CAPÍTULO COMPLETO: AUTÓMATAS DE PILA
CURSO DE GRAMÁTICAS Y LENGUAJES FORMALES - Código IS405 - Grupo 01

Programa de Ingeniería de Sistemas y Computación
Profesor Hugo Humberto Morales Peña
Semestre Agosto/Diciembre 2021

Autómatas de Pila

Las Gramáticas Independientes del Contexto amplían la capacidad para especificar lenguajes al incluir algunos lenguajes que no son reconocidos por un autómata finito.

Los **Autómatas de Pila** son capaces de recibir cualquier lenguaje independiente del contexto, éstos autómatas cuentan con un mecanismo que permite almacenamiento ilimitado y opera como una pila.

Un **Autómata de Pila** se comporta de forma similar a como lo hacen los Autómatas Finitos, en todo momento se encuentra en un estado y el cambio de estado depende del estado actual y de una información adicional, dicha información es el símbolo de entrada que está en ese momento en el tope de la pila. Además de cambiar de estado, el autómata de pila cambia, también el tope de la pila.

Definición:

Un Autómata De Pila No Determinista (ADPND) es una 7-tupla, $M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ s,\ Z,\ F,\ \Delta)$ donde:

- Q: Es un conjunto finito de estados.
- Σ: Es el alfabeto de entrada sobre el cual se reconocen las palabras.
- Γ: Es el alfabeto de pila.
- s: Es el estado inicial del autómata, $s \in Q$.
- Z: Es el símbolo inicial de la pila, $Z \in \Gamma$.
- F: Es el conjunto de estados finales o de aceptación, $F \subseteq Q$.
- Δ: Es la relación de transición.
  $\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$

Δ es una relación donde la entrada es una terna $(q,\ \sigma,\ \gamma)$, donde $q \in Q$, $\sigma \in (\Sigma \cup \{\lambda\})$ y $\gamma \in \Gamma$, el resultado de la relación es un conjunto de pares ordenados $(p,\ w)$, donde $p \in Q$ es el estado siguiente y $w \in \Gamma^*$ es la cadena que se introducirá (o apilará) en la pila en lugar del símbolo γ que estaba antes de allí.

Tener en cuenta que $\lambda \in \Gamma^*$, por lo tanto el resultado de la relación Δ para una terna $(q,\ a,\ b)$ puede ser el par ordenado $(p,\ \lambda)$, esto indica que el siguiente estado es p y que el símbolo b se elimina (o desapila) del tope de la pila.

Una $\Delta(q,\ \lambda,\ a) = \{(p,\ aa)\}$ indica que el ADPND puede cambiar a un estado p y apilar una a en la pila sin consumir ningún símbolo de la entrada.

También se tiene que $\Delta(q,\ \sigma,\ \gamma) = \{\ \}$, esto indica que no es posible ningún movimiento desde el estado q con el símbolo de entrada σ y con el símbolo de la pila γ. En este caso, el ADPND parará su ejecución.

Ejemplo 1:

Sea el Autómata De Pila No Determinista $M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ s,\ Z,\ F,\ \Delta)$ donde:
$Q = \{q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3\}$,
$\Sigma = \{a,\ b\}$,
$\Gamma = \{Z,\ B\}$,
$s = q_0$,
$Z = Z$,
$F = \{q_3\}$,

Δ	$(a,\ Z)$	$(a,\ B)$	$(b,\ Z)$	$(b,\ B)$	$(\lambda,\ Z)$	$(\lambda,\ B)$
q_0	$\{(q_1,\ BZ)\}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$
q_1	$\{\ \}$	$\{(q_1,\ BB)\}$	$\{\ \}$	$\{(q_2,\ \lambda)\}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$
q_2	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{(q_2,\ \lambda)\}$	$\{(q_3,\ Z)\}$	$\{\ \}$
q_3	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$

El ADPND tiene el siguiente diagrama de transiciones:

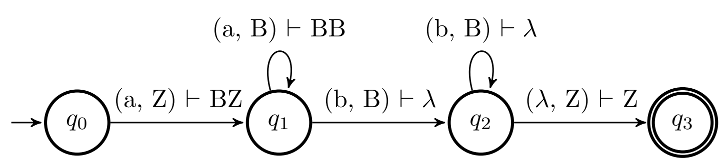


Figura 1: Diagrama de transición para el ADPND.

