1994 年数学(一)真题解析

一、填空题

(1)【答案】 $\frac{1}{6}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x\tan x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{6}.$$

(2)【答案】 $2x+y-4=0$.

【解】 令 $F=2xy+z-e^z-3$,

法向量为 $\boldsymbol{n}=\{2y,2x,1-e^z\}_{(1,2,0)}=\{4,2,0\}$,

则切平面为 $4(x-1)+2(y-2)+0(z-0)=0$,即 $2x+y-4=0$.

(3)【答案】 $\frac{\pi^2}{e^2}$.

【解】 $\frac{\partial u}{\partial x}=-e^{-x}\sin\frac{x}{y}+\frac{e^{-x}}{y}\cos\frac{x}{y}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{x e^{-x}}{y^2}\cos\frac{x}{y}-\frac{e^{-x}}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{x e^{-x}}{y^3}\sin\frac{x}{y},$$

故 $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{\left(2,\frac{1}{\pi}\right)}=\left(\frac{\pi}{e}\right)^2$.

(4)【答案】 $\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$.

【解】 由对称性得

$$\iint_D x^2\,dx\,dy=\iint_D y^2\,dx\,dy=\frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3\,dr=\frac{\pi R^4}{4},$$

于是 $\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy=\frac{1}{a^2}\iint_D x^2\,dx\,dy+\frac{1}{b^2}\iint_D y^2\,dx\,dy$

$$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\cdot\frac{\pi R^4}{4}=\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

(5)【答案】 $3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$.

【解】 因为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=3$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$,

所以 $\boldsymbol{A}^n=3^{n-1}\boldsymbol{A}=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$.

二、选择题

(1)**【答案】** (D).

【解】 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\,\mathrm{d}x=0$,

$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,\mathrm{d}x>0$,

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,\mathrm{d}x<0$,

则 $P<M<N$,应选(D).

(2)**【答案】** (D).

【解】 取 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$ 得 $f_x'(0,0)=0$,同理 $f_y'(0,0)=0$,即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=x}}f(x,y)=\dfrac{1}{2}\neq\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=-x}}f(x,y)=-\dfrac{1}{2}$,所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在,故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续;

令 $f(x,y)=|x|+|y|$,显然 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续,

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在,所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处对 x 不可偏导,同理 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处对 y 也不可偏导.

故 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可偏导既非 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续的充分条件也非必要条件,应选(D).

(3)**【答案】** (C).

【解】 $\left|(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\left(a_n^2+\dfrac{1}{n^2+\lambda}\right)$,

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+\lambda}$ 都收敛,由正项级数的比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right|$ 收敛,

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 绝对收敛,应选(C).

(4)**【答案】** (D).

【解】 由 $2=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{a\tan x}{x}+\dfrac{b(1-\cos x)}{x}}{\dfrac{c\ln(1-2x)}{x}+\dfrac{d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}{x}}=\dfrac{a}{-2c}$,

得 $a=-4c$,应选(D).

(5)**【答案】** (C).

【解】 **方法一**

由 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)-(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$ 得向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线

性相关,(A) 不对;

由$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$得向量组$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$线性相关,(B) 不对;

由$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$得向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$线性相关,(D) 不对,应选(C).

方法二 令$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关,所以$r(\boldsymbol{A})=4$.

令$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)$,则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$,

因为$\begin{vmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$,得$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$满秩,

所以$r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=4$,故$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关,应选(C).

三、

(1)【解】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{\cos t^2-2t^2\sin t^2-2t\cdot\dfrac{1}{2t}\cos t^2}{-2t\sin t^2}=t$,则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$;

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{-2t\sin t^2}$,则$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

(2)【解】 $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln(1+x)-\dfrac{1}{4}\ln(1-x)+\dfrac{1}{2}\arctan x-x,\quad f(0)=0$,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{2(1-x^2)}+\frac{1}{2(1+x^2)}-1=\frac{1}{1-x^4}-1\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(x^4)^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}\quad(-1<x<1),\end{aligned}$$

于是$f(x)=f(x)-f(0)=\displaystyle\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\quad(-1<x<1)$.

