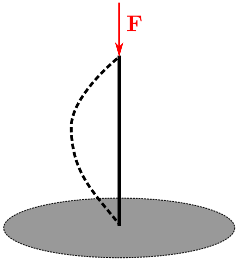
# Supraconductivité - brisure de symétrie

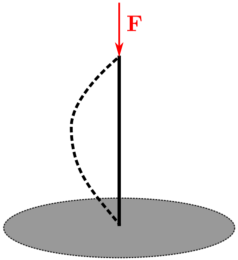
Ariane Soret
Exposé modal supra - Ecole Polytechnique

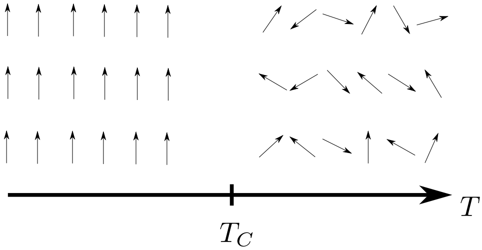
10 mai 2019

# Qu'est-ce qu'une brisure de symétrie ?



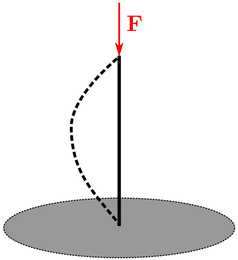
# Qu'est-ce qu'une brisure de symétrie ?

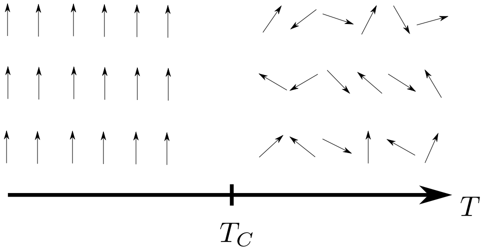



Ferromagnétisme

# Qu'est-ce qu'une brisure de symétrie ?



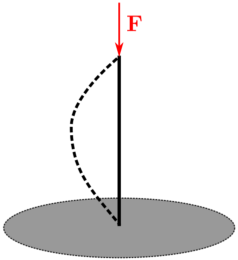



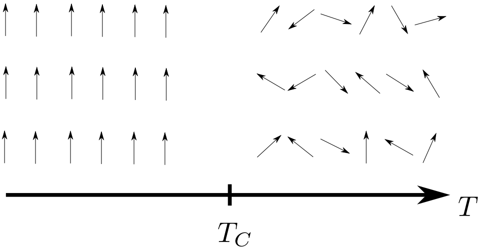

Ferromagnétisme

## Brisure de symétrie

- Système invariant par une symétrie (e.g. rotation)
- Etat fondamental dégénéré
- Les états dégénérés n'ont pas la symétrie du système.

# Qu'est-ce qu'une brisure de symétrie ?




Ferromagnétisme

## Brisure de symétrie

- Système invariant par une symétrie (e.g. rotation)
- Etat fondamental dégénéré
- Les états dégénérés n'ont pas la symétrie du système.

Note : Transition de phase $\Rightarrow$ brisure de symétrie.

# Outline

# Un peu d'Histoire...

Théorie quantique des champs = théorie des champs (EM, ...) + mécanique quantique + relativité

- $\sim$ 1920 : Electrodymanique quantique (interaction lumière matière),
- 1940-1950 : Techniques de renormalisation + diagrammes de Feynman $\rightarrow$ théorie quantique des champs,
- 1970 : modèle standard.

# Un peu d'Histoire...

Théorie quantique des champs = théorie des champs (EM, ...) + mécanique quantique + relativité

- $\sim$ 1920 : Electrodymanique quantique (interaction lumière matière),
- 1940-1950 : Techniques de renormalisation + diagrammes de Feynman $\rightarrow$ théorie quantique des champs,
- 1970 : modèle standard.

En matière condensée :

- Notion de brisure spontanée de symétrie,
- Quantisation des vibrations cristallines : phonons (Einstein),
- Description de la supraconductivité.

# Equation de Klein Gordon

Particule relativiste sans spin (scalaire) : équation Klein Gordon

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi = 0$$

(R. : Schrödinger = version non relativiste)

# Formulation Lagrangienne

Equation du mouvement $\leftarrow$ principe de moindre *action*.

Langrangien : $\mathcal{L}(x, x', t) = T - V$ ; action : $S = \int dt \mathcal{L}$.

Minimisation de $S \Rightarrow$ équation d'Euler :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

# Formulation Lagrangienne

Equation du mouvement $\leftarrow$ principe de moindre *action*.

