שיטות נומריות: תרגול 7

פירוק $Cholesky$

הגדרה: תהי A מטריצה. אם מתקיימים התנאים הבאים אז ל-A יש פירוק $Cholesky$:

1) A סימטרית, כלומר: $A^T = A$.
2) A מטריצה חיובית לחלוטין, כלומר (צריך **שאחד** התנאים הבאים יתקיים מאחר והם שקולים):

- כל הע"ע של המטריצה A **חיוביים**.
- כל המינורים הראשיים; של A חיוביים.
- $\forall \vec{x} \neq 0$ מתקיים: $\vec{x}^T * A * \vec{x} > 0$.

דוגמה:

נתונה המטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A אכן סימטרית (ניתן לראות).

נבדוק מינורים ראשיים:

$$|2| = 2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

לכן למטריצה A יש פירוק $Cholesky$.

הערה: פקודה ב-MATLAB שמבצעת את הפירוק: $chol(A)$.

משפט: בהינתן מטריצה A סימטרית ומוגדרת חיובית לחלוטין, ניתן לפרק אותה באופן הבא:

נבצע פירוק $\underbrace{U}_{\text{משולשית עליונה}}$ $\underbrace{L}_{\text{משולשית תחתונה}}$ ונסמן: $\underbrace{U_1}_{\text{השאר}} + \underbrace{D}_{\text{מטריצה אלכסונית}} = U$.

מכאן:

$$A = \left(L\sqrt{D}\right) * \left(L\sqrt{D}\right)^T$$

נסמן: $\boxed{R = L\sqrt{D}}$ ונקבל:

$$A = R * R^T$$

<u>שיטות נומריות: תרגול 7</u>

וכעת, על מנת למצוא את הפתרון של המערכת $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$R * \underbrace{R^T * \vec{x}}_{\vec{y}} = \vec{b} => \begin{cases} R * \vec{y} = \vec{b} \\ R^T * \vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$

על מנת למצוא פתרון (כלומר את $\vec{x}$) נבצע חילוץ לפנים ולאחור ונמצא את $\vec{x}$. הסיבה לביצוע של חילוץ (הצבה לאחור או הצבה לקדימה) היא כי R משולשית תחתונה ו - R^T משולשית עליונה.

<u>דוגמה:</u>

נתונה המטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 20 & 32 \\ 5 & 32 & 64 \end{pmatrix}$$

נבדוק את התנאים לפירוק $Cholesky$:

1) A סימטרית כי $A^T = A$.
2) נבדוק מינורים ראשיים:

$$|1| = 1 < 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 20 - 16 = 4 < 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 20 & 32 \\ 5 & 32 & 64 \end{vmatrix} = 12 < 0$$

ולכן ניתן לעשות פירוק $Cholesky$.

<u>נבצע פירוק LU:</u>

<u>הערה:</u> את חישוב מטריצה L נחשב על ידי מכפלה של מטריצות E_i, כאשר מטריצה E_i שומרת את הכופל הl במיקום של הכופל בתוך מטריצה יחיד. ניתן לחשב את L בצורתו הרגילה בהתאם לתרגולים הקודמים.

נרצה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 20 & 32 \\ 5 & 32 & 64 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{אחרי דירוג}} U$$

לכן2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 20 & 32 \\ 5 & 32 & 64 \end{pmatrix} \xRightarrow[R_3:R_3-5R_1]{R_2:R_2-4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 12 & 39 \end{pmatrix} \xRightarrow{R_3:R_3-3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

נשמור את כל פעולות השורה על המטריצה A ונזכור שפעולת שורה שקולה להכפלת המטריצה A במטריצה אלמנטרית.