El ADPND anterior permite reconocer única y exclusivamente las palabras del lenguaje $L = \{a^n \cdot b^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Nota:

No hay transiciones para todas las ternas $(q,\ \sigma,\ \gamma)$, donde $q \in Q$, $\sigma \in \Sigma$ y $\gamma \in \Gamma$, por lo tanto, si el ADPND pasa a un estado para el cual no se especifica un estado siguiente y una acción de la pila, el ADPND no puede volver a realizar ningún movimiento, por lo tanto su actividad termina y la cadena original w es aceptada si el estado q es un estado de aceptación y se han consumido todos los símbolos de la cadena, de lo contrario la cadena es rechazada.

Definición:

La terna $(q,\ w,\ u)$, donde q es el estado actual, w es la cadena de entrada restante y u el contenido de la pila (con el símbolo del tope de la pila en el extremo de la izquierda), se llama Descripción Instantánea (D. I.) del autómata.

Se indica un movimiento de una configuración a otra situando el símbolo $\vdash$ entre dos descripciones instantáneas $(q_1,\ a \cdot w,\ b \cdot x) \vdash (q_2,\ w,\ y \cdot x)$, donde $(q_2,\ y) \in \Delta(q_1,\ a,\ b)$.

Definición:

Se denotan los movimientos con un número arbitrario de pasos por medio de $\overset{*}{\vdash}$ y $\overset{+}{\vdash}$ (donde $\overset{*}{\vdash}$ indica cero o más pasos y $\overset{+}{\vdash}$ indica uno o más pasos).

Definición:

Sea $M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ s,\ Z,\ F,\ \Delta)$ un ADPND. El lenguaje aceptado por M denotado por $L(M)$ es el conjunto $L(M) = \left\{w \mid w \in \Sigma^*,\ (s,\ w,\ Z) \overset{*}{\vdash} (p,\ \lambda,\ u) \text{ para } p \in F \text{ y } u \in \Gamma^*\right\}$

Ejemplo 2:

En la clase anterior trabajamos el autómata de pila no determinista $M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ s,\ Z,\ F,\ \Delta)$ donde:
$Q = \{q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3\}$,
$\Sigma = \{a,\ b\}$,
$\Gamma = \{Z,\ B\}$,
$s = q_0$,
$Z = Z$,
$F = \{q_3\}$,

Δ	$(a,\ Z)$	$(a,\ B)$	$(b,\ Z)$	$(b,\ B)$	$(\lambda,\ Z)$	$(\lambda,\ B)$
q_0	$\{(q_1,\ BZ)\}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$
q_1	$\{\ \}$	$\{(q_1,\ BB)\}$	$\{\ \}$	$\{(q_2,\ \lambda)\}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$
q_2	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{(q_2,\ \lambda)\}$	$\{(q_3,\ Z)\}$	$\{\ \}$
q_3	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$

el cual tiene el siguiente diagrama de transiciones:

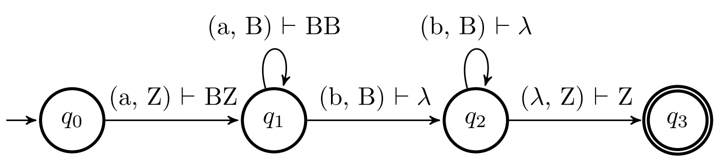


Figura 2: Diagrama de transición para el ADPND.

Utilizar descripciones instantáneas para hacer el reconocimiento de las siguientes palabras:

¿a ∈ L(M)?

$(q_0,\ \underline{a},\ \underline{Z}) \vdash (q_1,\ \underline{\lambda},\ \underline{B}Z) \vdash$ se bloquea, "a" $\notin L(M)$ porque $q_1 \notin F$.

¿b ∈ L(M)?

$(q_0,\ \underline{b},\ \underline{Z}) \vdash$ se bloquea, "b" $\notin L(M)$ porque $q_0 \notin F$.

¿ab ∈ L(M)?

$(q_0,\ \underline{a}b,\ \underline{Z}) \vdash (q_1,\ \underline{b},\ \underline{B}Z) \vdash (q_2,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash (q_3,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash$ se bloquea, "ab" $\in L(M)$ porque $q_3 \in F$ y se consumieron todos los símbolos de la palabra.

¿$aab \in L(M)$?

$(q_0,\ \underline{a}ab,\ \underline{Z}) \vdash (q_1,\ \underline{a}b,\ \underline{B}Z) \vdash (q_1,\ \underline{b},\ \underline{B}BZ) \vdash (q_2,\ \underline{\lambda},\ \underline{B}Z) \vdash$ se bloquea, "`aab`" $\notin L(M)$ porque $q_2 \notin F$.

¿$abb \in L(M)$?

$(q_0,\ \underline{a}bb,\ \underline{Z}) \vdash (q_1,\ \underline{b}b,\ \underline{B}Z) \vdash (q_2,\ \underline{\lambda}b,\ \underline{Z}) \vdash (q_3,\ \underline{b},\ \underline{Z}) \vdash$ se bloquea, "`abb`" $\notin L(M)$ independientemente de que $q_3 \in F$ porque no se consumieron todos los símbolos de la palabra.

