

פתרון – תרגיל בית מס' 2 – חקר ביצועים 88-369

1.

(א)

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 9X_2$$

s.t.

$$X_1 + 4X_2 + S_1 = 8$$

$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 4$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

(ב). פתרון בטבלת סימפלקס :

		משתנה נכנס							
משתנה יוצא		Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS	$\frac{RHS}{a_{ij}}$	
L_1	Z	1	-3	-9	0	0	0		
L_2	S_1	0	1	4	1	0	8	(2)	→ שוויון ביחס, בחירה אקראית
L_3	S_2	0	1	2	0	1	4	(2)	

		Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS	$\frac{RHS}{a_{ij}}$	
L'_1	Z	1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	0	18		$L'_1 \rightarrow L_1 + 9L'_2$
L'_2	X_2	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	2		$L'_2 \rightarrow \frac{L_2}{4}$
L'_3	S_2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0		$L'_3 \rightarrow L'_3 - 2L'_2$

		Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS	$\frac{RHS}{a_{ij}}$	
L''_1	Z	1	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	18		$L''_1 \rightarrow L'_1 + \frac{3}{4}L'_3$
L''_2	X_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2		$L''_2 \rightarrow L'_2 - \frac{1}{4}L'_3$
L''_3	X_1	0	1	0	-1	2	0		$L''_3 \rightarrow 2L'_3$

הפתרון האופטימלי: $X_1=0, X_2=1$. $Z = 18$

(ג). הבעייתיות : מצב של פתרון מנוון.

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 4X_2$$

s.t.

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 5$$

$$X_1 + X_2 + S_2 = 4$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

(ב). פתרון בטבלת סימפלקס :

משקל 002	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS	$\frac{RHS}{a_{ij}}$
Z	1	-2	-4	0	0	0	
S_1	0	1	2	1	0	5	$2\frac{1}{2} \Rightarrow$
S_2	0	1	1	0	1	4	4

משקל 002	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS	$\frac{RHS}{a_{ij}}$
Z	1	0	0	2	0	10	
X_2	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	5
S_2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	3 \Rightarrow

$L'_1 \rightarrow L_1 + 4L'_2$
 $L'_2 \rightarrow \frac{L_2}{2}$
 $L'_3 \rightarrow L_3 - L'_2$

המשתנה S_2 מתאפס, זה מעיד על ריבוי פתרונות. יש להכניסו לבסיס בשלב הבא.
הפתרון הנוכחי האופטימלי: $X_2 = 5/2, S_2 = 3/2$

הפתרון הנוכחי האופטימלי: $X_1 = 3, X_2 = 1$

3
(N

$s.t.$

$$-3X_1 + X_2 + S_2 = 30$$

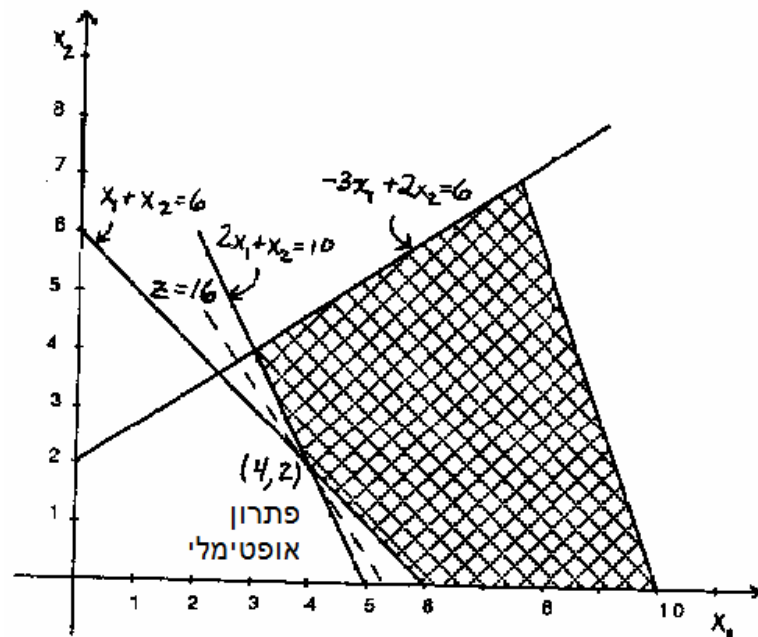
$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

