ƀ,\ a,\ b\}$,
$s = q_0$,
$ƀ = ƀ$,
$F = \{q_5\}$,

δ	ƀ	a	b
q_0		$(q_1,\ ƀ,\ R)$	
q_1	$(q_2,\ ƀ,\ L)$	$(q_1,\ a,\ R)$	$(q_1,\ b,\ R)$
q_2			$(q_3,\ ƀ,\ L)$
q_3	$(q_4,\ ƀ,\ R)$	$(q_3,\ a,\ L)$	$(q_3,\ b,\ L)$
q_4	$(q_5,\ ƀ,\ L)$	$(q_1,\ ƀ,\ R)$	
q_5			

[1] **L** por la palabra en inglés que significa izquierda (Left) y **R** por su palabra en inglés que significa derecha (Right)

La Máquina de Turing M tienen el siguiente diagrama de transiciones:



Notación para hacerle seguimiento a la Máquina de Turing

Una configuración (o descripción instantánea) es un par ordenado $(q_i, w_1\underline{\sigma}w_2)$, donde q_i es el estado actual, w_1 es la cadena de la cinta que precede a la celda sobre la que se encuentra la cabeza de lectoescritura, $\underline{\sigma}$ es el símbolo de la cinta sobre el que se encuentra la cabeza de lectoescritura y w_2 es la cadena que está a la derecha de la cabeza de lectoescritura.

Máquinas de Turing como aceptadoras de lenguajes

Una Máquina de Turing se puede comportar como un aceptador de lenguaje, de la misma forma como lo hace un autómata finito o un autómata de pila.

Para reconocer una cadena w, la cadena se coloca sobre la cinta, se sitúa la cabeza de lectoescritura sobre el símbolo del extremo izquierdo de la cadena w y se coloca en marcha la Máquina de Turing comenzando en el estado inicial. La palabra w es aceptada si después de una secuencia de movimientos, la Máquina de Turing llega a un estado de aceptación y se bloquea.

Definición

Sea $M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ s,\ \text{ƀ},\ F,\ \delta)$ una Máquina de Turing. Entonces el lenguaje aceptado por M es:

$$L(M) = \left\{ w \mid w \in \Sigma^*,\ (q_0,\ \text{ƀ}\underline{w_1}w_2 \ldots w_n\text{ƀ}) \overset{*}{\vdash} (p,\ \text{ƀ}w_1\text{'} \ldots \underline{w_k\text{'}} \ldots w_{n-1}\text{'}w_n\text{'ƀ}) \text{ para } s = q_0,\ p \in F \ \text{ y } w_i, w_j\text{'} \in \Gamma \right\}$$

Ejemplo 2:

Para la Máquina de Turing del *Ejemplo 1* hacer el seguimiento para el reconocimiento o no por medio de descripciones instantáneas de las palabras: `ab`, `aab` y `aabb`.

¿$ab \in L(M)$?

$(q_0,\ \text{ƀ}\underline{a}b\text{ƀ}) \vdash (q_1,\ \text{ƀƀ}\underline{b}\text{ƀ}) \vdash (q_1,\ \text{ƀƀ}b\underline{\text{ƀ}}) \vdash (q_2,\ \text{ƀƀ}\underline{b}\text{ƀ}) \vdash (q_3,\ \text{ƀ}\underline{\text{ƀ}}\text{ƀƀ}) \vdash (q_4,\ \text{ƀƀ}\underline{\text{ƀ}}\text{ƀ}) \vdash (q_5,\ \text{ƀ}\underline{\text{ƀ}}\text{ƀƀ}) \vdash$ se bloquea.

"ab" $\in L(M)$ porque la Máquina de Turing se bloquea en un estado de aceptación ($q_5 \in F$).

¿$aab \in L(M)$?

$(q_0,\ \text{ƀ}\underline{a}ab\text{ƀ}) \vdash (q_1,\ \text{ƀƀ}\underline{a}b\text{ƀ}) \vdash (q_1,\ \text{ƀƀ}a\underline{b}\text{ƀ}) \vdash (q_1,\ \text{ƀƀ}ab\underline{\text{ƀ}}) \vdash (q_2,\ \text{ƀƀ}a\underline{b}\text{ƀ}) \vdash (q_3,\ \text{ƀƀ}\underline{a}\text{ƀƀ}) \vdash (q_3,\ \text{ƀ}\underline{\text{ƀ}}a\text{ƀƀ}) \vdash (q_4,\ \text{ƀƀ}\underline{a}\text{ƀƀ}) \vdash (q_1,\ \text{ƀƀƀ}\underline{\text{ƀ}}\text{ƀ}) \vdash (q_2,\ \text{ƀƀ}\underline{\text{ƀ}}\text{ƀƀ}) \vdash$ se bloquea. "aab" $\notin L(M)$ porque la Máquina de Turing se bloqueó en un estado que no es de aceptación ($q_2 \notin F$).