¿$aabb \in L(M)$?

$(q_0,\ \underline{a}abb,\ \underline{Z}) \vdash (q_1,\ \underline{a}bb,\ \underline{B}Z) \vdash (q_1,\ \underline{b}b,\ \underline{B}BZ) \vdash (q_2,\ \underline{b},\ \underline{B}Z) \vdash (q_2,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash (q_3,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash$ se bloquea, "`aabb`" $\in L(M)$ porque $q_3 \in F$ y se consumieron todos los símbolos de la palabra.

Ejercicio 1:

Construir un autómata de pila no determinista que reconozca única y exclusivamente las palabras del lenguaje:

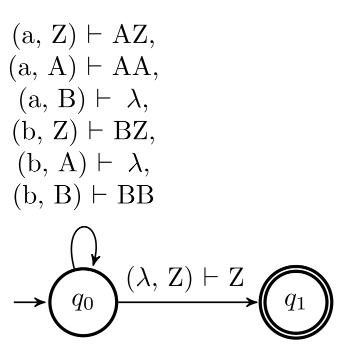
$$L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*,\ w \text{ contiene la misma cantidad de } a\text{'s que de } b\text{'s}\}$$

$L = \{\lambda,\ ab,\ ba,\ aabb,\ abab,\ abba,\ baab,\ baba,\ bbaa,\ \ldots\}$

Sea el autómata de pila no determinista $M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ s,\ Z,\ F,\ \Delta)$ donde:
$Q = \{q_0,\ q_1\}$,
$\Sigma = \{a,\ b\}$,
$\Gamma = \{Z,\ A,\ B\}$,
$s = q_0$,
$Z = Z$,
$F = \{q_1\}$,

Δ	$(a,\ Z)$	$(a,\ A)$	$(a,\ B)$	$(b,\ Z)$	$(b,\ A)$	$(b,\ B)$	$(\lambda,\ Z)$	$(\lambda,\ A)$	$(\lambda,\ B)$
q_0	$\{(q_0,\ AZ)\}$	$\{(q_0,\ AA)\}$	$\{(q_0,\ \lambda)\}$	$\{(q_0,\ BZ)\}$	$\{(q_0,\ \lambda)\}$	$\{(q_0,\ BB)\}$	$\{(q_1,\ Z)\}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$
q_1	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$

El autómata de pila no determinista tiene el siguiente diagrama de transiciones:



Utilizar descripciones instantáneas para hacer el reconocimiento de las siguientes palabras:

¿$\lambda \in L(M)$?

$(q_0,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash (q_1,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash$ se bloquea, "λ" $\in L(M)$ porque $q_1 \in F$ y se consumieron todos los símbolos de la palabra.

¿$a \in L(M)$?

$(q_0,\ \underline{a},\ \underline{Z}) \vdash (q_0,\ \underline{\lambda},\ \underline{A}Z)$ se bloquea, "a" $\notin L(M)$ porque $q_0 \notin F$.

¿$b \in L(M)$?

$(q_0,\ \underline{b},\ \underline{Z}) \vdash (q_0,\ \underline{\lambda},\ \underline{B}Z)$ se bloquea, "b" $\notin L(M)$ porque $q_0 \notin F$.

¿$ab \in L(M)$?

$(q_0,\ \underline{a}b,\ \underline{Z}) \vdash (q_0,\ \underline{b},\ \underline{A}Z) \vdash (q_0,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash (q_1,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash$ se bloquea, "ab" $\in L(M)$ porque $q_1 \in F$ y se consumieron todos los símbolos de la palabra.

¿$ba \in L(M)$?

$(q_0,\ \underline{b}a,\ \underline{Z}) \vdash (q_0,\ \underline{a},\ \underline{B}Z) \vdash (q_0,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash (q_1,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash$ se bloquea, "ba" $\in L(M)$ porque $q_1 \in F$ y se consumieron todos los símbolos de la palabra.

¿$bab \in L(M)$?

$(q_0,\ \underline{b}ab,\ \underline{Z}) \vdash (q_0,\ \underline{a}b,\ \underline{B}Z) \vdash (q_0,\ \underline{b},\ \underline{Z}) \vdash (q_0,\ \underline{\lambda},\ \underline{B}Z) \vdash$ se bloquea, "bab" $\notin L(M)$ porque $q_0 \notin F$.

¿$baab \in L(M)$?

