2001 年数学(一) 真题解析

一、填空题

(1)【答案】 $y''-2y'+2y=0$.

【解】 由通解形式得二阶常系数齐次线性微分方程的特征值为 $\lambda_{1,2}=1\pm i$,

特征方程为$(\lambda-1-i)(\lambda-1+i)=0$,即 $\lambda^2-2\lambda+2=0$.

故微分方程为 $y''-2y'+2y=0$.

(2)【答案】 $\frac{2}{3}$.

【解】 $\mathbf{grad}\ r=\left\{\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial r}{\partial y},\frac{\partial r}{\partial z}\right\}=\left\{\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right\}$,

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad}\ r)=\frac{r-\frac{x^2}{r}}{r^2}+\frac{r-\frac{y^2}{r}}{r^2}+\frac{r-\frac{z^2}{r}}{r^2}=\frac{2}{r},$$

于是 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\ r)\big|_{(1,-2,2)}=\frac{2}{3}$.

(3)【答案】 $-\int_1^2\mathrm{d}x\int_{1-x}^0 f(x,y)\mathrm{d}y$.

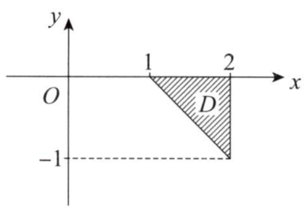
【解】 $\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_2^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=-\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{1-y}^2 f(x,y)\mathrm{d}x$,

如图所示,将 $D=\{(x,y)\mid 1-y\leqslant x\leqslant 2,-1\leqslant y\leqslant 0\}$ 表示成 X 型区域为

$$D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,1-x\leqslant y\leqslant 0\},$$

故$\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_2^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x$ 改变积分次序为

$$\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_2^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=-\int_1^2\mathrm{d}x\int_{1-x}^0 f(x,y)\mathrm{d}y.$$



一(3) 题图

(4)【答案】 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})$.

【解】 由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,得$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$.

于是$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$,由逆矩阵的定义得$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})$.

(5)【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解】 由切比雪夫不等式得

$$P\{|X-E(X)|\geqslant 2\}\leqslant\frac{D(X)}{2^2}=\frac{1}{2}.$$

二、选择题

(6)【答案】 (D).

【解】 当 $x<0$ 时,由 $f(x)$ 单调增加,得 $f'(x)\geqslant 0$,则(A),(C) 不对;

在 $x=0$ 的右邻域内,由 $f(x)$ 单调增加,得 $f'(x)\geqslant 0$,则(B) 不对,应选(D).

(7)【答案】 (C).

【解】 因为函数可偏导不一定可微,所以(A)不对;

曲线$\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$在$(0,0,f(0,0))$处的切向量为

$$\boldsymbol{T}=\left\{\begin{vmatrix} -f'_y & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & -f'_x \\ 0 & 0 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -f'_x & -f'_y \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right\}_{(0,0)}=\{-1,0,-f'_x\}_{(0,0)}=\{-1,0,-3\},$$

于是曲线$\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$在$(0,0,f(0,0))$处的切向量为$\{1,0,3\}$,应选(C).

(8)【答案】 (B).

【解】 因为当$h\to 0$时,$1-\cos h\to 0^{+}$,

所以$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\cdot\dfrac{1-\cos h}{h^2}=\dfrac{1}{2}f'_{+}(0)$,

即$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}$存在只能使右导数存在,故(A)不对;

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}\cdot\dfrac{h-\sin h}{h^2}$,

因为$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h-\sin h}{h^2}=0$,所以$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}$存在不一定使$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}$存在,即$f(x)$在$x=0$处不一定可导,(C)不对;

取$f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 0, \\ 2, & x=0, \end{cases}$显然$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}=1$,因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0\neq f(0)$,所以$f(x)$在$x=0$处不连续,故在$x=0$处不可导,(D)不对,应选(B).

方法点评:导数定义为$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$,等价定义为$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$,

考查导数定义时一定要准确理解导数定义的本质,注意如下三个方面:

(1) 导数定义中$\Delta x\to 0$要同时保证$\Delta x\to 0^{+}$和$\Delta x\to 0^{-}$;

(2) 定义中函数增量后一项必须为$f(x_0)$,即$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+ah)-f(x_0+bh)}{h}(ab\neq 0)$存在不能保证$f'(x_0)$存在;

(3) 分子分母自变量改变量的阶相同,即$\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to 0}}\dfrac{f(x_0+\beta)-f(x_0)}{\alpha}$中$\alpha,\beta$是同阶无穷小.

(9)【答案】 (A).

【解】 令$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,得$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$.

显然$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$特征值相同,且$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是实对称矩阵,故$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$相似且合同,应选(A).

方法点评:设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是两个实对称矩阵,则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似的充分必要条件是$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$,即两个矩阵的特征值相同;

设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是两个实对称矩阵,则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同的充分必要条件是$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$正、负特征值的个数相同.

(10)【答案】 (A).

