

2024 年全国硕士研究生入学统一考试试题

数学一试题

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

【1】已知函数 $f(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$, $g(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$, 则

(A) $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数. (B) $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数.

(C) $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为奇函数. (D) $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为偶函数.

【答案】(C)

【2】设 $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z)$ 均为连续函数, Σ 为曲面 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

($x \geq 0, y \geq 0$) 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx =$

(A) $\iint_{\Sigma} \left(\frac{x}{z} P + \frac{y}{z} Q \right) dx dy$ (B) $\iint_{\Sigma} \left(-\frac{x}{z} P + \frac{y}{z} Q \right) dx dy$

(C) $\iint_{\Sigma} \left(\frac{x}{z} P - \frac{y}{z} Q \right) dx dy$ (D) $\iint_{\Sigma} \left(-\frac{x}{z} P - \frac{y}{z} Q \right) dx dy$

【答案】(A)

【3】已知幂函数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} =$

(A) $-\frac{1}{6}$. (B) $-\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{6}$. (D) $\frac{1}{3}$.

【答案】(A)

【4】设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内有定义, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = m$ 时, $f'(0) = m$.

(B) 当 $f'(0) = m$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = m$.

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = m$ 时, $f'(0) = m$.

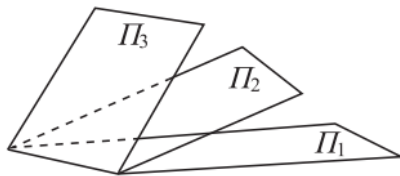
(D) 当 $f'(0) = m$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = m$.



【答案】(B)

【5】在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 三张平面 $\pi_i: a_i x + b_i y + c_i z = d_i$ ($i=1,2,3$) 位置关系如图

所示, 记 $\alpha_i = (a_i, b_i, c_i)$, $\beta_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$, 若 $r \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = m$, $r \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = n$, 则

(A) $m=1, n=2$.(B) $m=n=2$.(C) $m=2, n=3$.(D) $m=n=3$.

【答案】(B)

【6】设向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \\ a \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 且其中任意

两个向量均线性无关, 则

(A) $a=1, b \neq -1$ (B) $a=1, b=-1$ (C) $a \neq -2, b=2$ (D) $a=-2, b=2$

【答案】(D)

【7】设 A 是秩为 2 的 3 阶矩阵, α 是满足 $A\alpha=0$ 的非零向量, 若对满足 $\beta^T \alpha=0$ 的任意向量 β , 均有 $A\beta=\beta$, 则

(A) A^3 的迹为 2.(B) A^3 的迹为 5.(C) A^5 的迹为 7.(D) A^5 的迹为 9.

【答案】(A)

【8】设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 是服从 $N(0,2)$ 的正态分布, Y 是服从 $N(-2,2)$ 的正态分布, 若 $P\{2X+Y < a\} = P\{X > Y\}$, 则 $a =$

(A) $-2-\sqrt{10}$ (B) $-2+\sqrt{10}$ (C) $-2-\sqrt{6}$ (D) $-2+\sqrt{6}$

【答案】(B)

【9】设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 在 $X = x$ 的条件下, Y 在区

间 $(x, 1)$ 上服从均匀分布, 则 $\text{cov}(X, Y) =$

- (A) $-\frac{1}{36}$ (B) $-\frac{1}{72}$
(C) $\frac{1}{72}$ (D) $\frac{1}{36}$

【答案】(D)

【10】设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且都服从参数为 λ 的指数分布, 令 $Z = |X - Y|$, 则下列与 Z 服从同一分布的是

- (A) $X + Y$ (B) $\frac{X + Y}{2}$
(C) $2X$ (D) X

【答案】(D)

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

【11】若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax^2)^{\sin x} - 1}{x^3} = 6$, 则 $a =$ _____.

【答案】6

【12】设 $z = f(u, v)$ 有二阶连续导数, 且 $df|_{(1,1)} = 3du + 4dv$, 若 $y = f(\cos x, 1+x^2)$, 则

$\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} =$ _____. 微博关注考研数学周洋鑫 | 一笑而过 考研数学

【答案】5

【13】若函数 $f(x) = x + 1$, 若 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $x \in [0, \pi]$, 则极限

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin a_{2n-1} =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{\pi}$

【14】微分方程 $y' = \frac{1}{(x+y)^2}$, 满足条件 $y(1) = 0$ 的解为_____.

【答案】 $x = \tan(y + \frac{\pi}{4}) - y$.



【15】设实矩阵 $A = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$, 若对任意实向量 $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, 且满足

$(\alpha^T A \beta)^2 \leq \alpha^T A \alpha \beta^T A \beta$ 都成立, 则 a 的取值范围_____.

【答案】 $a \geq 0$.

【16】随机试验每次成功的概率为 p , 现进行三次独立重复实验, 已知至少成功一次的条件
下全部成功的概率为 $\frac{4}{13}$, 则 $p =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

【17】(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D = \{(x, y) | \sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, 计算 $\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} d\sigma$.

【答案】 $\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) - 2$

【18】(本题满分 12 分)

设 $f(x, y) = x^3 + y^3 - (x+y)^2 + 3$, 曲面 $z = f(x, y)$ 在 $(1, 1, 1)$ 处的切平面为 T , T 与三个坐标面所围有界区域在 xoy 面的投影为 D .

(1) 求 T 的方程

(2) 求 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值和最小值

【答案】切平面 $x + y + z = 3$; 最大值 21, 最小值 $\frac{17}{27}$.

【19】(本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 二阶可导, $f'(0) = f'(1)$, $|f''(x)| \leq 1$, 证:

(1) $|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$.

(2) $\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0) + f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}$

【答案】(1) 分别在 $x=0$ 及 $x=1$ 处使用泰勒公式展开.

(2) 对于 (1) 结果两边同时积分.

【20】 (本题满分 12 分)

已知有向曲线 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ 与平面 $2x - z - 1 = 0$ 的交线从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 计算曲线积分

$$\int_L (6xyz - yz^2)dx + 2x^2zdy + xyzdz$$

【答案】 $\frac{4\pi}{5\sqrt{5}}$ **【21】** (本题满分 12 分)

已知数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足 $x_0 = -1, y_0 = 0, z_0 = 2$, 且
$$\begin{cases} x_n = -2x_{n-1} + 2z_{n-1} \\ y_n = -2y_{n-1} - 2z_{n-1} \\ z_n = -6x_{n-1} - 3y_{n-1} + 3z_{n-1} \end{cases},$$

记 $\alpha_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, 写出满足 $\alpha_n = A\alpha_{n-1}$ 的矩阵 A , 并求 A^n 及 $x_n, y_n, z_n (n=1, 2, \dots)$.

【答案】 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} -4 + (-1)^{n+1}2^n & -2 + (-1)^{n+1}2^n & 2 \\ 4 + (-1)^n2^{n+1} & 2 + (-1)^n2^{n+1} & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$x_n = 8 + (-2)^n, y_n = -8 + (-2)^{n+1}, z_n = 12.$$

【22】 (本题满分 12 分)

设总体 $X \sim U(0, \theta)$, θ 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 为简单随机样本,

$$X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n), T_c = cX_{(n)}.$$

(1) 求 c 时, 使得 T_c 为 θ 的无偏估计.

(2) 记 $h(c) = E(T_c - \theta)^2$, 求 c 使得 $h(c)$ 取最小值.

【答案】 (1) $c = \frac{n+1}{n}$; (2) $c = \frac{n+2}{n+1}$.