אנליזה נומרית - 2012

תרגול מס' 10 – מספר התניה, שיטות איטרטיביות לפתרון מערכת משוואות

<u>שאלה 1</u>:

הוכח כי $cond(A) \geq \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$.

פתרון:

$cond(A) = \|A\| * \|A^{-1}\|$. נראה חסמים על כל אחד מאברי המכפלה.

יהיו λ_i, v_i ווקטור עצמי וערך עצמי של A בהתאמה:

$Av_i = \lambda_i v_i$ ומכאן $\|A\| \geq \frac{\|Av_i\|}{\|v_i\|} = \frac{\|\lambda_i v_i\|}{\|v_i\|} = |\lambda_i|$ ומכאן: $\|A\| \geq |\lambda_{max}|$.

כעת, $Av_i = \lambda_i v_i \Rightarrow v_i = \lambda_i A^{-1} v_i \Rightarrow \frac{1}{\lambda_i} v_i = A^{-1} v_i$ ומכאן ש $\frac{1}{\lambda_i}$ ע"ע של A^{-1} בהתאמה.

אם כן, $\frac{1}{|\lambda_i|} = \frac{\left\|\frac{1}{\lambda_i} v_i\right\|}{\|v_i\|} = \frac{\|A^{-1} v_i\|}{\|v_i\|} \leq \|A^{-1}\|$ ומכאן: $\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{|\lambda_{min}|}$. לכן:

$cond(A) \geq \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ מ.ש.ל.

<u>שאלה 2: שיטת יעקובי וגאוס זיידל לפתרון מערכת משוואות ליניארית</u>

נתונה מערכת המשוואות: $\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$ עבורה קיים פתרון יחיד $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

א. השתמש בשיטת יעקובי עם ניחוש התחלתי $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ לקבלת פתרון מקורב למערכת הנ"ל (בצע 9 איטרציות).

ב. כנ"ל עבור שיטת גאוס זיידל.

<u>פתרון:</u>

השיטות הן שיטות איטראטיביות לקירוב פתרון התחלתי: $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ לפתרון האמיתי x.

בהינתן מערכת $\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{bmatrix} \gg \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \gg Ax = b$

(נציין כי תנאי מספיק (אך לא הכרחי) להתכנסות הינו שהמערכת A הינה diagonal-dominance, כלומר שבכל שורה i במטריצה A מתקיים כי $\forall i: \left[\ |A_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |A_{ij}|\ \right]$

ובהינתן פתרון התחלתי $\begin{pmatrix} {x_1}^0 \\ {x_2}^0 \\ . \\ . \\ {x_n}^0 \end{pmatrix} = x^0$, הצעדים יהיו:

(בכתיב מטריציוני, השקול לכתיב הרגיל)

בשיטת יעקובי:

$$Ax = b$$

$$(L + D + U)x = b$$

$$Dx = -(L + U)x + b$$

$$x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

$$\boxed{x^{(t+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(t)} + D^{-1}b}$$

בשיטת גאוס-זיידל:

$$Ax = b$$

$$(L + D + U)x = b$$

$$(L + D)x^{(t+1)} = -Ux^{(t)} + b$$

$$Lx^{(t+1)} + Dx^{(t+1)} = -Ux^{(t)} + b$$

$$Dx^{(t+1)} = -Lx^{(t+1)} - Ux^{(t)} + b$$

$$\boxed{x^{(t+1)} = -D^{-1}(L)x^{(t+1)} - D^{-1}Ux^{(t)} + D^{-1}b}$$

(בכתיב רגיל)

בשיטת יעקובי:

$$\boxed{x_i^{t+1} = \frac{1}{a_{i,i}}(b_i - a_{i,1}x_1^t - a_{i,2}x_2^t - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^t - a_{i,i+1}x_{i+1}^t - \cdots - a_{in}x_n^t)}$$

ובשיטת גאוס זיידל (עם איטרציה משופרת):

$$\boxed{x_i^{t+1} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - a_{i,1}x_1^{t+1} - a_{i,2}x_2^{t+1} - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{t+1} - a_{i,i+1}x_{i+1}^t - \cdots - a_{in}x_n^t\right)}$$

מתי נשתמש בשיטות הנ"ל? (או מדוע בכלל להשתמש בשיטת יעקובי אם ראינו כי גאוס-זיידל מהירה יותר?)

- כאשר שתי השיטות מתכנסות, לעולם גאוס-זיידל תתכנס מהר יותר.
- כאשר המטריצה A הינה סימטרית ו- positive-definite (כלומר כאשר לכל וקטור $x \neq \bar{0}$ מתקיים כי $x^*Ax > 0$) שיטת גאוס-זיידל תתכנס מכל ניחוש התחלתי.