שיטות נומריות: תרגול 7

כעת:

$$R_2: R_2 - 4R_1 => E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3: R_3 - 5R_1 => \ E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3: R_3 - 3R_2 => \ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

ידוע ש:

$$E_3 * E_2 * E_1 * A = U \ \ /* \, (E_3 * E_2 * E_1)^{-1}$$

(למטריצות אלמנטריות קיימת הופכית)

לכן:

$$A = (E_3 * E_2 * E_1)^{-1} * U$$

$$A = \underbrace{E_1^{-1} * E_2^{-1} * E_3^{-1}}_{L} * U$$

נמצא את $E_1^{-1}, E_2^{-1}, E_3^{-1}$:

$$E_1^{-1}: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2: R_2 + 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \end{matrix} \\ 0 & 1 & 0 & \begin{matrix} 4 & 1 & 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E_1^{-1}} \end{array}\right)$$

$$E_2^{-1}: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3: R_3 + 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \end{matrix} \\ 0 & 1 & 0 & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{\begin{matrix} 5 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E_2^{-1}} \end{array}\right)$$

$$E_3^{-1}: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3: R_3 + 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \end{matrix} \\ 0 & 1 & 0 & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 3 & 1 \end{matrix}}_{E_3^{-1}} \end{array}\right)$$

נמצא את L:

$$L = E_1^{-1} * E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

וידוע גם מקודם:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

שיטות נומריות: תרגול 7

כלל אצבע: בפירוק LU, במטריצה L על האלכסון הראשי תמיד 1, כלומר - $\forall i: l_{ii} = 1$ (פירוק דוליטל).

כעת:

$$U = D + U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומאחר והמטריצה $\sqrt{D}$ היא עדיין אלכסונית עם שורש באיברים על האלכסון (של D) נקבל ש:

$$R = L\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

נזכור כי:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A = R * R^T$$

ולכן:

$$R * \underbrace{R^T * \vec{x}}_{\vec{y}} = \vec{b}$$

$$=> \begin{cases} 1)\ R * \vec{y} = \vec{b} \\ 2)\ R^T * \vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$

לכן:

$$R^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & \sqrt{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

שיטות נומריות: תרגול 7

שיטות איטרטיביות למציאת וקטור פתרונות:

הרעיון: ניקח את המערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ ונמצא קירוב איטרטיבי לווקטור $\vec{x}$ ע"י:

$$\overrightarrow{x_{k+1}} = B\overrightarrow{x_k} + \vec{c}$$

כאשר B מטריצה ו-c וקטור.

הערה: כל מטריצה ניתן לכתוב:

$$A = \underbrace{L}_{\substack{\text{משולשית} \\ \text{תחתונה}}} + \underbrace{D}_{\text{אלכסונית}} + \underbrace{U}_{\substack{\text{משולשית} \\ \text{עליונה}}}$$

<u>שיטת יעקובי:</u>

$$A = (L + U) + D$$

$$\Longrightarrow \big((L + U) + d\big)\vec{x} = \vec{b}$$

$$(L + U)\vec{x} + D\vec{x} = \vec{b}$$

$$D\vec{x} = \vec{b} - (L + U)\vec{x} \quad /* D^{-1}$$

$$\boxed{\vec{x} = D^{-1}\vec{b} - D^{-1}(L + U)\vec{x}}$$

ניתן לכתוב גם:

$$\overrightarrow{x_{new}} = D^{-1}\vec{b} - D^{-1}(L + U)\overrightarrow{x_{old}}$$

$$\overrightarrow{x_{k+1}} = D^{-1}\vec{b} - D^{-1}(L + U)\overrightarrow{x_k}$$

ולכן לפי הסימונים ממקודם:

$$B = -D^{-1}(L + U)$$

$$\vec{c} = D^{-1}\vec{b}$$

<u>משפט להתכנסות (תנאי מספיק אך לא הכרחי):</u> אם A מטריצה בעלת תנאי אלכסון שולט, אזי, השיטה האיטרטיבית תתכנס לכל ניחוש התחלתי $\overrightarrow{x_0}$ ולכן למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ יש פתרון יחיד.

תנאי של אלכסון שולט אומר ש:

$$\boxed{\forall i: |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|}$$

<u>לדוגמה:</u> עבור המטריצה:

שיטות נומריות: תרגול 7

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

יש תנאי של אלכסון שולט מאחר ו:

$$|3| > |-1| + |-1|$$

$$|2| > |0| + |-1|$$

$$|8| < |1| + |1|$$

הערה: אם למטריצה A אין אלכסון שולט זה לא אומר שאין התכנסות לשיטה האיטרטיבית. לכן בא גם המשפט הבא:

משפט להתכנסות (תנאי מספיק): צריך שיתקיים ש:

$$\|B\| < 1$$

עבור כל נורמה (L_1, L_2, L_∞) עבור הסימונים מקודם (כלומר עבור B המקיימת $\overrightarrow{x_{k+1}} = B\overrightarrow{x_k} + \vec{c}$).