$(q_0,\ \underline{b}aab,\ \underline{Z}) \vdash (q_0,\ \underline{a}ab,\ \underline{B}Z) \vdash (q_0,\ \underline{a}b,\ \underline{Z}) \vdash (q_0,\ \underline{b},\ \underline{A}Z) \vdash (q_0,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash (q_1,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash$ se bloquea, "$baab$" $\in L(M)$ porque $q_1 \in F$ y se consumieron todos los símbolos de la palabra.

Ejemplo 3:

Construir un autómata de pila no determinista que reconozca única y exclusivamente las palabras que pertenecen al lenguaje:

$$L = \{w \cdot c \cdot w^I \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

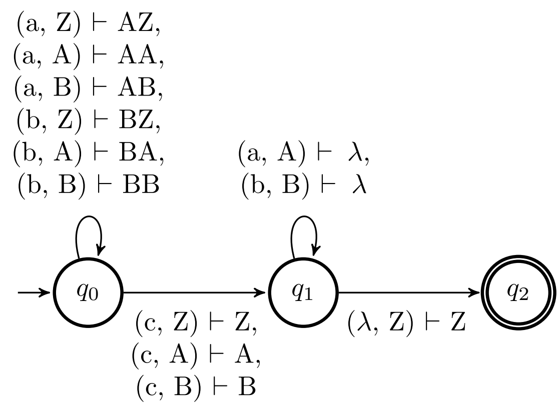
Idea: Introducir los símbolos en la pila hasta que se encuentre una "c", y luego comparar el símbolo de entrada con el que está en el tope de la pila, si concuerda entonces se quita del tope de la pila.

Sea el autómata de pila no determinista $M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ s,\ Z,\ F,\ \Delta)$ donde:
$Q = \{q_0,\ q_1,\ q_2\}$,
$\Sigma = \{a,\ b,\ c\}$,
$\Gamma = \{Z,\ A,\ B\}$,
$s = q_0$,
$Z = Z$,
$F = \{q_2\}$,

Δ	$(a,\ Z)$	$(a,\ A)$	$(a,\ B)$	$(b,\ Z)$	$(b,\ A)$	$(b,\ B)$	...
q_0	$\{(q_0,\ AZ)\}$	$\{(q_0,\ AA)\}$	$\{(q_0,\ AB)\}$	$\{(q_0,\ BZ)\}$	$\{(q_0,\ BA)\}$	$\{(q_0,\ BB)\}$	...
q_1	$\{\ \}$	$\{(q_1,\ \lambda)\}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{(q_1,\ \lambda)\}$	...
q_2	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	...

Δ	$(c,\ Z)$	$(c,\ A)$	$(c,\ B)$	$(\lambda,\ Z)$	$(\lambda,\ A)$	$(\lambda,\ B)$
q_0	$\{(q_1,\ Z)\}$	$\{(q_1,\ A)\}$	$\{(q_1,\ B)\}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$
q_1	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{(q_2,\ Z)\}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$
q_2	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$

El autómata de pila no determinista tiene el siguiente diagrama de transiciones:



Utilizar descripciones instantáneas para hacer el reconocimiento de las siguientes palabras:

¿$c \in L(M)$?

$(q_0,\ \underline{c},\ \underline{Z}) \vdash (q_1,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash (q_2,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash$ se bloquea, "c" $\in L(M)$ porque $q_2 \in F$ y se consumieron todos los símbolos de la palabra.

¿$acb \in L(M)$?

¿$bca \in L(M)$?

¿$abcab \in L(M)$?

¿$abcba \in L(M)$?

Ejercicio 2:

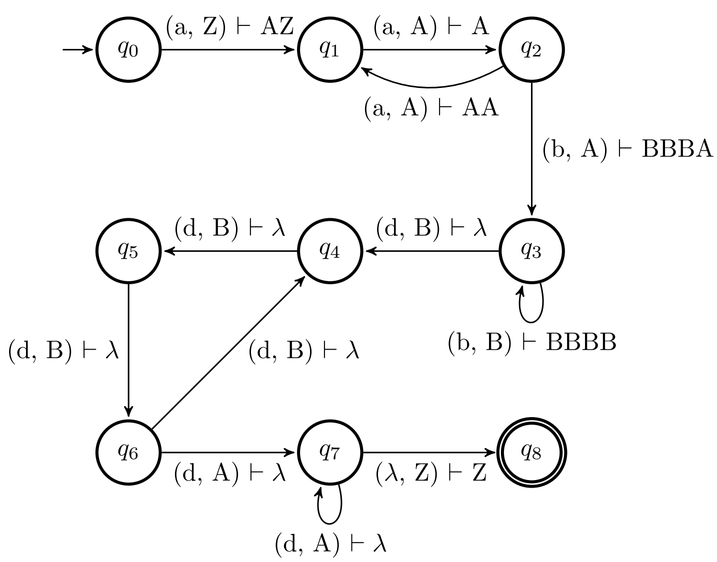
Construir un autómata de pila no determinista que reconozca única y exclusivamente las palabras del lenguaje:

$$L = \{a^{2m} \cdot b^n \cdot d^{m+3n} \mid m, n \in \mathbb{Z}^+\} = \{a^{2m} \cdot b^n \cdot d^{3n+m} \mid m, n \in \mathbb{Z}^+\} = \{a^{2m} \cdot b^n \cdot d^{3n} \cdot d^m \mid m, n \in \mathbb{Z}^+\}$$

$L = \{aabdddd,\ aaaabdddddd,\ aabbddddddd,\ aaaaaabdddddd,\ \ldots\}$

Versión 1:

El autómata de pila no determinista tiene el siguiente diagrama de transiciones:



¿*aabdddd* ∈ *L*(*M*)?

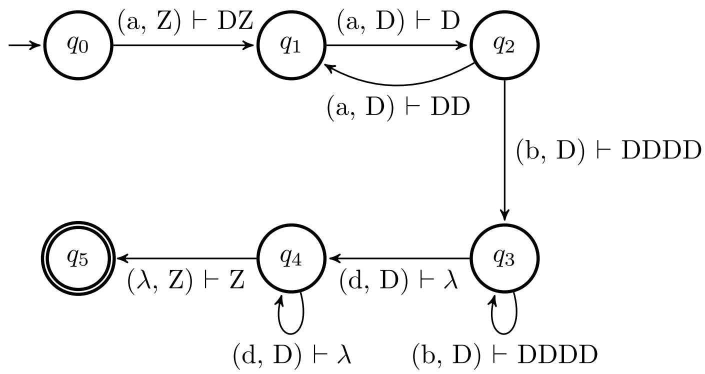
$(q_0,\ \underline{a}abdddd,\ \underline{Z}) \vdash (q_1,\ \underline{a}bdddd,\ \underline{A}Z) \vdash (q_2,\ \underline{b}dddd,\ \underline{A}Z) \vdash (q_3,\ \underline{d}ddd,\ \underline{B}BBAZ) \vdash (q_4,\ \underline{d}dd,\ \underline{B}BAZ) \vdash$
$(q_5,\ \underline{d}d,\ \underline{B}AZ) \vdash (q_6,\ \underline{d},\ \underline{A}Z) \vdash (q_7,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash (q_8,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z})$ se bloquea!, "*aabdddd*" $\in L(M)$ porque $q_8 \in F$ y se consumieron todos los símbolos de la palabra.

¿*aaaabdddddd* ∈ *L*(*M*)?

$(q_0,\ \underline{a}aaabdddddd,\ \underline{Z}) \vdash (q_1,\ \underline{a}aabdddddd,\ \underline{A}Z) \vdash (q_2,\ \underline{a}abdddddd,\ \underline{A}Z) \vdash (q_1,\ \underline{a}bdddddd,\ \underline{A}AZ) \vdash$
$(q_2,\ \underline{b}dddddd,\ \underline{A}AZ) \vdash (q_3,\ \underline{d}dddd,\ \underline{B}BBAAZ) \vdash (q_4,\ \underline{d}ddd,\ \underline{B}BAAZ) \vdash (q_5,\ \underline{d}dd,\ \underline{B}AAZ) \vdash$
$(q_6,\ \underline{d}d,\ \underline{A}AZ) \vdash (q_7,\ \underline{d},\ \underline{A}Z) \vdash (q_7,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash (q_8,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z})$ se bloquea!, "*aaaabdddddd*" $\in L(M)$ porque $q_8 \in F$ y se consumieron todos los símbolos de la palabra.

Versión 2:

El autómata de pila no determinista tiene el siguiente diagrama de transiciones:



***¿aabdddd* $\in L(M)$?**

$(q_0,\ \underline{a}abdddd,\ \underline{Z}) \vdash (q_1,\ \underline{a}bdddd,\ \underline{D}Z) \vdash (q_2,\ \underline{b}dddd,\ \underline{D}Z) \vdash (q_3,\ \underline{d}ddd,\ \underline{D}DDDZ) \vdash (q_4,\ \underline{d}dd,\ \underline{D}DDZ) \vdash$
$(q_4,\ \underline{d}d,\ \underline{D}DZ) \vdash (q_4,\ \underline{d},\ \underline{D}Z) \vdash (q_4,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash (q_5,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z})$ se bloquea!, "*aabdddd*" $\in L(M)$ porque $q_5 \in F$ y se consumieron todos los símbolos de la palabra.

