

פתרון – תרגיל בית 4 – חקר ביצועים (88369)

1.

טבלת הסימפלקס הנתונה:

מ. בסיס	Z	X_1	$(!)X_2$	S_1	A_1	A_2	S_2	א.ימין	יחס
Z	-1	0	$-(5/3)M-1/3$	M	$(7/3)M-4/3$	0	0	$-2M-4$	--
X_1	0	1	$1/3$	0	1	0	0	1	3
$(>)A_2$	0	0	*5/3	-1	0	1	0	2	1.2(m)
S_2	0	0	$5/3$	0	0	0	1	3	1.8

#1 שלב

מ. בסיס	Z	X_1	X_2	$(!)S_1$	A_1	A_2	S_2	א.ימין	יחס
Z	-1	0	0	$-1/5$	$M-8/5$	$M+1/5$	0	$-18/5$	--
X_1	0	1	0	$1/5$	$3/5$	$-1/5$	0	$3/5$	3
X_2	0	0	1	$-3/5$	$-4/5$	$3/5$	0	$6/5$	-
$(>)S_2$	0	0	0	*1	1	-1	1	1	1(m)

#2 שלב

מ. בסיס	Z	X_1	X_2	S_1	A_1	A_2	S_2	א.ימין	יחס
Z	-1	0	0	0	$M-7/5$	M	$1/5$	$-17/5$	--
X_1	0	1	0	0	$2/5$	0	$-1/5$	$2/5$	
X_2	0	0	1	0	$-1/5$	0	$3/5$	$9/5$	
S_1	0	0	0	1	1	-1	1	1	

וסיימנו כי אין יותר איברים שליליים בשורת פונ' המטרה.

הפתרון הוא: $Z = 17/5$, $X_1 = 2/5$, $X_2 = 9/5$

מקרא: (!) – המשתנה הנכנס. (>) – המשתנה היוצא. (m) – היחס המינמלי. * – איבר הפיבוט (=הציר).

2.

(א). הבעיה הנתונה:

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 4X_2$$

$$\text{s.t. } X_1 + X_2 \leq 2$$

$$-2X_1 - 2X_2 \leq -9$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

הפיכה לצורה הסטנדרטית:

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 4X_2$$

$$\text{s.t. } X_1 + X_2 \leq 2$$

$$2X_1 + 2X_2 \geq 9$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

\Rightarrow

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 4X_2 - Ma_1$$

$$\text{s.t. } X_1 + X_2 + s_1 = 2$$

$$2X_1 + 2X_2 - s_2 + a_1 = 9$$

$$X_1, X_2, s_1, s_2, a_1 \geq 0$$

\Leftarrow יש לתקן גם שורת פונקציית המטרה לפני הכנסה לטבלה. השורה המתוקנת מופיעה בטבלה הבאה.

טבלת הסימפלוקס המתקבלת:

מ. הבסיס	Z	(!)X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	a ₁	RHS
Z	1	-2M-5	-2M-4	0	M	0	-9M
(>)S ₁	0	1	1	1	0	0	2
a ₁	0	2	2	0	-1	1	9

המשתנה הנכנס: X₁ (המקדם השלילי ביותר)
 המשתנה היוצא: S₁ (היחס המינימלי).

הטבלה האיטרציה הבאה:

מ. הבסיס	Z	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	a ₁	RHS
Z	1	0	2M+5	M	M	0	-5M+10
X ₁	0	1	1	1	0	0	2
a ₁	0	0	0	-2	-1	1	5

טבלה זו מראה שאין פתרון לבעיה! מקדמי שורת פונ' המטרה חיוביים, אך המשתנה המלאכותי עדיין בבסיס.
 גם ניסיון להוציא בשלב הקודם יביא לאותה מסקנה, אז נקבל פתרון לא אפשרי (איבר שלילי באגף ימין).

(ב). הבעיה הנתונה:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= X_1 - 4X_2 \\ \text{s.t. } -2X_1 + X_2 &\leq -1 \\ -X_1 - 2X_2 &\leq -2 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

הפיכה לצורה סטנדרטית:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= X_1 - 4X_2 \\ \text{s.t. } 2X_1 - X_2 &\geq 1 \\ X_1 + 2X_2 &\geq 2 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \text{Max } Z &= X_1 - 4X_2 - Ma_1 - Ma_2 \\ \text{s.t. } 2X_1 - X_2 - s_1 + a_1 &= 1 \\ X_1 + 2X_2 - s_2 + a_2 &= 2 \\ X_1, X_2, s_1, s_2, a_1, a_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

=> יש לתקן את שורת פונקציית המטרה לפני הכנסה לטבלה. השורה המתוקנת מופיעה בטבלה הבאה.

