1987 年全国硕士研究生招生考试

数　学　（一）

（科目代码：301）

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1) 与两直线 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1+t, \\ z=2+t \end{cases}$ 及 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行，且过原点的平面方程为________.

(2) 当 $x=$________时，函数 $y=x2^x$ 取得极小值.

(3) 由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(\mathrm{e}+1)-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积为________.

(4) 设 L 为取正向的圆 $x^2+y^2=9$，则曲线积分 $\oint_L (2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y$ 的值为________.

(5) 已知 3 维线性空间的一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)$，则向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2,0,0)$ 在上述基底下的坐标为________.

二、（本题满分 8 分）

求正常数 a 与 b，使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=1$ 成立.

三、（本题满分 7 分）

(1)（本题满分 3 分）设函数 f,g 连续可微，$u=f(x,xy)$，$v=g(x+xy)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

(2)（本题满分 4 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

四、(本题满分 8 分)

求微分方程 $y''' + 6y'' + (9 + a^2)y' = 1$ 的通解,其中常数 $a > 0$.

五、选择题(本题共 4 小题,每小题 3 分,满分 12 分)

(1) 设常数 $k > 0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$(　　).

(A) 发散　　(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛　　(D) 收敛或发散与 k 的取值有关

(2) 设 $I = t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)$ 为连续数,$s > 0$,$t > 0$,则 I 的值(　　).

(A) 依赖于 s,t　　(B) 依赖于 s,t,x

(C) 依赖于 t,x,不依赖于 s　　(D) 依赖于 s,不依赖于 t

(3) 设 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$,则在点 $x = a$ 处(　　).

(A) $f(x)$ 可导且 $f'(a) \neq 0$　　(B) $f(x)$ 取得极大值

(C) $f(x)$ 取得极小值　　(D) $f(x)$ 的导数不存在

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,且 $|\boldsymbol{A}| = a \neq 0$,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则 $|\boldsymbol{A}^*| =$(　　).

(A) a　　(B) $\frac{1}{a}$　　(C) a^{n-1}　　(D) a^n

六、(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1}$ 的收敛域,并求其和函数.

七、(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S}x(8y+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^{2})\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是由曲线 $\begin{cases}z=\sqrt{y-1},\\x=0\end{cases}(1\leqslant y\leqslant 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面，它的法向量与 y 轴正向的夹角大于 $\dfrac{\pi}{2}$.

八、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微，对于 $[0,1]$ 上的每个 x，函数的值都在区间 $(0,1)$ 内，且 $f'(x)\neq 1$，证明：在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x，使得 $f(x)=x$.

九、(本题满分 8 分)

问 a,b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\x_2+2x_3+2x_4=1,\\-x_2+(a-3)x_3-2x_4=b,\\3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$ 有唯一解？无解？有无穷多个解？并求出有无穷多个解时的通解.

十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,共 6 分)

(1) 假设在一次试验中,事件 A 发生的概率为 p,现进行 n 次独立试验,则 A 至少发生一次的概率为________,而事件 A 至多发生一次的概率为________.

(2) 三个箱子,第一个箱子中有 4 个黑球 1 个白球,第二个箱子中有 3 个黑球 3 个白球,第三个箱子中有 3 个黑球 5 个白球.现随机地取一个箱子,再从这个箱子中取出 1 个球,这个球为白球的概率等于________.已知取出的球是白球,此球属于第二个箱子的概率为________.

(3) 已知连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$,则 X 的数学期望为________,X 的方差为________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X,Y 相互独立,其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.