

Técnicas metaheurísticas para la solución del sudoku

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Ariel Flores Santacruz

-Recocido simulado

-Algoritmo evolutivo

INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA

El Sudoku es un juego matemático que fue inventado a finales de la década de 1970 y se popularizó en Japón en los años 80. Consiste en una cuadrícula de 9×9 , compuesta por subcuadrículas de 3×3 llamadas "regiones" o "bloques". Algunas celdas ya tienen números, conocidos como "números dados" o "números pivotes". El objetivo es rellenar las celdas vacías con un número en cada una de ellas, de manera que cada columna, fila y región contenga los números del 1 al 9 solo una vez. Cada número de la solución solo debe aparecer una vez en cada una de las tres "direcciones", lo que da nombre al juego. Se plantea encontrar soluciones óptimas para sudokus de 4×4 y 9×9 utilizando dos técnicas metaheurísticas: el recocido simulado y el algoritmo genético.

INSTANCIAS

- Instancia 1.

Sudoku de 4×4 .

			2
2	4		3
	1		

Cuya solución es:

1	3	4	2
2	4	1	3
4	2	3	1
3	1	2	4

- Instancia 2.

Sudoku de 9×9 .

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Cuya solución es:

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

FUNCIÓN OBJETIVO

Para proceder con nuestros métodos metaheurísticos primero debemos definir la función objetivo.

Pensemos a nuestro sudoku como una matriz cuadrada, nuestra función objetivo cuenta por filas, columnas y bloques la cantidad de números repetidos.

Para simplificar esta idea fijémonos en los siguientes ejemplos:

Fila

1	1	1	3
---	---	---	---

El valor de la función objetivo es de 2, porque hay 2 unos de más en la fila.

Columna

2
2
4
4

El valor de la función objetivo es 2, porque hay un 2 de más y un 4 de más en la columna.

Bloque

1	3
4	3

El valor de la función objetivo es 1, porque hay un 3 de más en el bloque.

Nuestro objetivo será minimizar el número de elementos repetidos, sabiendo que el óptimo global es el 0 (la solución).

SOLUCIONES INICIALES

Para los 2 métodos que aplicaremos utilizaremos la misma forma de generar nuestra solución inicial, la solución inicial será guiada.

Sea un sudoku de $n^2 \times n^2$, primero llenaremos una lista L con números de 1 hasta n^2 , $L = [1, 2, \dots, n^2]$, el llenado de sudoku será fila por fila, donde en cada fila revolvemos la lista.

Para cada elemento de la fila nos fijamos si el elemento en la posición i de L con $0 \leq i \leq n^2 - 1$ está en la fila, si está en la fila no colocamos ese número y pasamos al siguiente número de L .

Ejemplo consideremos el sudoku de la instancia 1.

			2
2	4		3
	1		

La lista será $L = [1, 2, 3, 4]$, entonces:

$L=[\textcolor{blue}{3}, \textcolor{red}{1}, 2, \textcolor{green}{4}]$

3	1	4	2
2	4		3
	1		

$L=[4, \textcolor{red}{1}, 2, 3]$

3	1	4	2
2	4	1	3
	1		

$L=[\textcolor{blue}{3}, \textcolor{cyan}{2}, \textcolor{red}{1}, \textcolor{yellow}{4}]$

3	1	4	2
2	4	1	3
3	2	1	4
	1		

$L=[\textcolor{red}{4}, \textcolor{green}{2}, \textcolor{cyan}{3}, 1]$

3	1	4	2
2	4	1	3
3	2	1	4
4	1	2	3

MÉTODOS DE SOLUCIÓN

RECOCIDO SIMULADO

Dado un sudoku de $n^2 \times n^2$ intercambiaremos 2 celdas escogidas aleatoriamente si y solo si no son los números pivotes(números fijos), este procedimiento lo haremos n veces.

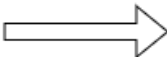
Tomemos por ejemplo el siguiente sudoku.

3	1	4	2
2	4	1	3
3	2	1	4
4	1	2	3

Haremos el intercambio de celdas 2 veces.

Primer intercambio.

