Lista de exercícios 3

Questão 1. Encontre intervalos que contenham soluções das seguintes equações por intermédio da análise de seus gráficos.

(a) $3x - e^x = 0$

(b) $x + 1 - 2\,\text{sen}(\pi x) = 0$

Questão 2. Mostre que as equações a seguir possuem pelo menos uma solução no intervalo especificado.

(a) $x - (\ln x)^x = 0$ em $[4,5]$

(b) $-3\,\text{tg}(2x) + x = 0$ em $[0,1]$

Questão 3. Mostre que as equações a seguir possuem uma única raiz real positiva.

(a) $e^x + x - 2 = 0$

(b) $\ln(x) + x^3 - \frac{1}{x} - 10 = 0$

(c) $x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$

(d) $e^x + x^3 - 2 = 0$

Questão 4. Verifique se o método da bisseção pode ser empregado para calcular o zero da função $f(x) = \ln x + x^2 - 3$ no intervalo $[1,2]$.

Questão 5.

(a) Determine π com erro absoluto no máximo igual a 0,05 aplicando o método da bisseção à equação $\text{sen}\,x = 0$, iniciando com o intervalo $[3,4]$.
(b) Quantas iterações seriam suficientes para aproximar π com precisão de 10^{-8}?

Questão 6. Seja ξ a menor raiz real positiva de $f(x) = 1 - x + \sin x$.

(a) Determine um intervalo $[a,b]$ de comprimento igual a um, a partir do qual o método da bisseção convergirá para ξ.
(b) Utilize o método da bisseção, iniciando com o intervalo obtido em (a), para aproximar ξ com erro absoluto menor do que 0,1.

Questão 7. Seja $f(x) = (x+2)(x+1)x(x-1)^3(x-2)$. Indique para qual raiz o método da bisseção convergirá quando aplicado a f, partindo-se dos intervalos:

(a) $[-3;2{,}5]$

(b) $[-2{,}5;3]$

(c) $[-1{,}75;1{,}5]$

(d) $[-1{,}5;1{,}75]$

Questão 8. Seja $f(x) = (x-1)^{10}$, $\xi = 1$ e $p_n = 1 + 1/n$.

(a) Mostre que $|f(p_n)| < 10^{-3}$ para todo $n > 1$, enquanto que $|p_n - \xi| < 10^{-3}$ requer $n > 1000$.
(b) O que você pode concluir a partir do resultado do item (a) com relação ao teste de parada do método da bisseção?

Questão 9. Para resolver $x^3 - 2x + 1 = 0$, foram propostos os seguintes problemas de ponto fixo.

(i) $x = \dfrac{1}{2}\left(x^3+1\right)$

(ii) $x = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

(iii) $x = \sqrt{2 - \dfrac{1}{x}}$

(iv) $x = -\sqrt[3]{1-2x}$

(a) Deduza cada uma das equações.
(b) Tomando $p_0 = \frac{1}{2}$, calcule as aproximações p_1 a p_4 para cada equação.
(c) Baseando-se apenas no item (b), quais métodos parecem convergir?

Questão 10. Construa uma função de ponto fixo convergente para obter a raiz negativa da equação $x\cos(x) - x^2 - 8x - 1$ em $[-1,0]$.

Questão 11. As raízes da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ são 1 e 2. Considere a função de iteração de ponto fixo:

$$g(x) = \frac{1}{\omega}\left(x^2 - (3-\omega)x + 2\right),\ \omega \neq 0.$$

(a) Determine para quais valores de ω o método do ponto fixo convergirá para 1, supondo como valor inicial $p_0 \neq 1$.
(b) Realize uma análise análoga à do item (a), mas agora para a raiz 2.

Questão 12 (Burden et al. (2016), Exercício 2.2(19))**.** Seja $g \in C^1[a,b]$ e $p \in (a,b)$ com $g(p) = p$ e $|g'(p)| > 1$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |p_0 - p| < \delta$, então $|p_0 - p| < |p_1 - p|$. Deste modo, não importa o quão próximo p_0 está de p, a próxima aproximação p_1 sempre se afasta de p, e com isso o método do ponto fixo não converge se $p_0 \neq p$.

Questão 13. Utilize o método de Newton para determinar soluções com precisão de 10^{-2} para as equações:

(a) $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0, \quad \text{para } 1 \le x \le 2$
(b) $(x-2)^2 - \ln x = 0, \quad \text{para } e \le x \le 4$

Questão 14. Construa um polinômio P de grau máximo dois tal que o método de Newton aplicado a P produza a seguinte sequência cíclica:

$$x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2, \ldots$$

Questão 15. O gerente de um posto de combustíveis está desconfiado de que a régua de medição de volume de seu fornecedor está desregulada. Segundo o gerente, os combustíveis são armazenados em tanques cilíndricos "deitados". O sistema utilizado no posto informa quando é necessário solicitar mais combustível baseado no volume de combustível vendido. A cada reabastecimento, o motorista do caminhão fornecedor insere uma régua de medição para aferir quanto foi despejado. Essa régua relaciona o comprimento da porção submersa da régua com o volume correspondente. O gerente procurou você para verificar a última medição realizada, na qual a régua mostrava 16,13 m^3 correspondendo a uma altura de 1,3 metros.

Empregando conceitos de integração, o volume V de combustível referente a uma altura submersa h é dado por:

$$V(h) = L\left[\frac{\pi r^2}{2} - r^2 \arcsin\left(\frac{r-h}{r}\right) + (h-r)\sqrt{r^2 - (h-r)^2}\right],$$

onde r e L são o raio da base e o comprimento do cilindro, respectivamente.

(a) Implemente a função V em Python, usando o bloco de notas em anexo.
(b) Sabendo que $r = 1$ m e $L = 7$ m, o que você diria das suspeitas do gerente? Elas são procedentes? Porque?
(c) O gerente aproveitou também para lhe pedir uma orientação quanto ao momento certo para solicitar o reabastecimento de seus tanques. Geralmente, ele solicita mais combustível à distribuidora quando um tanque possui 1/3 ou menos de sua capacidade total ocupada. Utilize os conceitos vistos até então para resolver este problema com precisão de 10^{-2} metros.