תרגול 2

<u>הגדרה:</u> $\epsilon_{machine}$ – שגיאה יחסית:

- בתקן $float$: $|\epsilon_{machine}| \leq 2^{-23} \sim 1.19 * 10^{-7}$
- בתקן $double$: $|\epsilon_{machine}| \leq 2^{-52} \sim 2.22 * 10^{-16}$

<u>למשל –</u>

לחשב את $x + 1$ – אם $\epsilon_{machine} > x$ אז $1 + x = 1$.

תרגיל:

האם החלפת סדר האיברים בסכום יכולה לתת תוצאה שונה ע"י חישוב מקורב? אם כן הוכח וחשב את $1,000,000 + 1,000,000$ ב-2 דרכים שונות כשידוע שבמחשב ניתן לשמור עד 6 ספרות במנטיסה.

פתרון:

תרגיל:

האם החלפת סדר האיברים בסכום יכולה לתת תוצאה שונה ע"י חישוב מקורב? אם כן הוכח וחשב את $1{,}000{,}000 + 1{,}000{,}000$ ב-2 דרכים שונות כשידוע שבמחשב ניתן לשמור עד 6 ספרות במנטיסה.

פתרון:

כן. 2 הדרכים הן –

1) $10^6 + 10^6 = 2{,}000{,}000 = 2 * 10^6$

2) $10^6 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{פעמים } 1{,}000{,}000} => 1{,}000{,}000 + 1 = 1{,}000{,}001$

כעת נשים לב כי המספר $1{,}000{,}001$ תופס 7 מקומות במנטיסה, כאשר למחשב יש רק 6 מקומות במנטיסה. לכן המחשב ישמור אותו בתור $1{,}000{,}000$. אם נמשיך את פעולה זו של חיבור 1 כל הזמן במשך 10^6 פעמים אז נקבל בסה"כ שהמחשב ישמור את החיבור של הכול בתור $1{,}000{,}000$.

<u>שגיאת קירוב</u>

<u>תזכורת:</u> תהא f פונקציה גזירה $n+1$ פעמים ברציפות בקטע $[x_0, x]$. אזי טור טיילור מסביב לנקודה x_0 הוא –

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} f^{(i)}(x_0) * \frac{(x-x_0)^i}{i!} + R_{N+1}(x)$$

כאשר –

$$R_{N+1}(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!} * x^{N+1}$$

כאשר $x_0 \le c \le x$.

<u>תרגיל:</u>

קרבו את הפונקציה e^{2x} ע"י טור טיילור עד סדר 2 סביב $x_0 = 1$ בקטע $[1,10]$.

<u>פתרון:</u>

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2} f^{(i)}(1) * \frac{(x-1)^i}{i!} + R_3(x)$$

$$f(x) = e^{2x} => f'(x) = 2e^{2x} => f''(x) = 4e^{2x} => f^{(3)}(x) = 8e^{2x} \dots (f^{(i)}(x) = 2^i e^{2x}$$

לכן –

$$f(x) \approx e^2 + \frac{2e^2(x-1)}{1!} + \frac{4e^2(x-1)^2}{2!} + R_3(x)$$

$$R_3(x) = \frac{8e^{2c}(x-1)^3}{3!}$$

מאחר ו - $1 \le x \le 10$ אז גם - $1 \le c \le 10$ ונוכל לחסום את השגיאה –

$$|R_3(x)| \le \frac{8e^{20} * 9^3}{6}$$

<u>שגיאה מתפשטת</u>

<u>הגדרה:</u> שגיאה מתפשטת זה חישוב שגיאה **בפלט** כשגיאה המושפעת מהקלט.

<u>תזכורת:</u>

- שגיאה מוחלטת - $\Delta x = |x - x^*|$
- שגיאה יחסית - $\delta_x = \left|\frac{\Delta x}{x}\right|$

<u>נוסחה לשגיאה:</u> בהינצן פונקציה $u(x_1, \dots, x_n)$, $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ סקלרית אזי –

- שגיאה מתפשטת מוחלטת -

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| * \Delta x_i$$

- שגיאה מתפשטת יחסית -

$$\delta_u = \frac{\Delta u}{u} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| * \Delta x_i}{u}$$

<u>החסם לשגיאה המוחלטת:</u>

$$\Delta u \le \max_{1\le i\le n}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| * \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

תרגיל:

מהו חסם לשגיאה המתפשטת המוחלטת והיחסית של נפח כדור –

$$v(R,\pi) = \frac{4\pi R^3}{3}\ , v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

כאשר $\pi^* = 3.14$ (ערך מקורב של π), נניח כי $\pi = 3.14159$. עוד אנו יודעים כי - $R^* = 5.3$

(ערך מקורב של R) וגם - $\Delta R = 0.05$.

