DECOMPOSIÇÃO DE CHOLESKY

DEFINIÇÃO. UMA MATRIZ $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ É POSITIVA DEFINIDA SE $x^T A x > 0$, PARA TODO VETOR NÃO NULO $x \in \mathbb{R}^m$.

EXEMPLO.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow [x\ y]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x+y)^2 + x^2 + y^2 > 0,$

SIM

$\forall (x, y) \neq 0.$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x^T A x = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = (x+y)^2 + x^2 + y^2$

SIM

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x^T A x = 2x^2 + 8xy + 5y^2$

NÃO

$$= 2(x^2 + 4xy) + 5y^2$$

$$= 2[(x+2y)^2 - 4y^2] + 5y^2$$

$$= 2(x+2y)^2 - 3y^2$$

EXISTIRIA SOLUÇÃO PARA $x^T A x < 0$?

SUPONDO $y > 0$ E $x + 2y > 0 \Rightarrow x > -2y$.

TOMANDO $x = -y$, OBTEMOS $x^T A x = (\sqrt{2} - \sqrt{3})y < 0$.

DEFINIÇÃO. UMA MATRIZ É ANTI-SIMÉTRICA QUANDO $A^T = -A$.

EXEMPLO. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

FATO. TODA MATRIZ PODE SER ESCRITA COMO A SOMA DE UMA MATRIZ SIMÉTRICA COM OUTRA ANTI-SIMÉTRICA.

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$$

EXEMPLO. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

PROPOSIÇÃO. SE A É ANTISIMÉTRICA, ENTÃO $x^T A x = 0$.

CONCLUSÃO. PODEMOS NOS CONCENTRAR EM MATRIZES SIMÉTRICAS.

PERGUNTA: EXISTIRIA UMA CARACTERIZAÇÃO DE MATRIZES POSITIVAS DEFINIDAS MAIS SIMPLES?

DEFINIÇÃO. UMA MATRIZ $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ É DITA ORTOGONAL SE SUAS COLUNAS FORMAM UM CONJUNTO ORTONORMAL DE VETORES.

EXEMPLO.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow a_i^T a_j = \begin{cases} 0, & i \neq 0 \\ 1, & i = j \end{cases}$$

PROPOSIÇÃO. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ É ORTOGONAL SSS $A^T = A^{-1}$.

DEMONSTRAÇÃO.

$(\Rightarrow)$ $A = [a_1\ a_2 \cdots a_m]$, $a_i^T a_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = 0 \end{cases}$

MAS $A^T A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix} [a_1\ a_2 \cdots a_m] = \begin{bmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \end{bmatrix} = I$

O MESMO PARA AA^T (VERIFIQUE). LOGO, $A^T = A^{-1}$.

$(\Leftarrow)$ SUPONHA $A^T = A^{-1}$. ENTÃO $A^T A = AA^T = I$.

MAS $A^T A = \begin{bmatrix} a_1^T a_1 & \cdots & a_1^T a_m \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^T a_1 & \cdots & a_m^T a_m \end{bmatrix} = I \Leftrightarrow a_i^T a_i = 1$.

$a_i^T a_j = 0,\ i \neq j$

▨

TEOREMA (ESPECTRAL - VERSÃO MATRICIAL). SE $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ É SIMÉTRICA, ENTÃO EXISTE UMA MATRIZ ORTOGONAL $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ TAL QUE $P^{-1}AP = P^{T}AP$ É DIAGONAL.

DEMONSTRAÇÃO. (VER ~~BOLDRINI~~ LAY)

↳ P É A MATRIZ DOS AUTOVETORES DE A, ORTONORMAIS.

$$\begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T A v_1 & v_1^T A v_2 \\ v_2^T A v_1 & v_2^T A v_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

TEOREMA (CARACTERIZAÇÃO VIA ESPECTRO). UMA MATRIZ SIMÉTRICA A É POSITIVA DEFINIDA S.S.S. TODOS OS SEUS AUTOVALORES SÃO POSITIVOS.

"DEMONSTRAÇÃO". (CASO 2D)

($\Leftarrow$) SUPONHA TODOS OS AUTOVALORES DE A POSITIVOS.

