2019 年数学(一)真题解析

一、选择题

(1)**【答案】** (C).

【解】 **方法一**

由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sec^2 x}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$得

$x-\tan x\sim -\dfrac{1}{3}x^3$,故$x-\tan x$为 3 阶无穷小,即$k=3$,应选(C).

方法二

由$\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$得$x-\tan x\sim -\dfrac{1}{3}x^3(x\to 0)$,

故$k=3$,应选(C).

(2)**【答案】** (B).

【解】 由$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}|x|=0$得$f'_-(0)=0$,

由$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$得$f'_+(0)$不存在,

故$x=0$为$f(x)$的不可导点;

当$x<0$时,$f(x)<0=f(0)$,当$0<x<1$,$f(x)<0=f(0)$,

故$x=0$为$f(x)$的极大值点,应选(B).

(3)**【答案】** (D).

【解】 因为$\{u_n\}$单调增加有界,所以$\{u_n\}$极限存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$,因为$\sum\limits_{k=1}^{n}(u_{k+1}^2-u_k^2)=u_{n+1}^2-u_1^2$.

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(u_{k+1}^2-u_k^2)=\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}^2-u_1^2)=A^2-u_1^2$,应选(D).

(4)**【答案】** (D).

【解】 因为曲线积分与路径无关,所以$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{1}{y^2}$,且$P(x,y)$,$Q(x,y)$在上半平面内连续可偏导,所以可取$P(x,y)=x-\dfrac{1}{y}$,应选(D).

(5)**【答案】** (C).

【解】 令$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0})$,

由$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$得$(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=(\lambda^2+\lambda-2)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

从而有$\lambda^2+\lambda-2=0$,即$\lambda=-2$或$\lambda=1$,

因为$|\boldsymbol{A}|=4$,所以$\lambda_1=1$,$\lambda_2=\lambda_3=-2$,

故二次型$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$的规范形为$y_1^2-y_2^2-y_3^2$,应选(C).

(6)**【答案】** (A).

【解】 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{pmatrix}$，

因为任两个平面不平行，所以 $r(\boldsymbol{A}) \geqslant 2$，

又因为三个平面没有公共的交点，所以 $r(\boldsymbol{A}) < r(\overline{\boldsymbol{A}})$，

再由 $r(\overline{\boldsymbol{A}}) \leqslant 3$ 得 $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，应选(A).

(7)**【答案】** (C).

【解】 由减法公式得 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$， $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$，

则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是 $P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$，

即 $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$，应选(C).

(8)**【答案】** (A).

【解】 因为 $X \sim N(\mu,\sigma^2), Y \sim N(\mu,\sigma^2)$ 且 X,Y 相互独立，

所以 $X-Y \sim N(0,2\sigma^2)$，或 $\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$，

故 $P\{|X-Y|<1\}=P\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}<\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}<\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}=2\Phi\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-1$，

即 $P\{|X-Y|<1\}$ 与 μ 无关，与 σ^2 有关，应选(A).

二、填空题

(9)**【答案】** $\dfrac{y}{\cos x}+\dfrac{x}{\cos y}$.

【解】 由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\cos x \cdot f'(\sin y-\sin x)+y$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\cos y \cdot f'(\sin y-\sin x)+x,$$

得 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\cos x}+\dfrac{x}{\cos y}$.

(10)**【答案】** $\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}$.

【解】 **方法一** 由 $2yy'-y^2-2=0$ 得 $\dfrac{2y\,\mathrm{d}y}{y^2+2}=\mathrm{d}x$，

积分得 $\ln(y^2+2)=x+C$，

再由 $y(0)=1$ 得 $C=\ln 3$，即 $\ln(y^2+2)=\ln(3\mathrm{e}^x)$，

从而 $y^2+2=3\mathrm{e}^x$，故 $y=\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}$.