Langrangien : $\mathcal{L}(x, x', t) = T - V$ ; action : $S = \int dt \mathcal{L}$.

Minimisation de $S \Rightarrow$ équation d'Euler :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

Ex. : mécanique classique.

# Théorème de Noether

## Théorème de Noether

Si l'action est invariante par un groupe de transformation sur $\phi$ et les coordonnées $x, y, z, t$, alors il existe une ou plusieurs quantités conservées, càd des combinaison du champ et de ses dérivées invariantes par l'action de ce groupe.

Ex. : système invariant par translation $\Rightarrow$ conservation quantité de mouvement.

# Champ scalaire complexe

$\phi \equiv$ champ scalaire libre, complexe ; Klein Gordon dérive de

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_t\phi\partial_t\phi^* - |\nabla\phi|^2 - m^2|\phi|^2\right) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2|\phi|^2)$$

# Champ scalaire complexe

$\phi \equiv$ champ scalaire libre, complexe ; Klein Gordon dérive de

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_t\phi\partial_t\phi^* - |\nabla\phi|^2 - m^2|\phi|^2\right) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2|\phi|^2)$$

$\rightarrow$ invariant par $\phi \rightarrow e^{i\Lambda}\phi$ : transformation de jauge globale.

$\rightarrow$ conservation de la charge (Noether).

# Champ scalaire complexe

$\phi \equiv$ champ scalaire libre, complexe ; Klein Gordon dérive de

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_t\phi\partial_t\phi^* - |\nabla\phi|^2 - m^2|\phi|^2\right) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2|\phi|^2)$$

$\rightarrow$ invariant par $\phi \rightarrow e^{i\Lambda}\phi$ : transformation de jauge globale.

$\rightarrow$ conservation de la charge (Noether).

Mais... une telle invariance globale n'est pas physique ! (relativité).

# Champ électromagnétique

Transformation de jauge locale : $\phi(x) \to e^{i\Lambda(x)}\phi(x)$

$\Rightarrow \delta\mathcal{L} = (\partial_\mu \Lambda) J^\mu$, $J^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$.

# Champ électromagnétique

Transformation de jauge locale : $\phi(x) \to e^{i\Lambda(x)}\phi(x)$

$\Rightarrow \delta\mathcal{L} = (\partial_\mu \Lambda) J^\mu,\ J^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$.

Ajoutons : $\mathcal{L}_1 = -eJ^\mu A_\mu + e^2 A_\mu A^\mu |\phi|^2,\ A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda,$

# Champ électromagnétique

Transformation de jauge locale : $\phi(x) \to e^{i\Lambda(x)}\phi(x)$

$\Rightarrow \delta\mathcal{L} = (\partial_\mu \Lambda) J^\mu$, $J^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$.

Ajoutons : $\mathcal{L}_1 = -eJ^\mu A_\mu + e^2 A_\mu A^\mu |\phi|^2$, $A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda$,

et contribution de $A$ : $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ : tenseur électromagnétique.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 |\phi|^2) - eJ^\mu A_\mu + e^2 A_\mu A^\mu |\phi|^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Lagrangien du champ électromagnétique = conséquence de conservation de jauge.

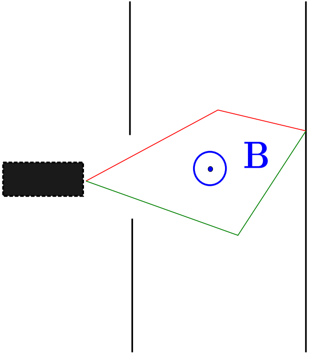
# Aparté : effet Aharonov-Bohm

Effet topologique :

$A_\mu = \partial_\mu \chi$,

$\chi : S^1 \to \mathbb{R} \times S^1$ fonction de jauge

$\Rightarrow$ projection sur deux classes distinctes



# Outline

# Supraconductivité, brisure de symétrie de jauge

Langrangien :

$$\mathcal{L} = -(\nabla - ie\mathbf{A})\phi(x)\cdot(\nabla + ie\mathbf{A})\phi(x)^* - \underbrace{m^2(T)|\phi(x)|^2 - \lambda|\phi(x)|^4}_{V(\phi)} - \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A})^2$$

$\phi$ = champ scalaire ($\equiv$ gap supra, ou densité d'électrons supra).

