

2000 年数学(一) 真题解析

一、填空题

(1) 【答案】 $\frac{\pi}{4}$.

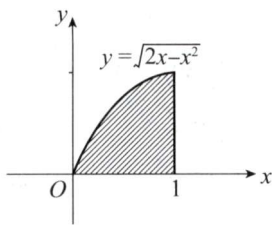
【解】 方法一

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx &= \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} d(x-1) = \int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \stackrel{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = I_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

方法二 根据定积分的几何应用, $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx$ 即以曲线

$y = \sqrt{2x-x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$) 为曲边的曲边梯形的面积.

如图所示, 显然 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.



—(1) 题图

(2) 【答案】 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6}$.

【解】 $n = \{F'_x, F'_y, F'_z\} |_{(1,-2,2)} = \{2x, 4y, 6z\} |_{(1,-2,2)} = \{2, -8, 12\}$,

则曲面在点 $(1, -2, 2)$ 处的法线方程为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6}$.

(3) 【答案】 $y = \frac{C_1}{x^2} + C_2$ (C_1, C_2 为任意常数).

【解】 方法一 由 $xy'' + 3y' = 0$, 得 $y'' + \frac{3}{x}y' = 0$.

解得 $y' = C_0 e^{-\int \frac{3}{x} dx} = \frac{C_0}{x^3}$, 积分得原方程的通解为 $y = \frac{C_1}{x^2} + C_2$ (C_1, C_2 为任意常数).

方法二 由 $xy'' + 3y' = 0$, 得 $x^3 y'' + 3x^2 y' = 0$ 或 $(x^3 y')' = 0$.

于是 $x^3 y' = C_0$, 解得 $y' = \frac{C_0}{x^3}$, 积分得原方程通解为 $y = \frac{C_1}{x^2} + C_2$ (C_1, C_2 为任意常数).

(4) 【答案】 -1 .

【解】 因为原方程组无解, 所以 $r(A) < r(\bar{A})$, 而 $r(\bar{A}) \leq 3$, 所以 $r(A) < 3$.

于是 $|A| = 0$, 解得 $a = -1$ 或 $a = 3$.

当 $a = 3$ 时, 由 $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$

得 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, 原方程组有无数个解, 所以 $a \neq 3$, 故 $a = -1$.

(5) 【答案】 $\frac{2}{3}$.

【解】 $P(\bar{AB}) = P(A) - P(AB)$, $P(\bar{AB}) = P(B) - P(AB)$,

由 $P(\overline{AB}) = P(\overline{A}B)$, 得 $P(A) = P(B)$.

由 $P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B) = \frac{1}{9}$, 得 $P(A+B) = \frac{8}{9}$.

又 $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 2P(A) - P^2(A)$,

得 $P^2(A) - 2P(A) + \frac{8}{9} = 0$, 解得 $P(A) = \frac{2}{3}$.

二、选择题

(6) 【答案】 (A).

【解】 由 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 得 $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} < 0$,

即 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 为减函数, 当 $a < x < b$ 时, 有 $\frac{f(a)}{g(a)} > \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(b)}{g(b)}$.

于是 $f(x)g(b) > f(b)g(x)$, 应选(A).

方法点评: 本题考查函数单调性.

若 $f'(x) > 0$ 或 $f'(x) < 0$ 时, $f(x)$ 严格递增或严格递减.

注意如下技巧: 若题中出现 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$ 时, 一般构造辅助函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$;

若题中出现 $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, 一般构造辅助函数 $f(x)g(x)$.

(7) 【答案】 (C).

【解】 由对面积的曲面积分的对称性质, 得

$$\iint_S x \, dS = \iint_S y \, dS = 0, \quad \iint_S z \, dS = 4 \iint_{S_1} z \, dS,$$

又因为 $\iint_{S_1} x \, dS = \iint_{S_1} y \, dS = \iint_{S_1} z \, dS$, 所以 $\iint_S z \, dS = 4 \iint_{S_1} x \, dS$, 应选(C).