方法二 令 $y^2=u$，则原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u=2$，

解得 $u=\left(\int 2\mathrm{e}^{\int -\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\mathrm{e}^{-\int -\mathrm{d}x}=(-2\mathrm{e}^{-x}+C)\mathrm{e}^x$，

即 $y^2=(-2\mathrm{e}^{-x}+C)\mathrm{e}^x=C\mathrm{e}^x-2$，

由 $y(0)=1$ 得 $C=3$，故 $y=\sqrt{3\mathrm{e}^x-2}$.

(11)【答案】 $\cos\sqrt{x}$.

【解】 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x})^{2n}=\cos\sqrt{x}$.

(12)【答案】 $\dfrac{32}{3}$.

【解】 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}|y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

令 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$,则

$$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}|y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}|y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\,\mathrm{d}r=\frac{32}{3}.$$

(13)【答案】 $\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$($k$ 为任意常数).

【解】 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$,所以 $r(\boldsymbol{A})=2$,

于是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含一个线性无关的解向量,

由 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 得 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,

即 $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解,故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$($k$ 为任意常数).

(14)【答案】 $\dfrac{2}{3}$.

【解】 $E(X)=\int_0^2 x\cdot\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}$,

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x$,

当 $x<0$ 时,$F(x)=0$;

当 $0\leqslant x<2$ 时,$F(x)=\int_0^x\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{4}$;

当 $x\geqslant 2$ 时,$F(x)=1$,即

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases}$$

故 $P\{F(X)>E(X)-1\}=P\left\{F(X)>\dfrac{1}{3}\right\}=1-P\left\{F(X)\leqslant\dfrac{1}{3}\right\}$

$$=1-P\left\{\frac{X^2}{4}\leqslant\frac{1}{3}\right\}=1-P\left\{X\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$=1-\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\frac{x}{2}\mathrm{d}x=1-\frac{x^2}{4}\bigg|_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{2}{3}.$$

三、解答题

(15)【解】 (Ⅰ)$y'+xy=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的通解为

$$y=\left(\int e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{\int x\,dx}dx+C\right)e^{-\int x\,dx}=(x+C)e^{-\frac{x^2}{2}},$$

由 $y(0)=0$ 得 $C=0$,故 $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

(Ⅱ)$y'=(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}},y''=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2}{2}}=x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})e^{-\frac{x^2}{2}}$,

令 $y''=0$ 得 $x=-\sqrt{3},x=0,x=\sqrt{3}$,

当 $x\in(-\infty,-\sqrt{3})$ 时,$y''<0$;当 $x\in(-\sqrt{3},0)$ 时,$y''>0$;当 $x\in(0,\sqrt{3})$ 时,$y''<0$;

当 $x\in(\sqrt{3},+\infty)$ 时,$y''>0$,

故 $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ 的凸区间为$(-\infty,-\sqrt{3})$及$(0,\sqrt{3})$;凹区间为$(-\sqrt{3},0)$及$(\sqrt{3},+\infty)$,

曲线 $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ 的拐点为$(-\sqrt{3},-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$,$(0,0)$及$(\sqrt{3},\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$.

(16)【解】 (Ⅰ)$\mathbf{grad}\,z=\{2ax,2by\}$, $\mathbf{grad}\,z\,|_{(3,4)}=\{6a,8b\}$,

因为梯度的方向即为方向导数最大的方向,

所以有$\dfrac{6a}{-3}=\dfrac{8b}{-4}$,即 $a=b$,

再由$\sqrt{36a^2+64b^2}=10$ 得 $a=b=-1$.

(Ⅱ)曲面$\Sigma:z=2-x^2-y^2,(x,y)\in D_{xy}$,其中 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$,

则曲面 Σ 的面积为

$$\begin{aligned}S&=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy\\&=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{1+4r^2}\,dr=\frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{2}}(1+4r^2)^{\frac{1}{2}}d(1+4r^2)\\&=\frac{\pi}{4}\times\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{6}(27-1)=\frac{13}{3}\pi.\end{aligned}$$

