2019 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 当 $x \to 0$ 时,若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k =$ (　　)

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leqslant 0, \\ x\ln x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的(　　)

(A) 可导点,极值点.　　(B) 不可导点,极值点.

(C) 可导点,非极值点.　　(D) 不可导点,非极值点.

(3) 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列,则下列级数中收敛的是(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{u_n}$.　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$.

(4) 设函数 $Q(x,y) = \frac{x}{y^2}$. 如果对上半平面 $(y > 0)$ 内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$,那么函数 $P(x,y)$ 可取为(　　)

(A) $y - \frac{x^2}{y^3}$.　　(B) $\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^3}$.　　(C) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.　　(D) $x - \frac{1}{y}$.

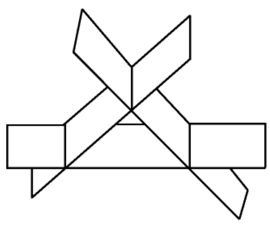
(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{E}$,且 $|\boldsymbol{A}| = 4$,则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为(　　)

(A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.　　(B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

(C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.　　(D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

(6) 如图所示,有 3 张平面两两相交,交线相互平行,它们的方程

$$a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = d_i (i = 1, 2, 3)$$



组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $\boldsymbol{A}$, $\overline{\boldsymbol{A}}$, 则(　　)

(A) $r(\boldsymbol{A}) = 2$, $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$.

(B) $r(\boldsymbol{A}) = 2$, $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$.

(C) $r(\boldsymbol{A}) = 1$, $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 2$.

(D) $r(\boldsymbol{A}) = 1$, $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 1$.

(7) 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是(　　)

(A) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.　　(B) $P(AB) = P(A)P(B)$.

(C) $P(A\overline{B}) = P(B\overline{A})$.　　(D) $P(AB) = P(\overline{A}\,\overline{B})$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\}$ (　　)

(A) 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关.　　(B) 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关.

(C) 与 μ, σ^2 都有关.　　(D) 与 μ, σ^2 都无关.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 设函数$f(u)$可导, $z=f(\sin y-\sin x)+xy$, 则$\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$______.

(10) 微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解 $y=$______.

(11) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在$(0,+\infty)$内的和函数 $S(x)=$______.

(12) 设 Σ 设为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4(z\geqslant 0)$ 的上侧, 则$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

(13) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为 3 阶矩阵. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为______.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数, $E(X)$ 为 X 的数学期望, 则 $P\{F(X)>E(X)-1\}=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

(Ⅰ) 求 $y(x)$;

(Ⅱ) 求曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

(16)(本题满分 10 分)

设 a,b 为实数, 函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点$(3,4)$处的方向导数中, 沿方向 $\boldsymbol{l}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大, 最大值为 10.

(Ⅰ) 求 a,b;

(Ⅱ) 求曲面 $z=2+ax^2+by^2(z\geqslant 0)$ 的面积.

(17)(本题满分 10 分)

求曲线 $y = e^{-x}\sin x(x \geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

(18)(本题满分 10 分)

设 $a_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1 - x^2}dx(n = 0, 1, 2, \cdots)$.

(Ⅰ)证明数列$\{a_n\}$单调递减,且 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n = 2, 3, \cdots)$;

(Ⅱ)求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

(19)(本题满分 10 分)

设 Ω 是由锥面 $x^2 + (y - z)^2 = (1 - z)^2(0 \leqslant z \leqslant 1)$ 与平面 $z = 0$ 围成的锥体,求 Ω 的形心坐标.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, 1)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 3, 2)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, a, 3)^T$为$\mathbf{R}^3$的一个基,$\boldsymbol{\beta} = (1, 1, 1)^T$在这个基下的坐标为$(b, c, 1)^T$.

(Ⅰ)求 a,b,c;

(Ⅱ)证明 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbf{R}^3$的一个基,并求 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的过渡矩阵.

（21）（本题满分 11 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{pmatrix}$ 相似.

（Ⅰ）求 x,y；

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p$，$P\{Y=1\}=1-p(0<p<1)$. 令 $Z=XY$.

（Ⅰ）求 Z 的概率密度；

（Ⅱ）p 为何值时，X 与 Z 不相关；

（Ⅲ）X 与 Z 是否相互独立？

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

其中 μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

（Ⅰ）求 A；

（Ⅱ）求 σ^2 的最大似然估计量.