עוז פירונדי 11/05/2020

שיטת גאוס – זיידל

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$[(L + D) + U]\vec{x} = \vec{b}$$

$$(L + D)\vec{x} + U\vec{x} = \vec{b}$$

$$(L + D)\vec{x} = \vec{b} - U\vec{x}$$

$$\boxed{\vec{x} = (L + D)^{-1}\vec{b} - (L + D)^{-1}U\vec{x}}$$

בכתיב נוסף:

$$\underbrace{\overrightarrow{x_{n+1}}}_{new} = (L+D)^{-1} * \vec{b} - (L+D)^{-1} * U * \overrightarrow{x_{\underbrace{n}_{old}}}$$

$$=> B = -(L+D)^{-1}U \, , \vec{c} = (L+D)^{-1}\vec{b}$$

<u>הערה:</u> גאוס-זיידל מהירה יותר מבחינת התכנסות מיעקובי, אך יש מקרים שבהם גאוס-זיידל לא מתכנס ויעקובי כן תתכנס!

תרגיל:

נתונה המערכת:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

בצע שתי איטרציות בשיט גאוס-זיידל, כאשר הוקטור ההתחלתי הינו: $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>פתרון:</u>

נפרק את A לשלוש המטריצות כפי שמתואר בשיטה:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נוסחת גאוס-זיידל:

$$\overrightarrow{x_{n+1}} = -(L+D)^{-1} * U * \overrightarrow{x_n} + (L+D)^{-1} * \vec{b}$$

נחשב את המקדמים:

$$(L+D) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow (\mathrm{L}+\mathrm{D})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.1667 & 0.3333 & 0 \\ 0.0833 & -0.1667 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow (\mathrm{L}+\mathrm{D})^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.1667 & 0.3333 & 0 \\ 0.0833 & -0.1667 & 0.5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.833 \\ -1.0833 \end{pmatrix}$$

ונחשב גם את:

$$-(L+D)^{-1}U = -\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.1667 & 0.3333 & 0 \\ 0.0833 & -0.1667 & 0.5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1667 & 0.333 \\ 0 & -0.0833 & 0.1667 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\boxed{\overrightarrow{x_{n+1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1667 & 0.333 \\ 0 & -0.0833 & 0.1667 \end{pmatrix} \overrightarrow{x_n} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.833 \\ -1.0833 \end{pmatrix}}$$

נבצע כמה איטרציות:

$$\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.833 \\ -1.0833 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 1.9167 \\ 2.9445 \\ -1.0279 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} 1.9723 \\ 2.9816 \\ -1.0094 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \overrightarrow{x_8} = \begin{pmatrix} 1.9999 \\ 3.000 \\ -1.0002 \end{pmatrix}$$

כאשר הערך האמיתי הינו $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

שאלה:

האם ניתן לפתור את המערכת הבאה בעזרת גאוס זיידל או יעקובי.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \boxed{3} & 5 \\ 2 & 4 & \boxed{8} & 0 & 14 \\ 2 & \boxed{6} & 1 & 1 & 10 \\ \boxed{5} & 3 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

פתרון:

נרצה שלמטריצה יהיה תנאי של אלכסון שולט. לכן:

$$R_1 \leftrightarrow R_4\,, R_3 \leftrightarrow R_2 \;=> \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 0 & 1 & 9 \\ 2 & 6 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & 0 & 14 \\ \underbrace{1 \quad 1 \quad 0 \quad 3}_{A'} & & & & 5 \end{array}\right)$$

ונשים לב כי אכן מתקיים תנאי של אכלסון שולט עבור A':

$$|5| > |3| + |0| + |1|$$

$$|6| > |2| + |1| + |1|$$

$$|8| > |4| + |2| + |0|$$

$$|3| > |1| + |1| + |0|$$

נשים לב כי המשוואה לא השתנתה ולכן עכשיו שיש תנאי אלכסון שולט, ניתן לבצע את שיטות גאוס-זיידל או יעקובי והן יתכנסו לכל ניחוש התחלתי.