- כאשר אברי האלכסון של המטריצה A הינם חיוביים והאברים שאינם על האלכסון שליליים, שתי השיטות יחד יתכנסו או יתבדרו.
- כאשר A מטריצה כללית, ישנם מקרים (לא ידוע מהם המאפיינים שלהם) בהם שיטת יעקובי תתכנס ושיטת גאוס-זיידל תתבדר (!).

פתרון:

הצעדים בכתיב רגיל (שאינו מטריציוני) יהיו:

בשיטת יעקובי: $\begin{pmatrix} \frac{9-2y^t}{5} \\ \frac{11-3x^t}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{t+1} \\ y^{t+1} \end{pmatrix}$ ובשיטת גאוס זיידל: $\begin{pmatrix} \frac{9-2y^t}{5} \\ \frac{11-3x^{t+1}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{t+1} \\ y^{t+1} \end{pmatrix}$.

עבור פתרון התחלתי $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ נקבל:

בשיטת יעקובי:

$$x^1 = \begin{pmatrix} \frac{9-2*x_2^0}{5} \\ \frac{11-3*x_1^0}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9-2*0}{5} \\ \frac{11-3*0}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 2.75 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} \frac{9-2*x_2^1}{5} \\ \frac{11-3*x_1^1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9-2*2.75}{5} \\ \frac{11-3*1.8}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} 1.24 \\ 2.225 \end{pmatrix}, \quad x^4 = \begin{pmatrix} 0.91 \\ 1.82 \end{pmatrix},$$
$$x^5 = \begin{pmatrix} 1.072 \\ 2.068 \end{pmatrix}, \ x^6 = \begin{pmatrix} 0.973 \\ 1.946 \end{pmatrix}, \ x^7 = \begin{pmatrix} 1.022 \\ 2.02 \end{pmatrix}, \ x^8 = \begin{pmatrix} 0.992 \\ 1.984 \end{pmatrix}, \ x^9 = \begin{pmatrix} 1.007 \\ 2.006 \end{pmatrix} \dots$$

(החישובים המוצגים מעוגלים ל-3 ספרות אחרי הנקודה)

בשיטת גאוס זיידל:

$$x^1 = \begin{pmatrix} \frac{9-2*x_2^0}{5} \\ \frac{11-3*x_1^1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9-2*0}{5} \\ \frac{11-3*1.8}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} \frac{9-2*x_2^1}{5} \\ \frac{11-3*x_1^2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9-2*1.4}{5} \\ \frac{11-3*1.24}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.24 \\ 1.82 \end{pmatrix}$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} 1.072 \\ 1.946 \end{pmatrix},$$
$$x^4 = \begin{pmatrix} 1.022 \\ 1.984 \end{pmatrix}, \ x^5 = \begin{pmatrix} 1.007 \\ 1.995 \end{pmatrix}, \ x^6 = \begin{pmatrix} 1.002 \\ 1.999 \end{pmatrix}, \ x^7 = \begin{pmatrix} 0.001 \\ 2.000 \end{pmatrix}, \ x^8 = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 2.000 \end{pmatrix} \dots$$

(החישובים המוצגים מעוגלים ל-3 ספרות אחרי הנקודה)

(ניתן לראות כיצד ניתן לממש זאת ב-MATLAB, לדוגמא עבור 9 איטראציות ראשונות:

```
X0=[0;0];    %Initial guess
JacobiIter=X0;
for i=2:10
    JacobiIter(1,i)=(9-2*(JacobiIter(2,i-1)))/5;
    JacobiIter(2,i)=(11-3*(JacobiIter(1,i-1)))/4;
end
JacobiIter

GaussSeidelIter=X0;
for i=2:10
    GaussSeidelIter(1,i)=(9-2*(GaussSeidelIter(2,i-1)))/5;
    GaussSeidelIter(2,i)=(11-3*(GaussSeidelIter(1,i)))/4;
end
GaussSeidelIter
```

שאלה 3

נתונה מערכת ליניארית $Ax = b$ כאשר A מטריצה משולשית תחתונה, הפיכה, בגודל $m * m$.

3.1 הראה כי אם מפעילים את שיטת יעקובי או את שיטת גאוס-זיידל לפתרון המערכת (מנקודת התחלה כלשהי) אזי מגיעים לפתרון מדוייק של המערכת תוך מספר סופי של צעדים. מהו סדר הגודל של מספר פעולות החשבון המתבצעות?

3.2 בצע חישוב דומה עבור מטריצה משולשית עליונה.

פתרון:

השיטות הן שיטות איטראטיביות לקירוב פתרון התחלתי: $\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ לפתרון האמיתי x.