תרגיל:

מהו חסם לשגיאה המתפשטת המוחלטת והיחסית של נפח כדור –

$$v(R,\pi) = \frac{4\pi R^3}{3}\ , v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

כאשר $\pi^* = 3.14$ (ערך מקורב של π), נניח כי $\pi = 3.14159$. עוד אנו יודעים כי - $R^* = 5.3$

(ערך מקורב של R) וגם - $\Delta R = 0.05$.

פתרון:

נמצא את השגיאה היחסית של π:

$$\Delta\pi = |\pi - \pi^*| = |3.14159 - 3.14| = 0.0016$$

עוד אנו יודעים כי –

$$\Delta R = |R - R^*| => R = 5.3 + 0.05 = 5.305$$

נרצה לחסום את -

$$\Delta v = \left|\frac{\partial v}{\partial R}\right| * \Delta R + \left|\frac{\partial v}{\partial \pi}\right| * \Delta \pi$$

נחשב את הנגזרות החלקיות –

הפונקציה:

$$v(R,\pi) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

ולכן (נשתמש בקרובים שידועים לנו לחישוב הנגזרות החלקיות) -

$$\left|\frac{\partial v}{\partial R}\right| = |4\pi R^2|_{(5.3,3.14)} = 4 * 3.14 * (5.3)^2 = 352.81$$

$$\left|\frac{\partial v}{\partial \pi}\right| = \left|\frac{4R^3}{3}\right|_{(5.3,3.14)} = \frac{4 * 5.3^3}{3} = 198.5$$

ולכן –

$$\Delta v = \left|\frac{\partial v}{\partial R}\right| * \Delta R + \left|\frac{\partial v}{\partial \pi}\right| * \Delta\pi = 352.81 * 0.05 + 198.5 * 0.0016 = 17.96$$

ומכאן נגיע לשגיאה המתפשטת היחסית –

$$\delta_v = \frac{\Delta v}{v(5.305,3.14159)} = \frac{17.96}{623.61} \approx 0.0288$$

מספר מצב $(Condition\ Number)$

נשים לב לשתי מערכות של משוואות –

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+1.01y=2.01 \end{cases} => x=y=1 \quad , \quad \begin{cases} x+y=2 \\ x+1.01y=2.02 \end{cases} => x=0, y=2$$

נשים לב כי שתי משוואות אלו מאוד דומות אבל נשים לב שפתרונן הוא מאוד שונה אחד מהשני. נרשום בצורת מטריצות –

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.01 \end{bmatrix}, A\vec{x}=\vec{b}$$

$$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$$

<u>הבעיה:</u> למצוא $\vec{x}$ כך ש- $A\vec{x} = b_1'$. קיימת אי - וודאות לגבי ערכו של b_1.

<u>מסקנה:</u> אי אפשר למצוא ערך מקורב של $\vec{x}$ כי אם במקום $\overrightarrow{b_1}$ נציב ווקטור אחר כקירוב ל- $\overrightarrow{b_1}$, למשל $\overrightarrow{b_2}$, נקבל $\vec{x}$ שזה פתרון שונה לחלוטין.

לבעיות אלו קוראים $ill - conditioned$, לא מוצגת היטב או אלגוריתם "חולה". במקרה של אלגוריתם "חולה" צריך להכניס נתונים מדויקים יותר או לשפר את האלגוריתם.