(3)【解】 $$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{1}{2}\int\frac{(1-\cos x)\mathrm{d}x}{\sin^3x}\\&=\frac{1}{2}\int\csc^3x\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^3x}=\frac{1}{2}\int\csc^3x\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4\sin^2x},\end{aligned}$$

令$I=\displaystyle\int\csc^3x\,\mathrm{d}x$,则

$I=-\displaystyle\int\csc x\,\mathrm{d}(\cot x)=-\csc x\cot x-\int\csc x\cot^2x\,\mathrm{d}x$

$=-\csc x\cot x-I+\ln|\csc x-\cot x|$,

$I=\dfrac{1}{2}(-\csc x\cot x+\ln|\csc x-\cot x|)+C$,

故$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}=\frac{1}{4}(-\csc x\cot x+\ln|\csc x-\cot x|)+\frac{1}{4\sin^2x}+C$.

四、【解】 令$\Sigma_1:z=-R(x^2+y^2\leqslant R^2)$,取下侧,

$\Sigma_2:z=R(x^2+y^2\leqslant R^2)$,取上侧,

$\Sigma_3: x^2+y^2=R^2(-R\leqslant z\leqslant R)$，取外侧，

显然$\iint\limits_{\Sigma_3}\dfrac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=0$，

因为$\dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$为z的偶函数，所以$\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}\dfrac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=0$，故$\iint\limits_{S}\dfrac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=0$.

于是$I=\iint\limits_{S}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_1}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}+\iint\limits_{\Sigma_2}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}+\iint\limits_{\Sigma_3}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$，

再由$\iint\limits_{\Sigma_1}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=0$，$\iint\limits_{\Sigma_2}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=0$，得$I=\iint\limits_{\Sigma_3}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$.

令$\Sigma_3^{(1)}: x^2+y^2=R^2(x\geqslant 0)$，取前侧，因为$\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$为$x$的奇函数，

所以$I=\iint\limits_{\Sigma_3}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=2\iint\limits_{\Sigma_3^{(1)}}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$

$$=2\int_{-R}^{R}\mathrm{d}y\int_{-R}^{R}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}z=8\int_0^R\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\int_0^R\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=8\times\frac{\pi R^2}{4}\times\frac{1}{R}\arctan\frac{z}{R}\Big|_0^R=\frac{\pi^2 R}{2}.$$

五、【解】 令$P(x,y)=xy(x+y)-f(x)y$，$Q(x,y)=f'(x)+x^2y$，

由$[xy(x+y)-f(x)y]\mathrm{d}x+[f'(x)+x^2y]\mathrm{d}y=0$为全微分方程得$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，

即$x^2+2xy-f(x)=f''(x)+2xy$，整理得$f''(x)+f(x)=x^2$，

特征方程为$\lambda^2+1=0$，特征根为$\lambda_1=-\mathrm{i},\lambda_2=\mathrm{i}$，

显然方程$f''(x)+f(x)=x^2$有特解$f_0(x)=x^2-2$，

则通解为$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$，

由$f(0)=0,f'(0)=1$得$C_1=2,C_2=1$，故$f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$.

于是原方程为

$$[xy^2-(2\cos x+\sin x)y+2y]\mathrm{d}x+(-2\sin x+\cos x+2x+x^2y)\mathrm{d}y=0,$$

其通解是$-2y\sin x+y\cos x+\dfrac{x^2y^2}{2}+2xy=C$，其中$C$为任意常数.

六、【证明】 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$得$f(0)=0,f'(0)=0$，

由$f(x)$在$x=0$的某一邻域内具有二阶连续导数得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2),$$

从而$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{f''(0)}{2!}\cdot\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$，于是$\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|\sim\dfrac{|f''(0)|}{2!}\cdot\dfrac{1}{n^2}$，

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|f''(0)|}{2!}\cdot\dfrac{1}{n^2}$收敛，所以由正项级数比较审敛法得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|$收敛，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$绝对收敛.