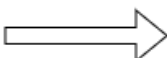
3	1	4	2
2	4	1	3
3	2	1	4
4	1	2	3



3	3	4	2
2	4	1	3
1	2	1	4
4	1	2	3

Segundo intercambio.

3	3	4	2
2	4	1	3
1	2	1	4
4	1	2	3



3	3	4	2
2	4	1	3
1	2	3	4
4	1	2	1

- Para la instancia 1.

			2
2	4		3
	1		

Tomando la temperatura máxima=3, temperatura mínima=0.001, $\alpha = 0.95$ y NI=10

F0: 0 ,la temperatura: 0.6778066229776964 la solución es:

```
[[1 3 4 2]
 [2 4 1 3]
 [4 2 3 1]
 [3 1 2 4]]
```

el cual es la solución a la instancia 1.

- Para la instancia 2.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Tomando la temperatura máxima=80, temperatura mínima=0.001, $\alpha = 0.95$ y NI=300.

F0: 0 ,la temperatura: 0.01523814389134963 la solución es:

```
[[5 3 4 6 7 8 9 1 2]
 [6 7 2 1 9 5 3 4 8]
 [1 9 8 3 4 2 5 6 7]
 [8 5 9 7 6 1 4 2 3]
 [4 2 6 8 5 3 7 9 1]
 [7 1 3 9 2 4 8 5 6]
 [9 6 1 5 3 7 2 8 4]
 [2 8 7 4 1 9 6 3 5]
 [3 4 5 2 8 6 1 7 9]]
```

el cual es la solución a la instancia 2.

ALGORITMO EVOLUTIVO

Este algoritmo hace evolucionar una población de individuos sometiéndose a mutaciones y recombinaciones genéticas semejantes a las que actúan en la evolución biológica, así como también a una selección de acuerdo con algún criterio, en función del cual se decide cuáles son los individuos más adaptados, que sobreviven, y cuáles los menos aptos, que son descartados.

Generamos a 20 individuos aleatoriamente de manera guiada descrito anteriormente, donde llenamos con números aleatorios de tal manera que no se repitan los números en cada fila

Ejemplo:

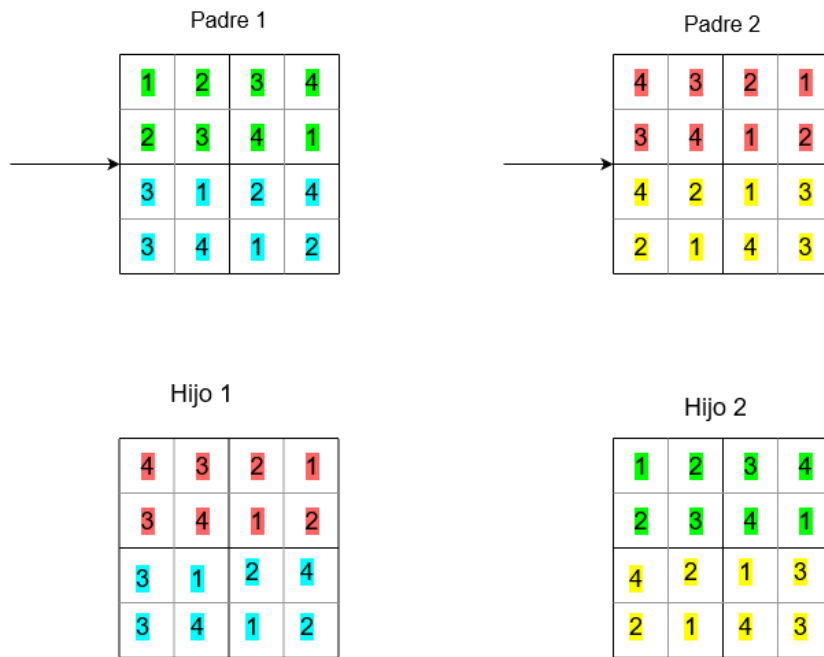
1	2	3	4
2	3	4	1
4	2	1	3
2	1	4	3

Cruzamos a nuestra población

Calculamos su valor fitness de cada uno de los individuos de la población y se cruzan los que tienen mejor valor en la función fitness

