1999 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$ ______.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin(x-t)^2\mathrm{d}t=$ ______.

(3) $y''-4y=\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y=$ ______.

(4) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为 1,则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值是______.

(5) 设两两相互独立的三事件 A,B 和 C 满足条件:$ABC=\varnothing,P(A)=P(B)=P(C)<\dfrac{1}{2}$,且已知

$P(A\cup B\cup C)=\dfrac{9}{16}$,则 $P(A)=$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则(　　)

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时,$F(x)$ 必是单调增函数.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　)

(A) 极限不存在.　　(B) 极限存在,但不连续.

(C) 连续,但不可导.　　(D) 可导.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2},\\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x<1,\end{cases}$ $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x,\ -\infty<x<+\infty$,其中

$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x,(n=0,1,2,\cdots)$,则 $S\left(-\dfrac{5}{2}\right)$等于(　　)

(A) $\dfrac{1}{2}$.　　(B) $-\dfrac{1}{2}$.　　(C) $\dfrac{3}{4}$.　　(D) $-\dfrac{3}{4}$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,则(　　)

(A) 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$.

(B) 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$.

(C) 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$.

(D) 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$.

(5) 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$,则(　　)

(A) $P\{X+Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.　　　　(B) $P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$.

(C) $P\{X-Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.　　　　(D) $P\{X-Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$.

三、(本题满分 5 分)

设 $y=y(x)$,$z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数,其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数,求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

四、(本题满分 5 分)

求 $I=\int_L[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$,其中 a,b 为正的常数,L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

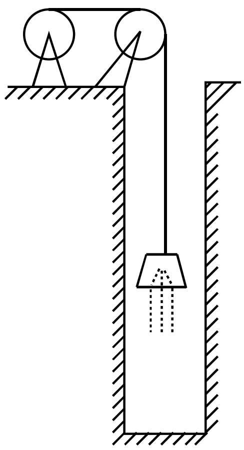
五、(本题满分 6 分)

设函数 $y(x)(x\geqslant 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0$,$y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线,上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1,区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2,并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1,求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

六、(本题满分 6 分)

试证:当 $x>0$ 时,$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

七、(本题满分 6 分)



为清除井底的污泥,用缆绳将抓斗放入井底,抓起污泥后提出井口. 已知井深 30m,抓斗自重 400N,缆绳每米重 50N,抓斗抓起的污泥重 2000N,提升速度为 3m/s,在提升过程中,污泥以 20N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉. 现将抓起污泥的抓斗提升至井口,问克服重力需作多少焦耳的功?

(说明:①1N × 1m = 1J;m,N,s,J 分别表示米,牛顿,秒,焦耳. ② 抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)

八、(本题满分 7 分)

设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分,点 $P(x,y,z)\in S$,π 为 S 在点 P 处的切平面,$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离,求 $\iint\limits_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

九、(本题满分 7 分)

设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$,

(1) 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值;

(2) 试证:对任意的常数 $\lambda>0$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

十、(本题满分 8 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$,其行列式 $|\boldsymbol{A}|=-1$,又 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值 λ_0,属于 λ_0 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,求 a,b,c 和 λ_0 的值.

十一、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶实对称矩阵且正定,$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 实矩阵,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵,试证:$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $r(\boldsymbol{B})=n$.

十二、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,下表列出了二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值,试将其余数值填入表中的空白处.

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

十三、(本题满分 6 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$.