<u>שורש של משוואה:</u>

x_0 יקרא שורש של הפונקציה $f(x)$ אם $f(x_0) = 0$.

x_0 יקרא שורש <u>פשוט</u> של הפונקציה $f(x)$ אם $f(x_0) = 0$ ו - $f'(x_0) \neq 0$.

x_0 יקרא שורש <u>מסדר</u> n של הפונקציה אם:

$$\{f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{n-1}(x_0) = 0 \; f^{n}(x_0) \neq 0$$

פתרון משוואות לא לינאריות:

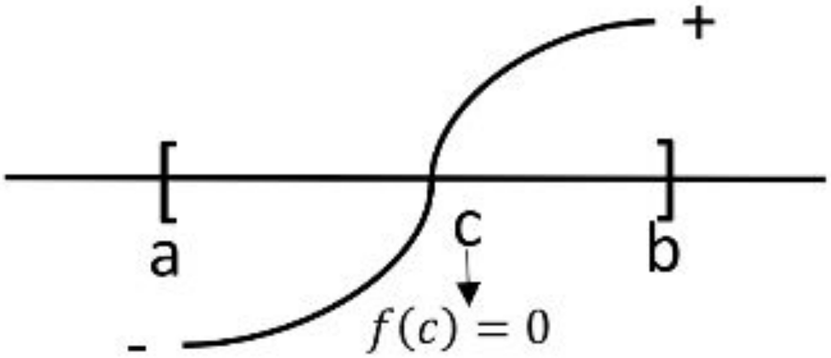
ניקח לדוגמה את הפונקציה: $f(x) = e^{2x} - xcos(x)$. אין דרך אנליטית לחשב את השורש x_0. נשתמש בשיטה איטרטיבית (כלומר, אלגוריתם שנותן קירוב לפתרון בשלב n ומשתמש בקירוב זה למציאת קירוב טוב יותר בשלב ה-$(n+1)$ למציאת השורש.

<u>תזכורת:</u>

<u>משפט ערך הביניים של קושי:</u> תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. אם:

$$f(a) * f(b) < 0$$

אזי קיימת נקודה $c \in [a,b]$ כך ש-$f(c) = 0$, כלומר c שורש של הפונקציה.



שיטת החצייה (bisection)

האלגוריתם:

1) בחרו קטע כלשהו $[x_0, x_1]$ כך ש-$f(x_0) * f(x_1) < 0$.

2) נחשב את $x_2 = \frac{x_0+x_1}{2}$

3) אם $f(x_2) = 0$, סיימנו.

4) אם מתקיים $f(x_0) * f(x_2) < 0$ אז נמשיך עם הקטע $[x_0, x_2]$, אחרת נמשיך עם הקטע $[x_2, x_1]$.

5) נחזור ל – 2.

תנאי עצירה:

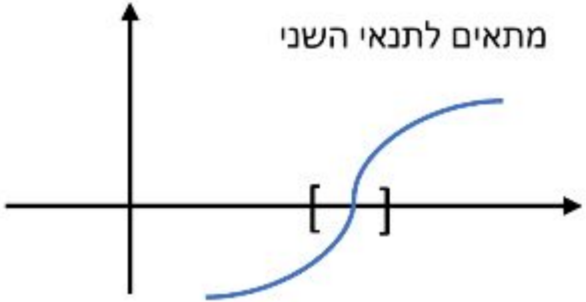
א) $|f(x_2)| < \epsilon$, כלומר הפונקציה קרובה ל-0 עד ערכי ϵ.

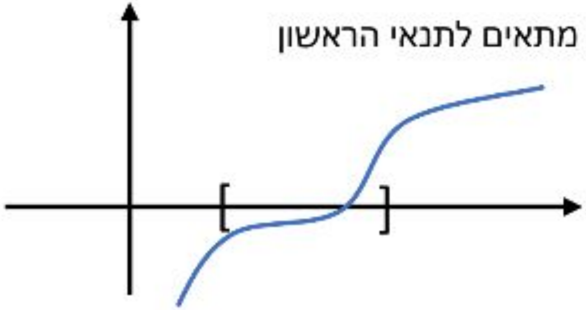
ב) $|x_0 - x_1| < \delta$, כלומר הגענו לקטע קטן מאוד שבתוכו נמצא השורש.

