1991 年全国硕士研究生招生考试

数 学 (一)

(科目代码:301)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $\begin{cases} x = 1 + t^2, \\ y = \cos t, \end{cases}$ 则 $\dfrac{d^2 y}{dx^2} =$ ________.

(2) 由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(1, 0, -1)$ 处的全微分 $dz =$ ________.

(3) 已知两条直线方程为 $L_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-3}{-1}$, $L_2: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$,则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是________.

(4) 已知当 $x \to 0$ 时,$(1 + ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小,则常数 $a =$ ________.

(5) 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1} =$ ________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 曲线 $y = \dfrac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$ (   ).

(A) 没有渐近线 (B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线 (D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

(2) 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\dfrac{t}{2}\right) dt + \ln 2$,则 $f(x)$ 等于(   ).

(A) $e^x \ln 2$ (B) $e^{2x} \ln 2$

(C) $e^x + \ln 2$ (D) $e^{2x} + \ln 2$

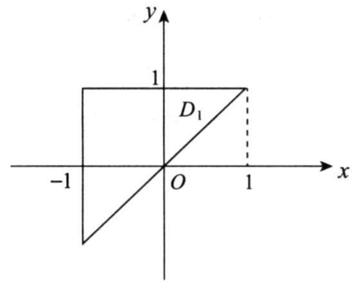
(3) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 等于(   ).

(A) 3 (B) 7 (C) 8 (D) 9

(4) 设 D 是平面 xOy 上以 $(1,1)$,$(-1,1)$,$(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域,D_1 是 D 在第一象限的部分,则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 等于(　　).

(A)$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$　　(B)$2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(C)$4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$　　(D)0



二(4) 题图

(5) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,则必有(　　).

(A)$\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$　　(B)$\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$

(C)$\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$　　(D)$\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

(2) 设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量,求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

(3) 求 $\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v$,其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=4$ 所围成的立体.

四、(本题满分 6 分)

在过点 $O(0,0)$ 和点 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x\,(a>0)$ 中,求一条曲线 L,使沿该曲线从 O 到 A 的曲线积分 $\int_L (1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$ 的值最小.

五、(本题满分 8 分)

将函数 $f(x)=2+|x|\,(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数,并由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

六、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\mathrm{d}x=f(0)$,证明:在$(0,1)$内存在一点 c,使得 $f'(c)=0$.

七、(本题满分 8 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)$ 及 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)$.

(1)a,b 为何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示?

(2)a,b 为何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 唯一线性表示?并写出该表达式.

八、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,证明:$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|>1$.

九、(本题满分 8 分)

在上半平面求一条向上凹的曲线,其上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数(Q 是法线与 x 轴的交点),且曲线在点(1,1)处的切线与 x 轴平行.

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)

(1) 设随机变量 X 服从均值为 2、方差为 σ^2 的正态分布,且 $P\{2<X<4\}=0.3$,则 $P\{X<0\}=$ ________.

(2) 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}\ (a>0)$ 内掷一点,点落在半圆内任何区域的概率与该区域的面积成正比,则原点与该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为________.

十一、(本题满分 6 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+2Y$ 的分布函数.