17.11.16

מערכות דינמיות - הרצאה 2

המשך מתנודות במימד 1

משוואה: $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = F(x)$ משמע מטיפוסה מהסוג: $\frac{(x')^2}{2} + V(x) = E$

כלומר: $(x')^2 = 2(E-V(x))$ וקיים פתרון אם"ם $E-V(x)\geq 0$

ולכן $E \geq V(x)$. ומטה נקבל נקודת שבת עבור $V(x)=E$

נרשום באופן הבא: $x' = \pm\sqrt{2(E-V(x))}$. כלומר השאלה האם נקודות שבת הם רק מתכנסות או מגיעים אליהם בזמן סופי? והכן, אם $V(x)-E$ בעל שורשים פשוטים במקרה לא מתכנס בזמן סופי, אחרת רק מתכנס.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{(x')^2}{2} + V(x) = E\right) \Rightarrow x''\cdot x' + V'(x)x' = 0 \Rightarrow \underline{x'=0}$$

או

$$\underline{x'' + V'(x) = 0}$$

מערכות רציפות ב-$\mathbb{R}^2$

הגדרה:

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

מקרה ליניארי:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \overbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}^{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \bar{x}' = A\bar{x}$$

הערה: אם $\det(A)\neq 0$ אז $(0,0)$ נקודת שבת מבודדת.

I

תמיד קיימת סביבה עבור ש-$(0,0)$ נקודת שבת יחידה.

17.11.16

<u>איך מתחילים?</u> 1. נמצא ע"ע של A ערכים λ_1,λ_2.

2. נניח $\lambda_1\neq\lambda_2$ אזי: $\binom{x}{y}=c_1v_1e^{\lambda_1 t}+c_2v_2e^{\lambda_2 t}$

כאשר v_1,v_2 ו"ע מתאימים ; c_1,c_2 קבועים.

<u>מקרים:</u> 1. $\lambda_1\neq\lambda_2$ וגם ממשיים:

I. $\lambda_1>\lambda_2>0$ ⇐ לא יציב. (Stable node)

II. $\lambda_1<\lambda_2<0$ ⇐ יציב. (unstable node)

III. $\lambda_1<0<\lambda_2$ ⇐ לא יציב. (saddle)

2. $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ ולכן: $\lambda_{1,2}=a\pm bi$

<u>תזכורת:</u> $e^{(a+bi)t}=e^{at}(\text{cis}(bt))$

ולכן אזי: I. $Re(\lambda)>0$ ⇐ לא יציב

II. $Re(\lambda)<0$ ⇐ יציב

III. $Re(\lambda)=0$ ⇐ יציב אסימפטוטית.

I. $Im(\lambda)\neq0$

II.

IV. $Im(\lambda)\neq0$ ⇐ מוקד יציב.

V. $Im(\lambda)\neq0$ ⇐ מוקד לא יציב.

$$\bar{x}' = A\bar{x} \rightarrow \bar{x} = e^{At}$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

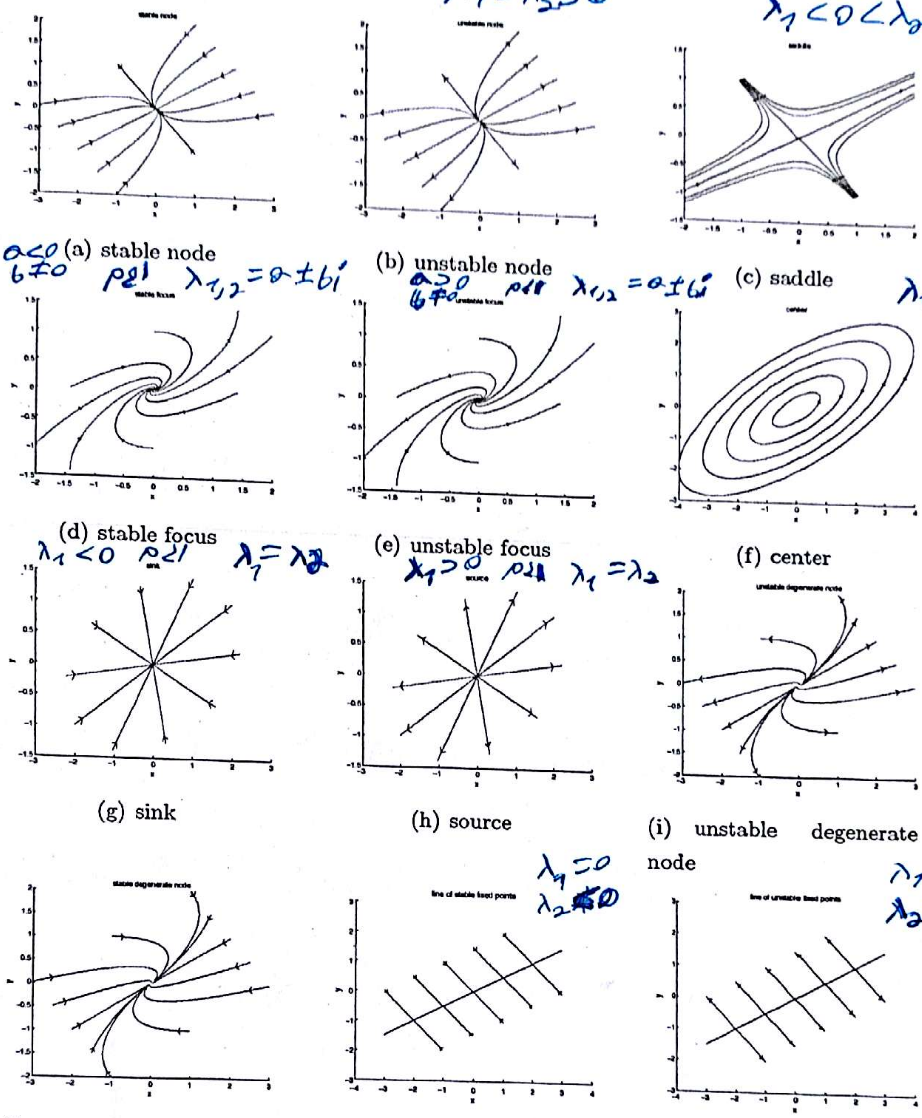
$\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ | $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ | $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$a<0$, $b\neq 0$ אם $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ | $a>0$, $b \neq 0$ אם $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ | $\lambda_{1,2} = \pm bi$

$\lambda_1 < 0$ אם $\lambda_1 = \lambda_2$ | $\lambda_1 > 0$ אם $\lambda_1 = \lambda_2$ | $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, $\lambda > 0$

$\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, $\lambda < 0$ | $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$ | $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$



(a) stable node (b) unstable node (c) saddle

(d) stable focus (e) unstable focus (f) center

(g) sink (h) source (i) unstable degenerate node

(j) stable degenerate node (k) line of stable fixed points (l) line of unstable fixed points

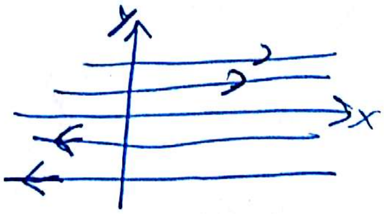
FIGURE 1. *PHASE DIAGRAMS FOR LINEAR SYSTEMS IN 2D*
(figures by Jeremy Schiff)

__הערה:__ אם $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ אז כלו $x(t)=0$, $y(t)=0$ ולכן רק $(0,0)$ שיווין

אבל אם $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ אז

$$x' = y \rightarrow x' = c_2 \qquad y' = 0 \rightarrow y = c_2 \qquad x = c_2 x + c_1$$

(m) moving stars



17.11.16

נשתמש בה: $\bar{x}'=A\bar{x}$ ולכן משוואה אופיינית

תכונה: $\lambda^2+p\lambda+q=0$ ולכן: $\lambda_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$

<u>כלומר:</u> אם $p^2<4q$ אז מוקד.

ספק ← קיור

אם $p^2=4q$ אז ~~[illegible]~~ צומת מנוון/ספק אמבור

אם $p^2>4q$ אז אם $q=0$ אז קו נקודות שבת.

אם $q\neq 0$ אז אוכף.

אם $q>0$ אז צומת.

<u>נתון:</u> $x'=f(x)$ ונניח x^* נקודת שבת מבודדת, $f(x^*)=0$.

<u>מתקיים:</u>

$$f(x)=f(x^*)+Df(x^*)(x-x^*)+o(\|x-x^*\|^2)$$

נסמן: $A=Df(x^*)$. כלומר: $x'\approx A(x-x^*)$

ולכן נעבור: $(x-x^*)'\approx A(x-x^*)$ ולכן: $x'\approx Ax$

<u>משפט:</u> (Hartman-Grobman 1960) $\bar{x}'=f(\bar{x}),\ \bar{x}\in\mathbb{R}^n$ ונניח $f\in C^2$ ונניח $f(x^*)=0$ ונגדיר $A:=Df(0)$. אז, קיימת לינאריזציה (במובן טופולוגי) קיים הומיאומורפיזם $h:U\to\mathbb{R}^n$ כך

סביבה של 0

ש $y=h(x)$ ומתקבל $y'=Ay$.

<u>הערה:</u> זה נכון רק אם $Re(\lambda)\neq 0$ לכל ע"ע של A.

Scanned by CamScanner

17.11.16

הערה: ב-$\mathbb{R}^2$ ~~[illegible]~~ מספיק $f\in C^1$ אבל לא ב-$\mathbb{R}^n$ עבור $n\geq 3$.

דוגמה: נמצא נקודות שבת לכל a עבור:

$$x' = a(x-y) - x^2 + y^2 \to x' = (x-y)(a-x-y)$$
$$y' = (a+x)y$$

* נקודה שבת מתקיים ש-$x'=y'=0$ ולכן:
תחילה נחשב מתי $x'=0$ או $y'=0$.

ובכן:

$x'=0$: $x+y=a$ או $x=y$.

$y'=0$: $y=0$ או $x=-a$.

החיתוך של זה הם נקודות שבת:

$y=0 \to (0,0);(a,0)$

$x=-a \to (-a,-a);(-a,2a)$

$$DF = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-2x & -a+2y \\ y & a+x \end{bmatrix}$$

* כרגע לבחון עבור כל נקודה שעשויה להיות שבת

$$DF(0,0) = \begin{bmatrix} a & -a \\ 0 & a \end{bmatrix} \to$$
$a<0 \to$ בור יציב
$a>0 \to$ מקור לא יציב

$$DF(a,0) = \begin{bmatrix} -a & -a \\ 0 & 2a \end{bmatrix} \to \text{אוכף}$$

$$DF(-a,-a) = \begin{bmatrix} 3a & -3a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - 3a\lambda - 3a^2 = 0$$

$$DF(-a,2a) = \begin{bmatrix} 3a & 3a \\ 2a & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = \frac{(3\pm\sqrt{21})a}{2}$$

חישוב סוג $\to$ אוכף

17.11.16

הגדרות: $x'=f(x)$, $f(x^*)=0$. יריעה יציבה של x^*:

$$W^s(x^*)=\{x_0 : x(t)\xrightarrow[t\to\infty]{} x^*\}$$

כאשר $x(t)$ פתרון של $x'=f(x)$ וגם $x(0)=x_0$.

