1989 年全国硕士研究生招生考试

数　学　(一)

(科目代码:301)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 已知 $f'(3)=2$,则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$________.

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$,则 $f(x)=$________.

(3) 设平面曲线 L 为下半圆 $y=-\sqrt{1-x^2}$,则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$________.

(4) 向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=xy^2\boldsymbol{i}+y\mathrm{e}^z\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$ 在点 $(1,1,0)$ 处的散度 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=$________.

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则逆矩阵 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 当 $x>0$ 时,曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$(　　).

(A) 有且仅有水平渐近线

(B) 有且仅有铅直渐近线

(C) 既有水平渐近线,也有铅直渐近线

(D) 既无水平渐近线,也无铅直渐近线

(2) 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$,则点 P 的坐标为(　　).

(A)$(1,-1,2)$　　　　(B)$(-1,1,2)$

(C)$(1,1,2)$　　　　(D)$(-1,-1,2)$

(3) 设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶非齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解,C_1,C_2 为任意常数,则该非齐次线性微分方程的通解为(　　).

(A)$C_1y_1+C_2y_2+y_3$

(B)$C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

(C)$C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$

(D)$C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

(4) 设函数 $f(x)=x^2(0\leqslant x<1)$，$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，$(-\infty<x<+\infty)$，其中

$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx\ (n=1,2,\cdots)$，则 $S\left(-\frac{1}{2}\right)=$（　　）.

(A) $-\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{1}{4}$　　(C) $\frac{1}{4}$　　(D) $\frac{1}{2}$

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 中（　　）.

(A) 必有一列元素全为 0

(B) 必有两列元素对应成比例

(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合

(D) 任一列向量是其余列向量的线性组合

三、(本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分)

(1) 设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$，其中 $f(t)$ 二阶可导，$g(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(2) 设曲线积分 $\int_C xy^2\,dx+\varphi(x)y\,dy$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$，计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\,dx+\varphi(x)y\,dy$ 的值.

(3) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\,dv$，其中 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

四、(本题满分 6 分)

将函数 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数.

五、(本题满分 7 分)

设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$ 为连续函数,求 $f(x)$.

六、(本题满分 7 分)

证明:方程 $\ln x=\frac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^\pi\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ 在区间$(0,+\infty)$内有且仅有两个不同的实根.

七、(本题满分 6 分)

问 λ 为何值时,线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_3=\lambda, \\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2, \\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3\end{cases}$ 有解,并求出解的一般形式.

八、(本题满分 8 分)

设 λ 为 n 阶可逆矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个特征值,证明:

(1) $\dfrac{1}{\lambda}$ 为 $\mathbf{A}^{-1}$ 的特征值;

(2) $\dfrac{|\mathbf{A}|}{\lambda}$ 为 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵 $\mathbf{A}^{*}$ 的特征值.

九、(本题满分 9 分)

设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 上,问当 R 取何值时,球面 Σ 位于定球面内部的那部分面积最大?

十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分)

(1) 已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$,随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$,以及条件概率 $P(B \mid A)=0.8$,则 $P(A \cup B)=$________.

(2) 甲、乙两人独立对同一目标射击一次,其命中率分别为 0.6 和 0.5,已知目标被击中,则它是甲击中的概率为________.

(3) 若随机变量 ξ 在 $(1,6)$ 上服从均匀分布,则方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的概率为________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 与 Y 独立,且 X 服从均值为 1、标准差为 $\sqrt{2}$ 的正态分布,而 Y 服从标准正态分布,试求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度函数.