# Supraconductivité, brisure de symétrie de jauge

Langrangien :

$$\mathcal{L} = -(\boldsymbol{\nabla} - ie\mathbf{A})\phi(x)\cdot(\boldsymbol{\nabla} + ie\mathbf{A})\phi(x)^* - \underbrace{m^2(T)|\phi(x)|^2 - \lambda|\phi(x)|^4}_{V(\phi)} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})^2$$

$\phi$ = champ scalaire ($\equiv$ gap supra, ou densité d'électrons supra).

$\mathcal{L}$ invariant de jauge : $\phi(x) \to e^{i\Lambda(x)}\phi(x)$, $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \frac{1}{e}\nabla\Lambda(x)$.

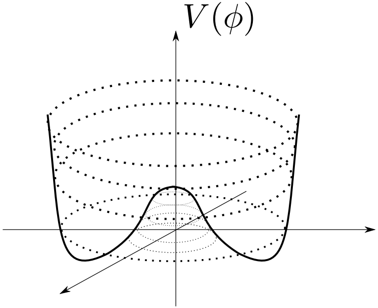
# Supraconductivité, brisure de symétrie de jauge

- Etat fondamental : $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \Leftrightarrow m^2\phi(x)^* + 2\lambda\phi(x)^*|\phi(x)|^2 = 0$

# Supraconductivité, brisure de symétrie de jauge

- Etat fondamental : $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \Leftrightarrow m^2\phi(x)^* + 2\lambda\phi(x)^*|\phi(x)|^2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 > 0 : \phi = 0 \\ m^2 < 0 : \text{max local } \phi = 0, \text{ min } |\phi|^2 = -m^2/2\lambda \end{cases}$$



# Equation de London

Courant associé : $\mathbf{j} = -i(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) - 2e|\phi|^2 \mathbf{A}$.

$T < T_c$ : $|\phi|^2$ domine car $\phi(x) \approx$ constant :

$$\mathbf{j} = 2e|\phi|^2 \mathbf{A} = \frac{em^2}{\lambda} \mathbf{A} = -k^2 \mathbf{A}$$

# Effet Meissner

$$\text{Ampère : } \nabla \times B = \mathbf{j}$$

$$\text{London } (*) : \mathbf{j} = -k^2\mathbf{A}$$

$$\Rightarrow \nabla \text{ appliqué à } (*) : \Delta\mathbf{B} = k^2\mathbf{B}$$

# Outline

# Théorie de Landau pour les transitions de phases

- Paramètre d'ordre $m$, non analytique à la transition ;
- Proche de la transition, la densité d'énergie libre :

$$f(m) = -hm + Am^2 + Bm^3 + Cm^4 + K|\nabla m|^2 + \mathcal{O}(m^5, |\nabla m|^4)$$

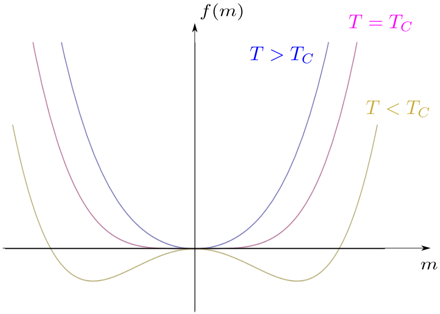
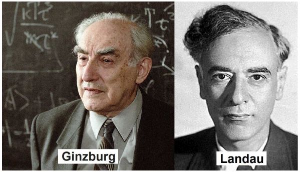



Figure: modèle d'Ising, $f(m) = a(T - T_c)m^2 + um^4$

## Théorie de Ginzburg Landau

Théorie de Ginzburg Landau pour la supraconductivité (1950) :




$$f(\phi) = |(\boldsymbol{\nabla} - ie\mathbf{A})\phi(x)|^2 + m^2(T)|\phi(x)|^2 + \lambda|\phi(x)|^4 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})^2 = -\mathcal{L}$$

- $\phi =$ paramètre d'ordre ; $|\phi(x)|^2 \equiv$ densité d'électrons supra.
- $m^2(T) = a(T - T_c)$.
- Intuition physique justifiée par BCS, 7 ans plus tard...

# Pour résumer

• Supraconductivité = brisure spontanée de symétrie de jauge, dûe à une transition de phase ;

• correspondance entre le Lagrangien de la théorie quantique des champs et l'énergie libre de la théorie Ginzburg Landau;

• ces deux approches ne se procurent pas d'explication pour le mécanisme microscopique (BCS).

• Brisure spontanée de symétrie $\Rightarrow$ compréhension du "vide".

En savoir plus :

- "Quantum field theory", Lewis H. Ryder
- "Introduction to superconductivity", Michael Tinkham.

Questions ?