方法点评: 二重积分、三重积分、对弧长的曲线积分、对面积的曲面积分有类似的对称性, 对面积的曲面积分的对称性如下:

若 Σ 关于 xOy 平面对称, 其中 xOy 平面上方为 Σ_1 , 则有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \, dS = \begin{cases} 0, & f(x, y, -z) = -f(x, y, z), \\ 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) \, dS, & f(x, y, -z) = f(x, y, z). \end{cases}$$

其他两种情形同上.

(8) 【答案】 (D).

【解】 方法一 令 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 令 $S'_n = (u_1 + u_2) + (u_2 + u_3) + \cdots + (u_n + u_{n+1}) = 2S_n - u_1 + u_{n+1}$.

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = 2S - u_1$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ 收敛, 应选(D).

方法二 取 $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)}$ 发散, (A) 不对;

取 $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, (B) 不对;

取 $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, (C) 不对, 应选(D).

(9) 【答案】 (D).

【解】 令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$.

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 得 $r(A) = m$.

若 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性无关, 则 $r(B) = m$, 因为 $r(A) = r(B) = m$, 所以矩阵 A, B 等价;

反之, 若矩阵 A, B 等价, 则 $r(A) = r(B)$, 因为 $r(A) = m$, 所以 $r(B) = m$, 又因为矩阵的秩与矩阵列向量组的秩相等, 所以 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 的秩为 m , 即 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性无关, 应选(D).

(10) 【答案】 (B).

【解】 ξ, η 不相关的充分必要条件是 $\text{Cov}(\xi, \eta) = 0$.

而 $\text{Cov}(\xi, \eta) = \text{Cov}(X + Y, X - Y) = \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(Y, Y) = D(X) - D(Y)$,

又 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, $D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$,

所以 ξ, η 不相关的充分必要条件是 $D(X) = D(Y)$,

即 $E(X^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2$, 应选(B).

三、解答题

(11) 【解】 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 0 + 1 = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 2 - 1 = 1,$$

$$\text{得} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 1.$$

(12) 【解】 由复合函数求偏导法则, 得

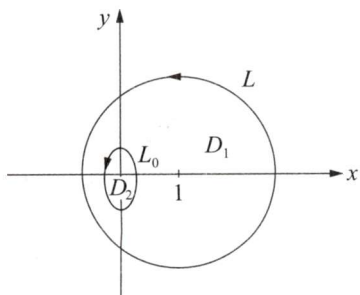
$$\frac{\partial z}{\partial x} = y f'_1 + \frac{1}{y} f'_2 - \frac{y}{x^2} g',$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f'_1 + y \left(x f''_{11} - \frac{x}{y^2} f''_{12} \right) - \frac{1}{y^2} f'_2 + \frac{1}{y} \left(x f''_{21} - \frac{x}{y^2} f''_{22} \right) - \frac{1}{x^2} g' - \frac{y}{x^3} g'' \\ &= f'_1 - \frac{1}{y^2} f'_2 + x y f''_{11} - \frac{x}{y^3} f''_{22} - \frac{1}{x^2} g' - \frac{y}{x^3} g''. \end{aligned}$$

(13) 【解】 令 $P(x, y) = \frac{-y}{4x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{4x^2 + y^2}$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} \quad ((x, y) \neq (0, 0)).$$

如图所示, 作 $L_0: 4x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$ 且 L_0 位于 L 内, 取逆时针方向), 设 L_0 与 L 围成的区域为 D_1 , L_0 围成的区域为 D_2 , 由格林公式得



三(13) 题图

$$\oint_{L+L_0^-} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} &= \oint_{L_0} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \frac{1}{r^2} \oint_{L_0} x dy - y dx \\ &= \frac{1}{r^2} \iint_{D_2} 2d\sigma = \frac{2}{r^2} \iint_{D_2} d\sigma = \frac{2}{r^2} \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{r}{2} = \pi. \end{aligned}$$

(14) 【解】 $P = xf(x)$, $Q = -xyf(x)$, $R = -e^{2x}z$,

由高斯公式得

$$\begin{aligned} \oiint_S xf(x) dy dz - xyf(x) dz dx - e^{2x}z dx dy &= \pm \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \\ &= \pm \iiint_{\Omega} [f(x) + xf'(x) - xf(x) - e^{2x}] dv = 0, \text{其中 } \Omega \text{ 为 } S \text{ 围成的有界闭区域.} \end{aligned}$$