תנאי עצירה:

א) $|f(x_2)| < \epsilon$, כלומר הפונקציה קרובה ל-0 עד ערכי ϵ.

ב) $|x_0 - x_1| < \delta$, כלומר הגענו לקטע קטן מאוד שבתוכו נמצא השורש.





<u>הערה:</u>

נסמן ב–n להיות מספר האיטרציות לקבלת דיוק ϵ נתון. נמצא נוסחה לשם מציאת מספר איטרציות בהינתן ϵ (דיוק):

נסמן ב-L_i את אורך הקטע לאחר האיטרציה ה-i. לכן:

$$L_1 = b - a$$

$$L_2 = \frac{b-a}{2}$$

$$\vdots$$

$$L_{n+1} = \frac{b-a}{2^n} \leq \epsilon$$

$$L_{n+1} = \frac{b-a}{2^n} \leq \epsilon$$

נפעיל $\log_2()$ ונקבל:

$$log_2\left(\frac{b-a}{2^n}\right) \leq log_2 \epsilon$$

$$\Longrightarrow log_2(b-a) - n\underbrace{log_2(2)}_{1} \leq log_2 \epsilon$$

$$\Longrightarrow \boxed{n \geq \log_2\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right)}$$

יתרונות וחסרונות השיטה:

יתרונות: בחירת קטע מתאים תבטיח התכנסות ודאית של השיטה.

חסרונות:

1. התכנסות יחסית איטית (ליניארית).
2. אם נבחר את אחד מהקצוות בקטע קרוב לשורש זה יאט את קצב ההתכנסות.
3. אם הפונקציה משיקה לציר ה-x לא נוכל להשתמש בשיטה.

הערה:

באופן כללי, כיצד נבחר קטע מתאים שבו $f(a) * f(b) < 0$ והפונקציה רציפה:

א) ננחש ונבדוק.

ב) בעזרת $MATLAB$.

דוגמה:

השתמש בשיטת החציה בשביל למצוא קירוב ל-$\sqrt{11}$ כך ש-$|f(x)| < 0.4$.

נבחר את $f(x)$ להיות $f(x) = x^2 - 11$. נשים לב כי:

$$f(3) = 3^2 - 11 = -2 < 0$$
$$f(4) = 4^2 - 11 = 5 > 0$$

ולכן הקטע ההתחלתי הינו $[3,4]$.

נבנה טבלת איטרציות:

$f(c_n)$	b_n	$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	a_n	n = מספר איטרציות
$f(c_1) = 1.25$ $(+)$	$b_1 = 4$	$c_1 = 3.5$	$a_1 = 3$	1
$f(c_2) = -0.4375$ $(-)$	$b_2 = 3.5$	$c_2 = 3.25$	$a_2 = 3$	2
$f(c_3) = 0.39$ $(+)$	$b_3 = 3.5$	$c_3 = 3.375$	$a_3 = 3.25$	3

קיבלנו ש-$|f(c_3)| < 0.4$ ולכן עצרנו את האיטרציה וקיבלנו שהשורש - $x \approx 3.375$.

סדר ושיעור התכנסות

<u>הגדרה:</u> עבור סדרת קרובים $x_1, x_2, \ldots, \xrightarrow[n\to\infty]{} z$ המתכנסים ל-z, אם קיימים $p \geq 1$ ו-$c \neq 0$ כך ש:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z - x_{n+1}|}{|z - x_n|^p} = c$$

אזי p נקרא סדר ההתכנסות ו-c נקרא שיעור ההתכנסות. בין שתי שיטות, זו שיש לה סדר התכנסות גדול יותר תהיה מהירה יותר. במקרה שבו סדר ההתכנסות זהה בשתי השיטות, זו שיש לה שיעור התכנסות נמוך יותר תהיה עדיפה.