משוואות Lotka-Voltera:

מתארים יחס בין טורף-נטרף.
x = מספר צבאים
y = מספר ארנבות

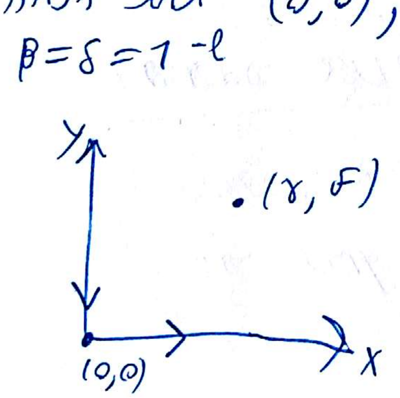
$\forall \alpha,\beta,\gamma,\delta>0$:

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta x y \\ y' = -\gamma y + \delta x y \end{cases}$$

הנחה טובה להניח $x,y\geq 0$ כי מדובר באוכלוסיות.

$$\begin{cases} x' = x(\alpha - \beta y) \\ y' = y(-\gamma + \delta x) \end{cases}$$

יש 2 נקודות שבת: $(0,0)$; (γ,α) תחת הנחה $\beta=\delta=1$ -ש



$$\Rightarrow \quad Df(x,y)=\begin{bmatrix} \alpha - y & -x \\ y & x-\gamma \end{bmatrix}$$

$$Df(0,0)=\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} \to \text{אוכף}$$

$$Df(\gamma,\alpha)=\begin{bmatrix} 0 & -\gamma \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \to \lambda=\pm\sqrt{\alpha\gamma}\, i$$

מרכז עבור
לינאריזציה
אבל המשפט לא עובד
ולכן לא בהכרח נכון.

17.11.16

הגדרה:

$$x' = f(x,y)$$
$$y' = g(x,y)$$

נקראת Hamiltonian אם קיימת $H(x,y)$ כך ש

$$f(x,y) = \frac{\partial H}{\partial y}$$
$$g(x,y) = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

הגדרה: $f(x,y)=x'$, $g(x,y)=y'$ נקראת generalize Hamiltonian כך ש.

$$f(x,y) = \mu(x,y)\frac{\partial H}{\partial y}$$
$$g(x,y) = -\mu(x,y)\frac{\partial H}{\partial x}$$

טענה: ערך של H נשאר קבוע על מסלולים.

הוכחה:

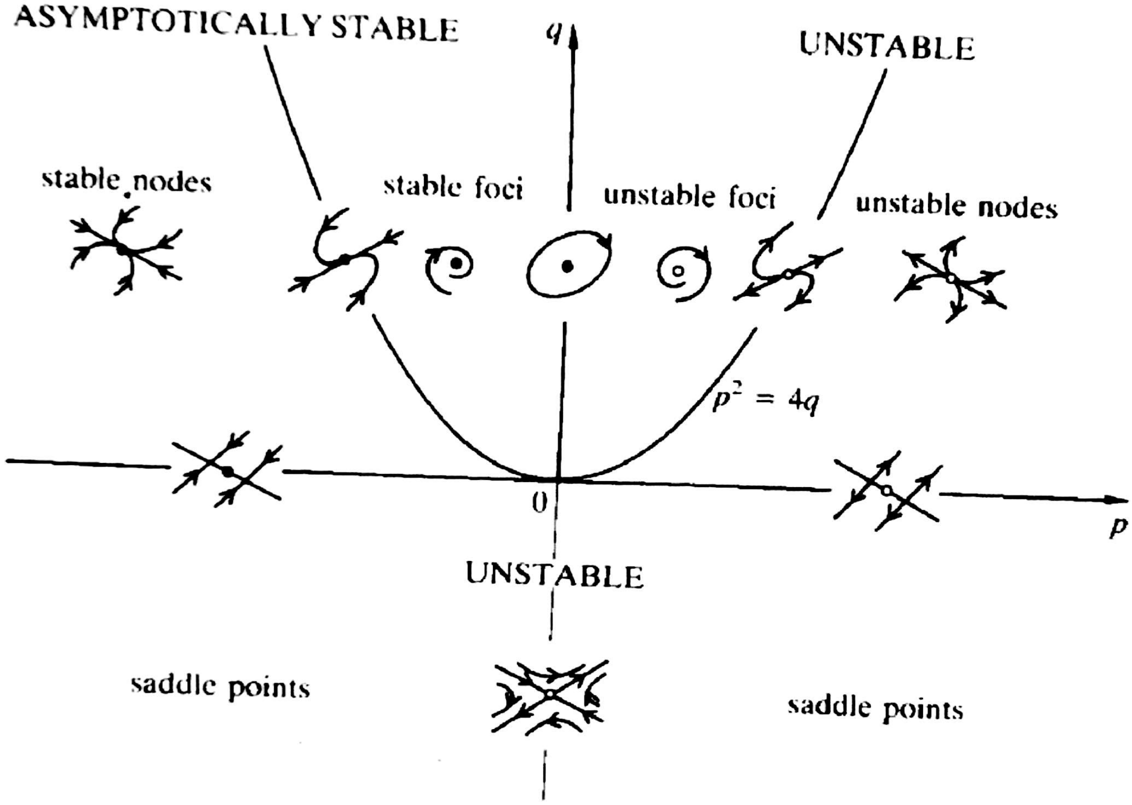
$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x}\cdot x' + \frac{\partial H}{\partial y}\cdot y' = \frac{\partial H}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{\partial H}{\partial y}\left(-\mu\frac{\partial H}{\partial x}\right) \equiv 0$$

דוגמה שעלתה:

$$H = \gamma \log(x) + \delta \log(y) - x - y$$

נגזור, נקבל (δ,γ) נראה שמקסימום ויחיד.

זה נכון גם אם לא משוואות לינאריות.


ASYMPTOTICALLY STABLE
q
UNSTABLE
stable nodes
stable foci
unstable foci
unstable nodes
$p^2 = 4q$
0
p
UNSTABLE
saddle points
saddle points

23.11.16 מערכות דינמיות - הרצאה 3

הגדרה: מערכת $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ נקראת המילטונית מוכללת אם קיימת $H(x,y)$ כך ש- $f = \frac{\partial H}{\partial x} \wedge g = -\frac{\partial H}{\partial y}$

הערה: כל כיוון או מסלול מוכלל בקו מהצורה $H(x,y)=c$.

משפט: נניח ש $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ מערכת המילטונית עם $H(x,y)$.

$p=(x^*,y^*)$ נקודת שבת: $\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_p = \frac{\partial H}{\partial p} = 0$

נגדיר כי: $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{bmatrix}$

I. אם $|\mathcal{H}|<0$, אזי p היא אוכף.

II. אם $|\mathcal{H}|>0$, אזי p הוא מרכז.

III. אם $|\mathcal{H}|=0$, אזי אי אפשר להכריע.

דוגמה:

[illegible]

(1) $x'' + x - \varepsilon x^3 = 0$

הערה: עבור $\varepsilon=0$ → הנ"ל, $\varepsilon<0$ הנ"ל רק, $\varepsilon>0$ הנ"ל קשה.

נניח $\varepsilon \geq 0$ ונקבל:

(2) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \varepsilon x^3 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

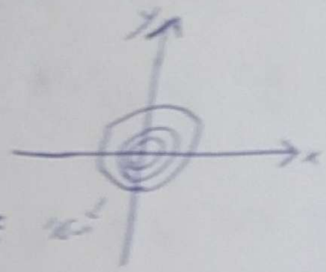
23.11.16

$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = E$

עבור $\varepsilon=0$ נקבל כי:

ובנוסף: $x'=y$
$y'=-x$

ובכן:



לכל E.

עבור $\varepsilon>0$:

$H(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{\varepsilon x^4}{4}$

נקודות שבת: $y=0$,

$-x+\varepsilon x^3=0$

$\downarrow$

$(0,0)$

$-1+\varepsilon x^2=0$

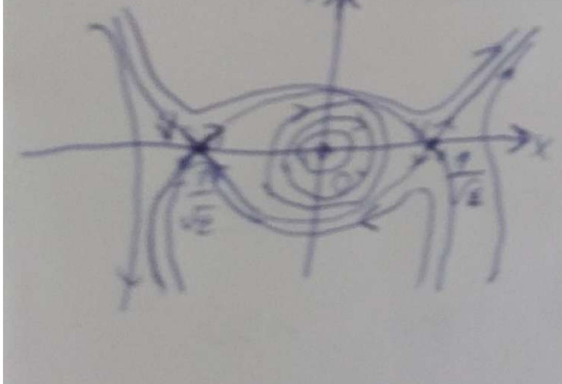
$\downarrow$

$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, 0\right)$

נשים לב כי $V'(x)=x-\varepsilon x^3$ ולכן: $V''(x)=1-3\varepsilon x^2$

ולכן: $V''(x)=\begin{cases} 1, & x=0 \\ -2, & x=\pm\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \end{cases}$

אז $(0,0)$ מרכז ו-$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, 0\right)$ הם אוכפים.



23.11.16

שיטת ההפרעה "רגולרה":

ננסה שיטת הפרעה רגולרה על $x''+x-\varepsilon x^3=0$:

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+o(\varepsilon^2)$$

ונקבל:

$$(x_0+\varepsilon x_1)''+(x_0+\varepsilon x_1)-\varepsilon(x_0+\varepsilon x_1)^3=0$$

נבדוק תנאי התחלה:

$$x(0,\varepsilon)=1 \to x_0(0)+\varepsilon x_1(0)=1$$
$$x'(0,\varepsilon)=0 \to x_0'(0)+\varepsilon x_1'(0)=0$$

$$\Downarrow$$

$$x_0(0)=1;\ x_1(0)=0$$
$$x_0'(0)=0;\ x_1'(0)=0$$

נסתכל על איברים בלי ε:

$$x_0''+x_0=0$$
$$x_0(0)=1,\ x_0'(0)=0 \to x_0(t)=\cos(t)$$

נסתכל על איברים עם ε:

$$x_1''+x_1-\varepsilon x_0^3=0$$
$$\Downarrow$$
$$x_1''+x_1=\varepsilon\cos^3(t)$$
$$\Downarrow$$
$$x_1(t)=\frac{1}{32}\left[\cos(3t)-\cos(t)\right]-\frac{3t}{8}\sin(t)$$

הפתרון הזה לא מאוד טוב כי $t\sin(t)$ מתחיל להרוס לנו כבר ב- $t\sim o(\frac{1}{\varepsilon})$.

23.11.16

שיטת פואנקרה - לינדשטדט

$\omega =$ תדירות, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = \omega(\varepsilon)$,

כאשר $\tau = \omega t$ ונקבל:

$$\omega^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + x - \varepsilon x^3 = 0 \qquad (3)$$

$$x(\tau + 2\pi) = x(\tau, \varepsilon)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots$$

$$x(\tau, \varepsilon) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \dots$$

$$(\omega_0 + \varepsilon \omega_1)^2 \left(\frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau^2} + \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} \right) + (x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau)) + \dots$$
$$+ \varepsilon (x_0 + \varepsilon x_1(\tau))^3 = 0 \quad , \quad x(0, \varepsilon) = a$$

איברים עם ε^0:

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau^2} + x_0 = 0 \rightarrow x_0(0) = a, \ \frac{\partial x_0}{\partial \tau}(0) = 0,$$

$$x_0(\tau) = a \cos(\tau), \quad \omega_0 = 1$$

איברים עם ε^1:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + 2\omega_1 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau^2} + x_1 - x_0^3 = 0$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 = 2\omega_1 a \cos(\tau) + a^3 \cos^3(t)$$

23.11.16

ולכן:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 = (2\omega_1 a + \frac{3}{4}a^3)\cos(\tau) + \frac{a^3}{4}\cos(3\tau)$$

נאפס את $2\omega_1 a + \frac{3}{4}a^3$ הספרה $\omega_1 = -\frac{3}{8}a^2$ כי

מיגיעים לתוצאה:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t,\varepsilon) &= a\cos(\omega t) + \frac{\varepsilon a^3}{32}\cos(\omega t) \\ &\quad - \cos(3\omega t) + O(\varepsilon^2 a^5) \\ \omega &= 1 - \frac{3}{8}\varepsilon a^2 + O(\varepsilon^2 a^4) \end{aligned}}$$

Limit-cycle (מסלול מבודד)

הגדרה: המסלול גבול הוא המסלול סגור (מחזורי), מבודד.