(17)【解】 所求的面积为

$$\begin{aligned}A&=\int_0^{+\infty}e^{-x}|\sin x|\,dx\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right]\Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi}\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}[e^{-(k+1)\pi}(-1)^{k+1}-e^{-k\pi}(-1)^k]\\&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}[e^{-(k+1)\pi}+e^{-k\pi}]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[1+2\sum_{k=1}^{n}e^{-k\pi}+e^{-(n+1)\pi}\right]\\&=\frac{1}{2}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k\pi}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{e^{\pi}-1}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\pi}-1}.\end{aligned}$$

(18)(Ⅰ)**【证明】** 因为当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$x^{n+1}\sqrt{1-x^2} \leqslant x^n\sqrt{1-x^2}$，

所以 $\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$，即 $a_{n+1} < a_n$，故 $\{a_n\}$ 单调递减.

$$a_n \xlongequal{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cdot \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^n t - \sin^{n+2} t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t\,\mathrm{d}t = I_n - \frac{n+1}{n+2}I_n = \frac{1}{n+2}I_n,$$

$$a_{n-2} \xlongequal{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t \cdot \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} t - \sin^n t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t = I_{n-2} - I_n,$$

因为 $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$，所以 $I_{n-2} = \frac{n}{n-1}I_n$，

于是 $a_{n-2} = \frac{n}{n-1}I_n - I_n = \frac{1}{n-1}I_n$，故 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=2,3,\cdots)$.

(Ⅱ)**【解】** 因为 $\{a_n\}$ 单调递减，所以 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2} > \frac{n-1}{n+2}a_{n-1}$，

从而有 $\frac{n-1}{n+2} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

(19)**【解】** 设 Ω 的形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，

由对称性得 $\bar{x}=0$，且 $\bar{y} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$，$\bar{z} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$，

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+(y-z)^2 \leqslant (1-z)^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^1 (1-z)^2\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3}(z-1)^3\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3};$$

$$\iiint\limits_{\Omega} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+(y-z)^2 \leqslant (1-z)^2} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

由 $$\iint\limits_{x^2+(y-z)^2 \leqslant (1-z)^2} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \xlongequal{y-z=u} \iint\limits_{x^2+u^2 \leqslant (1-z)^2} (u+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u$$

$$= \iint\limits_{x^2+u^2 \leqslant (1-z)^2} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u = \pi z(1-z)^2 \text{ 得}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pi\int_0^1 z(1-z)^2\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{12};$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 z\,\mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+(y-z)^2 \leqslant (1-z)^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^1 z(1-z)^2\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{12},$$

故 Ω 的形心坐标为 $\left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

(20)(Ⅰ)**【解】** 由题意得 $b\boldsymbol{\alpha}_1 + c\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}$，即 $\begin{cases} b+c+1=1, \\ 2b+3c+a=1, \\ b+2c+3=1, \end{cases}$

解得 $a=3, b=2, c=-2$.

(Ⅱ)**【证明】** 因为 $|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&3&1\\2&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&-2\\0&1&-1\end{vmatrix}=2\neq0$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关,

故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基.

设由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{Q}$,即 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{Q}$,

于是 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,

由 $\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\3&3&1&0&1&0\\2&3&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&0&-2&-3&1&0\\0&1&-1&-2&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&-1&-2&0&1\\0&0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\0&0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\0&0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{array}\right)$ 得

$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&3\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}.$$

(21)**【解】** (Ⅰ)因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,所以 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$,即 $x-4=y+1$,或 $y=x-5$,

再由 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$ 得 $-2(-2x+4)=-2y$,即 $y=-2x+4$,

解得 $x=3,y=-2$.

(Ⅱ)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&3&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$,

显然矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$,

由 $2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}0&-2&1\\2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{4}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=-2$ 的特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$;

由 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$得 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值$\lambda_2=-1$ 的特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$；

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}2&1&-2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$得 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值$\lambda_3=2$ 的特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\2&1&2\\4&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；

由 $2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$得 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值$\lambda_1=-2$ 的特征向量为$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$；

由 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$得 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值$\lambda_2=-1$ 的特征向量为

$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$；

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$得 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值$\lambda_2=2$ 的特征向量为$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&3&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

由 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$ 得$(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})=\boldsymbol{B}$，

故 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$.

