Cálculo Numérico

Fatoração de Cholesky

Vicente Helano
vicente.sobrinho@ufca.edu.br

Fatorando matrizes simétricas

Seja $\mathbf{A}$ simétrica, munida de uma decomposição $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$

Fatorando matrizes simétricas

Seja $\mathbf{A}$ simétrica, munida de uma decomposição $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$

Então,

$$\mathbf{LU} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^\intercal = (\mathbf{LU})^\intercal = \mathbf{U}^\intercal \mathbf{L}^\intercal$$

Fatorando matrizes simétricas

Seja $\mathbf{A}$ simétrica, munida de uma decomposição $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$

Então,

$$\mathbf{LU} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^\intercal = (\mathbf{LU})^\intercal = \mathbf{U}^\intercal \mathbf{L}^\intercal$$

Como $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior com diagonal unitária, logo inversível, podemos escrever

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^\intercal \mathbf{L}^\intercal$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{L}^\intercal)^{-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^\intercal$$

Fatorando matrizes simétricas

Seja $\mathbf{A}$ simétrica, munida de uma decomposição $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$

Então,

$$\mathbf{LU} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^\intercal = (\mathbf{LU})^\intercal = \mathbf{U}^\intercal \mathbf{L}^\intercal$$

Como $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior com diagonal unitária, logo inversível, podemos escrever

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^\intercal \mathbf{L}^\intercal$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{L}^\intercal)^{-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^\intercal$$

Mas observe que ambos os lados da equação acima DEVEM ser matrizes diagonais

Fatorando matrizes simétricas

Seja $\mathbf{A}$ simétrica, munida de uma decomposição $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$

Então,

$$\mathbf{LU} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^\intercal = (\mathbf{LU})^\intercal = \mathbf{U}^\intercal \mathbf{L}^\intercal$$

Como $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior com diagonal unitária, logo inversível, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}^\intercal \mathbf{L}^\intercal \\ \mathbf{U}(\mathbf{L}^\intercal)^{-1} &= \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}^\intercal \end{aligned}$$

Mas observe que ambos os lados da equação acima DEVEM ser matrizes diagonais

Definido $\mathbf{D} = \mathbf{U}(\mathbf{L}^\intercal)^{-1}$, temos que $\mathbf{U} = \mathbf{D}\mathbf{L}^\intercal$

Fatorando matrizes simétricas

Seja $\mathbf{A}$ simétrica, munida de uma decomposição $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$

Então,

$$\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^\intercal = (\mathbf{L}\mathbf{U})^\intercal = \mathbf{U}^\intercal\mathbf{L}^\intercal$$

Como $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior com diagonal unitária, logo inversível, podemos escrever

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^\intercal\mathbf{L}^\intercal$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{L}^\intercal)^{-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^\intercal$$

Mas observe que ambos os lados da equação acima DEVEM ser matrizes diagonais

Definido $\mathbf{D} = \mathbf{U}(\mathbf{L}^\intercal)^{-1}$, temos que $\mathbf{U} = \mathbf{D}\mathbf{L}^\intercal$

Portanto, $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^\intercal$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Matriz positiva definida

Uma matriz real $\mathbf{A}$ de ordem n é dita **definida positiva** se $\mathbf{x}^\intercal \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x}$ não nulo

Matriz positiva definida

Uma matriz real $\mathbf{A}$ de ordem n é dita **definida positiva** se $\mathbf{x}^\intercal \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x}$ não nulo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz positiva definida

Uma matriz real $\mathbf{A}$ de ordem n é dita **definida positiva** se $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, para todo $\mathbf{x}$ não nulo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz positiva definida

Teorema. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz real simétrica de ordem n. Então $\mathbf{A}$ é definida positiva se e somente se todos os seus autovalores são positivos

Matriz positiva definida

Teorema. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz real simétrica de ordem n. Então $\mathbf{A}$ é definida positiva se e somente se todos os seus autovalores são positivos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz positiva definida

A k-ésima **submatriz principal** de $\mathbf{A}$ é definda por

$$\mathbf{A}_k = [a_{ij}]\,,\; i,j \in \{1,2,\ldots,k\}$$

Matriz positiva definida

A k-ésima **submatriz principal** de $\mathbf{A}$ é definda por

$$\mathbf{A}_k = [a_{ij}]\,,\; i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz positiva definida

Proposição. Uma matriz real simétrica $\mathbf{A}$ é **definida positiva** se e somente se os determinantes de **todas** as suas submatrizes principais forem estritamente positivos

Matriz positiva definida

Proposição. Uma matriz real simétrica $\mathbf{A}$ é **definida positiva** se e somente se os determinantes de **todas** as suas submatrizes principais forem estritamente positivos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Fatoração de Cholesky

Proposição. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz simétrica de ordem n. Então, as seguintes afirmações são equivalentes

(a) $\mathbf{A}$ é positiva definida

(b) Os determinantes de todas as submatrizes principais são positivos

(c) $\mathbf{A}$ pode ser reduzida à forma triangular superior por eliminação de Gauss sem a necessidade de permutar linhas e, além disso, seus pivôs serão todos positivos

(d) Existe $\mathbf{L}$ triangular inferior, cujos elementos da diagonal são todos positivos, tal que $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{C}^\intercal$

Fatoração de Cholesky

Proposição. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz simétrica de ordem n. Então, as seguintes afirmações são equivalentes

(a) $\mathbf{A}$ é positiva definida
(b) Os determinantes de todas as submatrizes principais são positivos
(c) $\mathbf{A}$ pode ser reduzida à forma triangular superior por eliminação de Gauss sem a necessidade de permutar linhas e, além disso, seus pivôs serão todos positivos
(d) Existe $\mathbf{L}$ triangular inferior, cujos elementos da diagonal são todos positivos, tal que $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{C}^\intercal$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^\intercal = \mathbf{L}(\mathbf{D})^{1/2}(\mathbf{D})^{1/2}\mathbf{L}^\intercal = \mathbf{C}\mathbf{C}^\intercal$$

Fatoração de Cholesky

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

CCT

Cálculo Numérico

Vicente Helano
vicente.sobrinho@ufca.edu.br