<u>עבור שיטת החצייה:</u>

נסמן: $e_n = |z - x_n|, e_{n+1} = |z - x_{n+1}|$. אז לפי ההגדרה לעיל נקבל: $e_{n+1} \le c * (e_n)^p$.

מאחר ובשיטת החצייה מתקיים: $e_{n+1} \le \frac{1}{2} e_n$ נקבל ש: $p = 1, c = \frac{1}{2}$.

לכן, בשיטת החצייה סדר ההתכנסות הוא 1 (ליניארי) ושיעור ההתכנסות הוא $\frac{1}{2}$.

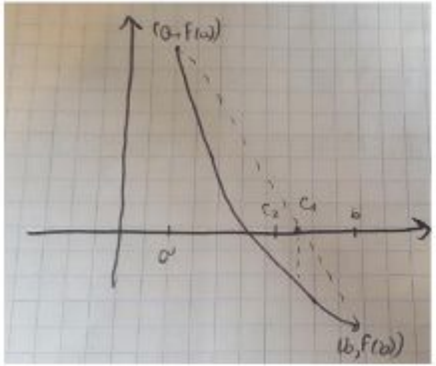
<u>הערה:</u>

פקודה ב-MATLAB לפתרון משוואה לא לינארית:

$$\left[\underbrace{x}_{\text{השורש}}, \underbrace{fval}_{\text{ערך הפונ' בשורש}}, exitflag, \underbrace{output}_{\text{מידע על פתרון המשוואה}}\right] = fzero(\underbrace{f(x)}_{\text{הפונקציה}}, \underbrace{x_0}_{\text{איפה לחפש}}, options)$$

(בנוסף יש פקודה ב-MATLAB שנקראת $fsolve$ שפותרת **<u>מערכת</u>** של משוואות אי לינאריות).

שיטת המיקום השגוי $(Regula - Falsi)$



שיפוע של ישר -

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

משוואות ישר עם שיפוע ונקודה -

$$y - f(b) = m(x - b)$$

$$y - f(b) = m(x - b)$$

הישר חותך את הנקודה $(c, 0)$. ניצב אותה -

$$y = 0 => 0 = f(b) + m(c - b)$$

$$c = b - \frac{f(b)}{m} = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

$$=> c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

השלבים הבאים זהים לאלה של שיטת החצייה.

דוגמה:

נתונה הפונקציה - $y = xsin(x) - 1$ בקטע $[0,2]$.

נבנה טבלת איטרציות –

$f(c_k)$	b_k	$c_k = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	a_k	k = מספר איטרציות
-0.002001 $(-)$	2	1.09975017	0	1
0.00983 $(+)$	2	1.12124074	1.09975017	2
	1.2124074	1.11416120	1.09957017	3

<u>שיטת נקודת שבת</u>

אם $f(x_n) = x_{n+1}$, נקודת שבת של f היא x כך ש - $f(x) = x$.

<u>שאלה</u> - אם x היא נקודת שבת, האם היא יציבה? אם אני מתחיל קרוב ל $x -$, האם הסדרה מתכנסת ל- x?

מטור טיילור -

$$f(x+\epsilon) = \underbrace{\underbrace{f(x)}_{=x}}_{\text{נקודת שבת}} + \epsilon * f'(x) + o(|\epsilon|)$$

$$f(x+\epsilon) \approx x + \epsilon * f'(x)$$

לכן –

$$|f(x+\epsilon) - x| \underbrace{\leq}_{\text{אש"מ הפוך}} |\epsilon| * |f'(x)|$$

אנחנו רואים שכאשר $|f'(x)| < 1$ אזי עבור ϵ מספיק קטן נקבל ש –

$$|f(x+\epsilon) - x| < |\epsilon|$$

כלומר מתקרבים ל $x -$.

