Seminar Nr. 2

Serii numerice

$\boxed{\textbf{1.}}$ *Folosind definiţia să se studieze natura următoarelor serii, iar în caz de convergenţă să se determine suma lor:*

i) $\sum\limits_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$; **ii)** $\sum\limits_{n\geq 1} \sin\frac{3}{2^{n+2}}\sin\frac{1}{2^{n+2}}$;

iii) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$; **iv)** $\sum\limits_{n\geq 3} \arctan\frac{3}{n^2-n-1}$; v) $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\frac{2}{9}\right)^n$.

Soluţie. Pentru fiecare dintre aceste serii, termenul general (a_n) conduce la expresia şirului sumelor parţiale,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) Termenul general al seriei poate fi scris sub forma

$$a_n = \ln\frac{n-1}{n} = \ln(n-1) - \ln n,$$

deci şirul sumelor parţiale este

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1) - \ln k) = -\ln n,$$

prin urmare se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} = -\infty$, deci seria $\sum\limits_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$ este divergentă.

ii) Ţinând cont de formula $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$, termenul general al seriei poate fi scris

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{3-1}{2^{n+2}} - \cos\frac{3+1}{2^{n+2}}\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{1}{2^{n+1}} - \cos\frac{1}{2^n}\right].$$

Prin urmare, avem

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{1}{2^{n+1}} - \cos\frac{1}{2^n}\right] =$$
$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2^2} - \cos\frac{1}{2} + \cos\frac{1}{2^3} - \cos\frac{1}{2^2} + ... + \cos\frac{1}{2^{n+1}} - \cos\frac{1}{2^n}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2^{n+1}} - \cos\frac{1}{2}\right).$$

Prin trecere la limită rezultă

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2^{n+1}} - \cos\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{1}{2}\right),$$

deci seria dată este convergentă.

iii) Termenul general al seriei poate fi scris sub forma

$$a_n = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)! - n!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!},$$

deoarece este cunoscută relaţia $(n+1)! - n! = n \cdot n!$. Rezultă

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!},$$

deci suma seriei este

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1.$$

iv) Se obţine

$$a_n = \arctan\frac{3}{n^2 - n - 1} = \arctan\frac{3}{1 + n^2 - n - 2} =$$
$$\arctan\frac{(n+1) - (n-2)}{1 + (n+1)(n-2)} = \arctan(n+1) - \arctan(n-2).$$

Şirul sumelor parţiale este

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=3}^{n}(\arctan(k+1) - \arctan(k-2)) =$$

$$\arctan(n+1) + \arctan n + \arctan(n-1) - \arctan 1 - \arctan 2 - \arctan 3,$$

deci suma seriei este dată de

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - (\arctan 2 + \arctan 3) = \frac{5\pi}{4} - (\pi + \arctan\frac{5}{-5}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

v) $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{9}\right)^k = 1 + \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + ... + \left(\frac{2}{9}\right)^n = \frac{9}{7}\left(1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}\right).$

Rezultă

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{9}{7}.$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ *Studiaţi natura seriilor următoare folosind criteriul general de convergenţă al lui Cauchy:*

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; **ii)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. **i)** Pentru prima serie şirul sumelor parţiale este

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}},$$

iar

$$S_{n+p} - S_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n+p}} > \frac{p}{\sqrt{n+p}}.$$

Rezultă inegalitatea $|S_{2n} - S_n| > \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} > \varepsilon$, care demonstrează că şirul sumelor parţiale (S_n) nu este fundamental, deci divergent, aşa că seria este divergentă.

ii) Pentru cea de-a doua serie şirul sumelor parţiale este

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k(k+1)}.$$

Arătăm că S_n este şir fundamental. Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned}
|S_{n+p}-S_n| &= \left|\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)}+\frac{\cos(n+2)x}{(n+2)(n+3)}+...+\frac{\cos(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)}\right| \\
&\le \left|\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)}\right|+\left|\frac{\cos(n+2)x}{(n+2)(n+3)}\right|+...+\left|\frac{\cos(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)}\right| \\
&\le \frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+...+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \\
&= \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1} \\
&= \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon,
\end{aligned}$$

pentru $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Alegând $n_\varepsilon=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, rezultă că şirul S_n este fundamental, deci seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+n}$ este convergentă, potrivit criteriului fundamental al lui Cauchy.

$\boxed{\textbf{3.}}$ *Folosind condiţiile necesare de convergenţă ale unei serii să se arate că următoarele serii sunt divergente:*

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n+1}$; **ii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{10}}$; **iii)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\arctan\frac{n^5+2n^4+3}{2n^4+n^3+7}$;

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{8n^3+n^2-1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1})$; **v)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{7n^2}$.

Soluţie. **i)** Deoarece $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+1}=\frac{1}{2}$, rezultă că seria este divergentă.

ii) Deoarece,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{10}}=\sqrt{e}$$

rezultă că nu este îndeplinită condiţia necesară de convergenţă a seriei, deci seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{10}}$ este divergentă.

iii) Se calculează limita termenului general al seriei şi se obţine

$$\lim_{n\to\infty} \arctan \frac{n^5+2n^4+3}{2n^4+n^3+7} = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

deci seria este divergentă.

iv) Se calculează limita termenului general al seriei şi se obţine

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{8n^3+n^2-1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^3+n^2-1-n^3+n^2-1}{\sqrt[3]{(8n^3+n^2-1)^2} + \sqrt[3]{(8n^3+n^2-1)(n^3-n^2+1)} + \sqrt[3]{(n^3-n^2+1)^2}} = \infty$$

deci seria este divergentă.

v) Cum, $\lim_{n\to\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{7n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{7n^2}}{\frac{\pi}{7n^2}} \cdot \frac{\pi}{7} = \frac{\pi}{7}$, rezultă că nu este îndeplinită condiţia necesară de convergenţă a unei serii şi prin urmare seria cu termenul general $a_n = n^2 \sin \frac{\pi}{7n^2}$ nu poate fi convergentă.