בהינתן מערכת $\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ : \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{bmatrix} \gg \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ : \\ b_n \end{pmatrix} \gg Ax = b$

ובהינתן פתרון התחלתי $x^0 = \begin{pmatrix} {x_1}^0 \\ {x_2}^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ {x_n}^0 \end{pmatrix}$, הצעד יהיה:

בשיטת יעקובי:

$$\boxed{x_i^{t+1} = \frac{1}{a_{i,i}}(b_i - a_{i,1}x_1^t - a_{i,2}x_2^t - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^t - a_{i,i+1}x_{i+1}^t - \cdots - a_{in}x_n^t)}$$

ובשיטת גאוס זיידל (עם איטרציה משופרת):

$$\boxed{x_i^{t+1} = \frac{1}{a_{i,i}}(b_i - a_{i,1}x_1^{t+1} - a_{i,2}x_2^{t+1} - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{t+1} - a_{i,i+1}x_{i+1}^t - \cdots - a_{in}x_n^t)}$$

3.1

מכיוון ש-$A = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$ מטריצה משולשית תחתונה $m * m$ נקבל:

א. בשיטת גאוס-זיידל:

x_1 מקבל את <u>ערכו המדויק</u> כבר במעבר בראשון באיטראציה הראשונה:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

כאן אנו מעדכנים את x_2 עם משתנה שכבר <u>הספקנו</u> לחשב, ולכן מתעדכן במעבר השני באיטראציה הראשונה:

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21} * x_1^{(t+1)}}{a_{22}}$$

ובאופן כללי: כל x_i יקבל את ערכו המדויק במעבר ה-i באיטרציה הראשונה.

לכן נבצע בסך הכול $o(m)$ פעולות עבור כל משוואה ולכן בסה"כ עבור m משוואות: נבצע $o(m^2)$ פעולות.

ב. בשיטת יעקובי:

x_1 מקבל את <u>ערכו המדויק</u> כבר במעבר בראשון באיטראציה הראשונה:
$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$

כאן אנו <u>לא</u> מעדכנים את x_2 עם המשתנה שכבר <u>הספקנו</u> לחשב, אלא ע"י הערך המתאים שחושב באיטראציה הקודמת: $x_2 = \frac{b_2 - a_{21} * x_1^{(t)}}{a_{22}}$, ולכן מתעדכן באופן מדוייק (כלומר יקבל את ערכו הסופי) רק במעבר השני באיטרציה השנייה.

ובאופן כללי: כל x_i יקבל את ערכו המדויק במעבר ה-i באיטרציה ה-i-ית.

לכן נבצע בסך הכול $o(m^2)$ פעולות בכל איטרציה ולכן בסה"כ עבור m איטרציות: נבצע $o(m^3)$ פעולות.

3.2

מכיוון ש-$A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ מטריצה משולשית עליונה $m * m$ נקבל הפעם:

נזכור כי עבור שיטת יעקובי נחשב את הרכיב הראשון (לדוגמא) כך: $x_1^{t+1} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^t - a_{13}x_3^t - \cdots - a_{1m}x_m^t)$, אבל נקבל הפעם תוצאות זהות עבור שתי השיטות: בשיטת גאוס-זיידל מקדמי המשתנים שכבר חושבו הם אפס!! - אין עבורה יתרון במקרה כזה. לכן נקבל:

באיטרציה הראשונה: $x_1^1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0 - \cdots - a_{1m}x_m^0)$

נזכור ש-$a_{21} = 0$ ולכן: $x_2^1 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^0 - a_{23}x_3^0 - \cdots - a_{2m}x_m^0) = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{23}x_3^0 - \cdots - a_{2m}x_m^0)$

$\vdots$

$$x_{m-1}^1 = \frac{1}{a_{m-1m-1}}(b_{m-1} - a_{m-1m}x_m^0)$$

כאן רואים כי זהו המשתנה הראשון שמקבל את ערכו הסופי: $x_m^1 = \frac{1}{a_{mm}}(b_m)$

המשתנה השני שיתעדכן באופן סופי הוא x_{m-1} , וזאת באיטרציה השנייה. כלומר:

באיטראציה הראשונה קיבלנו את ערך המשתנה האחרון, באיטראציה השנייה יתעדכן סופית המשתנה שלפניו וכך הלאה:

באופן כללי באיטראציה ה-i המשתנים $x_{m-i} - x_m$ מתעדכנים באופן מדוייק.

יהיו לנו m איטרציות, בכל איטרציה נחשב $o(m)$ משתנים עבור כל אחד מהם נדרשות $o(m)$ פעולות. לכן שוב נקבל $o(m^3)$ פעולות.