LÓGICA Y ÁLGEBRA - EXAMEN FINAL

1) Dado el siguiente sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$

   a) Resolver y clasificar.

   b) Indicar, justificando, la solución del sistema homogéneo asociado al dado.

2) Dado $\mathbf{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \frac{\mathbf{R}^3}{\square}\ 2x - z = 0 \right\}$

   a) Determinar si es un subespacio de R^3.
   b) Hallar una base de H y su dimensión.
   c) Identificar geométricamente a H.

3) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, halla, si existe, su inversa por el método de la adjunta.

4) a) Hallar la ecuación de la recta que corta a los ejes coordenados en los puntos $A(0,-2)$ y $B(5,0)$.

   b) Hallar la recta que pasa por el punto A y es perpendicular a la recta hallada anteriormente.

   c) Representar gráficamente ambas rectas.

Para alumnos libres:

a) Dado el conjunto de vectores $\{u = (-1,2,0); v = (2,3,6)\}$, determinar justificando si es un conjunto li o ld.
b) Expresar si es posible, el vector (3,0,-8) como combinación lineal de ellos.

Examen Final
24/02/14

Ejercicio 1.

a_ Matriz asociada al sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} -4R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right) -\frac{1}{3}R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right) 5R_2+R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) -1R_3$$

15/20 Libre

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x_1+2x_2+3x_3=9 \Rightarrow x_1=4 \\ x_2+2x_3=4 \Rightarrow x_2=-2 \\ x_3=3 \end{array}$$

Solucion del sistema $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Sistema compatible determinado

b_ La solucion del sistema homogeneo asociado al
5 dado es determinado ya que acepta una unica solucion, llamada solucion trivial.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.-

a.-
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \ 2x - z = 0 \right\}$$

El subconjunto dado H es un subespacio ya que es un plano que pasa por el origen.

b.- si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ existen en H, entonces $z = 2x$

así los vectores tiene la forma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y$

los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ conforman la base para H.

la dimension 2.

Ejercicio 3

Inversa por el metodo de la matriz adjunta.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \text{ det.}$$

$\neq 0$ existe matriz inversa.

Matriz adjunta.

$$\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\operatorname{cof} A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4:

a. $A(0,-2)$ $B(5,0)$

Con la ecuación segmentaria o canónica

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{Reemplazando} \quad \frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$$

Con la ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x-0}{5-0} = \frac{y+2}{0+2}$$

$$2(x) = 5(y+2) \Rightarrow 2x - 5y = 10 \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$$

b. Obteniendo la pendiente de la de la recta anterior tenemos:

$$2x - 5y = 10 \Rightarrow -5y = -2x + 10 \Rightarrow y = \frac{2}{5}x - 2$$

la pendiente es $m = \frac{2}{5}$

Con la ecuacion punto - pendiente $(y - y_1) = m(x - x_1)$

Reemplazando $(0,-2)$ y pendiente $m = -\frac{5}{2}$

$$(y+2) = -\frac{5}{2}(x) \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x - 2$$

Ejercicio para alumnos libres.

a-

Vectores $u = (-1, 2, 0)$ $v = (2, 3, 6)$

Los vectores $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes, ya que si no lo fueran se tendría

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad \begin{matrix} 2 = -c \\ 3 = 2c \\ 6 = 0 \end{matrix}$$

b- El vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ para ser combinación lineal de $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, se debe cumplir que:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 3 &= -a + 2b \\ 0 &= 2a + 3b \\ -8 &= 0 + 6b \end{aligned} \right.$$

Resolvemos el sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{-1R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & -8 \end{array}\right)$$

$$\left\{ \begin{aligned} a - 2b &= -3 \\ 7b &= 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \\ 6b &= -8 \quad \Rightarrow \quad b = -\tfrac{4}{3} \end{aligned} \right. \quad \Big] \neq$$

No se puede expresar como una combinación lineal de ambos