¿$aabb \in L(M)$?

$(q_0,\ \text{ƀ}\underline{a}abb\text{ƀ}) \vdash (q_1,\ \text{ƀƀ}\underline{a}bb\text{ƀ}) \vdash (q_1,\ \text{ƀƀ}a\underline{b}b\text{ƀ}) \vdash (q_1,\ \text{ƀƀ}ab\underline{b}\text{ƀ}) \vdash (q_1,\ \text{ƀƀ}abb\underline{\text{ƀ}}) \vdash (q_2,\ \text{ƀƀ}ab\underline{b}\text{ƀ}) \vdash (q_3,\ \text{ƀƀ}a\underline{b}\text{ƀƀ}) \vdash (q_3,\ \text{ƀƀ}\underline{a}b\text{ƀƀ}) \vdash (q_3,\ \text{ƀ}\underline{\text{ƀ}}ab\text{ƀƀ}) \vdash (q_4,\ \text{ƀƀ}\underline{a}b\text{ƀƀ}) \vdash (q_1,\ \text{ƀƀƀ}\underline{b}\text{ƀƀ}) \vdash (q_1,\ \text{ƀƀƀ}b\underline{\text{ƀ}}\text{ƀ}) \vdash (q_2,\ \text{ƀƀƀ}\underline{b}\text{ƀƀ}) \vdash (q_3,\ \text{ƀƀ}\underline{\text{ƀ}}\text{ƀƀƀ}) \vdash (q_4,\ \text{ƀƀƀ}\underline{\text{ƀ}}\text{ƀƀ}) \vdash (q_5,\ \text{ƀƀ}\underline{\text{ƀ}}\text{ƀƀƀ}) \vdash$ se bloquea. "$aabb$" $\in L(M)$ porque la Máquina de Turing se bloquea en un estado de aceptación ($q_5 \in F$).

Ejemplo 3:

Construir un Máquina de Turing que reconozca única y exclusivamente las palabras del lenguaje:

$$L = \{a^m \cdot b^n \cdot d^{m+n} \mid m, n \in \mathbb{Z}^+\}$$

Estrategia:

1. Garantizar el orden relativo de las letras al interior de la palabra, las a'es agrupadas al comienzo (una o más a'es), las b'es agrupadas en el intermedio (una o más b'es) y las d'es agrupadas al final de la palabra (una o más d'es)

2. Mientras se garantiza el orden relativo las b'es se cambian por a'es y las d'es se cambian por b'es

3. En los puntos 1 y 2 de la estrategia se ha trabajado una **Máquina de Turing conservativa** en la cual se ha cambiado el lenguaje $L = \{a^m \cdot b^n \cdot d^{m+n} \mid m,\ n \in \mathbb{Z}^+\}$ por un lenguaje más fácil de trabajar el cual es $L = \{a^p \cdot b^p \mid p \in \mathbb{Z}^+,\ p = m + n\}$