***¿aaaabddddd* $\in L(M)$?**

$(q_0,\ \underline{a}aaabddddd,\ \underline{Z}) \vdash (q_1,\ \underline{a}aabddddd,\ \underline{D}Z) \vdash (q_2,\ \underline{a}abddddd,\ \underline{D}Z) \vdash (q_1,\ \underline{a}bddddd,\ \underline{D}DZ) \vdash$
$(q_2,\ \underline{b}ddddd,\ \underline{D}DZ) \vdash (q_3,\ \underline{d}dddd,\ \underline{D}DDDDZ) \vdash (q_4,\ \underline{d}ddd,\ \underline{D}DDDZ) \vdash (q_4,\ \underline{d}dd,\ \underline{D}DDZ) \vdash$
$(q_4,\ \underline{d}d,\ \underline{D}DZ) \vdash (q_4,\ \underline{d},\ \underline{D}Z) \vdash (q_4,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash (q_5,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z})$ se bloquea!, "*aaaabddddd*" $\in L(M)$ porque $q_5 \in F$ y se consumieron todos los símbolos de la palabra.

***¿aabbddddddd* $\in L(M)$?**

$(q_0,\ \underline{a}abbddddddd,\ \underline{Z}) \vdash (q_1,\ \underline{a}bbddddddd,\ \underline{D}Z) \vdash (q_2,\ \underline{b}bddddddd,\ \underline{D}Z) \vdash (q_3,\ \underline{b}ddddddd,\ \underline{D}DDDZ) \vdash$
$(q_3,\ \underline{d}dddddd,\ \underline{D}DDDDDDZ) \vdash (q_4,\ \underline{d}ddddd,\ \underline{D}DDDDDZ) \vdash (q_4,\ \underline{d}dddd,\ \underline{D}DDDDZ) \vdash (q_4,\ \underline{d}ddd,\ \underline{D}DDDZ) \vdash$
$(q_4,\ \underline{d}dd,\ \underline{D}DDZ) \vdash (q_4,\ \underline{d}d,\ \underline{D}DZ) \vdash (q_4,\ \underline{d},\ \underline{D}Z) \vdash (q_4,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z}) \vdash (q_5,\ \underline{\lambda},\ \underline{Z})$ se bloquea!, "*aabbddddddd*" $\in L(M)$ porque $q_5 \in F$ y se consumieron todos los símbolos de la palabra.

Autómatas de Pila Deterministas

Definición:

Un Autómata De Pila Determinista (ADPD) es una 7-tupla, $M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ s,\ Z,\ F,\ \delta)$ donde:

- Q: Es un conjunto finito de estados.
- Σ: Es el alfabeto de entrada sobre el cual se reconocen las palabras.
- Γ: Es el alfabeto de pila.
- s: Es el estado inicial del autómata, $s \in Q$.
- Z: Es el símbolo inicial de la pila, $Z \in \Gamma$.

- F: Es el conjunto de estados finales o de aceptación, $\{\ \} \neq F \subseteq Q$, $F \subseteq Q$.
- δ: Es la función "parcial" de transición.

  $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma^*$

Nota: Para garantizar el determinismo, $\delta(q,\ \sigma,\ \gamma)$ y $\delta(q,\ \lambda,\ \gamma)$, con $\sigma \in \Sigma$, no pueden estar simultáneamente definidos, de lo contrario el Autómata de Pila tendría una opción no determinista.

Ejemplo 4:

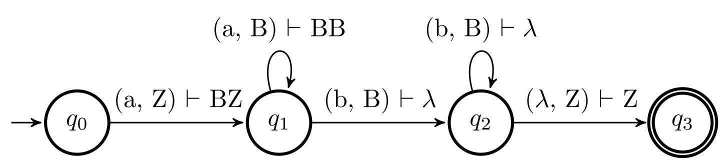
Construir un autómata de pila determinista que reconozca única y exclusivamente las palabras del lenguaje:

$$L = \{a^n \cdot b^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$$

Sea el autómata de pila determinista $M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ s,\ Z,\ F,\ \delta)$ donde:
$Q = \{q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3\}$,
$\Sigma = \{a,\ b\}$,
$\Gamma = \{Z,\ B\}$,
$s = q_0$,
$Z = Z$,
$F = \{q_3\}$,

δ	$(a,\ Z)$	$(a,\ B)$	$(b,\ Z)$	$(b,\ B)$	$(\lambda,\ Z)$	$(\lambda,\ B)$
q_0	$(q_1,\ BZ)$					
q_1		$(q_1,\ BB)$		$(q_2,\ \lambda)$		
q_2				$(q_2,\ \lambda)$	$(q_3,\ Z)$	
q_3						

