Kombinatorische Optimierung Blatt 7

A15	A16	Σ	P7
6/6	5/8	11/14	0/12

Franziska Becker 951206
Tobias Loske 963067
Andrea Krusenbaum 964188

P7 fehlt!

Aufgabe 15

1

Chromosom => $\Pi = (x_1, .., x_n)$ mit $x_i \in \{1, .., n^2\}$ wobei $x_i \neq x_j \; \forall \; i \neq j$
Hierbei bezeichnen die verschiedenen x_i ein Feld auf dem Spielfeld, welches zeilenweise von 1 bis n^2 durchnummeriert ist.
Beispiel für $n = 3$

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Wenn ich euch richtig verstehe habt ihr den Lösungsraum $\binom{n^2}{n}$

Chromosom-Möglichkeiten => ~~(Anzahl n elementiger Teilmengen)~~ $\frac{(n^2)!}{(n^2-n)!}$ $\cancel{n!}$ $\cancel{\tfrac{1}{2}}$

Crossover => Für diese Variante lassen sich sowohl das One-Point Crossover als auch das Two-Point Crossover für reihenfolgebasierten Probleme anwenden. Beispiel für $n=3$ und $n=4$

$$\Pi_m = (\underbrace{1,2}, 3) \text{ und } \Pi_f = (7, 5, 3)$$
$$\hookrightarrow \Pi_c = (1, 2, 7)$$

$$\Pi_m = (1, \underbrace{2, 3}, 4) \text{ und } \Pi_f = (1, 6, 11, 16)$$
$$\hookrightarrow \Pi_c = (1, 2, 3, 6)$$ ✓

Mutationen => Um eine Lösung zu mutieren, kann der Wert eines x_i verändert werden, solange der neue Wert noch nicht in der Lösung vorkommt. ✓

Fitness => Die Fitness einer Lösung ergibt sich aus der Anzahl an Damen die jede einzelne Dame schlagen kann. Folglich ein geringer Fitnesswert, dass die Lösung besser ist. Außerdem sind nur Lösungen mit einer Fitness von 0 zulässig. ✓
Berechnung:

$$\text{Fitness}(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \text{schlagen}(x_i)$$

$$\text{schlagen}(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} h(x_i, x_j) + v(x_i, x_j) + d(x_i, x_j)$$

$$h(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 & |x_j - x_i| < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$v(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 & x_i \% n = x_j \% n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$d(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 & x_i \% (|x_j - x_i|) = x_j \% (|x_j - x_i|) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ ✓

②

Chromosom ⇒ $\Pi = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in \{1, \ldots, n\}$ wobei $x_i \neq x_j \; \forall i \neq j$
wobei x_1 die Position in Reihe 1 ist, also $x_a = b$ Zeile a u. Spalte b.

Chromosom-Möglichkeiten ⇒ $n!$ ✓

Crossover ⇒ Analog zu Variante 1. ✓

Mutation ⇒ Um eine Lösung zu mutieren, können die Werte zwei verschiedener x_i getauscht werden. ✓

Fitness ⇒ Die Fitness einer Lösung ergibt sich aus der Summe der Damen, die eine Dame schlagen kann, über alle Damen summiert. Folglich ist ein geringer Fitnesswert besser und nur eine Lösung mit einem Fitnesswert von 0 zulässig. ✓
Berechnung:

$$\text{fitness}(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \text{schlagen}(x_i)$$

$$\text{schlagen}(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \cancel{h(x_i, x_j) + v(x_i, x_j))} \; d(x_i, x_j)$$

$$d(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 & |x_j - x_i| = |j - i| \\ 0 & \end{cases}$$ ✓

<u>Bewertung</u> (erst Variante 1, dann 2)

PRO	KONTRA
einfach	erlaubt unzulässige Lösungen Fitness ist aufwendig zu berechnen doppelte Möglichkeiten ((1,2,3) ⇔ (3,1,2))

1

PRO	KONTRA
einfach weniger Möglichk. keine doppelten	erlaubt unzulässige Lösungen Fitness ist aufwendig zu berechnen (aber besser als Variante 1)

2

Variante 2 bietet gegenüber Variante 1 den Vorteil, dass die Constraints über horizontales und vertikales Schlagen durch die Variablenbelegung automatisch eingehalten wird.
Außerdem werden keine doppelten Lösungen betrachtet und es gibt insgesamt weniger (unzulässige) Lösungsmöglichkeiten. ✓

Aufgabe 16

a)

i	1	2
c_i	$t+1$	t
w_i	t	1

$W = t$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{c(S_H)}{c(S_{opt})} = \lim_{t\to\infty} \frac{t+1}{t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{1+\frac{1}{t}}{t} = 0$$ ✓

b)

$$c(S_H) \geq c_1 x_1 = c_1 \left\lfloor \frac{W}{w_1} \right\rfloor$$

$$c(S_{OPT}) \leq \frac{c_1}{w_1} W \leq c_1 \left(\left\lfloor \frac{W}{w_1} \right\rfloor + 1 \right)$$

$$\leq c_1 \left[\left\lfloor \frac{W}{w_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{W}{w_1} \right\rfloor \right)$$

$$\leq 2 c_1 \left\lfloor \frac{W}{w_1} \right\rfloor \leq 2 c(S_H)$$

$$\Rightarrow \frac{c(S_H)}{c(S_{OPT})} \geq \frac{1}{2}$$ ✓

Beispiel für Instanz, bei der $\frac{c(S_H)}{c(S_{OPT})}$ beliebig nahe bei $\frac{1}{2}$ liegt, fehlt.

-3

$\Rightarrow$ $\frac{5}{8}$