(22)【解】（Ⅰ）因为 $X \sim E(1)$，所以 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x \geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{XY \leqslant z\} = P\{Y=-1\}P\{XY \leqslant z \mid Y=-1\}+P\{Y=1\}P\{XY \leqslant z \mid Y=1\} \\
&= pP\{-X \leqslant z\}+(1-p)P\{X \leqslant z\} = pP\{X \geqslant -z\}+(1-p)P\{X \leqslant z\} \\
&= p[1-P\{X \leqslant -z\}]+(1-p)P\{X \leqslant z\} = p[1-F(-z)]+(1-p)F(z),
\end{aligned}
$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=pe^z$；

当 $z \geqslant 0$ 时，$F_Z(z)=p+(1-p)(1-e^{-z})$，

故
$$
f_Z(z)=\begin{cases}pe^z, & z<0,\\ (1-p)e^{-z}, & z \geqslant 0.\end{cases}
$$

（Ⅱ）
$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Z) &= \mathrm{Cov}(X,XY)=E(X^2Y)-E(X)\cdot E(XY) \\
&= E(X^2)E(Y)-[E(X)]^2E(Y)=D(X)\cdot E(Y),
\end{aligned}
$$

因为 $X \sim E(1)$，所以 $E(X)=1, D(X)=1$，

又因为 $Y \sim \begin{pmatrix}-1 & 1\\ p & 1-p\end{pmatrix}$，所以 $E(Y)=(-1)p+(1-p)=1-2p$，

X 与 Z 不相关的充分必要条件是 $\mathrm{Cov}(X,Z)=0$，

故当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时，X 与 Z 不相关.

（Ⅲ）设 $F(x,y)$ 为 (X,Z) 的联合分布函数，

$$
\begin{aligned}
F(1,1) &= P\{X \leqslant 1, Z \leqslant 1\} = P\{X \leqslant 1, XY \leqslant 1\} \\
&= P\{Y=-1\}P\{X \leqslant 1, XY \leqslant 1 \mid Y=-1\}+P\{Y=1\}P\{X \leqslant 1, XY \leqslant 1 \mid Y=1\} \\
&= \frac{1}{2}P\{X \leqslant 1, -X \leqslant 1\}+\frac{1}{2}P\{X \leqslant 1\}=\frac{1}{2}P\{-1 \leqslant X \leqslant 1\}+\frac{1}{2}P\{X \leqslant 1\} \\
&= P\{X \leqslant 1\}=F(1)=1-\frac{1}{e},
\end{aligned}
$$

$$
F_X(1)=P\{X \leqslant 1\}=1-\frac{1}{e},
$$

$$
\begin{aligned}
F_Z(1) &= P\{XY \leqslant 1\} = P\{Y=-1\}P\{XY \leqslant 1 \mid Y=-1\}+P\{Y=1\}P\{XY \leqslant 1 \mid Y=1\} \\
&= \frac{1}{2}P\{-X \leqslant 1\}+\frac{1}{2}P\{X \leqslant 1\}=\frac{1}{2}P\{X \geqslant -1\}+\frac{1}{2}P\{X \leqslant 1\} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)=1-\frac{1}{2e},
\end{aligned}
$$

因为 $F(1,1) \neq F_X(1)\cdot F_Z(1)$，所以 X 与 Z 不相互独立.

(23)【解】（Ⅰ）由归一性得

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_{\mu}^{+\infty} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = A\int_{\mu}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=A\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \sqrt{2\pi}A\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}A\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}A,
\end{aligned}
$$

解得 $A=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

(Ⅱ) $L(\sigma^2)=\dfrac{A^n}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$,

$$\ln L(\sigma^2)=n\ln A-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

由 $\dfrac{d}{d\sigma^2}\ln L(\sigma^2)=-\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$ 得

σ^2 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$,

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.