הגדרה: נקודת גבול - ω של פתרון $x(t)$:

p = נקודת גבול - ω אם קיימת $t_n \to \infty$ כך ש: $x(t_n) \to p$

הקבוצה גבול - ω מכילה את כל נקודות גבול - ω.

הערה: אותה הגדרה רק ששמה נקודת גבול - α אם $t_n \to -\infty$.

דוגמה: ננת סכם:

$$x' = -y + (a - x^2 - y^2)x$$
$$y' = x + (a - x^2 - y^2)y$$

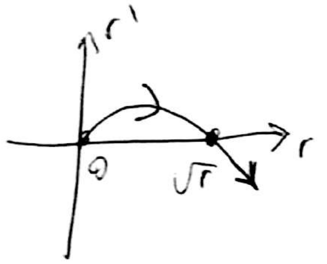
נעבור ל- $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ ונקבל:

23.11.16

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)' = xx'+yy' = (a-x^2-y^2)(x^2+y^2)$$

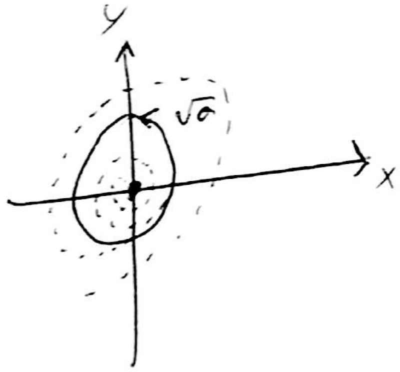
$$\frac{1}{2}(r^2)' = rr' = (a-r^2)r^2 \Rightarrow r' = r(a-r^2)$$

ולכן $r=0$, $r=\sqrt{a}$ נקודות שבת, ובכן: $\frac{y}{x} = tg(\theta)$



ולכן $r=\sqrt{a}$ יציב ואילו $r=0$ לא.

ולכן עבור x,y נקבל:



Hilbert's 16th problem

שאלה:

$$(*) \begin{cases} x' = P(x,y) \\ y' = Q(x,y) \end{cases}$$

P,Q פולינומים ממעלה n כמה מעגלים גבוליים?

מספר $H(n)$ כך ש: $H(n) \le \underset{const}{100n}$

משפט: לכל מערכת $(*)$ ב-$\mathbb{R}^2$ יש מספר מעגלים גבוליים סופי.

23.11.16

<u>משפט:</u> (פואנקרה - בנדיקסון)

$\begin{cases} x'=f(x,y) \\ y'=g(x,y) \end{cases}$ מערכת גזירה על $U\subseteq\mathbb{R}^2$ נניח A= קבוצת

גבול $-\omega$ המסלול $A\subset U$, $A\neq\emptyset$, אזי:

א. I. אם $A=\{p\}$, אזי p נקודת שבת.

או II. מסלול ~~גבולי~~ מחזורי (לא בהכרח גבול)

או III. הקבוצה הסגורה מורכבת מנקודות שבת ~~?~~ מסלולים הומוקליניים והטרוקליניים השורים אותן.

<u>תזכורת:</u>

$x(t)$ נקרא הומוקליני אם $\lim_{t\to\pm\infty}(x(t))=p$ כאשר p נקודת שבת.

$x(t)$ נקרא הטרוקליני אם $\lim_{t\to\pm\infty}(x(t))=p_{1,2}$

30.11.16

מערכות דינמיות - הרצאה 4

<u>הגדרה:</u> $\{X(t)\}_{t\ge 0}$ - מסלול הדמי. הקבוצת גבול - אומגה:

$$\omega(X) := \{y : \exists t_n \uparrow \infty \mid X(t_n) \to y\}$$

<u>משפט פואנקרה - בנדיקסון:</u> ב-$\mathbb{R}^2$, נניח ש- $\{X(t)\}_{t\ge 0}$ מסלול חסום אזי

אם $\omega(X)$ לא מכילה נקודות שבת אזי:

א. $\omega(X) = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ והוא מסלול מחזורי.

או

ב. $\omega(X)$ הוא מסלול מחזורי וגם $X(t)$ מתקרב ל-$\omega(X)$ בצורה ספירלית.

אם $\omega(X)$ מכילה נקודות שבת אזי:

א. $\omega(X) = \{P\}$

או

ב. $\omega(X) = P \cup \bigcup_{k=1}^{n} (C_k)$, כאשר $P = \{P_1, \dots, P_m\}$ ו:

$C_k = \{Y_k(t)\}$ מסלולים: $Y_k(t) \xrightarrow{t\to\pm\infty} P_{i_k} \in P$

<u>הערה:</u> אפשר להוכיח שיש מספר סופי של נקודות שבת ב-$\mathbb{R}^2$ (פ).

<u>משפט:</u> (תכונות הקבוצת גבול - אומגה)

1. אם $\{X(t)\}_{t\ge 0}$ מסלול חסום, אזי $\omega(X) \ne \emptyset$
2. $\omega(X)$ נשמרת, אם $y \in \omega(X)$ ⇐ $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subseteq \omega(X)$.
3. $\omega(X)$ סגורה.
4. אם $\omega(X)$ חסומה אזי $\omega(X)$ קשירה.
5. אם $y \in \omega(X)$ אז $\omega(y) \subseteq \omega(X)$.

Scanned by CamScanner

1.12.16

הוכחות:

1. $A_n \to A$ (חסום וסגור ולכן יש סדרה מתכנסת)

2. $A_n \in \omega(x)$, $\exists t_n \uparrow \infty$ כך ש: $\|x(t_n) - A_n\| < \frac{1}{n}$

$\downarrow$

$x(t_n) \longrightarrow A \in \omega(x)$

3. $y \in \omega(x)$, ניקח $t \in \mathbb{R}$, צ"ל $y(t) \in \omega(x)$

ממשפט על תלות רציפה של פתרונות על תנאי התחלה

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ כך ש $\|z - y\| < \delta \Rightarrow \|z(t) - y(t)\| < \varepsilon$

וכעת:

$y \in \omega(x) \Rightarrow \exists t_n : \|x(t_n) - y\| < \delta$

גורר:

$\|x(t_n + t) - y(t)\| < \varepsilon \to y(t) \in \omega(x)$

4. בשלילה: אם $\omega(x)$ הקבוצה הגבולית של המסילה אז ניתן לפרק $\omega(x) = M \cup N$, המנותקות וסגורות $M \neq \phi = N$

נגדיר $\delta = dist(M, N)$ כך ש $U_{\frac{\delta}{3}}(M)$, $U_{\frac{\delta}{3}}(N)$

$\exists t_n \uparrow \infty : d(x(t_{2k-1}), M) < \frac{\delta}{3} \wedge d(x(t_{2k}), N) < \frac{\delta}{3}$

אזי $L = [x(t_{2k-1}), x(t_{2k})]$ מקיים: $L \cap U_{\frac{\delta}{3}}(N) \neq 0$

$L \cap U_{\frac{\delta}{3}}(M) \neq 0$

מקשירות $\underset{\text{המסילה}}{L}$ $\Rightarrow \exists s_k \in [t_{2k-1}, t_{2k}]$ כך ש:

$x(s_k) \notin U_{\frac{\delta}{3}}(M) \cup U_{\frac{\delta}{3}}(N)$

$\|x(s_k) - (M \cup N)\| \geq \frac{\delta}{3}$ כי

1.12.16

הגדרה: (קטע נחצה ומישור Poincare) $x'=f(x)$ קטע L נקרא "נחצה" אם γ $f(x)$ ~~[illegible]~~ מחוגל על L. לכל $x\in L$

נגדיר $\varphi(x)$, $x\in L$ כך ש: $\varphi(t)=\{x(t)\in L : t>0\}$ מינימלי

למה: נניח ש- L קטע נחצה "קטן" אז (1) קיים סכל כב

$$\exists h \,/\, y(t_1)\in L,\ y(t_2)\in L : t_1\neq t_2 \rightarrow |t_1-t_2|\geq h$$

למה: נניח $p\in \omega(x)\cap L$ אזי קיימת $t_n\uparrow\infty$ כך ש- $\{x(t_n)\}_{n\geq 1}$ כל הנקודות ממסלול $\{x(t)\}_{t\geq 0}$ ב- L. אם $x(t_1)=x(t_2)$ אז $x(t_n)=p$, $\{x(t)\}$ מחזורי. אם $x(t_1)\neq x(t_2)$ אז $p\leftarrow x(t_n)$ הנקודות מונוטוניות ב L. $\omega(x)\cap L=\{p\}$.

הוכחת פואנקרה - בנדיקסון:

יהי $p\in\omega(x)$ ונניח $\omega(x)$ לא מכילה נקודות שבת. נתבונן ב $\omega(p)$: $\phi\neq\omega(p)\subseteq\omega(x)$ לכן $\exists q\in\omega(p)$. קיים קטע נחצה $q\in L$. ולכן לפי הלמה הקודמת: $\|\omega(x)\cap L\|=1$, $\{q(t)\}_{t\geq 0}\subseteq\omega(x)$.

למה: אם $\omega(x)$ מכילה מסלול מחזורי אז $F=\omega(x)$.

Vonderpol

$$x''+x=\mu(1-x^2)x',\quad \mu>0$$

אם נסתכל על משוואה במישור שמתנהגת: $f(x)=\frac{x^3}{3}-x$ ולכן יש

$$\begin{cases} x'=y-f(x) \\ y'=-x \end{cases} \Rightarrow J(0,0)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

ולכן $(0,0)$ לא יציבה.

1.12.16

$$E(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}, \quad \frac{\partial E}{\partial t} = xx' + yy' = (-x)\left(\frac{x^3}{3} - x\right) = y'\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$$

$$h(a^+) = E(0,a^-) - E(0,a^+) = \frac{1}{2}\left[(a^-)^2 - (a^+)^2\right] = \int_{X_0}\left[\left(\frac{x^3}{3} - x\right)y'\right]dt$$

$$= \int_{x_0}\left[\left(\frac{x^3}{3} - x\right)(-x)\right]dt$$

$$X_0 = X_1 \cup X_2 \cup X_3, \quad \int_{X_1} dE > 0, \quad \int_{X_3} dE > 0, \quad \int_{X_2} dE < 0$$

$$\int_{X_1} E' \, dt = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\frac{dy}{dx}\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^3}{x} - x\right)\left(\frac{-x}{y - \left(\frac{x^3}{x} - x\right)}\right)dx$$

8.12.16

מערכות דינמיות - הרצאה 5

$x'=f(x)$ כאשר ב-$\mathbb{R}^n$

הערה: אם $\{x(t)\}_{t>0}$ לא חסום אז $\omega(x)$ לא בהכרח קשירה.

