קורס: שיטות נומרית, סמסטר א', תשע"ט.
מס' קורס: 88-376-01.
בחינה מועד א' – 12.02.19,
מרצה: ד"ר מיכאל מיכאלי, מתרגל: מור יעקב.

אוניברסיטת בר אילן,
המחלקה למתמטיקה.

הנחיות כלליות:

1. משך הבחינה: שעתיים וחצי.
2. יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות, ניקוד זהה לכל שאלה.
3. השימוש בכל חומר עזר אסור פרט למחשבון ודף נוסחאות המצורף לטופס הבחינה.
4. יש לכתוב בכתב ברור ולנמק היטב כל תשובה.

שאלה 1

א. מצא את הייצוג הבינארי של המספר העשרוני 71.3125 בתקן float 32 ביט.

ב. נניח כי אנו משתמשים בשיטת החצייה למציאת שורש עבור הפונקציה $f(x)$ בקטע $[4,6]$.

מהו מספר האיטרציות הדרוש לכך ששגיאת הקירוב לא תעלה על 2×10^{-9}? נמק את תשובתך.

2^3

שאלה 2

נתונה פונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ המוגדרת בקטע $[1,2]$.

מהו גודלו של האינטרוול הדרוש בין נקודות הדגימה על מנת ששגיאת הקירוב לפונקציה הנתונה על ידי פולינום האינטרפולציה ממעלה 2 לא תעלה על 5×10^{-8}? נמק את תשובתך.

שאלה 3

א. נתונות 4 דגימות: $f(1,0)=3, f(0,1)=2, f(-1,0)=5, f(0,-1)=4$.

מצא את משוואת המישור $z=f(x,y)=ax+by+c$ ב-R^3 הנותן את הקירוב הטוב ביותר לדגימות אלה במובן של ריבועים מינימליים.

ב. עבור הבעיה מסעיף א', מצא פירוק QR למטריצה שנמצאה, והראה כיצד ניתן להעיזר בפירוק זה למציאת המישור האופטימלי במובן של ריבועים מינימליים.

$\phi_1 \dots \phi_4$

$\psi_1=\phi_1$

$\psi_4=\phi_4-\sum$

שאלה 4

א. הראה כיצד לפתח את נוסחת התרבוע של גאוס–לז'אנדר עבור המקרה הבא:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx a_1 f(c_1)+a_2 f(c_2).$$

ב. חשב את האינטגרל $I=\int_0^1 e^{x^2}dx$ בשיטת טרפז עם $h=\frac{1}{2}$, ותן הערכה לשגיאה המתקבלת.

שאלה 5

נתונה תבנית הבאה לנוסחת הנגזרת (נגזרת שנייה): $f''(x)\approx Af(x+h)+Bf(x)+Cf(x-h)$.

א. הראה כיצד ניתן לחשב את המקדמים A,B,C בתבנית הנתונה.

ב. חשב את רכיב השגיאה המתקבל בתבנית זו.

דף נוסחאות

1. שגיאות

a. שגיאה מוחלטת: $\Delta x = |x - x^{*}|$

b. שגיאה יחסית: $\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \approx \left|\frac{\Delta x}{x^{*}}\right|$

c. **נקודה קבועה:** d ספרות דצימליות –

i. שגיאה מוחלטת חסומה ע"י 10^{-d} בקיצוץ

ii. שגיאה מוחלטת חסומה ע"י $0.5 \cdot 10^{-d}$ בהעגלה

d. **נקודה צפה:** t ספרות משמעותיות

i. שגיאה יחסית חסומה ע"י 10^{1-t} בקיצוץ

ii. שגיאה יחסית חסומה ע"י $0.5 \cdot 10^{1-t}$ בהעגלה.

e. **שגיאת הקלט כתלות במשתנים:** $\Delta f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta x_i$

f. **מספר מצב:** $C_p = \frac{\Delta f}{|f|} \Big/ \frac{\Delta x}{|x|} = \left|\frac{f'}{f} x\right|$

2. משוואות לא לינאריות

a. **סדר וקבוע התכנסות**: אם קיימים $p \geq 1$ ו- $0 < C < \infty$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p} = C \neq 0$

אז p נקרא סדר ההתכנסות, C נקרא קבוע ההתכנסות.

b. Newton Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3. אינטרפולציה:

a. **אינטרפולציה פולינומית:**

i. **שיטת לגראנג':**

פולינום האינטרפולציה: $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$ כאשר $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ הם פולינומי לגראנג'.

