Assignment 2

① $f(t) = 3e^{-4|t+2|}$

$$|t+2| = \begin{cases} t+2 & t>0 \\ -(t+2) & t<0 \end{cases}$$

Now $\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} 3e^{-4|t+2|} e^{-i\omega t}\, dt$

$$= \int_{-\infty}^{0} 3e^{-4(-t-2)} e^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} 3e^{-4(t+2)} e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 3e^{4(t+2)} e^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} 3e^{-4(t+2)} e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= 3\int_{-\infty}^{0} e^{4t+8-i\omega t}\, dt + 3\int_{0}^{\infty} e^{-4t-8-i\omega t}\, dt$$

$$= 3\int_{-\infty}^{0} e^{8} \cdot e^{t(4-i\omega)}\, dt + 3\int_{0}^{\infty} e^{-8} \cdot e^{-t(4+i\omega)}\, dt$$

$$= 3e^{8} \cdot \frac{e^{t(4-i\omega)}}{4-i\omega}\Bigg|_{-\infty}^{0} + 3e^{-8} \cdot \frac{e^{-t(4+i\omega)}}{-(4+i\omega)}\Bigg|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{3e^{8}}{4-i\omega}\left[1-0\right] + \frac{3}{e^{8}}\left(\frac{-1}{4+i\omega}\right)\left[0-1\right]$$

$$= \frac{3e^{8}}{4-i\omega} + \frac{3e^{-8}}{4+i\omega}$$

$$= \frac{3e^{8}(4+i\omega) + 3e^{-8}(4-i\omega)}{16+\omega^{2}}$$

$$= \frac{12e^{8} + 3e^{8}i\omega + 12e^{-8} - 3e^{-8}i\omega}{16+\omega^{2}}$$

$$= \frac{12(e^8+e^{-8}) + 3i\omega(e^8 - e^{-8})}{16+\omega^2}$$

(2) $f(t) = \begin{cases} k & -a \le t \le a \\ 0 & t > a,\ t < -a. \end{cases}$

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{-a} 0\, e^{-i\omega t}\,dt + \int_{-a}^{a} k\, e^{-i\omega t}\,dt + \int_{a}^{\infty} 0\, e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-a}^{a} k\, e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \left.\frac{k e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right|_{-a}^{a}$$

$$= \frac{-k}{i\omega}\left[e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}\right] = \frac{+k(2i)}{i\omega}\left[\frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{2i}\right]$$

$$= \frac{2k}{\omega}\sin(a\omega)$$

(3) $f(t) = \begin{cases} 1-|t| & -1 < t < 1 \\ 0 & |t| > 1 = t > 1,\ t < -1 \end{cases}$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{-1} 0\, e^{-i\omega t}\,dt + \int_{-1}^{1} (1-|t|)\, e^{-i\omega t}\,dt + \int_{1}^{\infty} 0\, e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}\,dt - \int_{-1}^{1} |t|\, e^{-i\omega t}\,dt$$

$|t| = \begin{cases} t & t > 0 \\ -t & t < 0 \end{cases}$

$$= \left.\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{0} -t\, e^{-i\omega t}\,dt - \int_{0}^{1} t\, e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \frac{-1}{i\omega}\left[e^{-i\omega} - e^{i\omega}\right] + \int_{-1}^{0} t e^{-i\omega t}\,dt - \int_{0}^{1} t e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \frac{+2\cancel{i}}{\cancel{i}\omega}\left[\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}\right] + e^{i\omega} + \frac{1}{i\omega} - \frac{e^{i\omega}}{i\omega} - \left[e^{-i\omega} - \frac{1}{i\omega} + \frac{e^{-i\omega}}{i\omega}\right]$$

$$= \frac{2}{\omega}\sin(\omega) + e^{i\omega} + \frac{1}{i\omega} - \frac{e^{i\omega}}{i\omega} - e^{-i\omega} + \frac{1}{i\omega} - \frac{e^{-i\omega}}{i\omega}$$

$$= \frac{2}{\omega}\sin(\omega) + \frac{2}{i\omega} + e^{i\omega} - e^{-i\omega} - \frac{e^{i\omega}}{i\omega} - \frac{e^{-i\omega}}{i\omega}$$

4) $f(t) = 6e^{-|t|}$

$$|t| = \begin{cases} t & t > 0 \\ -t & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{0} 6e^{t} \cdot e^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} 6e^{-t} \cdot e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= 6\int_{-\infty}^{0} e^{t(1-i\omega)}\, dt + 6\int_{0}^{\infty} e^{-t(1+i\omega)}\, dt$$

$$= 6 \left. \frac{e^{t(1-i\omega)}}{1-i\omega} \right|_{-\infty}^{0} + 6 \left. \frac{e^{-t(1+i\omega)}}{-(1+i\omega)} \right|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{6}{1-i\omega}\left[1-0\right] + \frac{6}{-(1+i\omega)}\left[0-1\right]$$

$$= \frac{6}{1-i\omega} + \frac{6}{1+i\omega}$$

$$= \frac{6 + \cancel{6i\omega} + 6 - \cancel{6i\omega}}{1+\omega^2}$$

$$= \frac{12}{1+\omega^2}$$