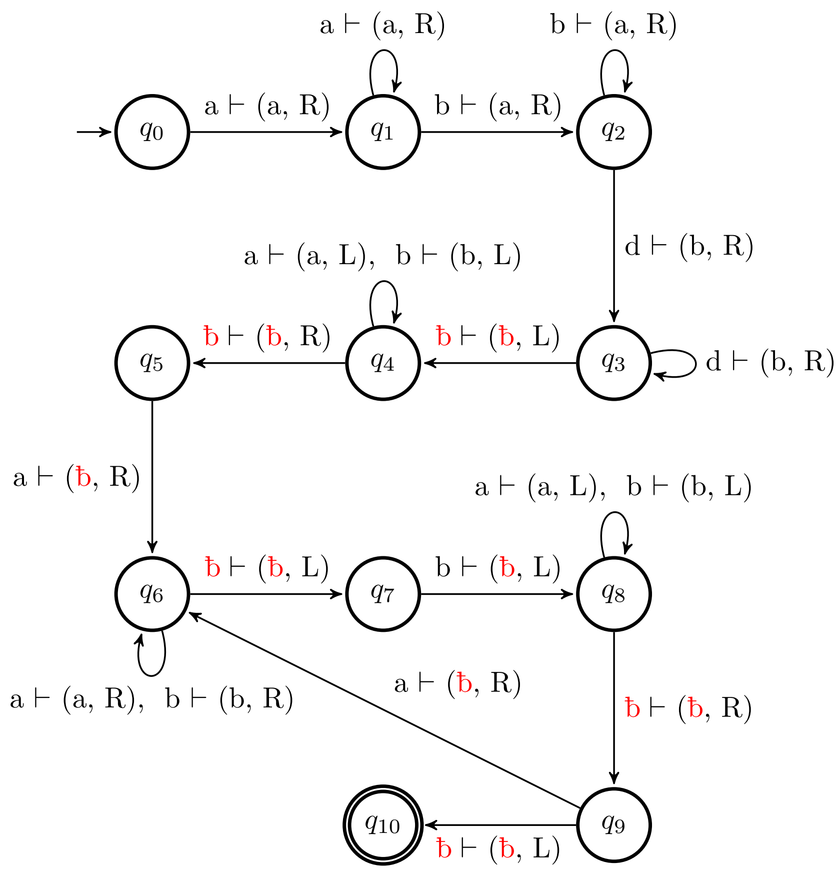
4. Ahora es solo utilizar la estrategia de **Máquina de Turing destructiva** trabajada en el *Ejemplo 1* (de la clase anterior) en la cual se destruye la '`a`' del comienzo de la palabra y compensa destruyendo (es decir, borrando) la '`b`' del final de la palabra y así sucesivamente hasta no poder borrar ninguna otra '`a`' del comienzo de la palabra y donde queda la cabeza de lectoescritura sobre el símbolo blanco de la cinta 'ƀ', con lo cual se debe aceptar la palabra original.

A continuación se presenta una Maquina de Turing que se apoya en una **estrategia híbrida**, la cual es la mezcla de Máquina de Turing conservativa y Máquina de Turing destructiva.

Sea la Máquina de Turing $M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ s,\ \text{ƀ},\ F,\ \delta)$ donde:
$Q = \{q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7,\ q_8,\ q_9,\ q_{10}\}$,
$\Sigma = \{a,\ b,\ d\}$,
$\Gamma = \{\text{ƀ},\ a,\ b,\ d\}$,
$s = q_0$,
$\text{ƀ} = \text{ƀ}$,
$F = \{q_{10}\}$,

δ	ƀ	a	b	d
q_0		$(q_1,\ a,\ R)$		
q_1		$(q_1,\ a,\ R)$	$(q_2,\ a,\ R)$	
q_2			$(q_2,\ a,\ R)$	$(q_3,\ b,\ R)$
q_3	$(q_4,\ \text{ƀ},\ L)$			$(q_3,\ b,\ R)$
q_4	$(q_5,\ \text{ƀ},\ R)$	$(q_4,\ a,\ L)$	$(q_4,\ b,\ L)$	
q_5		$(q_6,\ \text{ƀ},\ R)$		
q_6	$(q_7,\ \text{ƀ},\ L)$	$(q_6,\ a,\ R)$	$(q_6,\ b,\ R)$	
q_7			$(q_8,\ \text{ƀ},\ L)$	
q_8	$(q_9,\ \text{ƀ},\ R)$	$(q_8,\ a,\ L)$	$(q_8,\ b,\ L)$	
q_9	$(q_{10},\ \text{ƀ},\ L)$	$(q_6,\ \text{ƀ},\ R)$		
q_{10}				

La Máquina de Turing M tienen el siguiente diagrama de transiciones:



Ejemplo 4:

Para la Máquina de Turing del *Ejemplo 3* hacer el seguimiento para el reconocimiento o no por medio de descripciones instantáneas de la palabra: `aabddd`.