$|f'(x)|$ נקרא המכפיל בנקודת השבת של x. אם נסמן - $\lambda = |f'(x)|$ אזי:

- אם $\lambda < 1$ אז נקודת השבת יציבה.
- אם $\lambda > 1$ אז נקודת השבת לא יציבה.
- אם $\lambda = 1$ אז נקודת השבת בעלת יציבות גבולית (יתכן שיהיה יציב ויתכן שלא).
- אם $\lambda = 0$ אז נקודת השבת סופר יציבה (מאוד יציבה).

<u>הבעיה:</u> מחפשים קירוב לפתרון של המשוואה $f(x) = 0$.

<u>השיטה:</u> מוצאים פונקציה $g(x)$ כך שמתקיים - $g(x) = x$ בשורש של f.

<u>אלגוריתם:</u> בשלב ה - n מחשבים את הקירוב $x_{n+1} = g(x_n)$. קיימים משפטים המבטיחים התכנסות של x_n לשורש. הכי שימושי - $|g'(x)| < 1$ בסביבת השורש.

<u>דוגמה:</u>

מצאו נוסחת איטרציה למציאת שורש של $f(x) = x^5 - xe^x + \sin(x)$.

נוסחת איטרציה באופן כללי - $x_{n+1} = g(x_n)$.

נסתכל על המשוואה $f(x) = 0$, כלומר –

$$x^5 - xe^x + \sin(x) = 0$$

$$x(x^4 - e^x) = -\sin(x)$$

$$x = \frac{\sin(x)}{e^x - x^4}$$

נסמן - $g(x) = \frac{\sin(x)}{e^x - x^4}$. לפי הנ"ל $f(x) = 0 <=> g(x) = x$.

ידוע שהפתרון נמצא בסביבה של 0. לכן נחשב את הנגזרת של g בסביבה זו ונראה ש - $|g'(x)| < 1$ סביב 0.

לכן - $x_{n+1} = g(x_n)$ תתכנס לשורש של f אם נבחר x_0 <u>בסביבה מספיק קטנה</u> של השורש.

<u>תרגיל:</u>

נתונה הפונקציה $f(x) = x + ln(x)$. ידוע שיש לה שורש בסביבת 0.5. מצאו נוסחת איטרציה מתכנסת.

<u>פתרון:</u>

<u>ניסיון 1</u> -

$$x_{n+1} = -\ln(x_n)$$

$$g(x) = -\ln(x)$$

האם יש התכנסות?

$$g'(x) = -\frac{1}{x}$$

$$=> |g'(0.5)| = 2$$

g' רציפה בסביבת 0.5 ולכן בסביבת 0.5 - $|g'(x)| \approx 2$. לכן $|g'(x)| > 1$ ולפי המשפט האיטרציה לא מתכנסת.

<u>ניסיון 2</u> -

$$x + \ln(x) = 0$$

$$-x = \ln(x) \quad /e^\wedge$$

$$e^{-x} = x$$

הנוסחה - $x_{n+1} = e^{-x_n}$.

$$=> g(x) = e^{-x}$$

$$g'(x) = -e^{-x}$$

$$=> |g'(0.5)| = e^{-0.5} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.6$$

g' רציפה ולכן בסביבת 0.5 מתקיים - $|g'| < 1$ ולכן האיטרציה מתכנסת.

<u>ניסיון 3</u> –

$$x + \ln(x) = 0$$

$$-x = \ln(x) \quad /e^\wedge$$

$$e^{-x} = x \quad /+x$$

$$e^{-x} + x = x + x = 2x \quad /:2$$

$$\frac{e^{-x} + x}{2} = x$$

ולכן –

$$g(x) = \frac{e^{-x} + x}{2}$$

$$x_{n+1} = \frac{e^{-x_n} + x_n}{2}$$

$$=> g'(0.5) \approx 0.2$$

ולכן האיטרציה מתכנסת.

