2008 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(1)设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\,dt$,则 $f'(x)$ 的零点个数为(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(2)函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于(　　)

(A)$\boldsymbol{i}$.　　(B)$-\boldsymbol{i}$.　　(C)$\boldsymbol{j}$.　　(D)$-\boldsymbol{j}$.

(3)在下列微分方程中,以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$($C_1,C_2,C_3$ 为任意常数)为通解的是(　　)

(A)$y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B)$y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C)$y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D)$y'''-y''+4y'-4y=0$.

(4)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是(　　)

(A)若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B)若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C)若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D)若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛.

(5)设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$,则(　　)

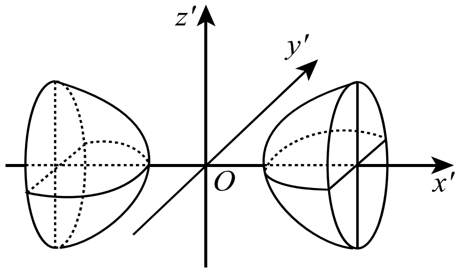
(A)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.　　(B)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(C)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.　　(D)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(6)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,如果二次曲面方程

$$(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$$

在正交变换下的标准方程的图形如图所示,则 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数为(　　)



(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(7)设随机变量 X,Y 独立同分布,且 X 的分布函数为 $F(x)$,则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为(　　)

(A)$F^2(x)$.　　(B)$F(x)F(y)$.

(C)$1-[1-F(x)]^2$.　　(D)$[1-F(x)][1-F(y)]$.

(8)设随机变量 $X\sim N(0,1)$,$Y\sim N(1,4)$,且相关系数 $\rho_{XY}=1$,则(　　)

(A)$P\{Y=-2X-1\}=1$.　　(B)$P\{Y=2X-1\}=1$.

(C)$P\{Y=-2X+1\}=1$.　　(D)$P\{Y=2X+1\}=1$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(9)微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$______.

(10)曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是______.

(11)已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛,在 $x=-4$ 处发散,则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为______.

(12)设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

(13)设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量,$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为______.

(14)设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布,则 $P\{X=E(X^2)\}=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

(16)(本题满分 9 分)

计算曲线积分 $\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y$,其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点$(0,0)$到点$(\pi,0)$的一段.

(17)(本题满分 11 分)

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\ x+y+3z=5,\end{cases}$ 求曲线 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

(18)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数,

(Ⅰ)利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导,且 $F'(x)=f(x)$;

(Ⅱ)当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时,证明 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.

(19)(本题满分 11 分)

将函数 $f(x)=1-x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成余弦级数,并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

(20)(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的转置. 证明:

(Ⅰ)秩 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则秩 $r(\boldsymbol{A})<2$.

(21)(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a^2 & 2a & 1\\ & & & a^2 & 2a\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$;

(Ⅱ)当 a 为何值时,该方程组有唯一解,并求 x_1;

(Ⅲ)当 a 为何值时,该方程组有无穷多解,并求通解.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{3}(i=-1,0,1)$,$Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 记 $Z=X+Y$.

(Ⅰ)求 $P\left\{Z\leqslant\dfrac{1}{2}\,\middle|\,X=0\right\}$;

(Ⅱ)求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\qquad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\qquad T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

(Ⅰ)证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(Ⅱ)当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,求 $D(T)$.