1998 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ______.

(2) 设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$, f,φ 具有二阶连续导数,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ______.

(3) 设 l 为椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,其周长记为 a,则$\oint_l(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$ ______.

(4) 设$\boldsymbol{A}$为 n 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ,则 $(\boldsymbol{A}^*)^2+\boldsymbol{E}$ 必有特征值______.

(5) 设平面区域 D 由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 及直线 $y=0, x=1, x=\mathrm{e}^2$ 所围成,二维随机变量(X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布,则(X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设$f(x)$ 连续,则$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$ ( )

(A) $xf(x^2)$. (B) $-xf(x^2)$. (C) $2xf(x^2)$. (D) $-2xf(x^2)$.

(2) 函数$f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$不可导点的个数是( )

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

(3) 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$,且当 $\Delta x\to 0$ 时, α 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0)=\pi$,则 $y(1)$ 等于( )

(A) 2π. (B) π. (C) $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$. (D) $\pi\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.

(4) 设矩阵$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$是满秩的,则直线$\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$与直线$\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$( )

(A) 相交于一点. (B) 重合. (C) 平行但不重合. (D) 异面.

(5) 设 A,B 是两个随机事件,且 $0<P(A)<1, P(B)>0, P(B|A)=P(B|\bar{A})$,则必有( )

(A) $P(A|B)=P(\bar{A}|B)$. (B) $P(A|B)\neq P(\bar{A}|B)$.

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$. (D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$.

三、(本题满分 5 分)

求直线 $l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程,并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

四、(本题满分 6 分)

确定常数 λ,使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度,并求 $u(x,y)$.

五、(本题满分 6 分)

从船上向海中沉放某种探测器,按探测要求,需确定仪器的下沉深度 y(从海平面算起)与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下,从海平面由静止开始铅直下沉,在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为 m,体积为 B,海水比重为 ρ,仪器所受的阻力与下沉速度成正比,比例系数为 $k(k>0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程,并求出函数关系式 $y=y(v)$.

六、(本题满分 7 分)

计算 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$,其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧,a 为大于零的常数.

七、(本题满分 6 分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

八、(本题满分 5 分)

设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,试问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛?并说明理由.

九、(本题满分 6 分)

设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在 $x_0\in(0,1)$,使得在区间 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积,等于在区间 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的梯形面积.

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导,且 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$,证明(1)中的 x_0 是唯一的.

十、(本题满分 6 分)

已知二次曲面方程 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可以经过正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$$

化为椭圆柱面方程 $\eta^2+4\zeta^2=4$,求 a,b 的值和正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

十一、(本题满分 4 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,若存在正整数 k,使线性方程组 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有解向量 $\boldsymbol{\alpha}$,且 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$. 证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 是线性无关的.

十二、(本题满分 5 分)

已知线性方程组

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0,\\ \qquad\qquad\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0\end{cases}
$$

的一个基础解系为$(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n})^{\mathrm{T}},(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2,2n})^{\mathrm{T}},\cdots,(b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n})^{\mathrm{T}}$. 试写出线性方程组

$$
(\mathrm{II})\begin{cases}b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0,\\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0,\\ \qquad\qquad\cdots\cdots\\ b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0\end{cases}
$$

的通解,并说明理由.

十三、(本题满分 6 分)

设两个随机变量 X,Y 相互独立,且都服从均值为 0,方差为$\frac{1}{2}$的正态分布,求随机变量 $|X-Y|$ 的方差.

十四、(本题满分 4 分)

从正态总体 $N(3.4,6^2)$ 中抽取容量为 n 的样本,如果要求其样本均值位于区间(1.4,5.4)内的概率不小于 0.95,问样本容量 n 至少应取多大?

附表:标准正态分布表 $\qquad \Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$

z	1.28	1.645	1.96	2.33
$\Phi(z)$	0.900	0.950	0.975	0.990

十五、(本题满分 4 分)

设某次考试的考生成绩服从正态分布,从中随机地抽取36位考生的成绩,算得平均成绩为66.5分,标准差为 15 分. 问在显著性水平 0.05 下,是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分?并给出检验过程.

附表:t 分布表 $\qquad P\{t(n)\leqslant t_p(n)\}=p$

p / $t_p(n)$ / n	0.95	0.975
35	1.6896	2.0301
36	1.6883	2.0281