由曲面 S 的任意性, 得 $f(x) + xf'(x) - xf(x) - e^{2x} = 0$,

$$\text{整理得 } f'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) f(x) = \frac{e^{2x}}{x},$$

$$\text{解得 } f(x) = \left[\int \frac{e^{2x}}{x} e^{\left(\frac{1}{x}-1\right) dx} dx + C \right] e^{-\left(\frac{1}{x}-1\right) dx} = \frac{e^x(e^x + C)}{x}.$$

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \text{ 所以 } C = -1, \text{ 于是 } f(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{x}.$$

(15) 【解】 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} = \frac{1}{3}$ 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{x^n}{n}$ 的收敛半

径为 $R = 3$, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{x^n}{n}$ 的收敛区间为 $(-3, 3)$.

$$\text{当 } x = 3 \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{3^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n},$$

因为 $\frac{3^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{2n} > 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{3^n}{n}$ 发散,

即 $x = 3$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{x^n}{n}$ 发散;

当 $x = -3$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{(-3)^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{(-1)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n}$,

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{2^{n+1}}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1} \right] / \left[\frac{2^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n} \right] \right\} = \frac{2}{3} < 1 \text{ 得级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{n}$ 收敛, 再由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛得 $x = -3$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{x^n}{n}$ 收敛.

(16) 【解】 设球体为 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, 点 $P_0(0, 0, R)$ 为球面 Σ 上一点, 且设 Ω 的重心坐标为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由对称性得 $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$.

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z \cdot k[x^2 + y^2 + (z - R)^2] dv}{\iiint_{\Omega} k[x^2 + y^2 + (z - R)^2] dv} = \frac{\iiint_{\Omega} z[x^2 + y^2 + (z - R)^2] dv}{\iiint_{\Omega} [x^2 + y^2 + (z - R)^2] dv},$$

$$\begin{aligned} \text{由奇偶性得 } \iiint_{\Omega} [x^2 + y^2 + (z - R)^2] dv &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv + \iiint_{\Omega} R^2 dv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^4 \sin \varphi dr + \frac{4\pi R^5}{3} \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr + \frac{4\pi R^5}{3} = \frac{32\pi R^5}{15}, \end{aligned}$$

$$\iiint_{\Omega} z[x^2 + y^2 + (z - R)^2] dv = -2R \iiint_{\Omega} z^2 dv = -\frac{2R}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = -\frac{8\pi R^6}{15},$$

于是 $\bar{z} = -\frac{R}{4}$, 故 Ω 的重心坐标为 $(0, 0, -\frac{R}{4})$.

方法点评: 本题考查三重积分的物理应用.

积分学的物理应用是数学一的考点, 主要有:

(1) 重心

设 D 为平面区域, 面密度为 $\rho(x, y)$, 则重心坐标为

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y\rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma};$$

设 Ω 为几何体, 体密度为 $\rho(x, y, z)$, 则重心坐标为

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z) dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_{\Omega} y\rho(x, y, z) dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z\rho(x, y, z) dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv};$$

设 L 为平面曲线段, 线密度为 $\rho(x, y)$, 则重心坐标为

$$\bar{x} = \frac{\int_L x\rho(x, y) ds}{\int_L \rho(x, y) ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int_L y\rho(x, y) ds}{\int_L \rho(x, y) ds};$$

设 Σ 为曲面, 面密度为 $\rho(x, y, z)$, 则重心坐标为

$$\bar{x} = \frac{\iint_{\Sigma} x\rho(x, y, z) dS}{\iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_{\Sigma} y\rho(x, y, z) dS}{\iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS}, \quad \bar{z} = \frac{\iint_{\Sigma} z\rho(x, y, z) dS}{\iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS}.$$

(2) 转动惯量

设 D 为平面区域, 面密度为 $\rho(x, y)$, 则转动惯量为

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) d\sigma, \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) d\sigma, \quad I_o = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) d\sigma.$$

对几何体、空间曲线、空间曲面绕某直线旋转的转动惯量有类似公式.

(17) 【解】 令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $F(0) = F(\pi) = 0$.

由罗尔定理, 存在 $c \in (0, \pi)$, 使得 $F'(c) = 0$, 即 $f(c) = 0$.