$C.N$ $(condition\ number)$ נותן הערכה פי כמה השגיאה <u>בפלט</u> גדולה מהשגיאה <u>בקלט!</u>

$$C = \left|\frac{\delta_{\text{פלט}}}{\delta_{\text{קלט}}}\right|$$

מספר מצב של פונקציה גזירה

$$C(x)=\left|\frac{\delta_y}{\delta_x}\right|=\lim_{h\to 0}\left|\frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}}\right|=\lim_{h\to 0}\left|\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}}{\frac{x+h-x}{h}}\right|=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|*\left|\frac{x}{f(x)}\right|=_{\text{אם } f \text{ גזירה}}=\left|\frac{f'(x)*x}{f(x)}\right|$$

ולכן –

$$C(x)=\left|\frac{f'(x)*x}{f(x)}\right|$$

<u>מסקנה:</u> אם c גדול מאוד אזי שגיאה קטנה **בקלט** יכולה להוביל לשגיאה גדולה **בפלט**!

$$\delta_{f(x)} \approx C * \delta_x$$

אם $\underline{C = 1}$ אז - $\delta_{f(x)} \approx \delta_x$, ומכאן שגיאה יחסית בפלט כגודל השגיאה היחסית בקלט.

אם $f \equiv 1$, אז לכל h - $f(x+h) - f(x) = 0$, ומכאן - $\delta_f = 0$. לכן , לכל שגיאה יחסית בקלט , הפלט יהיה מדויק.

אם $C \gg 1$ (גדול ממש מ-1) אז הבעיה של לחשב את $f(x)$ היא לא מוצגת היטב (אם C עד 10 אז זה בסדר).

<u>מספר מצב של פונקציה **בנקודה** x:</u>

$f_2(x)=\frac{(3x^4-10)^2}{12}$, $f_1(x)=\frac{1}{x^2+1}$ נחתכות ב- $x=\sqrt{2}$. ברצוננו לחשב את $f_1(\sqrt{2}), f_2(\sqrt{2})$, ונרצה לקבוע באיזו פונקציה עדיף להשתמש מבחינת שגיאה מתפשטת. נענה על השאלה הזאת במונחים של מספר מצב. נחשב את $C(\sqrt{2})$ של שתי הפונקציות ונבחר בפונקציה בעלת C הנמוך יותר.

פתרון:

נחשב את פונקציות מספרי המצב של f_1, f_2:

$$C_1(x) = \left|\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} * x\right| = \left|\frac{-\frac{2x}{(x^2+1)^2} * x}{\frac{1}{x^2+1}}\right| = \frac{2x^2}{x^2+1}$$

$$C_2(x) = \left|\frac{f_2'(x)}{f_2(x)} * x\right| = \left|\frac{\frac{2(3x^4-10) * 12x^3}{12}}{\frac{(3x^4-10)^2}{12}}\right| = \frac{24x^4}{3x^4-10}$$

נציב – $x = \sqrt{2}$:

$$C_1(\sqrt{2}) = \frac{2 * 2}{2 + 1} = \frac{4}{3}$$

$$C_2(\sqrt{2}) = \frac{24 * 2^2}{3 * 2^2 - 10} = 48$$

מתקיים כי - $C_1(\sqrt{2}) < C_2(\sqrt{2})$ ולכן נבחר את f_1 מבחינת הפחתת השגיאה המתפשטת.

נחשב –

$$f_1(\sqrt{2}) = \frac{1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

תרגיל:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

נחשב מספר מצב של הפונקציה בנקודות –

$$x_0 = 2\,, x_1 = 1.1\,, x_2 = 1.01\,, x_3 = 1.0001$$

<u>פתרון:</u>

נשים לב כי לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית בנקודה - $x = 1$. נחשב את פונקציית מספר המצב –

$$C(x) = \left| \frac{-\frac{1}{(1-x^2)^2}}{\frac{1}{1-x}} * x \right| = \left| \frac{x}{1-x} \right|$$

נחשב –

$$C(2) = \left|\frac{2}{1-2}\right| = 2$$

$$C(1.1) = \left|\frac{1.1}{(1-1.1)}\right| = 11$$

$$C(1.01) = \left|\frac{1.01}{1-1.01}\right| = 101$$

$$C(1.0001) = \left|\frac{1.0001}{1-1.0001}\right| = 10{,}001$$

ונשים לב שככל שניקח נקודה קרובה יותר ל-1, מספר המצב ממשיך לגדול , וזה נובע מהסינגולריות של הפונקציה בנקודה - $x = 1$.