1997 年数学(一)真题解析

一、填空题

(1)【答案】 $\frac{3}{2}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(3\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2}.$$

(2)【答案】 $(-2,4)$.

【解】 因为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛半径与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径相同，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛半径为 $R=3$,故所求收敛区间为 $-3<x-1<3$,即$(-2,4)$.

(3)【答案】 $y=-x+e^{\frac{\pi}{2}}$.

【解】 对数螺线的参数方程为 $\begin{cases}x=e^{\theta}\cos\theta,\\ y=e^{\theta}\sin\theta.\end{cases}$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,$(x,y)=(0,e^{\frac{\pi}{2}})$,

又 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$,

故所求切线的直角坐标方程为 $y-e^{\frac{\pi}{2}}=-x$,或 $y=-x+e^{\frac{\pi}{2}}$.

(4)【答案】 -3.

【解】 **方法一** 因为 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，

于是 $|\boldsymbol{A}|=0$,而由 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{vmatrix}=7t+21=0$,得 $t=-3$.

方法二 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 3$,

再由 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 得 $r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$,于是 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2<3$,故 $|\boldsymbol{A}|=0$,解得 $t=-3$.

(5)【答案】 $\frac{2}{5}$.

【解】 令 $A_1=\{$第一个人取黄球$\}$,$A_2=\{$第一个人取白球$\}$,$B=\{$第二个人取黄球$\}$,

$$P(A_1)=\frac{2}{5},\quad P(A_2)=\frac{3}{5},\quad P(B\mid A_1)=\frac{19}{49},\quad P(B\mid A_2)=\frac{20}{49},$$

则 $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{19}{49}+\frac{3}{5}\times\frac{20}{49}=\frac{2}{5}.$$

二、选择题

(1)【答案】 (C).

【解】 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y=x}}f(x,y)=\frac{1}{2}\neq\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y=-x}}f(x,y)=-\frac{1}{2}$,所以 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处不连续；

由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x}=0$得$f'_x(0,0)=0$,同理$f'_y(0,0)=0$,

即$f(x,y)$在$(0,0)$处可偏导,应选(C).

(2)**【答案】** (B).

【解】 由$f'(x)<0$得$f(x)$为单调减函数,

于是$S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>\int_a^b f(b)\mathrm{d}x=f(b)(b-a)=S_2$;

再由$f''(x)>0$得$f(x)$为凹函数,

于是$S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)=S_3$,即$S_2<S_1<S_3$,应选(B).

(3)**【答案】** (A).

【解】 由周期函数定积分的平移性质得

$$F(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}[\mathrm{e}^{\sin t}\sin t+\mathrm{e}^{\sin(-t)}\sin(-t)]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t})\sin t\,\mathrm{d}t,$$

当$t\in[0,\pi]$时,$(\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t})\sin t\geqslant0$,则$F(x)>0$,

故$F(x)$为正常数,应选(A).

(4)**【答案】** (D).

【解】 三条直线交于一点的充分必要条件是方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y=-c_1,\\a_2x+b_2y=-c_2,\\a_3x+b_3y=-c_3\end{cases}$有唯一解,

即$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$,其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\\a_3&b_3\end{pmatrix}$,$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&-c_1\\a_2&b_2&-c_2\\a_3&b_3&-c_3\end{pmatrix}$,

故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关,而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关,应选(D).

(5)**【答案】** (D).

【解】 已知$D(X)=4$, $D(Y)=2$,

因为X,Y相互独立,所以$D(3X-2Y)=9D(X)+4D(Y)=36+8=44$,应选(D).

三、

(1)**【解】** 平面曲线$\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周形成的曲面为$\Sigma:x^2+y^2=2z$,

则$\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,0\leqslant z\leqslant8\}$,其中$D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant2z\}$,

于是$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^8\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi\int_0^8\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{2z}}r^3\mathrm{d}r$

$$=2\pi\int_0^8z^2\mathrm{d}z=\frac{1\,024\pi}{3}.$$

(2)**【解】** **方法一**

令$C:\begin{cases}x=\cos t,\\y=\sin t,\\z=2-\cos t+\sin t\end{cases}$ (起点$t=2\pi$,终点$t=0$),则

$$\int_C (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{2\pi}^{0}(2-\cos t)(-\sin t)\mathrm{d}t+(2\cos t-2-\sin t)\cos t\,\mathrm{d}t+(\cos t-\sin t)(\sin t+\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{2\pi}^{0}(3\cos^2 t-\sin^2 t-2\sin t-2\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=-3\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=-12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=-8\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=-2\pi.$$

方法二

设 C 所在的截口平面块为 Σ，方向向下，

取 $\boldsymbol{n}=\{-1,1,-1\}$，方向余弦为 $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，则

$$\int_C (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z-y & x-z & x-y\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2\pi.$$

(3)**【解】** 由题意得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(N-x),\\ x(0)=x_0,\end{cases}$$

由 $\frac{\mathrm{d}x}{x(N-x)}=k\,\mathrm{d}t$ 得 $\frac{1}{N}\ln\frac{x}{N-x}=kt+C$，

由 $x(0)=x_0$ 得 $C=\frac{1}{N}\ln\frac{x_0}{N-x_0}$，故 $x(t)=\frac{Nx_0\mathrm{e}^{kNt}}{N-x_0+x_0\mathrm{e}^{kNt}}$.