【解】 **方法一** 由$X+Y=n$,得$Y=-X+n$,于是

$$D(X)=D(Y),\quad \mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,-X+n)=-D(X).$$

故 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=-\dfrac{D(X)}{D(X)}=-1$,应选(A).

方法二 因为 $P\{Y=-X+n\}=1$ 且 $-1<0$,所以 $\rho_{XY}=-1$,应选(A).

方法点评:设 X,Y 为两个随机变量,若 $\rho_{XY}=1$,称随机变量 X,Y 正相关,其充分必要条件为 $P\{Y=aX+b\}=1(a>0)$;

设 X,Y 为两个随机变量,若 $\rho_{XY}=-1$,称随机变量 X,Y 负相关,其充分必要条件为 $P\{Y=aX+b\}=1(a<0)$.

三、解答题

(11)**【解】** **方法一** 令 $e^x=t$,则

$$\begin{aligned}\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx&=\int\frac{\arctan t}{t^3}dt=-\frac{1}{2}\int\arctan t\,d(t^{-2})\\&=-\frac{1}{2t^2}\arctan t+\frac{1}{2}\int\frac{t^{-2}}{1+t^2}dt=-\frac{1}{2t^2}\arctan t+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2(1+t^2)}dt\\&=-\frac{1}{2t^2}\arctan t+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt\\&=-\frac{1}{2t^2}\arctan t-\frac{1}{2t}-\frac{1}{2}\arctan t+C\\&=-\frac{1}{2e^{2x}}\arctan e^x-\frac{1}{2e^x}-\frac{1}{2}\arctan e^x+C.\end{aligned}$$

方法二

$$\begin{aligned}\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx&=-\frac{1}{2}\int\arctan e^x\,d(e^{-2x})=-\frac{\arctan e^x}{2e^{2x}}+\frac{1}{2}\int\frac{e^{-2x}}{1+e^{2x}}\cdot e^x\,dx\\&=-\frac{\arctan e^x}{2e^{2x}}+\frac{1}{2}\int\frac{d(e^x)}{e^{2x}(1+e^{2x})}=-\frac{\arctan e^x}{2e^{2x}}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{e^{2x}}-\frac{1}{1+e^{2x}}\right)d(e^x)\\&=-\frac{\arctan e^x}{2e^{2x}}-\frac{1}{2e^x}-\frac{1}{2}\arctan e^x+C.\end{aligned}$$

(12)**【解】** $\dfrac{d}{dx}\varphi^3(x)=3\varphi^2(x)\varphi'(x)$,

而 $\varphi'(x)=f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))\cdot[f_1'(x,x)+f_2'(x,x)]$,

$\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1$,

由 $f_1'(1,1)=\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$, $f_2'(1,1)=\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$,

得 $$\begin{aligned}\varphi'(1)&=f_1'(1,f(1,1))+f_2'(1,f(1,1))\cdot[f_1'(1,1)+f_2'(1,1)]\\&=f_1'(1,1)+f_2'(1,1)\cdot[f_1'(1,1)+f_2'(1,1)]=2+3(2+3)=17,\end{aligned}$$

故 $\left.\dfrac{d}{dx}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=51$.

(13)**【解】** 由 $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}(-1<x<1)$,

所以 $\arctan x=\arctan 0+\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}(-1\leqslant x\leqslant 1)$,

于是 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n}(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$

(14)**【解】** 设截口平面为 Σ,按右手准则 Σ 取上侧,Σ 的方向向量为 $\boldsymbol{n}=\{1,1,1\}$,

方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

由斯托克斯公式得

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(4x+2y+3z)\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+6)\mathrm{d}S=-\frac{12}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=-\frac{12}{\sqrt{3}}\iint_{D}\sqrt{3}\,\mathrm{d}\sigma=-24.$$

方法点评:三维空间对坐标的曲线积分常用两个计算方法:

方法一　定积分法

设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\\ z=\omega(t)\end{cases}$(起点 $t=\alpha$,终点 $t=\beta$),则

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t.$$

方法二　斯托克斯公式

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S.$$

(15)**【证明】** (Ⅰ)由微分中值定理得 $f(x)-f(0)=f'[0+\theta(x)x]x$,

即 $f(x)=f(0)+f'[\theta(x)x]x$,其中 $\theta(x)\in(0,1)$.

不妨设 $f(x)=f(0)+f'[\theta_1(x)x]x$, $f(x)=f(0)+f'[\theta_2(x)x]x$,

两式相减得 $f'[\theta_1(x)x]x=f'[\theta_2(x)x]x$,

注意到 $x\neq 0$,则有 $f'[\theta_1(x)x]=f'[\theta_2(x)x]$.