הערות:

1) תנאי אלכסון שולט $\Leftarrow$ 2 השיטות יתכנסו!
2) אם התנאי האלכסון השולט לא מתקיים זה לא אומר שהשיטה לא תתכנס, ולכן צריך לבדוק אם $\|B\| < 1$, לפי הנורמות הידועות ($L_1, L_2 L_\infty$ - לא משנה).

$$\underset{\text{גאוס זיידל}}{B} = -(L+D)^{-1}U, \quad \underset{\text{יעקובי}}{B} = -D^{-1}(L+U)$$

3) יש תנאי הכרחי ומספיק:

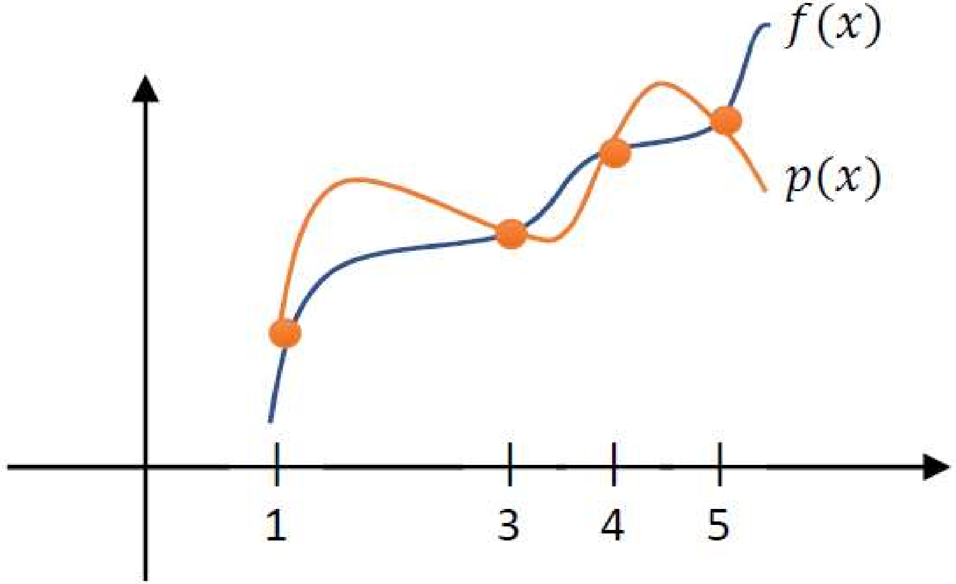
$$\rho(B) < 1$$

שהוא גורר התכנסות.

4) גאוס-זיידל מהיר יותר, אבל יש מקרים שגאוס-זיידל לא יעבוד ואומנם יעקובי כן.

<u>אינטרפולציה</u>

<u>המטרה:</u> למצוא פולינום $(p(x))$ המייצג בדייקנות מרבית את ההתנהגות של פונקציה כלשהי $f(x)$.



נתונות נקודות בסיס (נקודות דגימה): $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, ונרצה שיתקיים:

$$p(x_i) = y_i$$

במילים פשוטות, פולינום האינטרפולציה עובר דרך כל נקודות הדגימה.

אינטרפולציה פולינומית (לפי פונקציות בסיס)

נתונות $n+1$ נקודות דגימה: $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$, אזי פולינום האינטרפולציה צריך לקיים:

$$\forall_{i=1,\dots,n+1}: p(x_i) = y_i$$

ולכן נוכל להגיד כי דרגת פולינום האינטרפולציה הוא n.

דוגמה:

נתונות פונקציות הבסיס הבאות:

$$1, \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

מצאו קירוב באמצעות אינטרפולציה העובר דרך 3 הנקודות: $(2,4), (1,1), (0,0)$ בעזרת פונקציות הבסיס.