משוואת רלקסציה:

דוגמה:

$x''+\mu(x^2-1)x'+x=0,\ \mu>0$

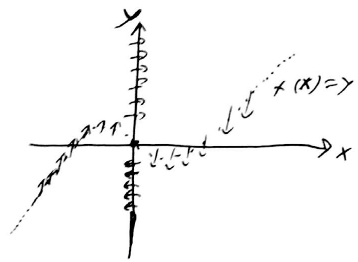
נסמן: $f(x)=\frac{x^3}{3}-x$ ונסמן: $w=x'+f(x)\cdot\mu$

$w'=x''+\mu f'(x)\cdot x'=x''+\mu(x^2-1)x'=-x$

ולכן סה"כ: $x'=w-f(x)\cdot\mu$, $w'=-x$ ונגדיר $y=\frac{w}{\mu}$ ונקבל:

$$\begin{cases} x'=\mu[y-f(x)] \\ y'=-\frac{x}{\mu} \end{cases}$$

נסתכל על המישור של המערכת:



Scanned by CamScanner

8.12.16

$$\text{זמן מחזור} = T \approx 2\int_{t_A}^{t_B} dt \quad , \quad y \approx f(x) \ ; \ \frac{dy}{dt} \approx f'(x)\frac{dx}{dt} = (x^2-1)\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{\mu} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-x}{\mu(x^2-1)} \rightarrow dt \approx -\frac{\mu(x^2-1)}{x}dx$$

ולכן:

$$T \approx 2\int_{t_A}^{t_B} dt = 2\int_2^1 \left(-\frac{\mu(x^2-1)}{x}\right)dx = 2\mu\left[\frac{x^2}{2} - \ln(x)\right]_1^2 =$$

$$= \mu[3-2\ln(2)] \quad . \quad T \approx \mu[3-\ln(2)\cdot 2] \sim O(\mu)$$

<u>איך לשלול מסלול גבולי?</u>

I. קריטריון בנדיקסון:

נניח כי $x'=f(x)$ היא מערכת על $R\subseteq\mathbb{R}^2$ כאשר R קשיר פשוט.

ונניח ש- $h\in C^1(R)$ כך ש: $\nabla\cdot(h\cdot f)>0$ על R אזי

אין מסלולים מחזוריים ב- R.

<u>הוכחה:</u>

נניח בשלילה: $C=\partial A$ אזי:

$$(hf)_x+(hg)_y>0$$

ולכן:

$$\begin{cases} x'=f(x,y) \\ y'=g(x,y) \end{cases}$$

$$\iint_A \left((hf)_x+(hg)_y\right)dxdy = \oint_C (hf)dy-(hg)dx = 0$$

8.12.16

דוגמה:

$x''+p(x)x'+q(x)=0$ ונניח $\forall x: p(x)>0$

אזי אין מסלול מחזורי.

$$f\begin{cases} x'=y \\ y'=-p(x)y-q(x)\end{cases} \to \nabla f = f_x+g_y = -p(x)<0$$

שיטת Lyapunov

נדבר על נקודת שבת של $x'=f(x)$ אז $f(x^*)=0$.

הגדרה: $V\in C^1(U)$, $x^*\in U$ נקראת פונקציה ליאפונוב
[U - תחום].

אם:

I. $V(x^*)=0$, $V(x)>0$ לכל $x\neq x^*$.

II. $\frac{\partial V}{\partial t}\le 0$ לכל $x\neq x^*$, $x\in V$.

הגדרה: אם $\frac{\partial V}{\partial t}<0$ לכל $x\neq x^*$, $x\in V$ אז V ליאפונוב במובן חזק.

משפט: אם קיימת פונקציה ליאפונוב במובן החזק אזי x^* היא יציבה אסימפטוטית עם אגן משיכה. כלומר לכל $x\in U$, $x(t)\xrightarrow[t\to\infty]{} x^*$

הערה: "אגן משיכה" זה אומר מהיכן שמגיעים מסלולים דרכו.

הוכחה: $\frac{\partial V}{\partial t}<0 \Rightarrow V(x(t))$ יורד ממש על כל מסלול. נבחן $y\in\omega(x)$ ונניח $y\neq x^*$, אזי ~~...~~ $y(t)\in\omega(t)$;

ולכן: $V(y(t))<V(y)$

$\exists\delta>0: V|_{B_\delta(y)} < V|_{B_\delta(y(t))} \to$ סתירה לרציפות.

8.12.16

<u>משפט:</u> אם קיימת פונקציית ליאפונוב במובן חלש אזי x^* היא יציבה במובן ליאפונוב. ז"א $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \|x^*-x\|<\delta \to \|x(t)-x^*\|<\varepsilon$

<u>משפט:</u> (Barbashin-Lasalle-Krasovski) אם $V(x)$ פונקציית ליאפונוב במובן חלש ואין תת-קבוצות אינווריאנטיות באוסף הנק' ב-$\{x: V'(x)=0\}$ חוץ מ-$\{x^*\}$ אזי x^* יציבה אסימפטוטית.

<u>הוכחה:</u> יהי $y=\omega(x)$, נניח כי $y\neq x^*$, $y(t)\in\omega(x)$ לכל $t\in\mathbb{R}$.

V קבוע על $y(t)$ מצא בהכרח שגיה אחרת $\frac{\partial V}{\partial t}(x)<0$ ואז

הוכחה הושלמת.

<u>מטוטלת</u>

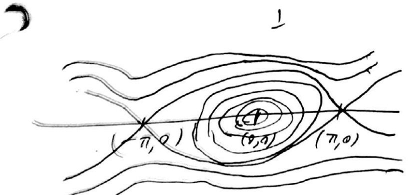
$x''+\sin(x)\omega^2=0$ ← בלי חיכוך → $x'=y$, $y'=-\omega^2\sin(x)$ ← $\mathcal{E}(x,y)=\frac{y^2}{2}+\omega^2(1-\cos(x))$

$x''+\mu x'+\omega^2\sin(x)=0$ ← עם חיכוך

$J=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2\cos(x) & -\mu\end{bmatrix}$, $x'=y$, $y'=-\omega^2\sin(x)-\mu y$

$J|_{(2\pi k,0)}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & -\mu\end{bmatrix}$

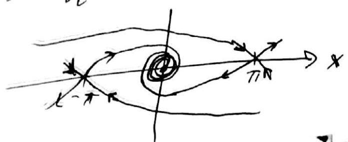
$p_J(\lambda)=\lambda^2+\lambda\mu+\omega^2=0$



מתנדי דאמ.

$\frac{\partial V}{\partial t}=yy'+\omega^2\sin(x)x'=y(-\omega^2\sin(x)-\mu y)+\omega^2\sin(x)y=-\mu y^2\leq 0$

$\{(x,y): \frac{\partial V}{\partial t}=0\}=\{y=0\}$



לשאלות הערות אחרונות:

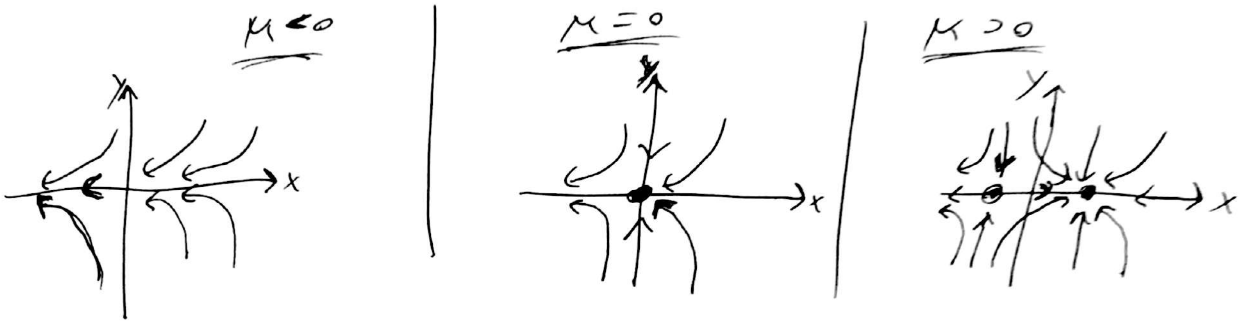
Irisrabinowitz@gmail.com

8.12.16

Bifurcation

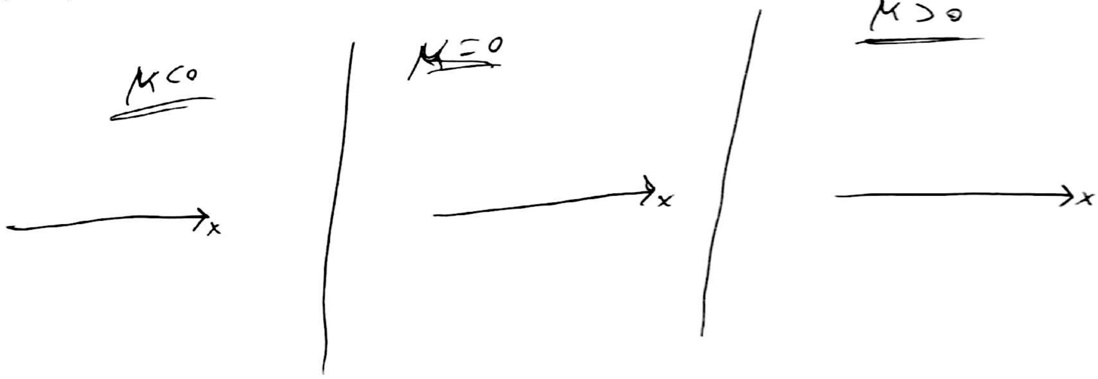
①

$$\begin{cases} x' = \mu - x^2 \\ y' = -y \end{cases}$$ (Saddle-Node)

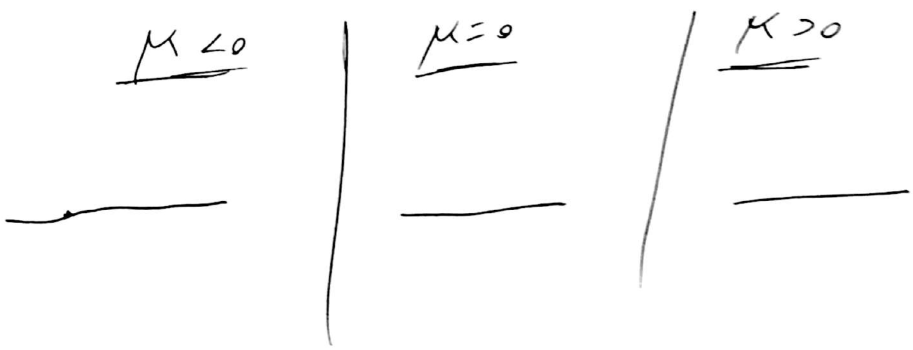


②

$$\begin{cases} x' = \mu x - x^2 \\ y' = -y \end{cases}$$ (transcritical)



$$\begin{cases} x' = \mu x - x^3 \\ y' = -y \end{cases}$$ (Pitch fork)



Scanned by CamScanner

15.12.16

מערכות דינמיות הרצאה 6 עמ' 1

Hopf Bifurcation

$$\begin{cases} r' = r(a-r^2) \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

polar

דוגמה:

$$\begin{cases} x' = -y + (a - x^2 - y^2)x \\ y' = x + (a - x^2 - y^2)y \end{cases}$$

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

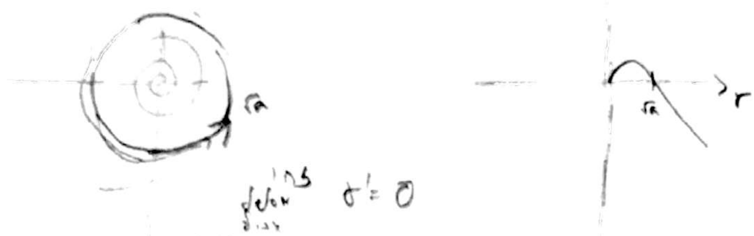
$(\lambda - a)^2 + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = a \pm i$