七、【解】 $\overrightarrow{AB}=\{-1,1,1\}$，$AB$所在的直线$L$的方程为$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$，

任取$M(x,y,z)\in S$，其所在的圆对应的直线L上的点为$M_0(x_0,y_0,z)$，圆心为$T(0,0,z)$，

由$|MT|=|M_0T|$得$x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$，

因为$M_0(x_0,y_0,z)\in L$，所以$\dfrac{x_0-1}{-1}=\dfrac{y_0}{1}=\dfrac{z}{1}$，解得$x_0=1-z,y_0=z$，

故曲面 S 的方程为 $x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$，即 $S: x^2+y^2=1-2z+2z^2$.

所求的体积为

$$V=\int_0^1 \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1-2z+2z^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^1(1-2z+2z^2)\mathrm{d}z=\frac{2\pi}{3}.$$

八、【解】 (1) 由(Ⅰ)有 $\begin{cases}x_1=-x_2,\\x_4=x_2.\end{cases}$ 分别取 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，得(Ⅰ)的基础解系为

$$(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

(2) 有非零公共解.(Ⅱ)的通解可表示为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(-k_2,k_1+2k_2,k_1+2k_2,k_2)^{\mathrm{T}}$，将其代入(Ⅰ)得

$$\begin{cases}-k_2+(k_1+2k_2)=0,\\(k_1+2k_2)-k_2=0,\end{cases}$$

解得 $k_1=-k_2$.

当 $k_1=-k_2\neq 0$ 时，(Ⅱ)的通解化为

$$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}=k_2[(0,-1,-1,0)^{\mathrm{T}}+(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}]=k_2(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}},$$

此向量即是(Ⅰ)与(Ⅱ)的非零公共解，故方程组(Ⅰ)(Ⅱ)的所有非零公共解是

$$k(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}(k\ \text{是不为零的任意常数}).$$

九、【证明】 由 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 得 $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，

因为 $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有非零元素，不妨设 $a_{11}\neq 0$，

故 $|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2>0$.

十、填空题

(1)【答案】 $1-p$.

【解】 由 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$ 得

$P(AB)=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$，

即 $1-P(A)-P(B)=0$，解得 $P(B)=1-P(A)=1-p$.

(2)【答案】 $Z\sim\begin{pmatrix}0&1\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

【解】 Z 的可能取值为 0,1,

$$P\{Z=0\}=P\{\max(X,Y)=0\}=P\{X=0,Y=0\}$$

$$=P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{1}{4},$$

$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=\frac{3}{4}$，则 Z 的分布律为 $Z\sim\begin{pmatrix}0&1\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

十一、【解】 (1) $E(Z)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}$,

又 $D(X)=9,D(Y)=16,\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}=\left(-\frac{1}{2}\right)\times 3\times 4=-6$,

则

$$D(Z)=\left(\frac{1}{3}\right)^2D(X)+\left(\frac{1}{2}\right)^2D(Y)+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+\frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,Y)=1+4-2=3.$$

(2)$\mathrm{Cov}(X,Z)=\mathrm{Cov}\left(X,\frac{X}{3}\right)+\mathrm{Cov}\left(X,\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,X)+\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)$,

又 $\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)=9$，$\mathrm{Cov}(X,Y)=-6$，

则 $\mathrm{Cov}(X,Z)=\frac{1}{3}\times 9+\frac{1}{2}\times(-6)=3-3=0$.

所以
$$\rho_{XZ}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Z)}}=0.$$

(3)$\begin{pmatrix}X\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\xlongequal{\triangle}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且(X,Y)服从二维正态分布，故(X,Z)也服从二维正态分布，又因为 $\rho_{XZ}=0$，所以 X 与 Z 相互独立.