<u>הערה:</u>

נשים לב שככל ש – $|g'|$ קטנה יותר , כך השיטה מתכנסת מהר יותר.

לכן מהתרגיל הקודם ניתן לומר <u>ששיטה 3 עדיפה על שיטה 2.</u>

משפט: תהי $x_{n+1} = g(x_n)$ נוסחה איטרטיבית שמתכנסת ל – z ומתקיים $g(z) = z$, כך ש- $g(x)$ גזירה p פעמים בסביבה של z ו -

$$\begin{cases} g'(z) = g''(z) = \cdots = g^{(p-1)}(z) = 0 \\ g^{(p)}(z) \neq 0 \end{cases}$$

אזי עבור x_0 קרוב ל – z, סדר ההתכנסות של השיטה הוא p, וקבוע ההתכנסות:

$$c = \frac{\left|g^{(p)}(z)\right|}{p!}$$

<u>תרגיל:</u>

נתונה הפונקציה - $f(x) = x^3 + 2x - 3$.

<u>סעיף א'</u> -

מצא איטרציה שמתכנסת עברו השורש 1, ומצא את סדר וקצב ההתכנסות.

<u>פתרון:</u>

$$x^3 + 2x - 3 = 0$$

$$2x = 3 - x^3$$

$$x = \frac{3 - x^3}{2}$$

נגדיר - $g(x) = \frac{3-x^3}{2}$.

$$=> g'(x) = -\frac{3x^2}{2}$$

$$|g'(1)| = \left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2} > 1$$

לכן קיבלנו ש - $(g'(z) = 0)$ $p = 1$ ובנוסף –

$$c = \frac{g'(z)}{1} = \frac{3}{2} > 1$$

והשיטה מתבדרת.

כעת, ננסה למצוא שיטה מתכנסת –

$$x(x^2+2)=3 => x=\frac{3}{x^2+2}$$

$$=> g(x)=\frac{3}{x^2+2}$$

$$g'(x)=3*\frac{-2x}{x^2+2} => g'(1)=-\frac{2}{3}$$

מכאן נקבל שהשיטה אכן מתכנסת ובנוסף –

$$p=1\,,c=\frac{2}{3}$$

התכנסות לינארית.

<u>סעיף ב'</u> –

מצא את הסדר לקצב לאותה פונקציה עבור משוואת האיטרציה הבאה:

$$\varphi(z) = \frac{2x^3 + 3}{3x^2 + 2}$$

<u>פתרון:</u>

$$\varphi'(x) = \frac{6x^2(3x^2 + 2) - 6x(2x^3 + 3)}{(3x^2 + 2)^2} = \frac{6x^4 + 12x^2 - 18x}{(3x^2 + 2)^2}$$

נציב - $x = 1$:

$$\varphi'(1) = 0$$

ולכן נגזור שוב את הפונקציה –

$$\varphi''(x) = \frac{(24x^3 + 24x - 18)(3x^2 + 2)^2 - 2 * 6x * (3x^2 + 2)(6x^4 + 12x^2 - 18x)}{(3x^2 + 2)^4}$$

ולכן נגזור שוב את הפונקציה –

$$\varphi''(x) = \frac{(24x^3 + 24x - 18)(3x^2 + 2)^2 - 2 * 6x * (3x^2 + 2)(6x^4 + 12x^2 - 18x)}{(3x^2 + 2)^4}$$

