פתרון תרגיל 1 – חקר ביצועים 88369

.(1

משתני ההחלטה :

X_1 – כמות מטר קוב לשעה מי נהר. X_2 – כמות מטר קוב לשעה מי תהום.

פונקציית המטרה : $Z = 3X_1 + 1.5X_2$

ניסוח הבעיה כבעיית תכנון לינארי :

$$Min\ Z = 3X_1 + 1.5X_2$$
$$s.t.$$
$$X_1 + X_2 \geq 1800$$
$$X_1 \leq 1600$$
$$X_2 \leq 1500$$
$$195X_1 + 125X_2 \leq 170(X_1 + X_2) \Rightarrow \qquad 25X_1 - 45X_2 \leq 0$$
$$30X_1 + 50X_2 \leq 40(X_1 + X_2) \Rightarrow \qquad -10X_1 + 10X_2 \leq 0$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

(!) נשים לב שחייבים לכלול את אילוץ אי-השליליות (האילוץ האחרון) כחלק מניסוח הבעיה.

.(2

משתני ההחלטה :

X_{ij} – כמות הגידול i (1=חסה, 2= עגבניה, 3=מלפפון) במושב j (1=א', 2=ב', 3=ג').

כלומר :

X_{11} – כמות גידול החסה במושב א'.

X_{12} – כמות גידול החסה במושב ב'.

...

X_{23}–כמות גידול העגבניה במושב ג'.

וכו'.

פונקציית המטרה :

$$Z = 400(X_{11} + X_{12} + X_{13}) + 300(X_{21} + X_{22} + X_{23}) + 100(X_{31} + X_{32} + X_{33})$$

סוג הבעיה: $Max\ Z$

<u>האילוצים</u> :

אילוצי שטח :

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} \leq 400$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 600$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 300$$

אילוצי מים :

$$5X_{11} + 4X_{21} + 3X_{31} \leq 1500$$
$$5X_{12} + 4X_{22} + 3X_{23} \leq 2000$$
$$5X_{13} + 4X_{23} + 3X_{33} \leq 900$$

אילוצי גידול:

$$X_{11}+X_{12}+X_{13}\le 700$$
$$X_{21}+X_{22}+X_{23}\le 800$$
$$X_{31}+X_{32}+X_{33}\le 300$$

אילוצי אי-שליליות:

$$X_{ij}\ge 0 \qquad \forall i,j=1,2,3$$

3). התחום הנקבע ע"י האילוצים:

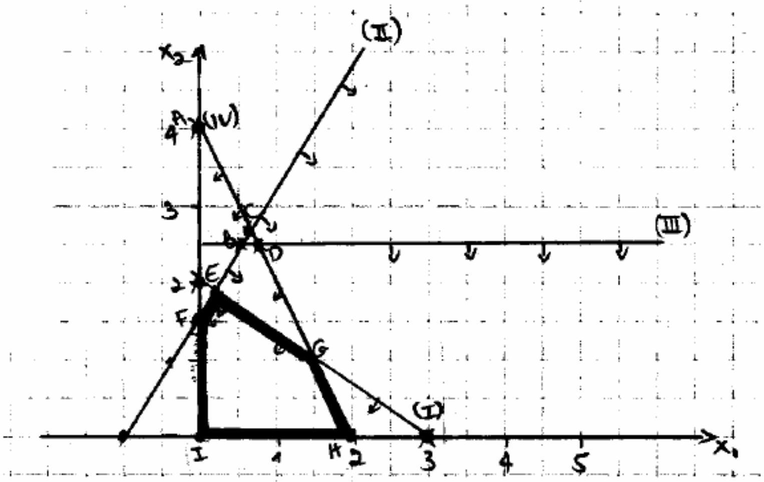
(I) $2x_1+3x_2\le 6 \Rightarrow 2x_1=6-3x_2 \Rightarrow x_1=3-1.5x_2$

(II) $-3x_1+2x_2\le 3 \Rightarrow 3x_1=2x_2-3 \Rightarrow x_1=\frac{2}{3}x_2-1$

(III) $2x_2\le 5 \Leftrightarrow x_2\le 2\frac{1}{2}$

(IV) $2x_1+x_2\le 4 \Rightarrow x_2=4-2x_1 \Rightarrow 2x_1=4-x_2 \Rightarrow x_1=2-\frac{1}{2}x_2$

$x_1, x_2 \ge 0$



א). פתרון גרפי, כאשר פוני המטרה היא $Z = 4X_1 + 3X_2$:

$\max Z = 4x_1 + 3x_2$

נמצא את ערכי פ' המטרה של קד' שבשטח המותר:

E: $3 - 1.5x_2 = \frac{2}{3}x_2 - 1$

$2\frac{1}{6}x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 1\frac{11}{13}$, $x_1 = 3 - 1.5 \cdot 1\frac{11}{13} = \frac{3}{13} = 0.23$

$Z(E) = 4 \cdot 0.23 + 3 \cdot 1\frac{11}{13} = 6.458$

F: $x_1 = 0 \Rightarrow 0 = \frac{2}{3}x_2 - 1 \Rightarrow \frac{2}{3}x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1.5$

$Z(F) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1.5 = 4.5$

G: $2 - \frac{1}{2}x_2 = 3 - 1.5x_2$

$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 1.5$

$Z(G) = 4 \cdot 1.5 + 3 \cdot 1 = 9$

I: $x_1 = 0$, $x_2 = 0 \Rightarrow Z(I) = 0$

H: $x_2 = 0$, $x_1 = 2$

$Z(H) = 4 \cdot 2 + 0 = 8$

בדיקה מגלה שהמקסימום מתקבל בנקודה G : Z(G) = 9

ב). פתרון גרפי, כאשר פוני׳ המטרה היא $Z = 4X_1 + 6X_2$:

$Max\ Z = 4X_1 + 6X_2$

$Z(E) = 4\cdot 0.23 + 6\cdot 1\frac{11}{13} = 12$

$Z(F) = 0\cdot 4 + 6\cdot 1.5 = 9$

$Z(G) = 4\cdot 1.5 + 6\cdot 1 = 12$

$Z(I) = 0$

$Z(H) = 4\cdot 2 + 6\cdot 0 = 8$

ל-2 הנק' האופטימליות שלנו הן (E,G) יש ערך זהה, לכן כל קו המטרה שנעבור בין E ל-G יהיה אותו הערך z=12 . מכאן, יש אינסוף פתרונות אופטימלים בבעיה.

