1990年全国硕士研究生招生考试

数　学　(一)

(科目代码:301)

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分)

(1) 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2, \\ y=3t-4, \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程为________.

(2) 设 a 为非零常数,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$________.

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1, |x|\leqslant 1, \\ 0, |x|>1, \end{cases}$ 则函数 $f[f(x)]=$________.

(4) 积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=$________.

(5) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6)$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)$,则该向量组的秩为________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分)

(1) 设 $f(x)$ 为连续函数,$F(x)=\int_x^{\mathrm{e}^{-x}} f(t)\mathrm{d}t$,则 $F'(x)=($　　$)$.

(A) $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$　　(B) $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$

(C) $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$　　(D) $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$

(2) 已知 $f(x)$ 具有任意阶连续导数,且 $f'(x)=[f(x)]^2$,则当 n 为大于2的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)=($　　$)$.

(A) $n!\,[f(x)]^{n+1}$　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$

(C) $[f(x)]^{2n}$　　(D) $n!\,[f(x)]^{2n}$

(3) 设 α 为常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)($　　$)$.

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛

(C) 发散　　(D) 收敛性与 α 的取值有关

(4) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续,且 $f(0)=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$,则在点 $x=0$ 处 $f(x)($　　$)$.

(A) 不可导　　(B) 可导,且 $f'(0)\neq 0$

(C) 取得极大值　　(D) 取得极小值

(5) 已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同解,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,k_1,k_2 为任意常数,则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为(　　).

(A)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(B)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(C)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(D)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 求$\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$.

(2) 设 $z=f(2x-y,y\sin x)$,其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3) 求微分方程 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{-2x}$ 的通解.

四、(本题满分 6 分)

求幂级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域,并求其和函数.

五、(本题满分 8 分)

求曲面积分 $I=\displaystyle\iint_{\Sigma}yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4(z\geqslant 0)$ 的外侧.

六、(本题满分 7 分)

设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,且 $f(a)=f(b)$,证明:在(a,b)内至少存在一点 ξ,使得 $f'(\xi)>0$.

七、(本题满分 6 分)

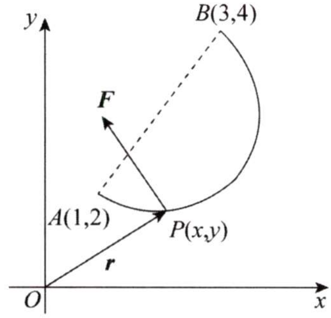
设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$,且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵,$\boldsymbol{C}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的逆矩阵,$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的转置矩阵,将上述关系式化简并求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

八、(本题满分 8 分)

求一个正交变换,化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准形.

九、(本题满分 8 分)

质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周,从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受到力 $\boldsymbol{F}$ 的作用(如图),$\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 到原点 O 之间的距离,其方向垂直于线段 OP,且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$,求变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 所做的功.



九题图

十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分)

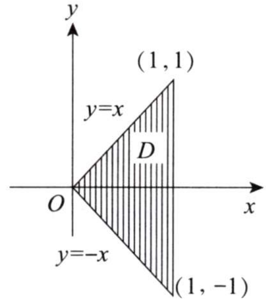
(1) 已知随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$,$-\infty<x<+\infty$,则随机变量 X 的概率分布函数为 $F(x)=$________.

(2) 设随机事件 A,B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别为 0.4,0.3 和 0.6,设 $\overline{B}$ 为事件 B 的对立事件,则 $P(A\overline{B})=$________.

(3) 已知离散型随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布,即 $P\{X=k\}=\frac{2^k}{k!}e^{-2}(k=0,1,2,\cdots)$,则随机变量 $Z=3X-2$ 的数学期望 $E(Z)=$________.

十一、(本题满分 6 分)

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,|y|<x\}$ 内服从均匀分布,求关于 X 的边缘概率密度及随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)$.



十二题图