O TEOREMA ESPECTRAL NOS GARANTE QUE EXISTE UMA BASE ORTONORMAL $\{v_1, v_2\}$ PARA $\mathbb{R}^2$. SE $x \in \mathbb{R}^2$, ENTÃO: $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. COM ISSO,

$$x^T A x = \alpha_1^2 \lambda_1 + \alpha_2^2 \lambda_2 > 0 \quad , \text{ POIS } \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

($\Rightarrow$) SUPONHA AGORA A POSITIVA DEFINIDA, OU SEJA,

$$x^T A x > 0, \ \forall x \neq 0.$$

SE $\{v_1, v_2\}$ É UMA BASE ORTONORMAL DE AUTOVETORES DE A, ENTÃO,

$$v_1^T A v_1 > 0 \Leftrightarrow v_1^T \lambda_1 v_1 = \lambda_1 > 0$$
$$v_2^T A v_2 > 0 \Leftrightarrow \lambda_2 > 0.$$

$\blacksquare$

EXEMPLO.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4 = p(\lambda)$$

$\lambda_1 = 2 > 0$ É RAIZ.

$$\begin{array}{l|l} -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4 & \lambda - 2 \\ \underline{\lambda^3 - 2\lambda^2} & -\lambda^2 + 4\lambda - 2 \\ \quad 4\lambda^2 - 10\lambda + 4 & \\ \quad \underline{-4\lambda^2 + 8\lambda} & \\ \qquad -2\lambda + 4 & \\ \qquad \underline{2\lambda - 4} & \\ \qquad (0) & \end{array}$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = (\lambda - 2)\underbrace{(-\lambda^2 + 4\lambda - 2)}_{\text{RAÍZES}}$$

$$\lambda_2 = 2 + \sqrt{2} > 0 \quad \lambda_3 = 2 - \sqrt{2} > 0.$$

TEOREMA (CRITÉRIO DE SILVESTRE). UMA MATRIZ SIMÉTRICA A É POSITIVA DEFINIDA SSS.

$$\det A_K > 0 \quad , \quad K = 1, 2, \ldots, m \, ,$$

ONDE $A_K = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq K$, SÃO OS MENORES PRINCIPAIS DE A.

EXEMPLO.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A_1, A_2, A_3 \ldots$$

CALCULANDO A DECOMPOSIÇÃO LU DE A:

~~TEOREMA. (CHOLESKY)~~

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^T}$$

$$= \ldots \Rightarrow A = CC^T, \quad C = L\sqrt{D}.$$

06

TEOREMA (CHOLESKY). UMA MATRIZ SIMÉTRICA A POSSUI UMA FATORAÇÃO DE CHOLESKY SSS. É POSITIVA DEFINIDA.

DEMONSTRAÇÃO. (LEON, ÁLG. LINEAR).

⇝ CÁLCULO DA DECOMPOSIÇÃO DE CHOLESKY.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow CC^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

⇝ ALGORITMO CLÁSSICO (POR COLUNA)

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^T & \cdots & c_m^T \end{bmatrix}, \quad c_i = \begin{bmatrix} c_{i1} & \cdots & c_{ii} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- COLUNA 1

$$a_1 = \begin{bmatrix} c_1 c_1^T \\ c_2 c_1^T \\ \vdots \\ c_m c_1^T \end{bmatrix}$$

$$C_1 C_1^T = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = (c_{11})^2 = a_{11}$$

$$\Rightarrow \quad c_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$C_2 C_1^T = \begin{bmatrix} c_{21} & c_{22} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = c_{21} c_{11} = a_{21}$$

$$\Rightarrow \quad c_{21} = \frac{a_{21}}{c_{11}} = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}}}$$

$$C_3 C_1^T = \begin{bmatrix} c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = c_{31} c_{11} = a_{31}$$

$$\Rightarrow \quad c_{31} = \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{11}}}$$

EM PSEUDO-CÓDIGO, TEMOS.

$c_{11} \leftarrow \sqrt{a_{11}}$

PARA $i = 2$ ATÉ n:

$c_{i1} \leftarrow \dfrac{a_{i1}}{c_{11}}$

PARA $K = 2$ ATÉ n:

$S \leftarrow a_{KK}$

PARA $j = 1$ ATÉ $K-1$:

$S \leftarrow S - (c_{Kj})^2$

$c_{KK} \leftarrow \sqrt{S}$

PARA $i = K+1$ ATÉ n:

$S \leftarrow a_{iK}$

PARA $j = 1$ ATÉ $K-1$:

$S \leftarrow S - c_{ij} c_{Kj}$

$c_{iK} \leftarrow S / c_{KK}$

$\Rightarrow$ COMO RESOLVER UM SISTEMA?

$b = [0 \ -6 \ 8]^T$. $\Rightarrow x = [-1, -2 \ 3]^T$.