1998 年数学(一)真题解析

一、填空题

(1)【答案】 $-\frac{1}{4}$.

【解】 方法一

由$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+o(x^2)$得

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2),\quad \sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2),$$

于是$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2=-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)\sim-\frac{1}{4}x^2$,

故$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=-\frac{1}{4}$.

方法二

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{-2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=-\frac{1}{4}.$$

(2)【答案】 $yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+y\varphi'(x+y)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x}f'(xy)+\frac{1}{x}f'(xy)+yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$$

$$=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y).$$

(3)【答案】 $12a$.

【解】 由对称性得

$$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=\oint_L(3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=12\oint_L\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)\mathrm{d}s$$

$$=12\oint_L\mathrm{d}s=12a.$$

(4)【答案】 $\left(\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\right)^2+1$.

【解】 设$\boldsymbol{A}$的对应于特征值λ的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}$,则$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,

由$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}$得$[(\boldsymbol{A}^*)^2+\boldsymbol{E}]\boldsymbol{\alpha}=\left[\left(\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\right)^2+1\right]\boldsymbol{\alpha}$,

故$(\boldsymbol{A}^*)^2+\boldsymbol{E}$一定有特征值$\left(\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\right)^2+1$.

(5)【答案】 $\frac{1}{4}$.

【解】 区域D的面积为$A=\int_1^{e^2}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}y=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=2$,

则(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

当 $x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant e^2$ 时，$f_X(x)=0$；

当 $1<x<e^2$ 时，$f_X(x)=\int_0^{\frac{1}{x}}\dfrac{1}{2}dy=\dfrac{1}{2x}$，

故 $f_X(2)=\dfrac{1}{4}$.

二、选择题

(1)【答案】 (A).

【解】 由 $\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=-\dfrac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)d(x^2-t^2)\xlongequal{x^2-t^2=u}\dfrac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)du$，

则 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=xf(x^2)$，应选(A).

(2)【答案】 (B).

【解】 由
$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)|x^3-x|}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x-2)|x^3-x|=0,$$

得 $f'(-1)=0$；

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}\cdot(x^2-x-2)|x^2-1|$，

显然 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}\cdot(x^2-x-2)|x^2-1|=2$，

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x}\cdot(x^2-x-2)|x^2-1|=-2$，

因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $x=0$ 为不可导的点；

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|x-1|}{x-1}\cdot(x^2-x-2)|x(x+1)|$，

显然 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{|x-1|}{x-1}\cdot(x^2-x-2)|x(x+1)|=4$，

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{|x-1|}{x-1}\cdot(x^2-x-2)|x(x+1)|=-4$，

因为 $f'_-(1)\neq f'_+(1)$，所以 $x=1$ 为不可导的点，即 $f(x)$ 有 2 个不可导的点，应选(B).

(3)【答案】 (D).

【解】 由 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$ 得 $y=y(x)$ 可微，从而 $y=y(x)$ 可导，

且 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{1+x^2}$，或 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{1}{1+x^2}y=0$，

解得 $y=Ce^{-\int-\frac{1}{1+x^2}dx}=Ce^{\arctan x}$，

由 $y(0)=\pi$ 得 $C=\pi$，于是 $y(x)=\pi e^{\arctan x}$，故 $y(1)=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$，应选(D).

(4)【答案】 (A).

【解】 因为 $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1-a_2&b_1-b_2&c_1-c_2\\a_2-a_3&b_2-b_3&c_2-c_3\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\neq0$，

所以两条直线的方向向量不平行，(B) 与(C) 不对；

令$\boldsymbol{s}_1=\{a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2\}$，　$\boldsymbol{s}_2=\{a_2-a_3,b_2-b_3,c_2-c_3\}$，

$M_1(a_3,b_3,c_3)$，$M_2(a_1,b_1,c_1)$ 分别为两条直线上的点，

$\overrightarrow{M_1M_2}=\{a_1-a_3,b_1-b_3,c_1-c_3\}$，

因为$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)=\begin{vmatrix}a_1-a_3 & b_1-b_3 & c_1-c_3\\ a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2\\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3\end{vmatrix}=0$，所以两直线共面且不平行，即两直线交于一点，应选(A).

(5)**【答案】** (C).

【解】 由 $P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$ 得$\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}$，

由减法公式及补概率的公式得$\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$，

整理得 $P(AB)=P(A)P(B)$，应选(C).

三、**【解】** **方法一**　L 的参数方程为$L:\begin{cases}x=1+t,\\ y=t,\\ z=1-t,\end{cases}$ 代入 π 得 L 与 π 的交点为 $M_1(2,1,0)$；

$M_0(1,0,1)\in L$，过 M_0 且与 π 垂直的直线为$L':\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$，

L' 的参数方程为$L':\begin{cases}x=1+t,\\ y=-t,\\ z=1+2t,\end{cases}$ 代入 π 得垂足坐标为 $M_2\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，

$\overrightarrow{M_2M_1}=\left\{\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right\}$，故 $L_0:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$.

设 L_0 绕 y 轴旋转一周所得的旋转曲面为 Σ，任取 $P(x,y,z)\in\Sigma$，其所在的圆周对应的 L_0 上的点为 $P_0(x_0,y,z_0)$，圆心为 $T(0,y,0)$，

由 $|PT|=|P_0T|$ 得 $x^2+z^2=x_0^2+z_0^2$，

再由 $P_0(x_0,y,z_0)\in L_0$ 得$\dfrac{x_0-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z_0}{-1}$，解得 $x_0=2y$，$z_0=-\dfrac{y-1}{2}$，

故 Σ 的方程为 $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$.

方法二

直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 的一般形式为 $L:\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1},\\ \dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1},\end{cases}$ $L:\begin{cases}x-y-1=0,\\ y+z-1=0,\end{cases}$

过直线 L 的平面束为$\pi_0:(x-y-1)+\lambda(y+z-1)=0$，即

$$\pi_0:x+(\lambda-1)y+\lambda z-1-\lambda=0,$$

由$\{1,-1,2\}\cdot\{1,\lambda-1,\lambda\}=0$ 得 $\lambda=-2$，

则投影直线为 $L_0:\begin{cases}x-3y-2z+1=0,\\ x-y+2z-1=0.\end{cases}$

显然 $M_0(2,1,0)\in L_0$，L_0 的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\{1,-3,-2\}\times\{1,-1,2\}=\{-8,-4,2\},$$

直线 L_0 的点向式方程为 $L_0: \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$.

设 L_0 绕 y 轴旋转一周所得的旋转曲面为 Σ，任取 $P(x,y,z)\in\Sigma$，其所在的圆周对应的 L_0 上的点为 $P_0(x_0,y,z_0)$，圆心为 $T(0,y,0)$，

由 $|PT|=|P_0T|$ 得 $x^2+z^2=x_0^2+z_0^2$，

再由 $P_0(x_0,y,z_0)\in L_0$ 得 $\dfrac{x_0-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z_0}{-1}$，解得 $x_0=2y, z_0=-\dfrac{y-1}{2}$，

故 Σ 的方程为 $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$.

四、【解】 $P(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda$， $Q(x,y)=-x^2(x^4+y^2)^\lambda$，

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2x(x^4+y^2)^\lambda-4\lambda x^5(x^4+y^2)^{\lambda-1}$，

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x(x^4+y^2)^\lambda+4\lambda xy^2(x^4+y^2)^{\lambda-1}$，

由 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 得 $4x(\lambda+1)(x^4+y^2)=0$，解得 $\lambda=-1$，

则 $u(x,y)=\displaystyle\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xy\,dx-x^2\,dy}{x^4+y^2}=\int_1^x 0\,dx+\int_0^y\frac{-x^2\,dy}{x^4+y^2}=-\arctan\frac{y}{x^2}+C$，

故所求的二元函数为 $u(x,y)=-\arctan\dfrac{y}{x^2}+C$（$C$ 为任意常数）.

五、【解】 取沉放点为坐标原点，y 轴铅直向下，由牛顿第二定律得

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-B\rho-kv,$$

令 $\dfrac{dy}{dt}=v$，则 $\dfrac{d^2y}{dt^2}=v\dfrac{dv}{dy}$，代入得 $\dfrac{mv\,dv}{dy}=mg-B\rho-kv$，

变量分离得 $\dfrac{mv\,dv}{mg-B\rho-kv}=dy$，积分得

$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho-kv)+C_0,$$

由 $y|_{t=0}=0, v|_{t=0}=0$ 得 $C_0=\dfrac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho)$，

故 $y=-\dfrac{m}{k}v-\dfrac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln\dfrac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}$.

六、【解】 $I=\displaystyle\iint_\Sigma\frac{ax\,dy\,dz+(z+a)^2\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{a}\iint_\Sigma ax\,dy\,dz+(z+a)^2\,dx\,dy$，

令 $\Sigma_0: z=0\ (x^2+y^2\leqslant a^2)$，取下侧，则

$$\iint_\Sigma ax\,dy\,dz+(z+a)^2\,dx\,dy=\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}ax\,dy\,dz+(z+a)^2\,dx\,dy-\iint_{\Sigma_0}ax\,dy\,dz+(z+a)^2\,dx\,dy,$$

而 $\displaystyle\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}ax\,dy\,dz+(z+a)^2\,dx\,dy=-\iiint_\Omega(2z+3a)\,dv=-2\iiint_\Omega z\,dv-3a\cdot\frac{2}{3}\pi a^3$

$$=-2\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_0^a r^3\sin\varphi\cos\varphi\,dr-2\pi a^4$$

$$=\frac{\pi a^4}{2}-2\pi a^4=-\frac{3\pi a^4}{2};$$

又 $\displaystyle\iint_{\Sigma_0}ax\,dy\,dz+(z+a)^2\,dx\,dy=-\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}a^2\,dx\,dy=-\pi a^4$，

故 $I=\frac{1}{a}\left(-\frac{3\pi a^4}{2}+\pi a^4\right)=-\frac{1}{2}\pi a^3$.

七、【解】 $b_n=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}$,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi i}{n}\leqslant b_n\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi i}{n},$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi i}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi i}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi i}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x$,

所以由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}(\pi x)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$$

八、【解】 因为 $\{a_n\}$ 单调递减且 $a_n>0$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,显然 $A\geqslant 0$.

因为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散且 $\{a_n\}$ 单调递减,所以 $A>0$.

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$,

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{A+1}<1$,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛.

九、【证明】 (1) $S_1(x_0)=x_0f(x_0)$, $S_2(x_0)=\int_{x_0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$,

令 $\varphi(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$,

显然 $F(x)=x\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $\varphi(x)$ 的原函数,即 $F'(x)=\varphi(x)$,

$F(0)=F(1)=0$,由罗尔定理,存在 $x_0\in(0,1)$,使得 $F'(x_0)=0$,即 $\varphi(x_0)=0$,

故存在 $x_0\in(0,1)$,使得 $S_1(x_0)=S_2(x_0)$.

(2) $\varphi'(x)=f(x)+xf'(x)+f(x)=xf'(x)+2f(x)$,

由 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$ 得 $xf'(x)+2f(x)>0$,即 $\varphi'(x)>0\,(0<x<1)$,

则 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 内严格递增,故(1)中的 x_0 是唯一的.

十、【解】 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$,则二次曲面表示为 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=4$.

因为 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 经过正交变换可以化为 $\eta^2+4\zeta^2$,所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$,

由 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ 得 $a+2=5$,解得 $a=3$.

由 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 得 $b=1$,即 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

由 $0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得 $\lambda_1 = 0$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得 $\lambda_2 = 1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$；

由 $4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得 $\lambda_3 = 4$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，

规范化得 $\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\gamma}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，

得正交矩阵 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

十一、【证明】 显然 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$，令 $l_0\boldsymbol{\alpha} + l_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$，

将 $l_0\boldsymbol{\alpha} + l_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}^{k-1}$ 得 $l_0\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$，

因为 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$，所以 $l_0 = 0$；

将 $l_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}^{k-2}$ 得 $l_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$，从而 $l_1 = 0$，

依次类推，可得 $l_2 = \cdots = l_{k-1} = 0$，故 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

十二、【解】 令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,2n} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1,2n} & b_{2,2n} & \cdots & b_{n,2n} \end{pmatrix}$，

因为 $(b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1,2n})^{\mathrm{T}}, (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2,2n})^{\mathrm{T}}, \cdots, (b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{n,2n})^{\mathrm{T}}$ 为方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，

所以 $r(\boldsymbol{A}) = 2n - n = n$ 且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$.

又因为 $(b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1,2n})^{\mathrm{T}}, (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2,2n})^{\mathrm{T}}, \cdots, (b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{n,2n})^{\mathrm{T}}$ 线性无关，

所以 $r(\boldsymbol{B}) = n$.

令 $\boldsymbol{Y} = (y_1, y_2, \cdots, y_{2n})^{\mathrm{T}}$，方程组（Ⅱ）表示为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0}$，

由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 得 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{O}$，即 $(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1,2n})^{\mathrm{T}}, (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2,2n})^{\mathrm{T}}, \cdots, (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{n,2n})^{\mathrm{T}}$ 为方程组 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0}$ 的解.

因为 $r(\boldsymbol{A}) = n$，所以 $(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1,2n})^{\mathrm{T}}, (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2,2n})^{\mathrm{T}}, \cdots, (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{n,2n})^{\mathrm{T}}$ 线性无关，又因为 $r(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) = n$，所以 $(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1,2n})^{\mathrm{T}}, (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2,2n})^{\mathrm{T}}, \cdots, (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{n,2n})^{\mathrm{T}}$ 为方程组（Ⅱ）的一个基础解系.

十三、【解】 令 $Z = X - Y$，

因为 X, Y 相互独立且都服从正态分布 $N\left(0, \frac{1}{2}\right)$，所以 $X - Y \sim N(0,1)$，即 $Z \sim N(0,1)$，

于是 $E(|X-Y|) = E(|Z|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |z| \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}z$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} d\left(\frac{z^2}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}},$$

又 $E(|X-Y|^2) = E(|Z|^2) = E(Z^2) = D(Z) + [E(Z)]^2 = 1$,

故 $D(|X-Y|) = E(|X-Y|^2) - [E(|X-Y|)]^2 = 1 - \frac{2}{\pi}$.

十四、【解】 设 $\overline{X}$ 为样本均值,则 $\overline{X} \sim N\left(3.4, \frac{6^2}{n}\right)$ 或 $\frac{\overline{X}-3.4}{\frac{6}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$,

由 $P\{1.4 < \overline{X} < 5.4\} = P\left\{-\frac{2}{\frac{6}{\sqrt{n}}} < \frac{\overline{X}-3.4}{\frac{6}{\sqrt{n}}} < \frac{2}{\frac{6}{\sqrt{n}}}\right\} = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - 1 > 0.95$ 得

$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) > 0.975$,即 $\frac{\sqrt{n}}{3} > 1.96$,

解得 $n > 34.57$,故 n 至少取 35.

十五、【解】 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

令 $H_0: \mu = 70$, $H_1: \mu \neq 70$,

取统计量 $t = \frac{\overline{X}-70}{\frac{s}{\sqrt{36}}} \sim t(35)$,

由 $t_{0.975}(35) = 2.0301$ 得 H_0 的接受域为$(-2.0301, 2.0301)$,

因为 $\frac{66.5-70}{\frac{15}{6}} = -1.4 \in (-2.0301, 2.0301)$,所以接受 H_0,即可以认为该批考生的平均成绩为 70 分.