תכונות של פולינומי לגראנג': $l_i(x_j) = 0 \ (i \neq j)$, $l_i(x_i) = 1$

ii. **שיטת Newton:**

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + A_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

נוסחה כללית (ולא שימושית) לחישוב המקדמים:

$$A_i = \frac{y_i - [A_0 + A_1(x_i - x_0) + \ldots + A_{i-1}(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-2})]}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})}$$

iii. **השגיאה באינטרפולציה פולינומית:**

$$|f(x) - P_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)\right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)|$$

כאשר $M_{n+1} = \max\left(f^{(n+1)}(\xi)\right)$ ו- $\xi \in \text{int}(x_0, x_1, \ldots, x_n, x)$

4. אינטגרציה נומרית

a. **שיטת הטרפז:**

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

b. **נוסחת סימפסון:**

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

c. **אינטגרציית Gauss**

נציג את הבעיה כאינטגרל של פולינום האינטרפולציה:

$$\int_a^b P_n(x)w(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{n}\left(f_j l_j(x)\right)w(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} f_j \underbrace{\int_a^b l_j(x)w(x)\,dx}_{A_j} = \sum_{j=0}^{n} f_j A_j$$

i. **השגיאה באינטגרציית גאוס:**

$$\int_a^b f(x)w(x)dx - \int_a^b P_n(x)w(x)dx = \frac{f^{(2n+2)}}{(2n+2)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2 w(x)dx$$

ii. **טרנספורמציה לתחום שונה:**

אם חישבנו אינטגרל גאוס בתחום [c,d] ורוצים לחשב אינטגרל עם אותה פונקציית משקל בתחום [a,b], משתמשים בטרנספורמציה הלינארית הכללית הבאה:

$$x(t) = \frac{b-a}{d-c}t + \frac{bd-bc-b+a}{d-c} \qquad t(x) = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{bd-bc-b+a}{a-b}$$

$$c \le t \le d \;\Rightarrow a \le x \le b \qquad a \le x \le b \;\Rightarrow\; c \le t \le d$$

$$dt = \frac{b-a}{d-c}dx \qquad dx = \frac{d-c}{b-a}dt$$

ומקבלים: $\int_a^b f(x)w(x)dx = \frac{b-a}{d-c}\int_c^d f\left(x(t)\right)w\left(x(t)\right)dt$

5. טורי טיילור ידועים:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad lan(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad (1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)x^2}{2!} + \frac{p(p-1)(p-2)x^3}{3!}$$

$$f(\Delta x) = f(0) + f'(0)\cdot\Delta x + \frac{f''(0)\cdot(\Delta x)^2}{2} + \frac{f'''(0)\cdot(\Delta x)^3}{6} + \frac{f^{(4)}(0)\cdot(\Delta x)^4}{24} + \frac{f^{(5)}(0)\cdot(\Delta x)^5}{5!} + \cdots$$

$$f'(\Delta x) = f'(0) + f''(0)\cdot\Delta x + \frac{f'''(0)\cdot(\Delta x)^2}{2} + \frac{f^{(4)}(0)\cdot(\Delta x)^3}{6} + \frac{f^{(5)}(0)\cdot(\Delta x)^4}{4!} + \cdots$$

$$f''(\Delta x) = f''(0) + f'''(0)\cdot\Delta x + \frac{f^{(4)}(0)\cdot(\Delta x)^2}{2} + \frac{f^{(5)}(0)\cdot(\Delta x)^3}{6} + \frac{f^{(6)}(0)\cdot(\Delta x)^4}{4!} + \cdots$$