מוקד יציב: $a < 0$

$a = 0$

מוקד לא יציב: $a > 0$



$\sqrt{a}$

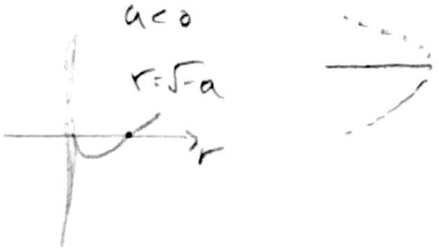
$\theta' = 0$

bifurcation diagram

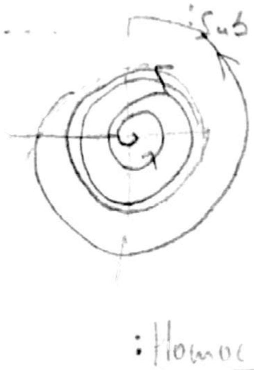
$$\begin{cases} r' = r(a+r^2) \\ \theta' = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -y + (a + x^2 + y^2)x \\ y' = x + (a + x^2 + y^2)y \end{cases}$$

$a < 0$

$r = \sqrt{-a}$



sub critical hopf bifurcation



Homoclinic bifurcation:

homoclinic orbits

$t = \infty$

שבת

$t = -\infty$

heteroclinic orbits

שבת $t = -\infty$

שבת $t = \infty$

לכל $n \geq 3$, $a,b,c \in \mathbb{Z}$ שלמים: $a^n + b^n \neq c^n$

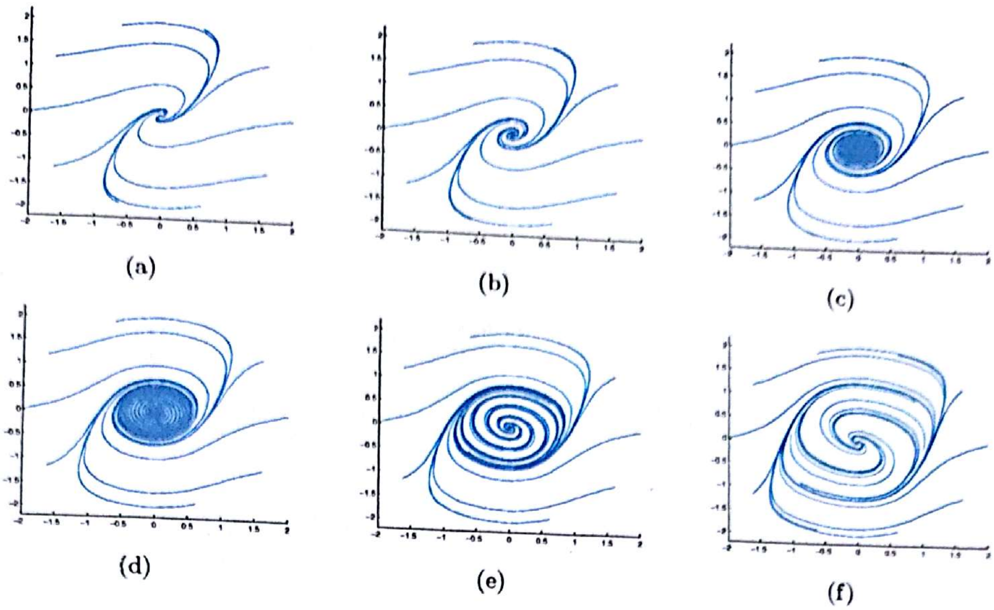


FIGURE 1. *Hopf bifurcation in the Van der Pol equation* (figures by Jeremy Schiff)

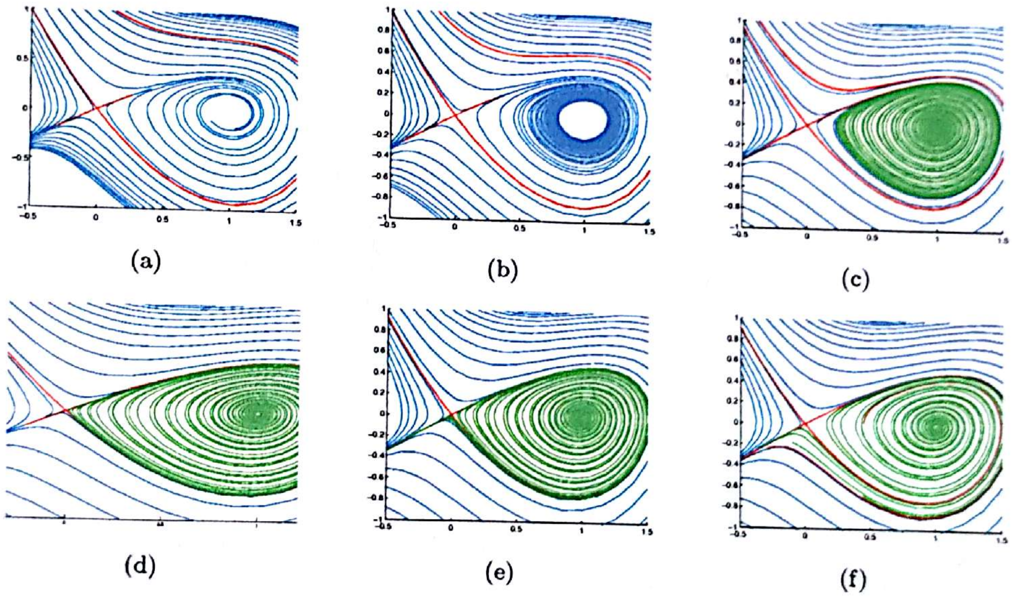


FIGURE 2. *Hopf and Homoclinic bifurcations* (figures by Jeremy Schiff)

15.12.16

מערכות דינמיות: הרצאה 6 דף 2

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = ay + x - x^2 + xy \end{cases}$$

Homoclinic bifurcation

נקודות שבת: $y=0$ $\quad x-x^2=0$, $x=0,1$

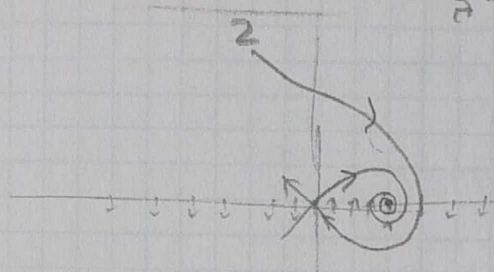
$(0,0)$, $(1,0)$

$J_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a+1 \end{pmatrix}$ $\quad J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ $\quad J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-2x+y & a+x \end{pmatrix}$

$\lambda = (a+1) \pm \sqrt{(a+1)^2 - 4}$

אוכף

$\lambda^2 - a\lambda - 1 = 0$



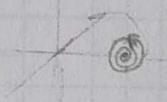
סיווג:

$a<-3$ בור יציב

$-3<a<-1$ יציב מוקד

$a=-1$ $\pm i$

$-1<a<1$ מוקד לא יציב



$a \gtrless -1$

$a>1$ מקור לא יציב

$a \approx -0.865$

מסלול נראה נפגש עם עצמו והופך למסלול הומוקליני

יריעות יציבות, לא יציבות ומרכזיות:

(1) מערכות לינאריות.

$x \in \mathbb{R}^d$ $\quad x' = Ax$ $\quad x(t) = e^{At}x(0)$

$(v_1 \_\_ v_d)$ ו"ע $\quad (\lambda_1 \_\_ \lambda_d)$ ע"ע

$x(t) = \sum_{i=1}^{d} c_i v_i e^{\lambda_i t}$ $\quad$ צורה נורמלית של ז'ורדן $\quad A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$x(t) = \left(\frac{t^2}{2}v_2 + t v_1 + v_0\right) e^{\lambda t}$ $\quad$ (1) $O \in \mathbb{R}^d$ נקודת שבת יציבה אסימפטוטית

$(A-\lambda I)v_2 = 0$ $\quad$ $\mathrm{Re}\,\lambda_i$ d_u d_c d_s $\quad$ $d = d_u + d_c + d_s$

$(A-\lambda I)v_1 = v_2$ $\quad$ (2) $\mathbb{R}^d = E^u \oplus E^c \oplus E^s$

$(A-\lambda I)v_0 = v_1$ $\quad$ למשל E^s: המרחב הנפרש ע"י ו"ע וקטורים עצמיים מוכללים $\mathrm{Re}\,\lambda_i$

15.12.16

מערכות דינמיות: הרצאה 6 פב3

$x' = F(x)$ $\quad F(x^*)=0$

$x\in\mathbb{R}^d$

הגדרה: $W^s(x^*)=\{y\in\mathbb{R}^d \mid y(t)\to x^*,\ t\to\infty\}$

היריעה היציבה של x^*

$W^u(x^*)=\{y\in\mathbb{R}^d \mid y(t)\to x^*,\ t\to-\infty\}$

היריעה הלא יציבה.

טענה: $W^s(x^*)$, $W^u(x^*)$ נשמרות.

כי: $z\in W^s(x^*) \Rightarrow z(t)\in W^s(x^*)$ $\forall t\in\mathbb{R}$

נניח $x^*=0$ $\quad A=DF|_{x^*}$ $\quad x'=Ax$

$$\mathbb{R}^d=E^s\oplus E^c\oplus E^u$$

הגדרה: יריעה ממדית p ב-$\mathbb{R}^d$: ניתן לתאר

$d-p$ פונק'

$$\begin{cases} x_{p+1} = f_1(x_1,\dots,x_p) \\ \vdots \\ x_d = f_{d-p}(x_1,\dots,x_p) \end{cases}$$

מתאימ!

משפט: יריעות יציבות/לא יציבות.

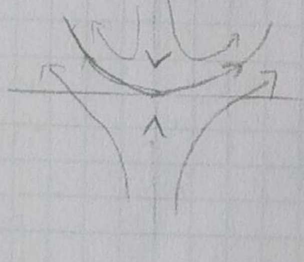
נניח $x'=F(x)$, $F\in C^r$ $\quad F(0)=0$ $\quad A=DF(0)$

היפרבולית אז W^s, W^u הן יריעות גזירות C^r $\quad \dim W^u=d^u$

W^s משיק E^s

W^u " E^u

דוגמה: $\begin{cases} x'=x \\ y'=-y+x^2 \end{cases}$ $\quad A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$



$\frac{dy}{dx}=\frac{-y+x^2}{x}$ $\quad E^s=\{y=0\}$

$E^u=\{x=0\}$

$y(x)=\frac{x^2}{3}+\frac{c}{x}$

Scanned by CamScanner

15.12.16

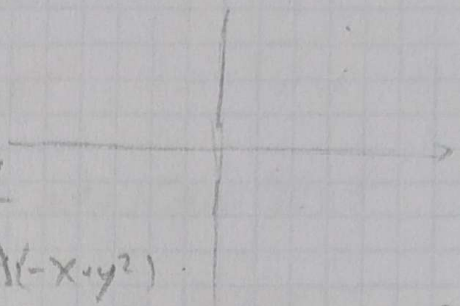
<u>מערכות דינמיות: הרצאה 6 בדף 4</u>

$E^s=\{y=0\}$

$E^u=\{x=0\}$

$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{cases}x'=-x+y^2\\ y'=y+x^2\end{cases}$

הירוק ל W^s



$y=c_2x^2+c_3x^3+\dots$

$y+x^2=(2c_2x+c_3x^2+\dots)\frac{dx}{dt}$

$y+x^2=(2c_2x+c_3x^2+\dots)(-x+y^2)$

$c_2x^2+c_3x^3+x^2=(2c_2x+c_3x^2+\dots)(-x+(c_2x^2+c_3x^3)^2)$

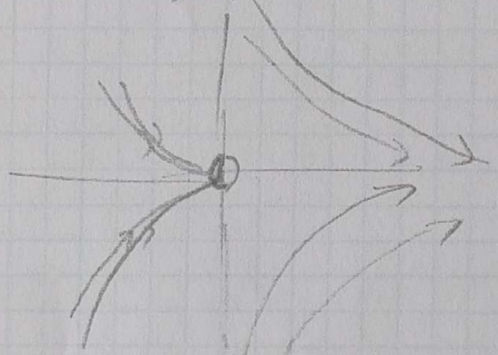
השוואת מקדמים ...

