2007 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分)

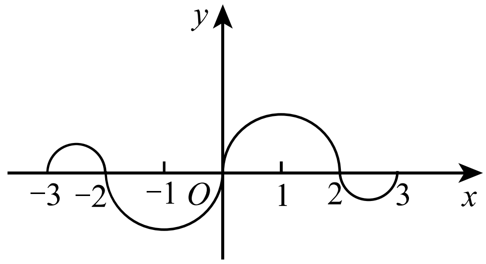
(1)当 $x\to0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是(　　)

(A)$1-e^{\sqrt{x}}$.　(B)$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.　(C)$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　(D)$1-\cos\sqrt{x}$.

(2)曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为(　　)

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.

(3)如图,连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$,$[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间 $[-2,0]$,$[0,2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周. 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$,则下列结论正确的是(　　)



(A)$F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$.

(B)$F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$.

(C)$F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$.

(D)$F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$.

(4)设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是(　　)

(A)若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$.　(B)若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$.

(C)若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.　(D)若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.

(5)设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数,且 $f''(x)>0$,令 $u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$,则下列结论正确的是(　　)

(A)若 $u_1>u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛.　(B)若 $u_1>u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散.

(C)若 $u_1<u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛.　(D)若 $u_1<u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散.

(6)设曲线 L: $f(x,y)=1$($f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数)过第Ⅱ象限内的点 M 和第Ⅳ象限内的点 N,Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧,则下列积分小于零的是(　　)

(A)$\int_\Gamma f(x,y)\,dx$.　(B)$\int_\Gamma f(x,y)\,dy$.

(C)$\int_\Gamma f(x,y)\,ds$.　(D)$\int_\Gamma f'_x(x,y)\,dx+f'_y(x,y)\,dy$.

(7)设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则下列向量组线性相关的是(　　)

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$.　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$.

(8)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(　　)

(A)合同,且相似.　　(B)合同,但不相似.

(C)不合同,但相似.　　(D)既不合同,也不相似.

(9)某人向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$,则此人第4次射击恰好第2次命中目标的概率为(　　)

(A)$3p(1-p)^2$.　(B)$6p(1-p)^2$.　(C)$3p^2(1-p)^2$.　(D)$6p^2(1-p)^2$.

(10)设随机变量(X,Y)服从二维正态分布,且 X 与 Y 不相关,$f_X(x)$,$f_Y(y)$分别表示 X,Y 的概率密度,则在 $Y=y$ 的条件下,X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$为(　　)

(A)$f_X(x)$.　(B)$f_Y(y)$.　(C)$f_X(x)f_Y(y)$.　(D)$\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.

二、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分)

(11) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx=$______.

(12)设 $f(u,v)$为二元可微函数,$z=f(x^y,y^x)$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=$______.

(13)二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$的通解为 $y=$______.

(14)设曲面 $\boldsymbol{\Sigma}$:$|x|+|y|+|z|=1$,则$\oiint_{\Sigma}(x+|y|)dS=$______.

(15)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为______.

(16)在区间(0,1)中随机地取两个数,则这两个数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$的概率为______.

三、解答题(本题共8小题,满分86分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(17)(本题满分11分)

求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,y\geqslant 0\}$上的最大值和最小值.

(18)(本题满分10分)

计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为曲面 $z=1-x^2-\frac{y^2}{4}(0\leqslant z\leqslant 1)$的上侧.

(19)(本题满分11分)

设函数 $f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内具有二阶导数且存在相等的最大值,$f(a)=g(a)$,$f(b)=g(b)$,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(20)(本题满分10分)

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在$(-\infty,+\infty)$内收敛,其和函数 $y(x)$满足

$$y''-2xy'-4y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

(Ⅰ)证明 $a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n,n=1,2,\cdots$;

(Ⅱ)求 $y(x)$的表达式.

(21)(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2 x_3 = 0 \end{cases} \qquad ①$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \qquad ②$$

有公共解,求 a 的值及所有公共解.

(22)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$,且 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^5 - 4\boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量,并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(Ⅰ)求 $P\{X > 2Y\}$;

(Ⅱ)求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(24)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta, \\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leqslant x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中参数 $\theta (0 < \theta < 1)$ 未知,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,$\overline{X}$ 是样本均值.

(Ⅰ)求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(Ⅱ)判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量,并说明理由.