El autómata de pila determinista tiene el siguiente diagrama de transiciones:

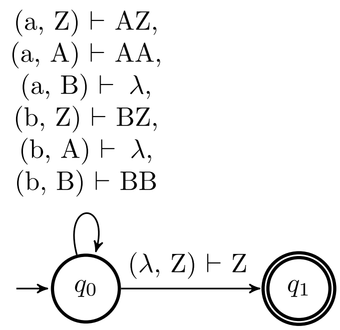


Ejemplo 5:

En clases anteriores se obtuvo el siguiente autómata de pila **no** determinista $M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ s,\ Z,\ F,\ \Delta)$ donde:
$Q = \{q_0,\ q_1\}$,
$\Sigma = \{a,\ b\}$,
$\Gamma = \{Z,\ A,\ B\}$,
$s = q_0$,
$Z = Z$,
$F = \{q_1\}$,

Δ	$(a,\ Z)$	$(a,\ A)$	$(a,\ B)$	$(b,\ Z)$	$(b,\ A)$	$(b,\ B)$	$(\lambda,\ Z)$	$(\lambda,\ A)$	$(\lambda,\ B)$
q_0	$\{(q_0,\ AZ)\}$	$\{(q_0,\ AA)\}$	$\{(q_0,\ \lambda)\}$	$\{(q_0,\ BZ)\}$	$\{(q_0,\ \lambda)\}$	$\{(q_0,\ BB)\}$	$\{(q_1,\ Z)\}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$
q_1	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$	$\{\ \}$

El cual tiene el siguiente diagrama de transiciones:



El autómata de pila no determinista anterior reconoce única y exclusivamente las palabras del lenguaje $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*,\ w \text{ contiene la misma cantidad de } a\text{'s que de } b\text{'s }\}$

¿El autómata de pila no determinista anterior es un autómata de pila determinista?

El autómata de pila anterior es únicamente **no** determinista porque las transiciones $\Delta(q_0,\ a,\ Z)$ y $\Delta(q_0,\ \lambda,\ Z)$ se presentan al mismo tiempo, lo cual hacen que el autómata de pila sea únicamente y exclusivamente no determinista.

Ejemplo 6:

Construir un autómata de pila determinista que reconozca única y exclusivamente las palabras del lenguaje:

$$L = \{w \cdot c \cdot w^I \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

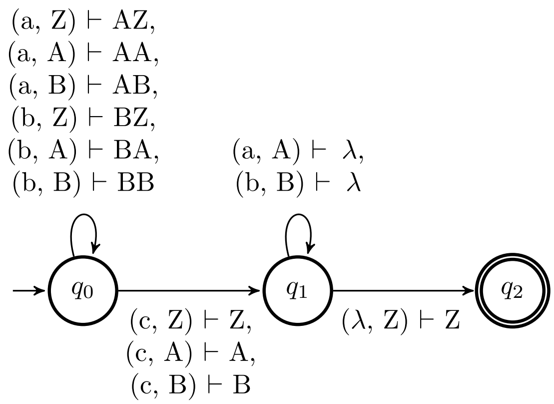
Idea: En el estado inicial del autómata almacenar los símbolos en la pila hasta que aparezca el símbolo `c`. Con el símbolo `c` se transita (sin modificar el tope de la pila) a un estado de descarga en el cual se compara el símbolo de entrada con el símbolo almacenado en el tope de la pila, si coinciden se borra el símbolo del tope de la pila. La cadena de entrada será aceptada si se consume completamente por el autómata y en la pila sólo queda el símbolo inicial.

Sea el autómata de pila determinista $M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ s,\ Z,\ F,\ \delta)$ donde:
$Q = \{q_0,\ q_1,\ q_2\}$,
$\Sigma = \{a,\ b,\ c\}$,
$\Gamma = \{Z,\ A,\ B\}$,
$s = q_0$,
$Z = Z$,
$F = \{q_2\}$,

δ	$(a,\ Z)$	$(a,\ A)$	$(a,\ B)$	$(b,\ Z)$	$(b,\ A)$	$(b,\ B)$	...
q_0	$(q_0,\ AZ)$	$(q_0,\ AA)$	$(q_0,\ AB)$	$(q_0,\ BZ)$	$(q_0,\ BA)$	$(q_0,\ BB)$	...
q_1		$(q_1,\ \lambda)$				$(q_1,\ \lambda)$	...
q_2							...