$c_2=-\frac{1}{3}$ $c_3=c_4=0$ $c_5=-\frac{1}{81}$

<u>דוגמא:</u> $x'=x^2$ $y'=-y$ $W^s=E^s=\langle x=0\rangle$

$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$y(t)=y(0)e^{-t}$ $x(t)=\frac{x(0)}{1-x(0)t}$



<u>Center manifold Theorem:</u>

$x'=F(x)$ $F(x^*)=0$ $F\in C^r$ $\mathbb{R}^d$

$A=DF(0)$ $\mathbb{R}^d=E^u\oplus E^c\oplus E^s$

אז קיימת יריעות גזירות/ליפשיציות יחידות W_s

W^u

משיקות ל- E^u E^s

22.12.16

מערכות דינמיות - הרצאה 7

תזכורת: $x' = f(x)$, $x\in\mathbb{R}^d$ ונניח $f\in C^1$, ונניח $x^*=0$ ו-$f(0)=0$,

$A=Df(0)$. נוכל לפרק את $\mathbb{R}^d$ ל-3 מרחבים אינווריאנטיים

בצורה חיבור:
$$\mathbb{R}^d=E^u\oplus E^s\oplus E^c$$
$$\perp \quad \perp \quad \perp$$

ע"ע עם $Re(\lambda)=0$

$Re(\lambda)>0 \qquad Re(\lambda)<0$

משפט: קיימות יריעות אינווריאנטיות $W^s(0), W^u(0), W^c(0)$ כך ש:
$W^s(0)$ משיקה ל-E^s, $W^c(0)$ משיקה ל-E^c, $W^u(0)$ משיקה ל-E^u.

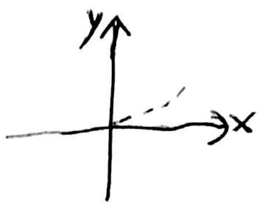
דוגמה:

$$x'=ax^3+xy-xy^2$$
$$y'=-y+6x^2+x^2y \quad \Leftarrow \quad x^*=(0,0)$$

ולכן: $A=Df(0)=\begin{bmatrix}0&0\\0&-1\end{bmatrix}$ ומתקיים

$E^s=\{x=0\}$

$E^c=\{y=0\}$



נרצה יריעה מרכזית:

$$y=h(x)=c_2x^2+c_3x^3+\dots$$

אם נגזור לפי $\frac{d}{dt}$ נקבל:

$$y'=(2c_2x+3c_3x^2+\dots)x'$$

נציב מהמשוואות:

$$-y+6x^2+x^2y=(2c_2x+3c_3x^2+\dots)(ax^3+xy-xy^2)$$

Scanned by CamScanner

22.12.16

~~$y+6x^2+x^2x^3$~~

$$-c_2x^2-c_3x^3+6x^2+o(x^4)=o(x^4)$$

ולכן: $c_2x^2+c_3x^3=6x^2$ ולכן $c_2=6$, $c_3=0$

ולכן:

$y=6x^2+o(x^4)$ וכך נקבל מה של נקודת שבת

אשר נציב ונקבל:

$$x'=ax^3+x(6x^2)-x(6x^4)+o(x^4)$$

$$x'=(a+6)x^3+o(x^4)$$

כעת, כשזה נעבור מצב הומוגני:

$a+6>0 \leftarrow$ לא יציבה.

$a+6=0 \leftarrow$ לא יודע.

$a+6<0 \leftarrow$ יציבה.

דוגמה:

$x'=a(x-y)$
$y'=-axz$
$z'=-bz+xy$
$a,b>0$

$\leftarrow$ $x^*=(0,0,0)$ ולכן:

$$A=Df(0)=\begin{bmatrix}-a & a & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -b\end{bmatrix}$$

ולכן: $\Lambda[A]=\{-a,0,-b\}$ ולכן:

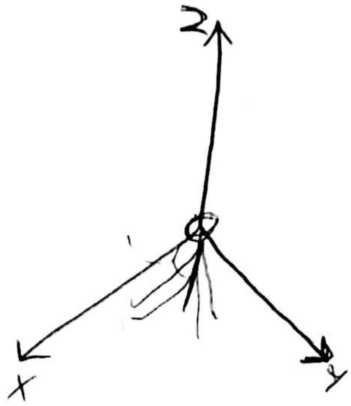
$$V_\lambda[A]=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

ולכן x,z כיוונים יציבים: $E^s=\{(x,0,z)\}$

$E^c=\{(x,x,0)\}$

22.12.16

הוכחה עירומה:



נחפש ש כש: $y = Ax^2 + Bx^3 + \dots$ ולכן $y = \frac{a}{a+b}x$

ש -

$$z = by^2 + O(x^4) = 0$$

ונקבל:

$$x' = (1 + A \cdot 2y + B \cdot 3y^2)(-a(y+x))(cy^2 + \dots) = -acy^3 + O(y^4)$$

$$x' = -acy^3 + O(4)$$

ונקבל:

$$y^2 = aA = 0 \to A = 0$$

$$y^3 = -aB = -ac \to B = c$$

ונקבל: $A = 0$, $B = c = \frac{1}{6}$.

סוג של נקודות שבת:

$y' = ax^2$. בקירוב מרכזית:

$$y' = -a\left(y + \frac{y^3}{6}\right)\left(\frac{y^2}{6} + \dots\right)$$

$$y' = -\frac{a}{6}y^3$$

ולכן עבור $a>0$ יציבה, אם $a<0$ או $b<0$ אז

לא יציבה.

22.12.16

מערכות בדידות - מימד 1

$I=[a,b]$, $f: I\to I$ וגם $f\in C^1$.

<u>משפט:</u> נניח ש $f(p)=p$.

I. $|f'(p)|<1$ ← p יציבה אסימפטוטית.

II. $|f'(p)|>1$ ← p לא יציבה.

III. $|f'(p)|=1$ ← לא ברור.

<u>הוכחה:</u>

$\exists r,\ \forall y\in B_r(p): |f'(y)|<\lambda<1$ ⇐ $\exists \lambda<1: |f'(p)|<\lambda<1$

יהא $x\in B_r(p)$ ונקבל: $f(x)-f(p)=f'(c)(x-p)$
$c\in(p,x)$.

ולכן: $|x_1-p|=|f(x_0)-p|=|f'(c)||x_0-p|<\lambda|x_0-p|$

ומכאן נובע ש: $x_1\in B_r(p)$. נמשיך על הטענה

ונקבל $|p-x_n|\le\lambda^n|x-p|$ ולכן $x_n\to p$ (הוכחה באינדוקציה).

את סעיף II ההוכחה דומה.

<u>הגדרה:</u> p נקודה מחזורית אם קיים n כך ש $f^n(p)=p$.

<u>הגדרה:</u> אומרים ש-p ממחזור n יציבה אם הוא יציבה כנקודה שבת עבור f^n.

[illegible] – הרצאה

22.12.16

<u>טענה:</u> נניח $f\in C^1$, $f^n(p)=p$. אם $|(f^n)'(p)|<1$ אז מסלול מחזורי של p יציב.

כאשר: $(f^n)'(p)=f'(x_{n-1})\cdot f'(x_{n-2})\cdots f'(x_1)$.

<u>Logistic family</u>

$f_\lambda(x)=\lambda x(1-x)$, פרמטר – λ

$f_\lambda: I\to I$, $I=[0,1]$

ולכן $0<\lambda\le 4$.

נרצה למצוא נקודות שבת של משפחת המשוואות:

$f(x)=x$ ולכן: $\lambda x(1-x)=x$ ולכן $\lambda-\lambda x=1$

ומכאן $x=\frac{\lambda-1}{\lambda}=1-\frac{1}{\lambda}$, $x=0$.

$1-\frac{1}{\lambda}\in I \iff \lambda\ge 1$.

<u>יציבות:</u>

$f'(x)=\lambda-2\lambda x$ ⇐ $f'(0)=\lambda$ ולכן $0<\lambda<1$ ⇐ יציבה

$\lambda>1$ ⇐ לא יציבה

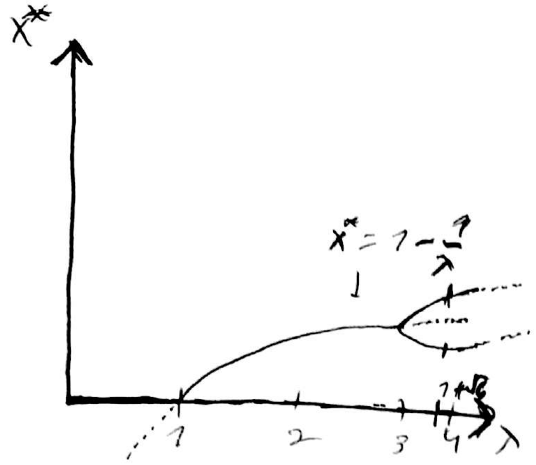
$f'(1-\frac{1}{\lambda})=\lambda(1-2+\frac{2}{\lambda})=\lambda(-1+\frac{2}{\lambda})$ ⇐ $-\lambda+2$

$|-\lambda+2|<1$ ⇐ $1<\lambda<3$ ⇐ יציבה

$3<\lambda\le 4$ ⇐ לא יציבה

22.12.18

דיאגרמת ביפורקציות:



$$\lambda f_\lambda(x)(1-f_\lambda(x))=f_\lambda(f_\lambda(x))=f_\lambda^2(x)=x$$

$$\lambda^2 x(1-x)(1-\lambda x(1-x))=x \quad , \quad x\neq 0$$

$$\downarrow$$

$$x^3-2x^2+x\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)-\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^3}\right)=0$$

לשורשים הצבה ו $x^*=1-\frac{1}{\lambda}$ כפתרון של המשוואה, נעשה חלוקת פולינומים ונקבל:

$$x^2-x\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)+\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right)=0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\pm\sqrt{\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^2-\frac{4}{\lambda^2}}}{2}=q_\pm$$

ממשי: $1-\frac{1}{\lambda}\geq\frac{2}{\lambda} \Leftarrow$ $\lambda\geq 3$.

יציבות מסלול מחזורי:

$=|(f_\lambda^2)'(q_+)|<1$

$$\lambda(1-2q_-)\lambda(1-2q_+)=f_\lambda'(q_-)f_\lambda'(q_+)\rightarrow$$

$$f_\lambda^2(q_+)=5-(\lambda+1)^2 \rightarrow -1<5-(\lambda+1)^2\leq$$

$$\downarrow$$

$$3<\lambda\leq 1+\sqrt{6}$$

5.1.16 מערכות דינמיות - הרצאה 9

הגדרה: "כאוס" (לפי Robert Devaney) היא (X,f) היא מערכת טופולוגית כאשר X מרחב מטרי קומפקטי כאשר נסמן $d(x,y)=|x-y|$ המטריקה המושרה הטבעית וכאשר $f:X\to X$ רציפה.

אם מתקיים:

I. $cl(Per(f))=X$, $Per(f):=\bigcup_{n=1}^{\infty}(Per_n(f))$ וגם

$Per_n(f):=\{x: f^n(x)=x\}$ [נקודות מחזוריות]

II. $\exists x_0\in X: \{f^n(x)\}_{n\geq 0}$ צפוף ב-X [קיים מסלול צפוף]

הערה: אם $|X|=\infty$, אזי x_0 אינה מחזורית.

