2001 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $y = e^x(C_1\sin x + C_2\cos x)$($C_1, C_2$ 为任意常数)为某二阶常系数齐次线性微分方程的通解,则该方程为______.

(2) 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,则 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\, r)\big|_{(1,-2,2)} =$ ______.

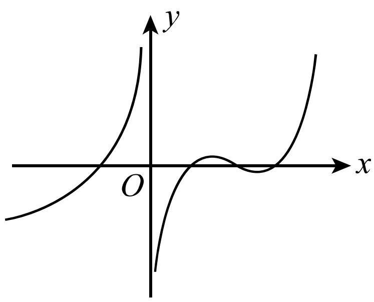
(3) 交换二次积分的积分次序:$\int_{-1}^{0} dy \int_{2}^{1-y} f(x,y)\,dx =$ ______.

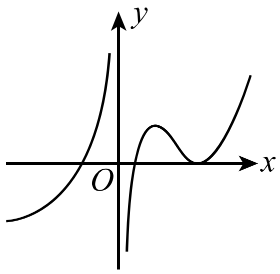
(4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵,则 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})^{-1} =$ ______.

(5) 设随机变量 X 的方差为 2,则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X - E(X)| \geqslant 2\} \leqslant$ ______.

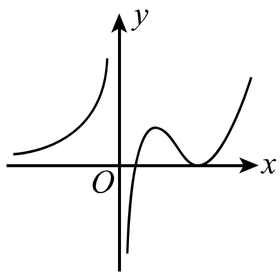
二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导,$y = f(x)$ 的图形如右图所示,则导函数 $y = f'(x)$ 的图形为(　　)

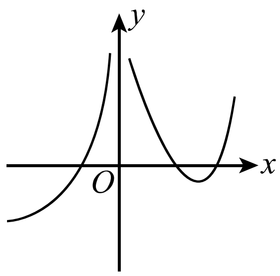




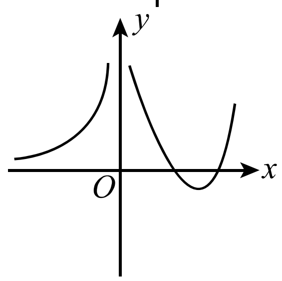
(A)



(B)



(C)



(D)

(2) 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义,且 $f_x'(0,0) = 3$, $f_y'(0,0) = 1$,则(　　)

(A) $dz\big|_{(0,0)} = 3dx + dy$.

(B) 曲面 $z = f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $(3,1,1)$.

(C) 曲线 $\begin{cases} z = f(x,y), \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(1,0,3)$.

(D) 曲线 $\begin{cases} z = f(x,y), \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(3,0,1)$.

(3) 设 $f(0) = 0$,则 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 可导的充要条件为(　　)

(A) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h^2} f(1 - \cos h)$ 存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h^2} f(h - \sin h)$ 存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}[f(2h) - f(h)]$ 存在.

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(　　)

(A) 合同且相似.　　(B) 合同但不相似.

(C) 不合同但相似.　　(D) 不合同且不相似.

(5) 将一枚硬币重复掷 n 次,以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数,则 X 和 Y 的相关系数等于(　　)

(A) -1.　　(B) 0.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) 1.

三、(本题满分 6 分)

求 $\int \frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$.

四、(本题满分 6 分)

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微,且 $f(1,1)=1$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$, $\varphi(x)=f(x,f(x,x))$.

求 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

五、(本题满分 8 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数,并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

六、(本题满分 7 分)

计算 $I=\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线,从 z 轴正向看去,L 为逆时针方向.

七、(本题满分 7 分)

设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$,试证:

(1) 对于 $(-1,1)$ 内的任一 $x\neq 0$,存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$,使 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

八、(本题满分 8 分)

设有一高度为 $h(t)$ (t 为时间) 的雪堆在融化过程中,其侧面满足方程 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$ (设长度单位为厘米,时间单位为小时),已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数0.9),问高度为

130(厘米)的雪堆全部融化需多少小时?

九、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,$\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\beta}_2=t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots$,$\boldsymbol{\beta}_s=t_1\boldsymbol{\alpha}_s+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$,其中 t_1,t_2 为实常数. 试问 t_1,t_2 满足什么关系时,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

十、(本题满分 8 分)

已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 3 维向量 $\boldsymbol{x}$,使得向量组 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关,且满足

$$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{Ax}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}.$$

(1)记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$,求 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$;

(2)计算行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

十一、(本题满分 7 分)

设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布,每位乘客在中途下车的概率为 $p(0<p<1)$,且中途下车与否相互独立. 以 Y 表示在中途下车的人数,求:

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下,中途有 m 人下车的概率;

(2) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

十二、(本题满分 7 分)

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,从该总体中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}(n\geqslant 2)$,其样本均值为 $\overline{X}=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}X_i$,求统计量 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$ 的数学期望 $E(Y)$.