用反证法. 不妨设在 $(0, \pi)$ 内 $f(x)$ 除 c 外没有其他零点, 则 $f(x)$ 在 $(0, c)$ 与 (c, π) 内异号, 不妨设当 $x \in (0, c)$ 时, $f(x) > 0$; 当 $x \in (c, \pi)$ 时, $f(x) < 0$.

$$\int_0^\pi (\cos x - \cos c) f(x) dx = \int_0^c (\cos x - \cos c) f(x) dx + \int_c^\pi (\cos x - \cos c) f(x) dx,$$

因为 $(\cos x - \cos c) f(x)$ 在 $[0, c]$ 上连续, $(\cos x - \cos c) f(x) \geq 0$ 且不恒为零, 所以

$$\int_0^c (\cos x - \cos c) f(x) dx > 0.$$

同理 $\int_c^\pi (\cos x - \cos c) f(x) dx > 0$, 故 $\int_0^\pi (\cos x - \cos c) f(x) dx > 0$.

而 $\int_0^\pi (\cos x - \cos c) f(x) dx = \int_0^\pi \cos x f(x) dx - \cos c \int_0^\pi f(x) dx = 0$, 矛盾, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内至少有两个零点.

(18) 【解】 $|A^*| = 8$, 由 $|A^*| = |A|^3$, 得 $|A| = 2$.

由 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 得 $AB = B + 3A$, 解得 $(A - E)B = 3A$.

于是 $B = 3(A - E)^{-1}A = 3[A^{-1}(A - E)]^{-1} = 6(2E - 2A^{-1})^{-1} = 6(2E - A^*)^{-1}$,

$$\text{因为 } 2E - A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \text{ 所以 } (2E - A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

$$\text{于是 } B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(19) 【解】 (I) 由题意得

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right), \\ y_{n+1} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right), \end{cases} \quad \text{整理得} \begin{cases} x_{n+1} = \frac{9}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n, \\ y_{n+1} = \frac{1}{10}x_n + \frac{3}{5}y_n. \end{cases}$$

$$\text{令 } A = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \text{ 则 } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

(II) 令 $P = (\eta_1, \eta_2) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 因为 η_1, η_2 不成比例, 所以 η_1, η_2 线性无关.

由 $A\eta_1 = \eta_1$, 得 η_1 为 A 的属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量;

由 $A\eta_2 = \frac{1}{2}\eta_2$, 得 η_2 为 A 的属于特征值 $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ 的特征向量.

$$(III) \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

$$\text{由 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ 得 } A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ 于是 } A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$\text{而 } P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 因此 } A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 + \frac{1}{2^n} & 4 - \frac{1}{2^{n-2}} \\ 1 - \frac{1}{2^n} & 1 + \frac{1}{2^{n-2}} \end{pmatrix},$$

$$\text{故 } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 - \frac{3}{2^n} \\ 2 + \frac{3}{2^n} \end{pmatrix}.$$

(20) 【解】 随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\} = p(1-p)^{k-1} \quad (k=1, 2, \cdots),$$

$$\text{则 } E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP\{X=k\} = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}.$$

$$\text{令 } S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \quad (|x| < 1), \text{ 则 } S(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$\text{于是 } E(X) = pS(1-p) = \frac{1}{p}; E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P\{X=k\} = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1},$$

$$\text{令 } S_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1},$$

$$\begin{aligned} \text{则 } S_1(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \\ &= x \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} + \frac{1}{(1-x)^2} = x \left(\sum_{k=2}^{\infty} x^k \right)'' + \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= x \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \end{aligned}$$

$$\text{则 } E(X^2) = pS_1(1-p) = \frac{2-p}{p^2}, \text{ 于是 } D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

(21) 【解】 似然函数为

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \cdots f(x_n; \theta) = 2^n e^{-2 \sum_{i=1}^n x_i + 2n\theta} \quad (x_i > \theta, i=1, 2, \cdots, n),$$

$$\ln L(\theta) = n \ln 2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i + 2n\theta,$$

因为 $\frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = 2n > 0$, 所以 $\ln L(\theta)$ 关于 θ 为增函数,

于是 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$.