2020年全国硕士研究生招生考试

数 学 （一）

（科目代码:301）

一、选择题(1 ～ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母写在题后的括号内.)

(1) 当 $x \to 0^+$ 时,下列无穷小量中最高阶的是(　　).

(A) $\int_0^x (e^{t^2}-1)\,dt$　　(B) $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})\,dt$

(C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2\,dt$　　(D) $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,dt$

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义,且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$,则(　　).

(A) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

(B) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

(C) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$

(D) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

(3) 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微,$f(0,0)=0$,$\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)\Bigg|_{(0,0)}$,非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直,则(　　).

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

(B) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{\alpha}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

(D) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{\alpha}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

4) 设 R 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径，r 是实数，则(　　).

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时，$|r| \geqslant R$　　(B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛时，$|r| \leqslant R$

(C) 当 $|r| \geqslant R$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散　　(D) 当 $|r| \leqslant R$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛

5) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等列变换化成 $\boldsymbol{B}$，则(　　).

(A) 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$

(B) 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}$

(C) 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{A}$

(D) 方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解

6) 已知直线 L_1：$\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 L_2：$\dfrac{x-a_3}{a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点，

记向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}$，$i=1,2,3$，则(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

(C) $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

7) 设 A,B,C 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，

$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{12}$，则 A,B,C 中恰有一个事件发生的概率为(　　).

(A) $\dfrac{3}{4}$　　(B) $\dfrac{2}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{5}{12}$

8) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其中 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}$，$\Phi(x)$

表示标准正态分布函数，利用中心极限定理可得 $P\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leqslant 55\}$ 的近似值为(　　).

(A) $1-\Phi(1)$　　(B) $\Phi(1)$　　(C) $1-\Phi(0.2)$　　(D) $\Phi(0.2)$

二、填空题(9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在题中的横线上.)

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=$________.

10) 设 $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1}, \\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}), \end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$________.

11) 设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0(a>0)$，且 $f(0)=m$，$f'(0)=n$，则 $\int_0^{+\infty} f(x)dx=$________.

12) 设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy} e^{xt^2}dt$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$________.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$ ________.

(14) 设 X 服从区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布，$Y = \sin X$，则 $\mathrm{Cov}(X, Y) =$ ________.

三、解答题(15 ～ 23 **小题，共** 94 **分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**)

(15)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值.

(16)(本题满分 10 分)

计算曲线积分 $I = \int_L \frac{4x - y}{4x^2 + y^2} \mathrm{d}x + \frac{x + y}{4x^2 + y^2} \mathrm{d}y$，其中 L 是 $x^2 + y^2 = 2$，方向为逆时针方向.

(17)(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1 = 1$，$(n+1)a_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)a_n$，证明：当 $|x| < 1$ 时，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，并求其和函数.

(18)(本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4)$ 的下侧，$f(x)$ 是连续函数，计算

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y] \mathrm{d}y \mathrm{d}z + [yf(xy) + 2y + x] \mathrm{d}z \mathrm{d}x + [zf(xy) + z] \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数，$f(0) = f(2) = 0$，$M = \max\limits_{x \in [0,2]} \{|f(x)|\}$，证明：

(Ⅰ) 存在 $\xi \in (0,2)$，使得 $|f'(\xi)| \geqslant M$；

(Ⅱ) 若对任意的 $x \in (0,2)$，$|f'(x)| \leqslant M$，则 $M = 0$.

(20)（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\geqslant b$.

（Ⅰ）求 a,b 的值；

（Ⅱ）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

(21)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

（Ⅰ）证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵；

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

(22)（本题满分 11 分）

设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\dfrac{1}{2}$. $Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$.

（Ⅰ）求二维随机变量 (X_1,Y) 的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示；

（Ⅱ）证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

(23)（本题满分 11 分）

设某元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ,m 为参数且大于零.

（Ⅰ）求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t\mid T>s\}$，其中 $s>0,t>0$；

（Ⅱ）任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，若 m 已知，求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.