2003 年数学(一) 真题解析

一、填空题

(1)【答案】 $e^{-\frac{1}{2}}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\lim\limits_{x\to 0}\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\}^{\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

(2)【答案】 $2x+4y-z-5=0$.

【解】 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$,

设切点坐标为(x_0,y_0,z_0),则切平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}|_{(x_0,y_0,z_0)}=\{2x_0,2y_0,-1\}$,

因为切平面与平面 $2x+4y-z=0$ 平行,

所以$\dfrac{2x_0}{2}=\dfrac{2y_0}{4}=\dfrac{-1}{-1}$,解得 $x_0=1,y_0=2$,从而 $z_0=x_0^2+y_0^2=5$,

所求的平面为 $2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$,即 $2x+4y-z-5=0$.

(3)【答案】 1.

【解】 $a_2=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos 2x\,dx=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2 d(\sin 2x)$

$=\dfrac{1}{\pi}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2x\,dx$

$=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,d(\cos 2x)=\dfrac{x}{\pi}\cos 2x\Big|_0^{\pi}-\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx=1.$

(4)【答案】 $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$.

【解】 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$.

设从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{Q}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$,于是 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$.

(5)【答案】 $\dfrac{1}{4}$.

【解】 $$P\{X+Y\leqslant 1\}=\iint\limits_{x+y\leqslant 1}f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}6x\,dy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}6x(1-2x)\,dx=\frac{1}{4}.$$

(6)【答案】 (39.51,40.49).

【解】 $\alpha=0.05,u_{0.025}=1.96$,统计量$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{1}{\sqrt{16}}}=4(\overline{X}-\mu)\sim N(0,1)$,

由 $P\{-1.96<4(\overline{X}-\mu)<1.96\}=0.95$ 得 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$\left(\overline{x}-\dfrac{1.96}{4},\overline{x}+\dfrac{1.96}{4}\right)=(39.51,40.49)$.

方法点评:对正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的参数 μ 进行区间估计分两种情况:

情形一:σ^2 已知

取 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$,由 $P\left\{-u_{\frac{\alpha}{2}}<\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}<u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$,得参数 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$;

情形二:σ^2 未知

取 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$,由 $P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$,得参数 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\overline{X}-\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$.

二、选择题

(7)**【答案】** (C).

【解】 设 $f'(x)$ 与 x 轴交点的横坐标从左到右分别为 a,b,c,显然 $f(x)$ 有三个驻点 $x=a$,$x=b,x=c$ 及一个不可导点 $x=0$.

当 $x<a$ 时,$f'(x)>0$,当 $x\in(a,b)$ 时,$f'(x)<0$,则 $x=a$ 为 $f(x)$ 的极大值点;

当 $x\in(b,0)$ 时,$f'(x)>0$,则 $x=b$ 为 $f(x)$ 的极小值点;

当 $x\in(0,c)$ 时,$f'(x)<0$,则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点;

当 $x>c$ 时,$f'(x)>0$,则 $x=c$ 为 $f(x)$ 的极小值点,

故 $f(x)$ 有两个极大值点和两个极小值点,应选(C).

方法点评:求函数的极值时按如下步骤进行:

(1) 找出 $f(x)$ 的驻点及不可导的点;

(2) 判断每个点是否为极值点(按照具体情况选用第一充分条件和第二充分条件).

(8)**【答案】** (D).

【解】 **方法一** 取 $a_n=\dfrac{3}{n},b_n=1,c_n=\dfrac{n}{3}$,显然(A),(B),(C) 不成立,应选(D).

方法二 取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$,因为 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,所以存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,

$|b_n-1|<\dfrac{1}{2}$,从而有 $b_n>\dfrac{1}{2}$.

当 $n>N$ 时,$|b_nc_n|>\dfrac{1}{2}|c_n|$,

由 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}|b_nc_n|=+\infty$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\infty$,应选(D).

(9)**【答案】** (A).

【解】 由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$ 及 $f(x,y)$ 的连续性,得 $f(0,0)=0$.

再由$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$,得 $f(x,y)-xy=(x^2+y^2)^2+o[(x^2+y^2)^2]$

或 $f(x,y)=xy+(x^2+y^2)^2+o[(x^2+y^2)^2]$.

当 $y=x$ 时,$f(x,x)=x^2+4x^4+o(x^4)=x^2+o(x^2)>0$;

当 $y=-x$ 时,$f(x,-x)=-x^2+4x^4+o(x^4)=-x^2+o(x^2)<0$,则$(0,0)$不是函数 $f(x,y)$ 的极值点,应选(A).

(10)**【答案】** (D).

【解】 **方法一** 因为向量组 Ⅰ 可由向量组 Ⅱ 线性表示,所以 $r(\text{Ⅰ})\leqslant r(\text{Ⅱ})$,

显然 $r(\text{Ⅱ})\leqslant s$,于是 $r(\text{Ⅰ})\leqslant s$.

当 $r>s$ 时,因为 $r(\text{Ⅰ})\leqslant s<r$,即向量组 Ⅰ 的秩小于向量组 Ⅰ 所含的向量个数,所以向量组 Ⅰ 线性相关,应选(D).

方法二 取 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$,Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,显然向量组 Ⅰ 可由向量组 Ⅱ 线性表示且$r<s$,但向量组 Ⅱ 线性无关,(A),(C) 不对;

取 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$,Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,显然向量组 Ⅰ 可由向量组 Ⅱ 线性表示且 $r>s$,但向量组 Ⅱ 线性无关,(B) 不对,应选(D).

(11)**【答案】** (B).

【解】 **方法一** 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含的线性无关的解向量的个数不超过$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含的线性无关的解向量个数,即 $n-r(\boldsymbol{A})\leqslant n-r(\boldsymbol{B})$,从而 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{B})$;

若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解,则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$,反之不对,故应选(B).

方法二 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&0&-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=(1\quad 1\quad 1)$,$r(\boldsymbol{A})=2\geqslant r(\boldsymbol{B})=1$,

但 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解,不是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解,第 2 个命题不对;

取 $\boldsymbol{A}=(1\quad 1\quad -1)$, $\boldsymbol{B}=(1\quad -1\quad -1)$, $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$,

但 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 不同解,第 4 个命题不对,应选(B).

方法点评:本题考查两个齐次线性方程组的解与系数矩阵的秩的关系.

齐次线性方程组系数矩阵的秩即为方程组中约束条件的个数,系数矩阵的秩越大则约束条件越多,解就越少;系数矩阵的秩越小则约束条件越少,解就越多.设$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 为两个齐次线性方程组,则:

(1) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解,则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$,反之不对;

(2) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解,则 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{B})$;

(3) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解,反之不对,则 $r(\boldsymbol{A})>r(\boldsymbol{B})$;

(4) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解,且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解.

(12)**【答案】** (C).

【解】 因为 $X \sim t(n)$,所以存在 $U \sim N(0,1)$,$V \sim \chi^2(n)$ 且 U,V 独立,

使得 $X = \dfrac{U}{\sqrt{V/n}}$,于是 $Y = \dfrac{1}{X^2} = \dfrac{V/n}{U^2/1}$.

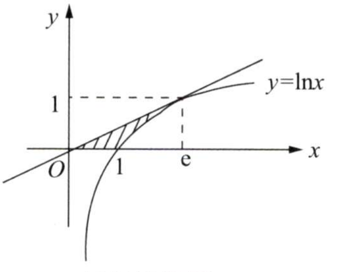
注意到 $U^2 \sim \chi^2(1)$ 且与 V 独立,故 $Y \sim F(n,1)$,应选(C).

三、解答题

(13)**【解】** (Ⅰ)**方法一** 设切点坐标为$(a,\ln a)$,

由导数的几何意义得$\dfrac{\ln a}{a} = \dfrac{1}{a}$,解得 $a = \mathrm{e}$,

即切点坐标为$(\mathrm{e},1)$,故切线为 $y = \dfrac{x}{\mathrm{e}}$.



三(13)题图

方法二 设切点坐标为$(a,\ln a)$,所求的切线为

$$y - \ln a = \frac{1}{a}(x-a),\text{或 } y = \frac{x}{a} + \ln a - 1,$$

因为切线经过原点,所以 $\ln a - 1 = 0$,即 $a = \mathrm{e}$,故所求的切线为 $y = \dfrac{x}{\mathrm{e}}$.

所以 $A = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{e} \times 1 - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}}{2} - 1$.

(Ⅱ)切线 $y = \dfrac{x}{\mathrm{e}}$,$x = \mathrm{e}$ 及 x 轴围成的三角形区域绕 $x = \mathrm{e}$ 旋转而成的圆锥体的体积为

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \pi \mathrm{e}^2 \times 1 = \frac{\pi \mathrm{e}^2}{3};$$

曲线 $y = \ln x$,$x = \mathrm{e}$ 及 x 轴围成的区域绕 $x = \mathrm{e}$ 旋转而成的体积为 V_2.

取$[x, x+\mathrm{d}x] \subset [1,\mathrm{e}]$, $\mathrm{d}V_2 = 2\pi(\mathrm{e}-x) \times \ln x \times \mathrm{d}x$,

$$V_2 = 2\pi\int_1^{\mathrm{e}} (\mathrm{e}-x)\ln x \,\mathrm{d}x = 2\pi \mathrm{e}\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x - 2\pi\int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(4\mathrm{e} - \mathrm{e}^2 - 1),$$

于是 $V = V_1 - V_2 = \dfrac{\pi}{6}(5\mathrm{e}^2 - 12\mathrm{e} + 3)$.

(14)**【解】** $f'(x) = \dfrac{-2}{1+4x^2} = -2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{2n+1}x^{2n}\left(-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}\right)$,

由 $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$,得 $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}\left(-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}\right)$,

当 $x = \dfrac{1}{2}$ 时,$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$,又 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$,

所以 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$.

(15)**【证明】** (Ⅰ)**方法一** 由格林公式,得

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \iint_D (\mathrm{e}^{\sin y} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma,$$

$$\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x = \iint_D (\mathrm{e}^{-\sin y} + \mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}\sigma,$$

因为区域 D 关于 $y=x$ 对称，所以 $\iint\limits_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D (e^{\sin x}+e^{-\sin y})\mathrm{d}\sigma$，

于是 $\oint_L x e^{\sin y}\mathrm{d}y-y e^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x e^{-\sin y}\mathrm{d}y-y e^{\sin x}\mathrm{d}x$.

方法二 令 $L_1: y=0$(起点 $x=0$，终点 $x=\pi$)，

$L_2: x=\pi$(起点 $y=0$，终点 $y=\pi$)，

$L_3: y=\pi$(起点 $x=\pi$，终点 $x=0$)，

$L_4: x=0$(起点 $y=\pi$，终点 $y=0$)，

$$\text{左边}=\int_{L_1} x e^{\sin y}\mathrm{d}y-y e^{-\sin x}\mathrm{d}x+\int_{L_2} x e^{\sin y}\mathrm{d}y-y e^{-\sin x}\mathrm{d}x+$$
$$\int_{L_3} x e^{\sin y}\mathrm{d}y-y e^{-\sin x}\mathrm{d}x+\int_{L_4} x e^{\sin y}\mathrm{d}y-y e^{-\sin x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^\pi \pi e^{\sin y}\mathrm{d}y-\int_\pi^0 \pi e^{-\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi (e^{\sin x}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x;$$

$$\text{右边}=\int_{L_1} x e^{-\sin y}\mathrm{d}y-y e^{\sin x}\mathrm{d}x+\int_{L_2} x e^{-\sin y}\mathrm{d}y-y e^{\sin x}\mathrm{d}x+$$
$$\int_{L_3} x e^{-\sin y}\mathrm{d}y-y e^{\sin x}\mathrm{d}x+\int_{L_4} x e^{-\sin y}\mathrm{d}y-y e^{\sin x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^\pi \pi e^{-\sin y}\mathrm{d}y-\int_\pi^0 \pi e^{\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi (e^{\sin x}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x,$$

则 $\oint_L x e^{\sin y}\mathrm{d}y-y e^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x e^{-\sin y}\mathrm{d}y-y e^{\sin x}\mathrm{d}x$.

(Ⅱ) $$\oint_L x e^{\sin y}\mathrm{d}y-y e^{-\sin x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\iint\limits_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D (e^{-\sin y}+e^{\sin x})\mathrm{d}\sigma\right]$$
$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D (e^{\sin y}+e^{-\sin y}+e^{\sin x}+e^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\iint\limits_D (2+2)\mathrm{d}\sigma=2\pi^2.$$

(16)**【解】** (Ⅰ)设 n 次击打桩打进地下深度为 x_n，汽锤第 n 次击打所做的功为 W_n，则

$$W_1=\int_0^{x_1} kx\,\mathrm{d}x=\int_0^a kx\,\mathrm{d}x=\frac{k}{2}a^2,$$
$$W_2=\int_{x_1}^{x_2} kx\,\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(x_2^2-a^2),$$
$$W_3=\int_{x_2}^{x_3} kx\,\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(x_3^2-x_2^2),$$

由 $W_2=rW_1$ 得 $x_2^2-a^2=ra^2$，解得 $x_2^2=(1+r)a^2$.

由 $W_3=rW_2=r^2W_1$，得 $x_3^2-(1+r)a^2=r^2a^2$ 或 $x_3^2=(1+r+r^2)a^2$.

于是 $x_3=\sqrt{1+r+r^2}\,a$，即汽锤经过 3 次击打后桩的深度为 $\sqrt{1+r+r^2}\,a$ 米.

(Ⅱ)由归纳法，设 $x_n=\sqrt{1+r+\cdots+r^{n-1}}\,a$，

$$W_{n+1}=\int_{x_n}^{x_{n+1}} kx\,\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(x_{n+1}^2-x_n^2)=\frac{k}{2}[x_{n+1}^2-(1+r+\cdots+r^{n-1})a^2],$$

由 $W_{n+1}=r^nW_1$ 得 $\frac{k}{2}[x_{n+1}^2-(1+r+\cdots+r^{n-1})a^2]=\frac{k}{2}r^na^2$，

解得 $x_{n+1}=\sqrt{1+r+\cdots+r^n}a=\sqrt{\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}}a$,

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\dfrac{a}{\sqrt{1-r}}$,即若不限击打次数,汽锤最多可以将桩打进地下 $\dfrac{a}{\sqrt{1-r}}$ 米.

方法点评:本题考查定积分的物理应用.理解元素法的思想本质,掌握元素法的分析方法.

(17)【解】 (Ⅰ) $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{y'(x)}$,

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy}=\frac{d\left[\frac{1}{y'(x)}\right]\Big/dx}{dy/dx}=\frac{\left[\frac{1}{y'(x)}\right]'}{y'(x)}=-\frac{y''(x)}{y'^3(x)}=-\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3},$$

代入原方程整理得 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=\sin x$.

(Ⅱ) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-1=0$,特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$,

$\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=0$ 的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^x$.

令 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=\sin x$ 的特解为 $y_0(x)=a\cos x+b\sin x$,代入原方程得 $a=0,b=-\dfrac{1}{2}$,

原方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^x-\dfrac{1}{2}\sin x$.

由初始条件 $y(0)=0,y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 得 $C_1=-1,C_2=1$,故 $y=e^x-e^{-x}-\dfrac{1}{2}\sin x$.

方法点评:本题考查原函数与反函数一阶导数与二阶导数之间的关系及微分方程的求解.

函数与其反函数一阶导数与二阶导数之间的关系有如下两点:

(1) 设 $y=f(x)$ 可导且 $f'(x)\neq0$,则 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=g(y)$,$x=g(y)$ 可导且 $g'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$.

(2) 设 $y=f(x)$ 二阶可导且 $f'(x)\neq0$,则 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=g(y)$,$x=g(y)$ 二阶可导且 $g''(y)=\dfrac{d[g'(y)]}{dy}=\dfrac{d\left[\frac{1}{f'(x)}\right]}{dy}=\dfrac{\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{f'(x)}\right]}{\frac{dy}{dx}}=\dfrac{\left[\frac{1}{f'(x)}\right]'}{f'(x)}=-\dfrac{f''(x)}{f'^3(x)}$.

(18)【解】 (Ⅰ) $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t r^2\sin\varphi f(r^2)dr=4\pi\int_0^t r^2f(r^2)dr$,

$\displaystyle\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t rf(r^2)dr=2\pi\int_0^t rf(r^2)dr$,

$\displaystyle\int_{-t}^t f(x^2)dx=2\int_0^t f(x^2)dx$,

则 $F(t)=2\dfrac{\int_0^t r^2 f(r^2)\mathrm{d}r}{\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r}$, $G(t)=\pi\dfrac{\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r}{\int_0^t f(x^2)\mathrm{d}x}$.

$$F'(t)=2tf(t^2)\frac{t\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r-\int_0^t r^2 f(r^2)\mathrm{d}r}{\left(\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r\right)^2},$$

令 $\varphi(t)=t\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r-\int_0^t r^2 f(r^2)\mathrm{d}r$, $\varphi(0)=0$,

$\varphi'(t)=\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r>0(t>0)$,

由 $\begin{cases}\varphi(0)=0,\\ \varphi'(t)>0(t>0),\end{cases}$ 得 $\varphi(t)>0(t>0)$,于是 $F'(t)>0(t>0)$,故 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

(Ⅱ) $G(t)=\dfrac{\pi\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r}$,

当 $t>0$ 时,$F(t)-\dfrac{2}{\pi}G(t)>0$ 等价于 $\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r\int_0^t r^2 f(r^2)\mathrm{d}r-\left[\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r\right]^2>0$.

令 $h(t)=\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r\int_0^t r^2 f(r^2)\mathrm{d}r-\left[\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r\right]^2$, $h(0)=0$,

$h'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2\mathrm{d}r$,当 $t>0$ 时,$h'(t)>0$,

由 $\begin{cases}h(0)=0,\\ h'(t)>0(t>0),\end{cases}$ 得 $h(t)>0(t>0)$,于是 $F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

(19)**【解】** **方法一** $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{vmatrix}=7$,

由 $\left(\begin{array}{ccc:ccc}3&2&2&1&0&0\\2&3&2&0&1&0\\2&2&3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&\frac{1}{7}&\frac{1}{7}&\frac{1}{7}\\0&1&0&-\frac{2}{7}&\frac{5}{7}&-\frac{2}{7}\\0&0&1&-\frac{2}{7}&-\frac{2}{7}&\frac{5}{7}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{5}{7}&-\frac{2}{7}&-\frac{2}{7}\\0&1&0&-\frac{2}{7}&\frac{5}{7}&-\frac{2}{7}\\0&0&1&-\frac{2}{7}&-\frac{2}{7}&\frac{5}{7}\end{array}\right)$

得 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{pmatrix}$,

由 $\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$,

得 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

于是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&0&0\\-2&5&-4\\-2&-2&3\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}9&0&0\\-2&7&-4\\-2&-2&5\end{pmatrix}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})|=\begin{vmatrix}\lambda-9&0&0\\2&\lambda-7&4\\2&2&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-9)^2=0$，

得 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=9$.

当 $\lambda_1=3$ 时，解方程组 $[3\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})]\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，

由 $3\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}-6&0&0\\2&-4&4\\2&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的属于特征值 $\lambda_1=3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=\lambda_3=9$ 时，解方程组 $[9\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})]\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，

由 $9\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&2&4\\2&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=9$ 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

故 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=9$，属于 $\lambda_1=3$ 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$（k_1 为任意非零常数）；属于 $\lambda_2=\lambda_3=9$ 的全部特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3$（$k_2,k_3$ 为不全为零的任意常数）.

方法二　由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-2\\-2&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-7)=0$ 得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=7$，

$\lambda_1=\lambda_2=1$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix};$$

$\lambda_3=7$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，

由 $7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3=7$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$|\boldsymbol{A}|=7,\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=7,\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}=7,\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3}=1$,

因为 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}^*$,所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=7,\lambda_3=1$,从而 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 9,9,3.

$\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的相应于特征值 9,9,3 对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

方法点评:本题考查矩阵的特征值与特征向量.

矩阵与其关联的矩阵特征值与特征向量之间有一定的关系,主要有如下结论:

(1) 设 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$,则 $f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=f(\lambda_0)\boldsymbol{\alpha}$,

特别地,若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\begin{cases} \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{\lambda_0}\boldsymbol{\alpha}, \\ \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}\boldsymbol{\alpha}, \end{cases}$ 即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^*$ 特征向量相同.

(2) 设 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$ 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$,即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 特征值相同,$\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

(20)**【证明】　方法一**

必要性:设三条直线交于一点(x_0,y_0),即方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解$(x_0,y_0,1)^{\mathrm{T}}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{pmatrix},\text{则} |\boldsymbol{A}|=0,$$

而 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3b \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2c-2b & 3a-3b \\ 0 & 2a-2c & 3b-3c \end{vmatrix}$

$=-6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

$=-3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$ 且 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$,

故 $a+b+c=0$.

充分性:设 $a+b+c=0$,将方程组前两个方程相加得方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a. \end{cases}$$

因为$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]=-[a^2+b^2+(a+b)^2]\neq 0$,

所以方程组有唯一解,即三条直线交于一点.

方法二

必要性:设三条直线交于一点,即方程组$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a, \\ cx+2ay=-3b \end{cases}$有唯一解,

令$\overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{pmatrix}$,则$r(\mathbf{A})=r(\overline{\mathbf{A}})=2$,

从而$|\overline{\mathbf{A}}|=-3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$,

而$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$,故$a+b+c=0$.

充分性:设$a+b+c=0$,则$r(\overline{\mathbf{A}})<3$,

又$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]=-[a^2+b^2+(a+b)^2]\neq 0$,

则$r(\mathbf{A})=2$,从而$r(\mathbf{A})=r(\overline{\mathbf{A}})=2$,即方程组$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a, \\ cx+2ay=-3b \end{cases}$有唯一解,

故三条直线交于一点.

(21)**【解】** (Ⅰ)**方法一** X的可能取值为0,1,2,3,

$$P\{X=0\}=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20},\quad P\{X=1\}=\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20},$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20},\quad P\{X=3\}=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20},$$

X的分布律为$X\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$,于是$E(X)=\frac{3}{2}$.

方法二 令$X_i=\begin{cases} 1, & \text{从甲箱中所取的第 } i \text{ 件产品为次品}, \\ 0, & \text{从甲箱中所取的第 } i \text{ 件产品为合格品} \end{cases}(i=1,2,3)$,

X_i的分布律为$X_i\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}(i=1,2,3)$,

设乙箱中的次品个数为X,则$X=X_1+X_2+X_3$,

故$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=\frac{3}{2}$.

(Ⅱ)令$A_i=\{X=i\}(i=0,1,2,3)$,$B=\{$从乙箱中取一件产品为次品$\}$,

$P(B\mid A_0)=0$,$P(B\mid A_1)=\frac{1}{6}$,$P(B\mid A_2)=\frac{2}{6}$,$P(B\mid A_3)=\frac{3}{6}$,由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{1}{4}.$$

方法点评：本题考查一维离散型随机变量的分布及全概率公式.

若一件事需要两步完成，第一步发生的结果未知，求第二步某事件的概率时，一般采用全概率公式，第一步构造完备事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，第二步事件为 B，则

$$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) P(B \mid A_i).$$

(22)**【解】**（Ⅰ）总体 X 的分布函数为 $F(x) = P\{X \leqslant x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$，

当 $x < \theta$ 时，$F(x) = 0$；

当 $x \geqslant \theta$ 时，$F(x) = \int_{\theta}^{x} 2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}\Big|_{\theta}^{x} = 1 - \mathrm{e}^{-2(x-\theta)}$，

于是 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < \theta, \\ 1 - \mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x \geqslant \theta. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
(Ⅱ)F_{\hat\theta}(x) &= P\{\hat\theta \leqslant x\} = P\{\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \leqslant x\} \\
&= 1 - P\{\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} > x\} \\
&= 1 - P\{X_1 > x, X_2 > x, \cdots, X_n > x\} \\
&= 1 - P\{X_1 > x\}P\{X_2 > x\}\cdots P\{X_n > x\} \\
&= 1 - [1 - P\{X_1 \leqslant x\}][1 - P\{X_2 \leqslant x\}]\cdots[1 - P\{X_n \leqslant x\}] \\
&= 1 - [1 - F(x)]^n \\
&= \begin{cases} 0, & x < \theta, \\ 1 - \mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}, & x \geqslant \theta. \end{cases}
\end{aligned}$$

（Ⅲ）$\hat\theta$ 的密度函数为 $f_{\hat\theta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant \theta, \\ 2n\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}, & x > \theta, \end{cases}$

因为 $E(\hat\theta) = \int_{\theta}^{+\infty} x f_{\hat\theta}(x)\mathrm{d}x = \int_{\theta}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}\mathrm{d}[2n(x-\theta)]$

$$\xlongequal{2n(x-\theta)=t} \int_{0}^{+\infty}\left(\theta + \frac{t}{2n}\right)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \theta\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2n}\int_{0}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \theta + \frac{1}{2n},$$

所以 $\hat\theta$ 不是 θ 的无偏估计量.