δ	$(c,\ Z)$	$(c,\ A)$	$(c,\ B)$	$(\lambda,\ Z)$	$(\lambda,\ A)$	$(\lambda,\ B)$
q_0	$(q_1,\ Z)$	$(q_1,\ A)$	$(q_1,\ B)$			
q_1				$(q_2,\ Z)$		
q_2						

El autómata de pila determinista tiene el siguiente diagrama de transiciones:



Ejemplo 7:

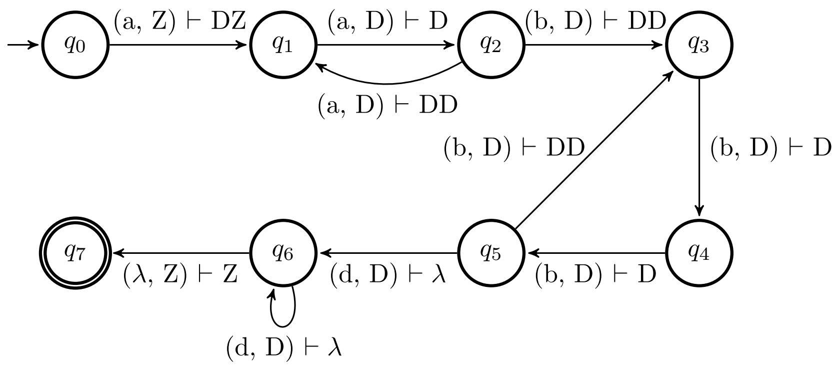
Construir un autómata de pila determinista que reconozca única y exclusivamente las palabras del lenguaje:

$$L = \{a^{2m} \cdot b^{3n} \cdot d^{m+n} \mid m,\ n \in \mathbb{Z}^+\} = \{a^{2m} \cdot b^{3n} \cdot d^{n+m} \mid m,\ n \in \mathbb{Z}^+\} = \{a^{2m} \cdot b^{3n} \cdot d^{n} \cdot d^{m} \mid m,\ n \in \mathbb{Z}^+\}$$

Sea el autómata de pila determinista $M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ s,\ Z,\ F,\ \delta)$ donde:
$Q = \{q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7\}$,
$\Sigma = \{a,\ b,\ d\}$,
$\Gamma = \{Z,\ D\}$,
$s = q_0$,
$Z = Z$,
$F = \{q_7\}$,

δ	$(a,\ Z)$	$(a,\ D)$	$(b,\ Z)$	$(b,\ D)$	$(d,\ Z)$	$(d,\ D)$	$(\lambda,\ Z)$	$(\lambda,\ D)$
q_0	$(q_1,\ DZ)$							
q_1		$(q_2,\ D)$						
q_2		$(q_1,\ DD)$		$(q_3,\ DD)$				
q_3				$(q_4,\ D)$				
q_4				$(q_5,\ D)$				
q_5				$(q_3,\ DD)$		$(q_6,\ \lambda)$		
q_6						$(q_6,\ \lambda)$	$(q_7,\ Z)$	
q_7								

El autómata de pila determinista M tiene el siguiente diagrama de transiciones:



Ejercicio 3:

¿Es posible construir un autómata de pila determinista que reconozca única y exclusivamente las palabras del lenguaje:

$$L = \{a^{2m} \cdot b^{3n} \cdot d^{m+n} \mid m,\ n \in \mathbb{N}\}?.$$

$L = \{\lambda,\ aad,\ bbbd,\ aaaadd,\ aabbbdd,\ bbbbbbdd,\ aaaaaaddd, \ldots\}$

Si es posible construir un autómata de pila determinista que reconozca dicho lenguaje, para lo cual sea el ADPD $M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ s,\ Z,\ F,\ \delta)$ donde:

$Q = \{q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,\ q_7\}$,

$\Sigma = \{a,\ b,\ d\}$,

$\Gamma = \{Z,\ D\}$,

$s = q_0$,

$Z = Z$,

$F = \{q_0,\ q_7\}$,

δ	$(a,\ Z)$	$(a,\ D)$	$(b,\ Z)$	$(b,\ D)$	$(d,\ Z)$	$(d,\ D)$	$(\lambda,\ Z)$	$(\lambda,\ D)$
q_0	$(q_1,\ DZ)$		$(q_3,\ DZ)$					
q_1		$(q_2,\ D)$						
q_2		$(q_1,\ DD)$		$(q_3,\ DD)$		$(q_6,\ \lambda)$		
q_3				$(q_4,\ D)$				
q_4				$(q_5,\ D)$				
q_5				$(q_3,\ DD)$		$(q_6,\ \lambda)$		
q_6						$(q_6,\ \lambda)$	$(q_7,\ Z)$	
q_7								

El Autómata De Pila Determinista M tiene el siguiente diagrama de transiciones: