2018 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是(　　)

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$.　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

(C) $f(x)=\cos|x|$.　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

(2) 过点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, 且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面为(　　)

(A) $z=0$ 与 $x+y-z=1$.　　(B) $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$.

(C) $x=y$ 与 $x+y-z=1$.　　(D) $x=y$ 与 $2x+2y-z=2$.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=$(　　)

(A) $\sin 1+\cos 1$.　　(B) $2\sin 1+\cos 1$.

(C) $2\sin 1+2\cos 1$.　　(D) $2\sin 1+3\cos 1$.

(4) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$, 则(　　)

(A) $M>N>K$.　　(B) $M>K>N$.

(C) $K>M>N$.　　(D) $K>N>M$.

(5) 下列矩阵中,与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩, $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵,则(　　)

(A) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.　　(B) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$.

(C) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.　　(D) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$, 则 $P\{X<0\}=$(　　)

(A) 0.2.　　(B) 0.3.　　(C) 0.4.　　(D) 0.5.

(8) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,据此样本检验假设: $H_0:\mu=\mu_0$, $H_1:\mu\neq\mu_0$, 则(　　)

(A) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0, 那么 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.

(B) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0, 那么 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.

(C) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0, 那么 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.

(D) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0, 那么 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9) 若$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\mathrm{e}$,则 $k=$ ______.

(10) 设函数$f(x)$具有2阶连续导数. 若曲线 $y=f(x)$ 过点$(0,0)$且与曲线 $y=2^x$ 在点$(1,2)$处相切,则$\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=$ ______.

(11) 设 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=xy\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k}$,则 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}(1,1,0)=$ ______.

(12) 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线,则$\oint_L xy\mathrm{d}s=$ ______.

(13) 设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同特征值,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量,且满足 $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,则$|\boldsymbol{A}|=$ ______.

(14) 设随机事件 A 与 B 相互独立,A 与 C 相互独立,$BC=\varnothing$. 若 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$,$P(AC\mid AB\cup C)=\dfrac{1}{4}$,则 $P(C)=$ ______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

(16)(本题满分 10 分)

将长为 2m 的铁丝分成三段,依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值?若存在,求出最小值.

(17)(本题满分 10 分)

设 Σ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧,计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(18)(本题满分 10 分)

已知微分方程 $y'+y=f(x)$,其中 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数.

(Ⅰ)若 $f(x)=x$,求方程的通解;

(Ⅱ)若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数,证明:方程存在唯一的以 T 为周期的解.

(19)(本题满分 10 分)

设数列$\{x_n\}$满足:$x_1>0, x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明数列$\{x_n\}$收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(20)(本题满分 11 分)

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$,其中$a$是参数.

(Ⅰ)求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解;

(Ⅱ)求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形.

(21)(本题满分 11 分)

已知a是常数,且矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -a\end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求a;

(Ⅱ)求满足$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$的可逆矩阵$\boldsymbol{P}$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量X与Y相互独立,X的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}$,$Y$服从参数为$\lambda$的泊松分布. 令$Z=XY$.

(Ⅰ)求$\mathrm{Cov}(X,Z)$;

(Ⅱ)求Z的概率分布.

(23)(本题满分 11 分)

设总体X的概率密度为

$$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},\ -\infty<x<+\infty,$$

其中$\sigma\in(0,+\infty)$为未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本. 记σ的最大似然估计量为$\hat{\sigma}$.

(Ⅰ)求$\hat{\sigma}$;

(Ⅱ)求$E(\hat{\sigma}),D(\hat{\sigma})$.