ונציב שוב -

$$\varphi''(1) = \frac{30}{25}$$

ולכן –

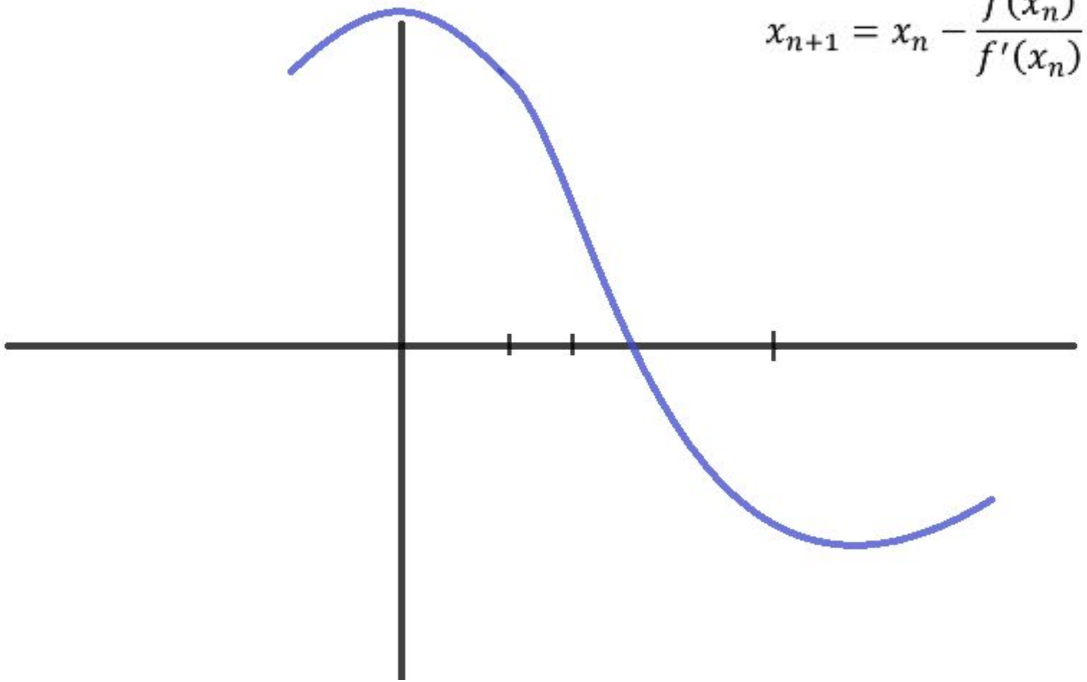
$$p = 2$$

$$c = \frac{|\varphi''(1)|}{2!} = \frac{30}{25 * 2} = \frac{3}{5}$$

שיטת ניוטון-רפסון $(Newton - Raphson)$

נוסחת איטרציה –

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



<u>נראה איך הגענו לנוסחה זו:</u>

בחרנו את x_n:

$m = f'(x_n)$ שיפוע המשיק

משוואת המשיק –

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

נמצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה – x, כלומר $y = 0$:

$$0 - f(x_n) = f'(x_n) * \underbrace{x}_{\substack{x_{n+1} \\ \text{נקודה חדשה}}} - f'(x_n) * x_n$$

$$=> x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

דוגמה:

נפתור את המשוואה הבאה:

$$f(x) = x + \ln(x) = 0$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = 0$$

טיפ: בהינתן משוואה לא לינארית יש למצוא את הקטע שבו נמצא השורש (לבצע 2-3 איטרציות בשיטה פשוטה כלשהי, לדוגמה שיטת ה – $bisection$).

נבחר $x_0 = 1.075$ –

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.075 - \frac{1.075 + \ln(1.075)}{1 + \frac{1}{1.075}} = 0.4806$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.4806 - \frac{0.4806 + \ln(0.8046)}{1 + \frac{1}{0.4806}} = 0.56245$$

אם באיטרציה הבאה הספרה ה-4 לא השתנתה ,כלומר 0.5624 , אז זה השורש.

$$x_{n+1} = \underbrace{x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}}$$

כלומר, שיטת ניוטון- רפסון היא מקרה פרטי של שיטת נקודת שבת $(fixed\ point)$ –

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

תזכורת

קצב וסדר התכנסות –

$$\underbrace{p}_{\text{סדר התכנסות}}$$

$$\underbrace{c}_{\text{קצב התכנסות}} = \frac{\left|\varphi^{(p)}(x_0)\right|}{p!} \quad ,\varphi^{(p)}(x_0) \neq 0$$

<u>שיטות למציאת שורש מרובה</u>

<u>הגדרה:</u> x_0 נקרא שורש מרובה מסדר m של הפונקציה $f(x)$ אם –

$$f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$$

אבל – $f^{(m)}(x_0) \neq 0$.