因为 $f''(x)$ 连续且 $f''(x)\neq 0$,所以 $f''(x)>0$ 或 $f''(x)<0$,即 $f'(x)$ 单调增加或单调减少,于是 $\theta_1(x)=\theta_2(x)$,即存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$,使得

$$f(x)=f(0)+f'[\theta(x)x]x.$$

(Ⅱ)由泰勒公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2,\text{其中 }\xi\text{ 介于 }0\text{ 与 }x\text{ 之间},$$

于是 $$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=f(0)+f'[\theta(x)x]x$$

或 $$\theta(x)\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}=\frac{f''(\xi)}{2!},$$

由 $f''(x)$ 连续及 $f''(x)\neq 0$，两边取极限得 $f''(0)\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{f''(0)}{2!}$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

(16)【解】 t 时刻雪堆的体积为

$$V(t)=\int_0^{h(t)}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{h^2(t)-h(t)z}{2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}\int_0^{h(t)}[h^2(t)-h(t)z]\mathrm{d}z=\frac{\pi h^3(t)}{4},$$

侧面积为 $S(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}r\sqrt{1+\frac{16r^2}{h^2(t)}}\mathrm{d}r=\frac{13\pi h^2(t)}{12},$$

由题意得 $\dfrac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}=-0.9S(t)$，整理得 $h'(t)=-\dfrac{13}{10}$，解得 $h(t)=-\dfrac{13}{10}t+C$，由 $h(0)=130$ 得 $C=130$，于是 $h(t)=-\dfrac{13}{10}t+130$，令 $h(t)=0$ 得 $t=100$(小时)，即高度为 130 厘米的雪堆经过 100 小时可以全部融化.

方法点评：本题考查微分的实际应用. 重点要理解元素法的思想，元素法的具体步骤为：

(1) 先假设有关的自变量和函数(有时需要建立适当的坐标系)；

(2) 取自变量的区间元素，根据问题的实际含义求出所求量的元素；

(3) 将所求量的元素在自变量区间上定积分.

【例】 设水桶含 10 L 液体，浓度为 15 g/L，现往桶中以 2 L/min 的速度注清水，同时将桶内液体搅拌均匀后以 2 L/min 的速度排出，问经过几分钟液体浓度降低一半？

【解】 设第 t 分钟时溶质为 $m(t)$，取 $[t,t+\mathrm{d}t]$，则 $\mathrm{d}m=0-\dfrac{m(t)}{10}\times 2\mathrm{d}t$.

于是有 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{5}m=0,\\ m(0)=150,\end{cases}$ 解得 $m(t)=150\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$.

令 $m(t)=\dfrac{1}{2}\times 150$，解得 $t=5\ln 2$(分钟).

(17)【解】 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

由齐次线性方程组解的结构性质得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 仍为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的充分必要条件是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关，

而 $$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}t_1&0&0&\cdots&t_2\\t_2&t_1&0&\cdots&0\\0&t_2&t_1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&t_1\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关的充分必要条件是 $\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_1 \end{vmatrix} = t_1^s + (-1)^{s+1}t_2^s \neq 0$,

当 $t_1^s + (-1)^{s+1}t_2^s \neq 0$ 时,即当 s 为偶数时,$t_1 \neq \pm t_2$;当 s 为奇数时,$t_1 \neq -t_2$,向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

(18)**【解】** (Ⅰ)由 $\boldsymbol{AP}=(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},3\boldsymbol{Ax}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}=\boldsymbol{PB}$,

得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$,其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$.

(Ⅱ)由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\-1&\lambda&-3\\0&-1&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+3)\lambda(\lambda-1)=0$,

得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=0,\lambda_3=1$.

因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=0,\lambda_3=1$,于是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\mu_1=-2$, $\mu_2=1,\mu_3=2$,故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=-4$.

方法点评:求矩阵的特征值通常有如下三个方法:

(1) 定义法,即令 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0})$,通过矩阵满足的方程求出矩阵的特征值.

【例】 设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵,且 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

【解】 令 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$,由 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$ 得$(\lambda^2-2\lambda)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,因为 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$,所以 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$.

(2) 公式法,即通过特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 求出特征值.

(3) 关联矩阵法,即若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$,从而 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 特征值相同.

(19)**【解】** (Ⅰ)X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}(k=0,1,2,\cdots)$.

$P\{Y=m \mid X=n\}=\mathrm{C}_n^m p^m(1-p)^{n-m}(0\leqslant m\leqslant n,n=0,1,2,\cdots)$.

(Ⅱ)$P\{X=n,Y=m\}=P\{X=n\}P\{Y=m \mid X=n\}$

$$=\mathrm{C}_n^m p^m(1-p)^{n-m}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}(0\leqslant m\leqslant n,n=0,1,2,\cdots).$$

(20)**【解】** 令 $Y_i=X_i+X_{n+i}(1\leqslant i\leqslant n)$,因为 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ 相互独立且服从正态分布,所以 $Y_i\sim N(2\mu,2\sigma^2)(1\leqslant i\leqslant n)$.

不妨设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 为来自总体 $N(2\mu,2\sigma^2)$ 的简单随机样本,$\overline{Y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i=2\overline{X}$,

于是统计量 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$,

由 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,得 $E\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}{2\sigma^2}\right)=n-1$,故 $E(Y)=2(n-1)\sigma^2$.