

2016 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$ 收敛,则()
- (A) $a < 1$ 且 $b > 1$. (B) $a > 1$ 且 $b > 1$.
(C) $a < 1$ 且 $a + b > 1$. (D) $a > 1$ 且 $a + b > 1$.
- (2) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是()
- (A) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1. \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1. \end{cases}$
(C) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$
- (3) 若 $y = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}$, $y = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个解, 则 $q(x) = ()$
- (A) $3x(1+x^2)$. (B) $-3x(1+x^2)$. (C) $\frac{x}{1+x^2}$. (D) $-\frac{x}{1+x^2}$.
- (4) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots, \end{cases}$ 则()
- (A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. (B) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.
(C) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导. (D) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.
- (5) 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是()
- (A) A^T 与 B^T 相似. (B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似.
(C) $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似. (D) $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似.
- (6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为()
- (A) 单叶双曲面. (B) 双叶双曲面. (C) 椭球面. (D) 柱面.
- (7) 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 记 $p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\}$, 则()
- (A) p 随着 μ 的增加而增加. (B) p 随着 σ 的增加而增加.
(C) p 随着 μ 的增加而减少. (D) p 随着 σ 的增加而减少.
- (8) 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3 , 且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$, 将试验 E 独立重复做 2 次, X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数, Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为()
- (A) $-\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{2}$.

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 把答案填在题中横线上.)

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1 + t \sin t) dt}{1 - \cos x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(10) 向量场 $\mathbf{A}(x, y, z) = (x + y + z)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 的旋度 $\mathbf{rot} \mathbf{A} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(11) 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x + 1)z - y^2 = x^2 f(x - z, y)$ 确定, 则 $dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 设函数 $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1 + ax^2}$, 且 $f'''(0) = 1$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{X} = 9.5$, 参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8, 则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题(本题共 9 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

已知平面区域 $D = \left\{ (r, \theta) \mid 2 \leq r \leq 2(1 + \cos \theta), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, 计算二重积分 $\iint_D x dx dy.$

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$.

(I) 证明: 反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 收敛;

(II) 若 $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 的值.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x + 1)e^{2x - y}$, 且 $f(0, y) = y + 1$, L_t 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, t)$ 的光

滑曲线. 计算曲线积分 $I(t) = \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$, 并求 $I(t)$ 的最小值.

(18)(本题满分 10 分)

设有界区域 Ω 由平面 $2x + y + 2z = 2$ 与三个坐标平面围成, Σ 为 Ω 整个表面的外侧, 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + 1) dydz - 2ydzdx + 3zdx dy$.

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 1, 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$. 证明:

(I) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛;

(II) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且 $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 2$.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$. 当 a 为何值时, 方程 $AX = B$ 无解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求解此方程.

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(I) 求 A^{99} ;

(II) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$. 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令

$$U = \begin{cases} 1, & X \leq Y, \\ 0, & X > Y. \end{cases}$$

(I) 写出 (X, Y) 的概率密度;

(II) 问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(III) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数, X_1, X_2, X_3

为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $T = \max\{X_1, X_2, X_3\}$.

(I) 求 T 的概率密度;

(II) 确定 a , 使得 aT 为 θ 的无偏估计.