<u>שיטת $N.R$ (משופרת)</u>

<u>שיטה 1 (ידוע הריבוי של השורש):</u>

אם ידוע הריבוי של השורש אז במקום שיטת ניוטון-רפסון הרגילה נקבל נוסחה איטרטיבית (ניוטון-רפסון המשופרת) באופן הבא:

$$x_{n+1} = x_n - k * \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

כאשר k זה הריבוי של השורש. סדר ההתכנסות של שיטת ניוטון-רפסון המשופרת כאשר ידוע הריבוי (k) הוא **<u>2</u>**.

הערה:

- אם x_0 הוא שורש מרובה והשתמשתי $N.R$ <u>הרגיל</u> אז סדר ההתכנסות הוא 1.
- מעבר משיטת ניוטון-רפסון המשופרת לרגילה –

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

כאשר x_0 שורש מריבוי k של f.

אם נגדיר –

$$g(x) = \left(f(x)\right)^{\frac{1}{k}}$$

נקבל ש - x_0 שורש מריבוי 1 של g.

שיטה 2 (**לא** ידוע הריבוי של השורש):

נתון x_0 שורש מריבוי $k > 1$ (לא ידוע).

נגדיר - $h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ ואז ל- h יש שורש <u>פשוט</u>.

כעת , נשתמש בשיטת ניוטון-רפסון הרגילה עבור הפונקציה - $h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$:

$$\varphi(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)} = x - \frac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{\frac{\left(f'(x)\right)^2 - f(x) * f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}} = x - \frac{f(x) * f'(x)}{\left(f'(x)\right)^2 - f(x) * f''(x)}$$

ולכן –

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x) * f'(x)}{\left(f'(x)\right)^2 - f(x) * f''(x)}$$

<u>הערה:</u>

שיטה 2 -

<u>חסרון:</u> צריך לחשב את $f''(x)$.

<u>יתרון:</u> לא צריך לדעת את הריבוי של השורש.

שיטה 1 –

<u>חסרון:</u> שיטה זאת ניתן להפעיל רק כאשר ידוע הריבוי של השורש (k).

<u>יתרון:</u> ביצוע השיטה לא יותר קשה מ - $N.R$ הרגיל.

<u>תרגיל:</u>

נתונה הפונקציה - $f(x) = e^x - x - 1$.

א) הראה שיש ל- f שורש מרובה מסדר שני בנקודה x_0.

ב) הראה ששיטת $N.R$ המקורית מכנסת לאט יותר משיטת ניוטון-רפסון המשופרת (במקרה של שורש מרובה) עד שגיאה מוחלטת של $|x_n - p| < 10^{-5}$.

<u>פתרון:</u>

א) נמצא תחילה שורש של f:

נשים לב כי –

$$f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$$

ולכן $x = 0$ שורש של f. כעת נבדוק האם הוא שורש מרובה –

$$f'(x) = e^x - 1 => f'(0) = e^0 - 1 = 0$$

$$f''(x) = e^x => f(0) = e^0 = 1 \neq 0$$

ולכן $x = 0$ שורש מרובה מסדר 2.