III. (X,f) רגישה לתנאי התחלה אם קיים $\delta>0$ כך ש:

$\forall x\in X, \forall r>0\ \exists y\in B_r(x)\ \exists n\in\mathbb{N}: |f^n(x)-f^n(y)|>\delta$

[רגישות לתנאי התחלה]

הערה: ניתן להחליף את III ב-III':

III'. (X,f) מרחיבה אם קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\neq y$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $|f^n(x)-f^n(y)|>\delta$.

וברור כי III $\Leftarrow$ III' אבל III $\not\Rightarrow$ III'.

(מקרה של אוסף).

1.7.16

שיטה בינארית: עבור $x\in[0,1)$ מתקיים:

$x = a_1 a_2 \ldots \mid a_i\in\{0,1\}$ אז $x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$, כאשר $a_n=\{0,1\}$

נסתכל על $f_\lambda(x)=\lambda x(1-x)$ על $x\in[0,1]$ ואז $\lambda\in(0,4]$

ונסתכל על $\lambda=4$: הטענה היא ש-f_4 כאוטית.

הגדרה: צמודות וגורם טופולוגי: נניח כי $f:X\to X$ וגם $g:Y\to Y$ והן רציפות ונניח ש-X,Y מרחבים מטריים הומיאומורפיים. אם יש הומיאומורפיזם $h:X\to Y$ כך ש:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \Rightarrow h\circ f = g\circ h$$

אז אומרים כי g,f צמודות.

אם h רק "על" אז g היא "גורם טופולוגי" של f.

הערה: מתקיים $g^n(h(x_0)) = h(f^n(x_0))$ ולכן כל מסלול ב-f מועתק למסלול ב-g. בפרט אם h הומיאומורפיזם ולא רק על אז גודל המחזורים נשמר.

מסקנה: אם ב-(X,f) יש מסלול צפוף אזי ב-(Y,g) יש מסלול צפוף אם g,f צמודות.

Scanned by CamScanner

12.1.17

5.1.96

מערכות דינמיות - הרצאה

<u>טענה:</u> f_4 הוא גורם טופולוגי של T_2 כאשר $T_2(\theta)=2\theta$.

$T_2: S^1 \to S^1$

<u>הוכחה:</u> נגדיר העתקה $h_1: S^1 \to [-1,1]$ להיות $h_1(\theta)=\cos(\theta)$ ונקבל:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "h_1"] & S^1 \arrow[d, "h_1"] \\ {[-1,1]} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_2"] & {[-1,1]} \arrow[d] \\ {[0,1]} \arrow[r, "f_4"] & {[0,1]} \end{tikzcd}$$

$g(x)=2x^2-1$,

כעת, נגדיר $h_2:[-1,1]\to[0,1]$

$h_2(x)=\frac{1-x}{2}$

ולכן נסמן $h_3=h_2\circ h_1(\theta)$ ונקבל: $h_3: S^1\to[0,1]$

נספר כמה של נקודות מחזוריות: θ מחזורית ממחזור n:

$$2^n\theta = \theta \pmod{\mathbb{Z}_{2\pi}}$$

$$2^n\theta-\theta\in \mathbb{N}_{2\pi} \to \frac{2\pi m}{2^n-1}=\theta,\ m=\{0,\dots,2^n-2\}$$

ולכן:

$$\theta=\left\{\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi m}{2^n-1}\right)\right)\right\}$$

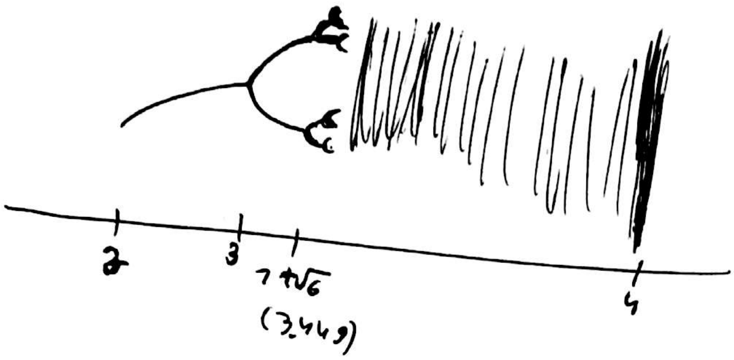
<u>הגדרה:</u> (X,f) נקראת "<u>מדויקת</u>" אם לכל U פתוח ב- X קיים n כך ש- $f^n(U)=X$.

<u>הערה:</u> אם f מדויקת וגם g פקטור טופולוגי של f אזי g מדויקת.

<u>טענה:</u> אם (X,f) מדויקת אזי היא רגישה בתנאי התחלה.

5.7.16

נרצה לדון בגרף ביפורקציה של $f_\lambda(x)=\lambda x(1-x)$:



הערות:

נבחר λ: $\{f^n(\frac{1}{2})\}_{n=200}^{10^6}$ כאשר $200, 10^6$ בחירות שרירותיות.

כדי לראות במחשב התנהגות טיפוסית.

משפט בדוגמה טובה של $f_\lambda(x)$:

I. מפל מכפלי מחזור: $\exists \lambda_n \uparrow \lambda_\infty < 4,\ n \geq 0$

כך שב- $\lambda=\lambda_n$ מתרחשת ביפורקציה מכפלת מחזור, ממחזור 2^n ל- 2^{n+1}. המחזור החדש יציב $\lambda \in (\lambda_n, \lambda_{n+1})$.

II. משפט Feigenbaum: (1975)

$$\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} \longrightarrow \delta \approx 4.67$$

III. "חלונות" יציבות: מתחיל לקרות החל מ- $\lambda \approx 3.6$.

מתואר במאמר של Li-Yorke בשם "period 3 implies chaos".

משפט: $f: I \to I$ רציפה כאשר $I=[a,b]$ או $I=\mathbb{R}$. אם יש מסלול מחזורי ממחזור 3 אזי יש מסלולים מכל מחזור טבעי.

5.1.16

משפט Sharkovski:

סידור שרקובסקי:

$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright 11 \triangleright \dots$

$6 \triangleright 10 \triangleright 14 \triangleright 18 \triangleright \dots$

$12 \triangleright 20 \triangleright 28 \triangleright \dots$

$\vdots$

$2^n(2k+1) \triangleright \dots$

$\vdots$

$\dots \triangleright 4 \triangleright 2 \triangleright 1$

$f: I \to I$ כאשר $I=\mathbb{R}$ או $I=[a,b]$, אם מתקיים $p \triangleright q$ בסידור שרקובסקי אזי אם קיים מחזור-p אזי קיים מחזור-q.
ולא להפך, כלו' קיימת f כך שיש לה מחזור-q ואין מחזור-p.

מעריך ליאפונוב:

$f: I \to I$ כאשר $I=\mathbb{R}$ או $I=[a,b]$ וגם $f \in C^1$,

$$h(x_1) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log(|f'(x_1)f'(x_2)\cdot\ldots\cdot f'(x_n)|)}{n}\right)$$

אז $h(x_1)$ נקרא מעריך ליאפונוב אם הגבול קיים.

ונסמן $x_n := f^{(n-1)}(x_1)$.

הערה: אם $x_1,\dots,x_n$ מסלול מחזורי אזי:

$$h(x_1) = \frac{\log(|f'(x_1)f'(x_2)\cdots f'(x_n)|)}{n}$$

12.1.17

מערכות דינמיות - הרצאה

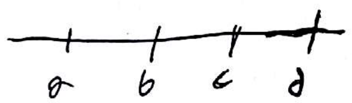
<u>למה:</u> אם g רציפה ממשית אזי אין לה 3 נקודות שבת.

<u>הערות:</u> משפט שרקובסקי רק על - $\mathbb{R}$ וגם אם יש מספר סופי של מחזורים עבור f אזי המחזור הוא מחזקה של 2.

<u>מחזור 4:</u>

<u>סוג I:</u> $a\to c\to b\to d\to a$ → משרקובסקי יש מחזור 2

<u>סוג II:</u> $a\to b\to c\to d\to a$

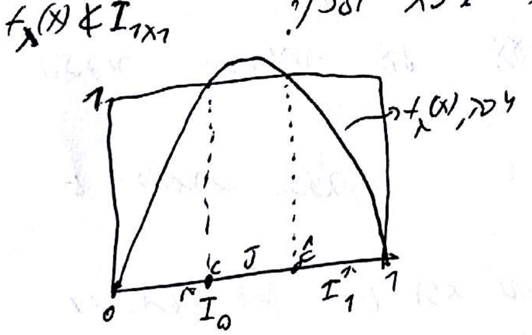


$\perp$

אם יש סדר כזה אז גורר כל מחזור.

שרטוט של $f_\lambda(x)=\lambda x(1-x)$ כאשר λ גדול מספיק.

ובכן כי $f_\lambda(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.



אם $x<0$, $f^n(x)\to-\infty$

אם $x>1$, $f^n(x)\to-\infty$

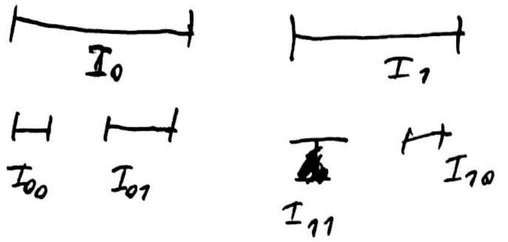
<u>נסמן:</u> $\Omega=\{x\in I: f_\lambda^n(x)\in I, \forall n\}$ (נקראת קבוצת "Julia")

אזי $J=[c,\hat{c}]$ ובכן כי $f(J)\not\subset I$.

$\Omega\subset I_0\cup I_1:=\Omega_1$, $\Omega_2:=\{x\in I: f^n(x)\in I, n=1,2\}=\Omega_1\setminus f_\lambda^{(-1)}(J)$

פימציה

12.1.17



וכך ממשיכים כמו הבנייה הקשורה עם פואנקרה.

$$\Lambda_k = \{x \in I : f^n(x) \in I,\ n=1,\dots,k\} = \bigcup I_k$$

$$k = k_1 k_2 \dots k_n \mid k_i \in \{0,1\} \qquad |\bigcup I_k| = 2^n$$ הקטעים סגורים

אזי:

$$\Lambda = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\Lambda_k)$$

<u>הגדרה:</u> לכל $x \in \Lambda$ קיים "כתובת סימבולית" (symbolic adress).

$$x \in \Lambda,\quad h(x) := k_1 k_2 \dots \mid k_n \in \{0,1\}$$

$$f^n(x) \in \Lambda \subset I_0 \cup I_1 \quad , \quad f^n(x) \in I_{k_n}$$

ברור כי $f(\Lambda)=\Lambda$ מהגדרת Λ.

נגדיר מטריקה על המרחב הנ"ל: $d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{|x_i - y_i|}{2^i} \right) \leq 1$

σ - העתקת הזזה:

$$\sigma(s_1 s_2 \dots) = s_2 s_3 \dots$$

ונוכיח ש- σ היא העתקה רציפה.

<u>טענה:</u> $\sigma \circ h = h \circ f$.

תחילה נראה כי h רציפה.

$$d(s,t) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$|x-y| < \delta \rightarrow h(x) = s_1 s_2 \dots,\ h(y) = t_1 t_2 \dots \rightarrow s_1 = t_1$$

12.1.17

<u>טענה:</u> $\sqrt{5}+2$ כא אינו לא הוא חד-חד ערכית.

<u>הוכחה:</u> מחישוב, דכ $|f_g'(x)|$ על $I_0 \cup I_0$ $\Leftarrow$ $\sqrt{5}+2$ כא.

ואכן ניתן למצוא ρ כך ש- $\rho > |f_g'(x)|$ ומתקיים:

$$|I_{k_1k_2\dots k_n}| \le \rho |I_{k_2k_3\dots k_n}| \le \dots \le \rho^n \to 0$$

ולכן $|I_{k_1\dots k_n}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ולכן כל הקטע הוא נקודה והטענה הוכחה.