四、

(1)**【解】** 曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,-2,5)$ 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{2x,2y,-1\}_{(1,-2,5)}=\{2,-4,-1\},$$

即平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{2,-4,-1\}$，则平面 π 的方程为

$\pi:2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$，即 $\pi:2x-4y-z-5=0$.

直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{1,1,0\}\times\{1,a,-1\}=\{-1,1,a-1\}$，

因为 L 在平面 π 上，所以 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$，解得 $a=-5$.

由 $\begin{cases}x+y+b=0,\\ x-5y-z-3=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y=-x-b,\\ z=6x+5b-3,\end{cases}$ 代入平面 π 得 $b=-2$，

即 $a=-5,b=-2$.

(2)**【解】** $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\mathrm{e}^x\sin y)\mathrm{e}^x\sin y$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(\mathrm{e}^x\sin y)\mathrm{e}^x\cos y$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(\mathrm{e}^x\sin y)(\mathrm{e}^x\sin y)^2+f'(\mathrm{e}^x\sin y)\mathrm{e}^x\sin y,$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(e^x \sin y)(e^x \cos y)^2 - f'(e^x \sin y)e^x \sin y$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(e^x \sin y)e^{2x}$，令 $e^x \sin y = u$，由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x} z$ 得 $f''(u) - f(u) = 0$，

$f''(u) - f(u) = 0$ 的通解为 $f(u) = C_1 e^{-u} + C_2 e^u$ （C_1, C_2 为任意常数）.

五、【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = A$ 得 $f(0) = 0, f'(0) = A$，

当 $x = 0$ 时，$\varphi(0) = 0$；

当 $x \neq 0$ 时，$\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}(xt) = \frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}$，

即 $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$

当 $x \neq 0$ 时，$\varphi'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$；

当 $x = 0$ 时，由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \frac{A}{2}$ 得 $\varphi'(0) = \frac{A}{2}$，

于是 $\varphi'(x) = \begin{cases} \frac{A}{2}, & x = 0, \\ \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}, & x \neq 0. \end{cases}$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x} - \frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}\right] = \frac{A}{2} = \varphi'(0)$，所以 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

六、【证明】 (1) 由 $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant 1$，得数列 $\{a_n\}$ 有下界；

由 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) - a_n = \frac{1 - a_n^2}{2a_n} \leqslant 0$，得数列 $\{a_n\}$ 单调递减，

由极限存在定理得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

(2) 因为数列 $\{a_n\}$ 单调递减，所以 $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geqslant 0$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ 为正项级数，

而 $0 \leqslant \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} \leqslant a_n - a_{n+1}$，

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ 展开得 $S_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = 2 - a_{n+1}$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2 - \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ 存在，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ 收敛，

由比较审敛法得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ 收敛.

七、

(1)【解】 因为 $r(\boldsymbol{B}) = 2 < 4$，所以 $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系含两个线性无关的特征向量，

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为基础解系，

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\\-1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}=\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\\-3\end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的一个标准正交基为 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\sqrt{39}}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\\-3\end{pmatrix}$.

(2)【解】（Ⅰ）由 $\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 得 $\begin{cases}-1=\lambda,\\a+2=\lambda,\\b+1=-\lambda,\end{cases}$

解得 $a=-3,b=0$，特征向量 $\boldsymbol{\xi}$ 对应的特征值为 $\lambda=-1$.

（Ⅱ）$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3=0$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$，

$$-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

因为 $r(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化.

八、

(1)【证明】 显然 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A}$ 且 $|\boldsymbol{E}(i,j)|=-1$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，

于是 $|\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}|\neq 0$，故 $\boldsymbol{B}$ 可逆.

(2)【解】 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$.

九、【解】 显然 $X\sim B\left(3,\dfrac{2}{5}\right)$，即 $P\{X=k\}=C_3^k\left(\dfrac{2}{5}\right)^k\left(\dfrac{3}{5}\right)^{3-k}$，$k=0,1,2,3$；

当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$；

当 $0\leqslant x<1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=0\}=\dfrac{27}{125}$；

当 $1\leqslant x<2$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=\dfrac{81}{125}$；

当 $2\leqslant x<3$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}=\dfrac{117}{125}$；

当 $x\geqslant 3$ 时，$F(x)=1$，

即 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{27}{125}, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{81}{125}, & 1\leqslant x<2,\\ \dfrac{117}{125}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$

$E(X)=np=\dfrac{6}{5}$.

十、【解】 $E(X)=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=(\theta+1)\int_0^1 x^{\theta+1}\mathrm{d}x=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$,

由 $E(X)=\overline{X}$,即$\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}$,解得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$;

似然函数为 $L(\theta)=f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)$

$=(\theta+1)^n(x_1x_2\cdots x_n)^\theta$,其中 $0<x_i<1,i=1,2,\cdots,n$,

$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$,

由$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$,得 $\theta=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$,

故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.