(ב). פתרון בטבלת סימפלקס :

תיקו בבחירת המשתנה הנכנס, נכניס את זה עם האינדקס הקטן יותר, כלומר את X_1 .
מבחן היחס אינו חיובי בשום מקרה, לכן אין משתנה שיוצא מהבסיס. אלגוריתם הסימפלקס נעצר.
אין פתרון.

ג. הבעייתיות: בסעיף ב' ראינו שאפשר להכניס את X_1 לבסיס, כלומר שניתן להגדיל את ערכו של X_1 ללא הגבלה. זהו מצב של תחום אפשרי לא חסום של הפתרונות ומראה שאין פתרון (סופי).

4.
א. פתרון גרפי:



הפתרון האופטימלי: $(X_1, X_2) = (4, 2)$
ערך פונ' המטרה: $Z = 16$

ב. פתרון בשיטת Big-M:

נכתוב את הבעיה בצורה הסטנדרטית, נוסיף משתני סרק ומשתנים מלאכותיים לפי הצורך:

$$\text{Max} \quad -Z = -3X_1 - 2X_2$$

s.t.

$$2X_1 + X_2 - X_3 + \bar{X}_5 = 10$$

$$-3X_1 + 2X_2 + X_6 = 6$$

$$X_1 + X_2 - X_4 + \bar{X}_7 = 6$$

$$X_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, 7)$$

(משתני הסרק: X_3, X_4, X_6 . המשתנים המלאכותיים: \bar{X}_5, \bar{X}_7).

נעדכן את פונ' המטרה:

$$\text{Max} \quad -Z = -3X_1 - 2X_2 - M\bar{X}_5 - M\bar{X}_7$$

כעת צריך לדאוג ששורת פונ' המטרה בטבלת הסימפלקס תהיה בצורה תקינה:

א. ימין	\bar{X}_5	\bar{X}_7	X_4	X_3	X_2	X_1	
0	M	M	0	0	2	3	Z נוכחי
10	1	0	0	-1	1	2	$(-M)^*$
6	1	0	-1	0	1	1	$(-M)^*$
-16M	0	0	M	M	-2M+2	-3M+3	Z חדש

וטבלת הסימפלקס:

Bas Var	Eq No	Z	Coefficient of							Right Side
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
Z	0	-1	-3M	-2M						
X_5	1	0	+3	+2	1M	1M	0	0	0	-16M
X_6	2	0	2	1	-1	0	1	0	0	10
X_7	3	0	-3	2	0	0	0	1	0	6
			1	1	0	-1	0	0	1	6

Bas Var	Eq No	Z	Coefficient of							Right Side
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
Z	0	-1		-0.5M	-0.5M		1.5M			-1M
X_1	1	0	0	+0.5	+1.5	1M	-1.5	0	0	-15
X_6	2	0	1	0.5	-0.5	0	0.5	0	0	5
X_7	3	0	0	3.5	-1.5	0	1.5	1	0	21
			0	0.5	0.5	-1	-0.5	0	1	1

Bas Var	Eq No	Z	Coefficient of							Right Side
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
Z	0	-1					1M		1M	
X_1	1	0	0	0	1	1	-1	0	-1	-16
X_6	2	0	1	0	-1	1	1	0	-1	4
X_2	3	0	0	0	-5	7	5	1	-7	14
			0	1	1	-2	-1	0	2	2

הפתרון האופטימלי: $X_1 = 4, X_2 = 2$ ערך פוני המטרה: $Z = 16$.
 הפתרון המורחב: $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7) = (4, 2, 0, 0, 0, 14, 0)$.