פימציה

mechanism.jpg (1839×1193)

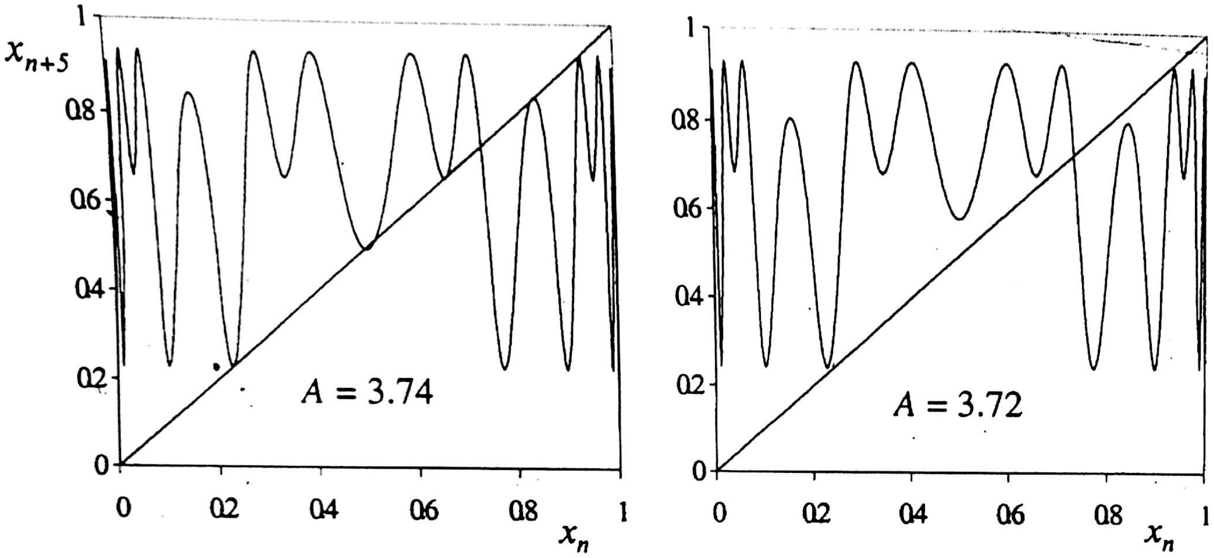


Fig. 7.3. On the left is a plot of the fifth iterate of the logistic map function for $A = 3.74$. On the right is a plot of the same function for a slightly smaller value $A = 3.72$. Iteration of the logistic map function on the left leads to period-5 behavior. For the value used on the right, we get intermittency behavior. Notice the small "gaps" on the right between the function and the $y = x$ (diagonal line) near the locations of the period-5 fixed points. At the intermittency transition, the fifth iterate function is just tangent to the diagonal line at 5 points.

19.7.14

מערכות דינמיות - הרצאה,

תזכורת:

יש פונקציות $f: I\to I$ רציפה אז אם $p=(f(x)-x)'$,

$p>1$ אז מתבדר

$p<1$ אז מתכנס

$p=1$ אז אם גרף מעל ל- $y=x$ אז מתבדר חלש

אם גרף מתחת ל- $y=x$ אז מתכנס חלש.

אם גרף יושב על $y=x$ אז לא הוכרע כלום.

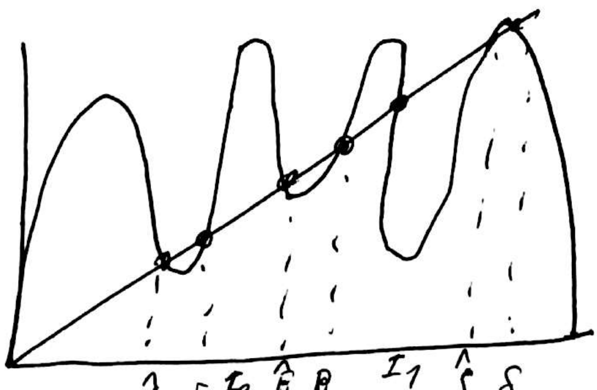
אם $p=-1$ אז הנקודה לרוחב אז מסתכלים על $f\circ f$ ואז

$$(f\circ f(p))' = 1 = (-1)(-1)$$

$$\Lambda = \{x: f^n(x)\in I_0\cup I_1,\ \forall n\ge 0\}$$

$$\Sigma_A^+ = \{(s_0 s_1 \ldots): s_j\in\{0,1\},\ s_j s_{j+1}\neq 00\}$$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_A^+ & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_A^+ \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \end{array}$$



אם $f^{n}(x)$; $x\in(\hat\gamma,\gamma)$

(נשאר ב- $(\hat\gamma,\gamma)$)

וכנ"ל עבור $(\delta,\hat\delta)$; $(\beta,\hat\beta)$

$f(I_0)=I_1$, $f(\gamma)=\beta$, $f(\hat\beta)=\gamma$

f^{-1}

לינאריות

19.7.23

מערכות ליניאריות ב- $\mathbb{R}^n$:

הגדרה: תהי A, נניח $\det(A)\neq 0$, ~~A~~ $A(0)=0$ נקודה של A יחידה.

שאלה: האם $\forall x, A^n x \to 0$

הגדרה: A נקראת "היפרבולית" אם $\forall j: |\lambda_j|\neq 1$

משפט: אם A היפרבולית אזי:

0 יציבה $\Leftrightarrow$ $\forall j: |\lambda_j|<1$

0 דוחה $\Leftrightarrow$ $\forall j: |\lambda_j|>1$

אחרת 0 הוא אוכף.

הדוגמאות: פרסה (פרסת - Smale's horseshoe)

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\delta}&0\\0&\delta\end{pmatrix},\ 0<\delta<1$$

26.7.17 מערכות דינמיות - הרצאה אחרונה

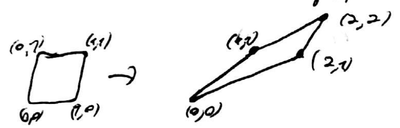
* מבחנים לדוגמה אצל גרא של.
* המבחן עם חומר פתוח.

Total automorphisms

$A: \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}^d$. $A_{d\times d}$, $|A| = \pm 1$

$\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, $T_A: \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d \mid T_A(\bar{x}) = A\bar{x} \pmod{\mathbb{Z}^d}$

דוגמה: $d=2$ ונסתכל $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ אז:



הערה: השטח שלהן שווה.

עבור $Ax = \lambda x$: T_A נקרא "היפרבולי" אמ"מ אין ע"ע $|\lambda|=1$.

הערה: עבור $d=2$ נקבל דווקא אם $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2}$ וזה מקרה של אוכף.

משפט:

T_A היפרבולי ~~[illegible]~~ $\Rightarrow$ מערכת כאוטית.

הגדרה: (X,T) טרנזיטיבי (טופולוגית) $\Leftrightarrow$ לכל U,V פתוחות ולא ריקות קיים n כך ש $T^n U \cap V \neq \emptyset$

הגדרה: (X,T) נקרא מערבב טופולוגית $\Leftrightarrow$ לכל U,V פתוחות קיים N כך ש: $\forall n \geq N: T^n U \cap V \neq \emptyset$

טענה: T_A עבור $d=2$, היפרבולי ומערבב.

26.1.17

יריעות יציבות / לא יציבות

$p=0$ נקודת שבת.

$$W^s(p) = \{x : T^n x \to p,\ n \to \infty\}$$
$$W^u(p) = \{x : T^n x \to p,\ n \to -\infty\}$$

קל לראות כי $W^s(p)$, $W^u(p)$ הם אוסף הישרים המקבילים לוקטורים העצמיים עם ראשם ב- $\mathbb{T}^2$.

<u>טענה:</u> לכל $\varepsilon>0$ קיים M_ε כך שכל קטע של $W^u(0)$ חותך כל ε-כדור.

<u>הוכחה:</u> קיים קטע $J \in W^u(0)$, $\frac{\varepsilon}{2}$ כדור, $K \supset J$.

$$T_A^n(K) \supset T_A^n(J)$$

$T_A^n(J) =$ קטע של W^u, $M_\varepsilon < \frac{\lambda^n \varepsilon}{2} < |T_A^n(J)| = |J|\lambda^n$.

$$\Downarrow$$

$$T_A^n(J) \cap U \neq \emptyset$$

<u>הערה:</u> עבור $\frac{\log\left(\frac{2M_\varepsilon}{\varepsilon}\right)}{\log|\lambda|} < n$ בהתאם ל- ε, λ מספר איטרציות.

<u>מושך (attractor) (יציב) כאוטי:</u>

<u>מפת Hénon:</u>

$$f(x,y) = (a - x^2 + by, x)$$

בדוגמה שלו:
$a = 1.4$
$b = 0.3$

26.1.17

מהי העתקה ההפוכה?

$u = a - x^2 + by$

$v = x$

$\downarrow$

$$\left.\begin{aligned} x &= v \\ y &= \frac{u+v^2-a}{b} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$ העתקה הפוכה וגם + חח"ע.

מהן נקודות שבת? נדרוש $y=x$ ולכן $x = \frac{2x^2-a}{b}$.

$H^f = \begin{bmatrix} -2x & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $|H^f| = -b \Rightarrow$ דטרמיננטה עם ערך קבוע ולכן הטרנספורמציה משמרת שטח פי ל-b.
אם $b<1$ אז כיווץ
אם $b>1$ אז הרחבה
אם $b=1$ אז קבוע.

__הגדרה:__ $\Lambda \subseteq X$ סגורה הוא "מושך" אם קיימת $U \supset \Lambda$ פתוחה כך שלכל $x \in U$, $dist(T^n x, \Lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(2) $T\Lambda = \Lambda$.

(3) $T|_\Lambda$ טרנזיטיבי.

(4) Λ "מוזר" אם הוא "פרקטל".

Smale-Williams Solenoid attractor

"solid torus" $= D = S^1 \times B^2$

$\partial D = S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^2 \approx \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

$F(\theta, p) = (2\theta, \frac{1}{10}p + \frac{1}{2}e^{2\pi i\theta})$

Scanned by CamScanner

26.7.17

<u>טענה:</u> Λ מקיים: I. קשירה.
II. לא קשירה מסילתית.
III. לא קשירה מקומית.

<u>הערה:</u> המימד של הפרקטל יהיה: $\dim_B(\Lambda)=\dim_H(\Lambda)=1+\frac{\log(2)}{\log(10)}$

<u>טענה:</u> $f|_\Lambda$ טרנזיטיבית וכאוטית.

<u>הגדרה:</u> (X,f). μ = מידה על $\mathcal{B}$ (בורל) כך ש $\mu(X)=1$.
μ <u>אינווריאנטית</u> אם לכל $E\in\mathcal{B}$ מתקיים: $\mu(f^{-1}(E))=\mu(E)$.

<u>הערה:</u> "מידה טבעית" ביחס ל-f תהיה:

$$\mu(E)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\#\{f^i(x_0)\in E,\ 1\le i\le n\}}{n}\right)$$

עבור "כמעט" כל x_0.

$f_4(x)=4x(1-x)$, $T(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 0.5\\ 2-2x, & 0.5\le x\le 1\end{cases}$, $c(x)=\frac{1-\cos(\pi x)}{2}$

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "c"'] & {[0,1]} \arrow[d, "c"] \\
{[0,1]} \arrow[r, "f"] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

m = מידה לבג על $[0,1]$ אינווריאנטית עבור T.

$\mu(E)=m(c^{-1}[E])$

אינווריאנטית עבור f.

$$\mu(E)=\int_{c^{-1}(E)}1\,dx=\int_E\rho(y)\,dy \to \rho(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{y-y^2}}$$