טבלת הסימפלוקס המתקבלת:

מ. הבסיס	Z	(!)X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	a ₁	a ₂	RHS
Z	1	-3M-1	-M+4	M	M	0	0	-3M
(>)a ₁	0	2	-1	-1	0	1	0	1
a ₂	0	1	2	0	-1	0	1	2

טבלה #2

מ. הבסיס	Z	(!)X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	a ₁	a ₂	RHS
Z	1	-5/2M+7/2	-1/2M-1/2	M	3/2M+1/2	0	0	-3/2M+1/2
X ₁ (>)	0	1	-1/2	-1/2	0	1/2	0	1/2
a ₂	0	0	5/2	1/2	-1	-1/2	1	3/2

אין משתנה שיכול לצאת מהבסיס. היחס עבור a₂ הוא "אינסוף" = מה שמרמז שהבעיה לא חסומה.

3.

מכיוון ש- X_1 לא מוגבל בסימן, נבטא אותו כהפרש שני משתנים חיוביים: $X_1 = X_{11} - X_{12}$
הבעיה תהפוך לצורה הבאה:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 2X_{11} - 2X_{12} - 3X_2 \\ \text{s.t.} \quad & 6X_{11} - 6X_{12} + 3X_2 + s_1 = 12 \\ & -X_{11} + X_{12} + 3X_2 + s_2 = 7 \\ & X_{11}, X_{12}, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

נכניס זאת לטבלת סימפלקס סטנדרטית ונפתור:

Z	$x11$	$x12$	$x2$	$s1$	$s2$	RHS
1	-2(!)	2	3	0	0	0
0	6*	-6	3	1	0	12(>)
0	-1	1	3	0	1	7

השלב הבא:

Z	$x11$	$x12$	$x2$	$s1$	$s2$	RHS
1	0	0	4	0.3333	0	4
0	1	-1	0.5	0.1667	0	2
0	0	0	3.5	0.1667	1	9

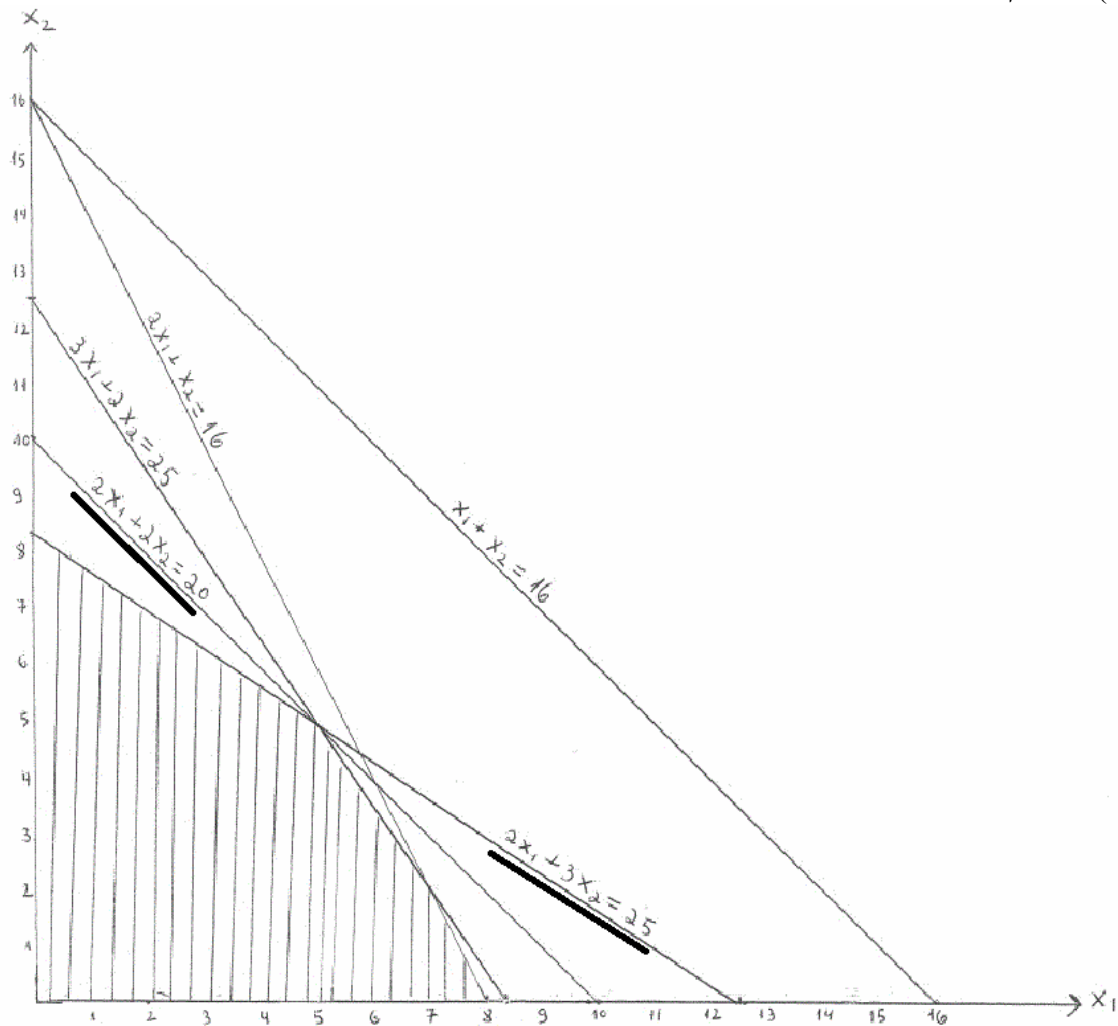
והפתרון האופטימלי: $X_2 = 0$ $X_1 = X_{11} - X_{12} = 2 - 0 = 2$
ערך פונ' המטרה: $Z = 4$.