המסקנה : אנו במצב של ריבוי פתרונות (אינסוף פתרונות).
המקסימום של פונקציית המטרה הוא על הקטע המחבר בין הנקודות : Z(E) = Z(G) = 12.

4). פתרון בעזרת אלגוריתם הסימפלקס.
הוספת משתני סרק (חסר/עודף) :

$$Max \quad Z = 3X_1 + 6X_2 + 2X_3$$
$$s.t.$$
$$3X_1 + 4X_2 + X_3 + S_1 = 20$$
$$X_1 + 3X_2 + 2X_3 + S_2 = 10$$
$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \geq 0$$

טבלת הסימפלקס (Tableau)

מס׳ שורה	יחס	אגף ימין	S_2	S_1	X_3	(i)X_2	X_1	Z	משתני הבסיס
R_0	--	0	0	0	-2	-6	-3	1	Z
R_1	20/4=5	20	0	1	1	4	3	0	S_1
R_2	10/3=3 1/3 (o)	10	1	0	2	(*)3	1	0	S_2

(i) – משתנה נכנס. (o) – יוצא. (*) – איבר ציר (פיבוט)
<= משתנה נכנס : X_2 משתנה יוצא : S_2

פעולות השורה (הערה: כדאי להכניס לטבלה את פעולות השורה, הן הופרדו כאן מטעמים טכניים)

$$1/3R_2 \rightarrow R_2$$
$$R_0 + 6R_2 \rightarrow R_0$$
$$R_1 - 4R_2 \rightarrow R_1$$

משתני הבסיס	Z	(i)X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	אגף ימין	יחס	מס' שורה
Z	1	-1	0	2	0	2	20	--	R_0
S_1	0	(*)5/3	0	-5/3	1	-1/3	6 2/3	4(o)	R_1
X_2	0	1/3	1	2/3	0	1/3	3 1/3	10	R_2

<= משתנה נכנס: X_1 משתנה יוצא: S_1

פעולות השורה (הערה: כדאי להכניס לטבלה את פעולות השורה, הן הופרדו כאן מטעמים טכניים)

$$3/5\,R_1 \rightarrow R_1$$
$$R_0 + R_1 \rightarrow R_0$$
$$-(1/3)\,R_1 + R_2 \rightarrow R_2$$

משתני הבסיס	Z	(i)X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	אגף ימין	יחס	מס' שורה
Z	1	0	0	1	3/5	1 1/5	24	--	R_0
X_1	0	1	0	-1	3/5	-4/5	4	-	R_1
X_2	0	0	1	1 2/9	-1/5	3/5	2	-	R_2

לא נותרו איברים שליליים בשורת פונקציית המטרה, לכן קיבלנו פתרון אופטימלי.

ערך הפתרון האופטימלי: $(X_3, S_1, S_2 = 0)$ $X_1 = 4, X_2 = 2$ $Z = 24$

5). פתרון בעזרת אלגוריתם הסימפלקס.

הוספת משתני סרק (חסר/עודף):

$$Max \quad Z = 4X_1 + 3X_2$$
$$s.t.$$
$$2X_1 + 3X_2 + S_1 = 6$$
$$-3X_1 + 2X_2 + S_2 = 3$$
$$2X_1 + S_3 = 5$$
$$2X_1 + X_2 + S_4 = 4$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0$$

<u>טבלת הסימלפקס (Tableau)</u>

משתני הבסיס	Z	(i)X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	אגף ימין	יחס
Z	1	-4	-3	0	0	0	0	0	--
S_1	0	2	3	1	0	0	0	6	6/2=3
S_2	0	-3	2	0	1	0	0	3	-
S_3	0	2	0	0	0	1	0	5	5/2=2.5
S_4	0	(*)2	1	0	0	0	1	4	4/2=2(o)

<= משתנה נכנס : X_1 משתנה יוצא : S_4

משתני הבסיס	Z	X_1	(i)X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	אגף ימין	יחס
Z	1	0	-1	0	0	0	2	8	--
S_1	0	0	(*)2	1	0	0	-1	2	1(o)
S_2	0	0	7/2	0	1	0	3/2	9	18/7
S_3	0	0	-1	0	0	1	-1	1	-
X_1	0	1	1/2	0	0	0	1/2	2	4

<= משתנה נכנס : X_2 משתנה יוצא : S_1

משתני הבסיס	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	אגף ימין	יחס
Z	1	0	0	1/2	0	0	3/2	9	--
X_2	0	0	1	1/2	0	0	-1/2	1	
S_2	0	0	0	-7/4	1	0	13/4	11/2	
S_3	0	0	0	1/2	0	1	-3/2	2	
X_1	0	1	0	-1/4	0	0	3/4	3/2	

לא נותרו איברים שליליים בשורת פונקציית המטרה, לכן קיבלנו פתרון אופטימלי.
הפתרון האופטימלי:

$$Z = 9 \qquad X_1 = 1.5, X_2 = 1 \qquad \left(S_1 = 0, S_2 = 11/2, S_3 = 2, S_4 = 0\right)$$