¿aabddd $\boldsymbol{\in L(M)}$**?**

$(q_0,\ \text{ƀ}\underline{a}abddd\text{ƀ}) \vdash (q_1,\ \text{ƀ}a\underline{a}bddd\text{ƀ}) \vdash (q_1,\ \text{ƀ}aa\underline{b}ddd\text{ƀ}) \vdash (q_2,\ \text{ƀ}aaa\underline{d}dd\text{ƀ}) \vdash (q_3,\ \text{ƀ}aaab\underline{d}d\text{ƀ}) \vdash (q_3,\ \text{ƀ}aaabb\underline{d}\text{ƀ}) \vdash$ $(q_3,\ \text{ƀ}aaabbb\underline{\text{ƀ}}) \vdash (q_4,\ \text{ƀ}aaabb\underline{b}\text{ƀ}) \vdash (q_4,\ \text{ƀ}aaab\underline{b}b\text{ƀ}) \vdash (q_4,\ \text{ƀ}aaa\underline{b}bb\text{ƀ}) \vdash (q_4,\ \text{ƀ}aa\underline{a}bbb\text{ƀ}) \vdash (q_4,\ \text{ƀ}a\underline{a}abbb\text{ƀ}) \vdash$ $(q_4,\ \text{ƀ}\underline{a}aabbb\text{ƀ}) \vdash (q_4,\ \underline{\text{ƀ}}aaabbb\text{ƀ}) \vdash (q_5,\ \text{ƀ}\underline{a}aabbb\text{ƀ}) \vdash (q_6,\ \text{ƀƀ}\underline{a}abbb\text{ƀ}) \vdash \ldots \vdash (q_6,\ \text{ƀƀ}aabbb\underline{\text{ƀ}}) \vdash (q_7,\ \text{ƀƀ}aabb\underline{b}\text{ƀ}) \vdash$ $(q_8,\ \text{ƀƀ}aab\underline{b}\text{ƀƀ}) \vdash \ldots \vdash (q_8,\ \text{ƀ}\underline{\text{ƀ}}aabb\text{ƀƀ}) \vdash (q_9,\ \text{ƀƀ}\underline{a}abb\text{ƀƀ}) \vdash (q_6,\ \text{ƀƀƀ}\underline{a}bb\text{ƀƀ}) \vdash \ldots \vdash (q_6,\ \text{ƀƀƀ}abb\underline{\text{ƀ}}\text{ƀ}) \vdash$ $(q_7,\ \text{ƀƀƀ}ab\underline{b}\text{ƀƀ}) \vdash (q_8,\ \text{ƀƀƀ}a\underline{b}\text{ƀƀƀ}) \vdash \ldots \vdash (q_8,\ \text{ƀƀ}\underline{\text{ƀ}}ab\text{ƀƀƀ}) \vdash (q_9,\ \text{ƀƀƀ}\underline{a}b\text{ƀƀƀ}) \vdash (q_6,\ \text{ƀƀƀƀ}\underline{b}\text{ƀƀƀ}) \vdash (q_6,\ \text{ƀƀƀƀ}b\underline{\text{ƀ}}\text{ƀƀ}) \vdash$ $(q_7,\ \text{ƀƀƀƀ}\underline{b}\text{ƀƀƀ}) \vdash (q_8,\ \text{ƀƀƀ}\underline{\text{ƀ}}\text{ƀƀƀƀ}) \vdash (q_9,\ \text{ƀƀƀƀ}\underline{\text{ƀ}}\text{ƀƀƀ}) \vdash (q_{10},\ \text{ƀƀƀ}\underline{\text{ƀ}}\text{ƀƀƀƀ}) \vdash$ se bloquea. "*aabddd*" $\in L(M)$ porque la Máquina de Turing se bloquea en un estado que es de aceptación ($q_{10} \in F$).

Ejemplo 5:

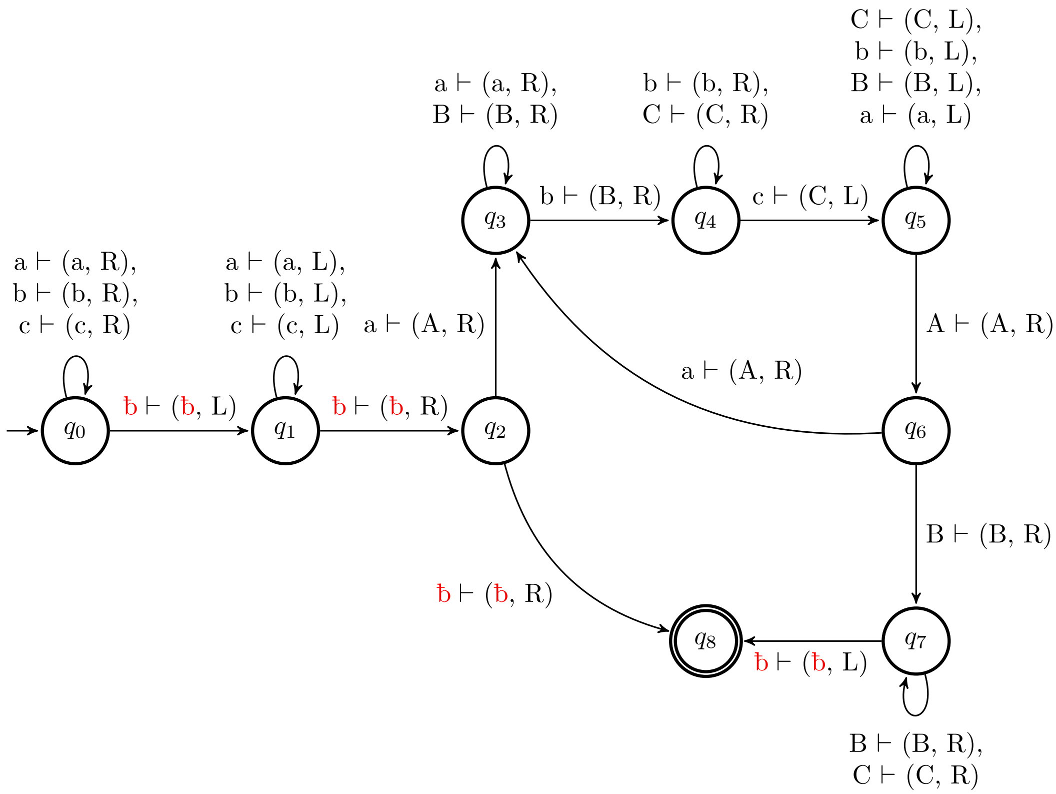
Construir una Máquina de Turing que reconozca única y exclusivamente las palabras del lenguaje:

$$L = \{a^n \cdot b^n \cdot c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Sea la Máquina de Turing $M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ s,\ \text{ƀ},\ F,\ \delta)$ donde:
$Q = \{q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6\}$,
$\Sigma = \{a,\ b,\ c\}$,
$\Gamma = \{\text{ƀ},\ a,\ b,\ c,\ A,\ B,\ C\}$,
$s = q_0$,
$\text{ƀ} = \text{ƀ}$,
$F = \{q_6\}$,

δ	ƀ	a	b	c	A	B	C
q_0	$(q_1,\ \text{ƀ},\ L)$	$(q_0,\ a,\ R)$	$(q_0,\ b,\ R)$	$(q_0,\ c,\ R)$			
q_1	$(q_2,\ \text{ƀ},\ R)$	$(q_1,\ a,\ L)$	$(q_1,\ b,\ L)$	$(q_1,\ c,\ L)$			
q_2	$(q_8,\ \text{ƀ},\ R)$	$(q_3,\ A,\ R)$					
q_3		$(q_3,\ a,\ R)$	$(q_4,\ B,\ R)$			$(q_3,\ B,\ R)$	
q_4			$(q_4,\ b,\ R)$	$(q_5,\ C,\ L)$			$(q_4,\ C,\ R)$
q_5		$(q_5,\ a,\ L)$	$(q_5,\ b,\ L)$		$(q_6,\ A,\ R)$	$(q_5,\ B,\ L)$	$(q_5,\ C,\ L)$
q_6		$(q_3,\ A,\ R)$				$(q_7,\ B,\ R)$	
q_7	$(q_8,\ \text{ƀ},\ L)$					$(q_7,\ B,\ R)$	$(q_7,\ C,\ R)$
q_8							

La Máquina de Turing M tienen el siguiente diagrama de transiciones:


a ⊢ (a, R),
b ⊢ (b, R),
c ⊢ (c, R)
ƀ ⊢ (ƀ, L)
a ⊢ (a, L),
b ⊢ (b, L),
c ⊢ (c, L)
ƀ ⊢ (ƀ, R)
a ⊢ (A, R)
a ⊢ (a, R),
B ⊢ (B, R)
b ⊢ (B, R)
b ⊢ (b, R),
C ⊢ (C, R)
c ⊢ (C, L)
C ⊢ (C, L),
b ⊢ (b, L),
B ⊢ (B, L),
a ⊢ (a, L)
A ⊢ (A, R)
a ⊢ (A, R)
B ⊢ (B, R)
ƀ ⊢ (ƀ, R)
ƀ ⊢ (ƀ, L)
B ⊢ (B, R),
C ⊢ (C, R)
q_0
q_1
q_2
q_3
q_4
q_5
q_6
q_7
q_8