ב) ניזכר בנוסחאות האיטרציה עבור כל שיטה –

$$N.R \text{ רגילה} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$N.R \text{ משופרת} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - k * \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ונציב את הנתונים שלנו –

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{e^{x_n} - x_n - 1}{e^{x_n} - 1} \quad , \text{ רגילה} \\ x_{n+1} = x_n - 2 * \dfrac{e^{x_n} - x_n - 1}{e^{x_n} - 1} \quad , \text{ משופרת} \end{cases}$$

נבצע כמה איטרציות בכל שיטה עבור ניחוש התחלתי של $x_0 = 1$ -

ניוטון רפסון הרגילה:

$$x_1 = x_0 - \frac{e^{x_0} - x_0 - 1}{e^{x_0} - 1} = 1 - \frac{e^1 - 1 - 1}{e^1 - 1} = 0.58198$$

$$x_2 = x_1 - \frac{e^{x_1} - x_1 - 1}{e^{x_1} - 1} = 0.589198 - \frac{e^{0.58198} - 0.58198 - 1}{e^{0.58198} - 1} = 0.31906$$

ניוטון-רפסון המשופרת:

$$x_1 = x_0 - 2 * \frac{e^{x_0} - x_0 - 1}{e^{x_0} - 1} = 1 - 2 * \frac{e^1 - 2}{e^1 - 1} = 0.1639$$

$$x_2 = x_1 - 2 * \frac{e^{x_1} - x_1 - 1}{e^{x_1} - 1} = 0.1639 - \frac{e^{0.1639} - 0.1639 - 1}{e^{0.1639} - 1} = 4.4 * 10^{-3}$$

נסכם את הכול ונבנה טבלת איטרציות עבור שתי השיטות –

n = מספר איטרציות	$N.R$ רגילה	$N.R$ משופרת
0	1	1
1	0.58198	0.1639
2	0.31906	$4.4 * 10^{-3}$
3	0.17	$\boxed{3.34 * 10^{-6}}$
4	0.09	
....	....	
16	$\boxed{1.91 * 10^{-6}}$	

<u>תרגיל:</u>

נתונה הפונקציה - $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. חשב את הפתרונות של $f(x) = 0$ ודון בסדר ההתכנסות של שיטת $N.R$ <u>עבור כל השורשים</u>.

פתרון:

נשים לב כי $x=-1$ פותר את המשוואה ולכן ניתן לרשום את $f(x)$ כך -

$$f(x)=(x+1)(x^2+2x-2)$$

$$=>\ x_2,x_3=\frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{2}=>x_2=-2.732\,,x_3=0.732$$

נציב בנוסחה האיטרטיבית של ניוטון-רפסון את הפונקציה שלנו –

$$\varphi(x)=x-\frac{x^3+3x^2-2}{3x^2+6x}$$

כעת אנו רוצים למצוא את סדר ההתכנסות של שלושת השורשים. ניזכר כי שיטת ניוטון-רפסון אכן שיטת נקודת שבת ולכן נוכל להשתמש במשפט הבא -

אם $\varphi(x)$ פונקציית נקודת השבת אז לשורש x_0 יש סדר התכנסות p אם –

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x_0) = 0 \\ \varphi^{(p)}(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

<u>נחזור לתרגיל שלנו -</u>

נגזור את φ ונבדוק מתי השורשים אינם מאפסים אותה –

$$\varphi'(x) = \cdots = (6x+6) * \frac{x^3+3x^2-2}{(3x^2+6x)^2}$$

ונציב –

$$\varphi(x_1 = -1) = 0$$

$$\varphi(x_2 = -2.732) = 0$$

$$\varphi(x_3 = 0.732) = 0$$

ולכן נגזור שוב –

$$\varphi''(x) = \cdots = \frac{4(x+1)(x^2+2x+4)}{3x^3(x+2)^3}$$

ונציב –

$$\varphi^{''}(-1) = 0$$

$$\varphi^{''}(-2.732) = 1.732 \neq 0$$

$$\varphi^{''}(0.732) = -1.732 \neq 0$$

ולכן סדר ההתכנסות של x_2, x_3 הוא 2.

וכעת נגזור בשלישית –

$$\varphi^{(3)}(x) = \cdots = \frac{-4(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 48)}{x^4(x+2)^4}$$

ונציב –

$$\varphi(-1) = -4 \neq 0$$

ולכן סדר ההתכנסות של $x_1 = -1$ הוא 3.