הערה: מעין הוכחה למשפט הקודם:

$$\overrightarrow{x_{k+1}} = B\overrightarrow{x_k} + \vec{c}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{x_{k+1}} - \overrightarrow{x_k} = B * \overrightarrow{x_k} + \vec{c} - (B * \overrightarrow{x_{k+1}} + \vec{c}) = B * (\overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{x_{k-1}})$$

$$\underbrace{\|\overrightarrow{x_{k+1}} - \overrightarrow{x_k}\|}_{\text{שגיאה}>} = \|B * (\overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{x_{k-1}})\| \le \|B\| * \|\overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{x_{k-1}}\|$$

לכן $\|B\| < 1$ (כדי שהשיטה תתכנס רוצים שהשגיאה תקטן).

משפט (תנאי מספיק והכרחי): המטריצה B המקיימת:

$$\overrightarrow{x_{k+1}} = B\overrightarrow{x_k} + \vec{c}$$

צריך שיתקיים:

$$\rho(B) = \max_{1 \le i \le n}\{\lambda_i(B)\} < 1$$

על מנת שהשיטה האיטרטיבית תתכנס ($\rho(B)$ הינה הרדיוס הספקטרלי של B).

תרגיל:

שיטות נומריות: תרגול 7

נתון:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

עם ניחוש התחלתי: $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

א) הוכח שהמערכת מתכנסת בשיטה האיטרטיבית (של יעקובי).
ב) כתוב נוסחה איטרטיבית למציאת הקירוב.
ג) בצע 3 איטרציות.

<u>פתרון:</u>

<u>סעיף א':</u>

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

נבדוק אלכסון שולט:

$$|4| > |2| + |0|$$

$$|10| > |2| + |4|$$

$$|5| > |4| + |0|$$

לכן למטריצה A יש תנאי של אלכסון שולט ולכן השיטה מתכנסת.

■

<u>סעיף ב':</u>

$$A = L + D + U => D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$B = -D^{-1}(L + U) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0.8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שיטות נומריות: תרגול 7

$$C = D^{-1} * \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ונקבל את הנוסחה האיטרטיבית:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0.8 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כאשר:

$$\overrightarrow{x_n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_{n+1}} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$$

ויהי הניחוש: $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>נבצע 3 איטרציות:</u>

<u>רכיבי הווקטור</u> $\boldsymbol{x}$	**<u>ניחוש התחלתי</u>** $\boldsymbol{x_0}$	**<u>1</u>**	**<u>2</u>**	**<u>3</u>**
x_n	0	0.5	0.2	0.45
y_n	0	0.6	0.1	0.32
z_n	0	1	0.52	0.84

<u>תזכורת (שיטת יעקובי):</u>

$$A = \underbrace{L}_{\text{משולשית תחתונה}} + \underbrace{D}_{\text{אלכסונית}} + \underbrace{U}_{\text{משולשית עליונה}}$$

נציב במערכת המשוואות:

$$A = (L + U) + D$$

$$\Longrightarrow \big((L + U) + d\big)\vec{x} = \vec{b}$$

$$(L + U)\vec{x} + D\vec{x} = \vec{b}$$

$$D\vec{x} = \vec{b} - (L + U)\vec{x} \quad /* D^{-1}$$

$$\boxed{\vec{x} = D^{-1}\vec{b} - D^{-1}(L + U)\vec{x}}$$

כאשר דורשים ש: $a_{11}, \dots, a_{nn} \neq 0$ וזה קורה אם ורק אם $\|D\| \neq 0$.

$$\Longrightarrow \mathrm{B} = -\mathrm{D}^{-1}(L + U), \vec{c} = D^{-1}\vec{b}$$