נגדיר את פולינום האינטרפולציה:

$$f(x) = c_0 * 1 + c_1 * \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c_2 * \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

נרצה למצוא את המקדמים בעזרת הנתונים על הנקודות, כלומר:

$$f(0) = 0\,, f(1) = 1, f(2) = 4$$

לכן נקבל מערכת של משוואות:

$$\begin{cases} f(0) = c_0 * 1 + c_1 * 0 + c_2 * 0 = 0 \\ f(1) = c_0 * 1 + c_1 * \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2 * \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ f(2) = c_0 * 1 + c_1 * \sin(\pi) + c_2 * \cos(\pi) = 2 \end{cases}$$

נרשום בצורה של מטריצות:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \sin(0) & \cos(0) \\ 1 & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix}}_{\text{מטריצת ונדרמונדה}} * \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$=> \begin{cases} c_0 + c_2 = 0 \\ c_0 + c_1 = 1 \\ c_0 + c_2 = 4 \end{cases} => c_0 = 2\,, c_1 = -1\,, c_2 = -2$$

ולכן פולינום האינטרפולציה הינו:

$$f(x) = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

<u>אינטרפולציית לגרנז'</u>

<u>הגדרה:</u> אינטרפולציית לגרנז' באמצעות $n+1$ פונקציות בסיס שהן פולינומים ממעלה אפס עד n נקראת אינטרפולציה פולינומית.

נשים לב כי:

$$\underbrace{N}_{\text{דרגת הפולינום}} = \underbrace{n}_{\text{מספר נקודות הדגימה}} - 1$$

לכן נגדיר את פולינום האינטרפולציה של לגרנז':

$$P_N(x) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i) * l_i(x)$$

כאשר $l_i(x)$ נקראות המשקולות של לגרנז' ומוגדרות לפי:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

הערות:

1) כמספר נקודות הדגימה כמספר $l_i(x)$.
2) $l_i(x)$ פונקציות של x.
3) נשים לב כי מתקיים:

$$l_i(x_i) = 1 \,,\, l_i(x_j) = 0$$

$$l_i(x_j) = \delta = \begin{cases} 1 \,, & i = j \\ 0 \,, & i \neq j \end{cases}$$

דוגמה:

נתונות הנקודות: $\left(\underbrace{2}_{x_2}, \underbrace{4}_{y_2}\right), \left(\underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{1}_{y_1}\right), \left(\underbrace{0}_{x_0}, \underbrace{0}_{y_0}\right)$ נמצא פולינום אינטרפולציה בשיטת לגרנז'.

מאחר ויש 3 נקודות דגימה אז: $N = 3 - 1 = 2$. לכן נבנה 3 משקולות לגרנז':

$$i = 0\,, l_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i=0}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} =_{\text{נציב}} \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}$$

$$= \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

$$i = 1\,, l_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i=1}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} =_{\text{נציב}} \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}$$

$$= -x(x-2)$$

$$i = 2\,, l_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i=2}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} =_{\text{נציב}} \frac{(x - 0)(x - 1)}{(2 - 0)(2 - 1)}$$

$$= \frac{1}{2}x(x - 1)$$

ובסה"כ נקבל:

$$\boxed{P_2(x)} = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) =$$

$$= 0 * \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2) - x(x - 2) + 2 * \frac{1}{2}x(x - 1) = -x^2 + 2x + x^2 - x = \boxed{x}$$

<u>הערה:</u>

מכיוון שהתקיים ש: $f(x_0) = 0$ אז חישוב $l_0(x)$ היה מיותר!

<u>הערה:</u>

<u>יתרון של אינטרפולציית לגרנז':</u> נשים לב שחישוב $l_i(x)$ אינו תלוי ב-y_i

כלומר לפו' שדגמנו באותן נק' דגימה ברגע שנחשב את $l_i(x)$, נוכל למצוא את פולינום האינטרפולציה.

<u>חסרונות של אינט' לגרנז:'</u> הוספת נק' אחת גורמת לכך שנצטרך לחשב את כל ה-$l_i(x)$ מחדש.