4.

(א). הבעיה הדואלית:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & W = 16y_1 + 25y_2 + 25y_3 + 16y_4 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 \geq 2 \\ & y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \geq 2 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{aligned}$$

(ב). הפתרון הגרפי של הבעיה הפרימלית:



האיזור האפשרי מקווקו בציר. המקסימום נמצא בנק' (5,5), כלומר: $X_1 = 5, X_2 = 5$
 במפגש קווי האילוצים: $2X_1 + 3X_2 = 25$ ו- $3X_1 + 2X_2 = 25$.
 ערך פונ' המטרה הוא: 20.

(ג). קיבלנו שהאילוץ הראשון והרביעי אינם כובלים ולכן: $y_1 = y_4 = 0$.
 מצאנו בבעיה הפרימלית ש- $x_1, x_2 \neq 0$ לכן האילוצים המתאימים לא מתאפסים ומקבלים את מערכת השוויונים לפתרון:

$$y_2 = y_3 = 2/5 \leq \begin{cases} 3y_2 + 2y_3 = 2 \\ 2y_2 + 3y_3 = 2 \end{cases}$$

וערך פונ' המטרה: 20.

.5

(א). הבעיה הדואלית:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & W = 20y_1 + 12y_2 \\
 \text{s.t.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 5 \\
 & 5y_1 + 3y_2 \geq 7 \\
 & y_2 \geq 4 \\
 & y_1, y_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

(ב). פתרון הבעיה הפרימלית:

הטבלה ההתחלתית:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	1	-5	-7	-4	0	0	0
s_1	0	2	5	0	1	0	20
s_2	0	1	3	1	0	1	12

טבלה #1

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	1	-2.2	0	-4	1.4	0	28
x_2	0	0.4	1	0	0.2	0	4
s_2	0	-0.2	0	1	-0.6	1	0

טבלה #2

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	1	-3	0	0	-1	4	28
x_2	0	0.4	1	0	0.2	0	4
x_3	0	-0.2	0	1	-0.6	1	0

#3 טבלה

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	1	0	7.5	0	0.5	4	58
x_1	0	1	2.5	0	0.5	0	10
x_3	0	0	0.5	1	-0.5	1	2

והפתרון האופטימלי: $x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$
וערך פונ' המטרה: $Z = 58$.

ג). מהטבלה הסופית האופטימלית (שורת פונ' המטרה, בעמודות משתני הסרק) נמצא את הפתרון לבעיה הדואלית: $y_1 = 0.5$, $y_2 = 4$.