Y la forma de cruzar es tomar las primeras 2 filas del primer individuo y juntarlas con las 2 últimas filas del segundo individuo

Ejemplo, tenemos a dos individuos



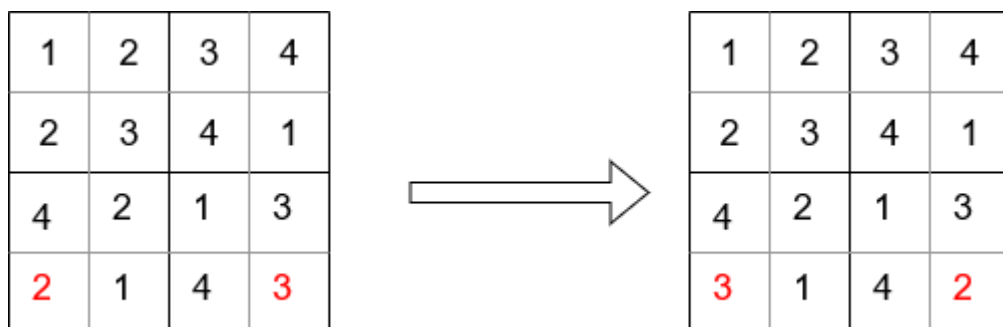
Mutamos la cruza

Para cada uno de los individuos mutamos de la siguiente manera:

Seleccionamos a dos casillas dentro de una misma fila y las intercambiamos, de esta manera nos aseguramos que no se repitan los números en cada fila

Nuestra población ahora se compone por la población original y la cruza ya mutada

Ejemplo con Sudoku 4x4



Selección de individuos por Ruleta

Basándonos en nuestra población original más las cruzamos calcularemos cierta probabilidad que está basada en su función fitness la cual se calcula dividiendo su función fitness entre la sumatoria de todas las funciones fitness de toda la población completa, como primer individuo de nuestra primera población elegimos al que mejor función fitness tiene después para elegir a los siguientes 19 en base a su probabilidad con la posibilidad de elegir más de una vez a un individuo

Repetimos el proceso de cruce y selección de individuos por Ruleta por n generaciones

Resultados del algoritmo evolutivo

Para la primera instancia:

El algoritmo realizó 5 generaciones con una población de 20 individuos y tuvo como mejor solución un valor en función objetivo de 0, esto quiere decir que obtuvo la solución óptima.

			2
2	4		3
	1		

```
F0: 0 , generaciones: 5 , tamaño de la población: 20 , tasa de
ruza: 0.5 y una tasa de mutacion de: 0.5
```

```
Solución
```

```
[[1 3 4 2]
 [2 4 1 3]
 [4 2 3 1]
 [3 1 2 4]]
```

Para la segunda instancia:

El algoritmo realizó 100 generaciones con una población de 40 individuos y tuvo como solución un valor en función objetivo de 13, es decir hay 13 números repetidos.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

```
F0: 13 , generaciones: 100 , tamaño de la población: 40 , tasa  
e cruza: 0.5 y una tasa de mutacion de: 0.5
```

```
Solución
```

```
[[5 3 1 6 7 4 9 2 8]  
[6 7 4 1 9 5 3 8 2]  
[1 9 8 3 4 2 5 6 7]  
[8 5 9 7 6 1 2 4 3]  
[4 2 6 8 9 3 7 5 1]  
[7 1 3 9 2 5 8 4 6]  
[9 6 1 5 3 7 2 8 4]  
[7 8 2 4 1 9 6 3 5]  
[3 4 5 2 8 6 1 7 9]]
```

```
➤ □
```

CONCLUSIÓN

Podemos observar que las metaheurísticas nos permiten obtener una solución mínima en un tiempo razonable de computación. En general, los programas están diseñados para resolver sudokus de cualquier tamaño y podemos estar seguros de que obtendremos una solución óptima con un tiempo mínimo de ejecución. Es posible que se requieran más iteraciones para obtener una solución pero esto dependerá del tamaño y complejidad del sudoku en cuestión.