

1993 年全国硕士研究生招生考试

数 学 (一)

(科目代码:301)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

- (1) 函数 $F(x) = \int_1^x (2 - \frac{1}{\sqrt{t}}) dt$ ($x > 0$) 的单调减区间为_____.
- (2) 由曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12, \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周而得到的旋转曲面在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为_____.
- (3) 设函数 $f(x) = \pi x + x^2$ ($-\pi < x < \pi$) 的傅里叶级数展开式为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则其中系数 b_3 的值为_____.
- (4) 设数量场 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) =$ _____.
- (5) 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零, 且 A 的秩为 $n-1$, 则线性方程组 $AX = 0$ 的通解为_____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

- (1) 设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$, $g(x) = x^3 + x^4$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的().
- (A) 等价无穷小 (B) 同阶但非等价的无穷小
(C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小
- (2) 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为().
- (A) $2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta$ (B) $4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta$
(C) $2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\theta} d\theta$ (D) $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta d\theta$
- (3) 设有直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$ 与 $L_2: \begin{cases} x-y=6, \\ 2y+z=3, \end{cases}$ 则 L_1 与 L_2 的夹角为().
- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$
- (4) 设曲线积分 $\int_L [f(x) - e^x] \sin y dx - f(x) \cos y dy$ 与路径无关, 其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 等于().
- (A) $\frac{e^{-x} - e^x}{2}$ (B) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (C) $\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$ (D) $1 - \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(5) 已知 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, P 为 3 阶非零矩阵, 且满足 $PQ = O$, 则().

(A) $t = 6$ 时, P 的秩必为 1

(B) $t = 6$ 时, P 的秩必为 2

(C) $t \neq 6$ 时, P 的秩必为 1

(D) $t \neq 6$ 时, P 的秩必为 2

三、(本题共 3 小题, 每小题 5 分, 满分 15 分)

(1) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$.

(2) 求 $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$.

(3) 求微分方程 $x^2 y' + xy = y^2$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 1$ 的特解.

四、(本题满分 6 分)

计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} 2xz dy dz + yz dz dx - z^2 dx dy$, 其中 Σ 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与

$z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 所围立体表面的外侧.

五、(本题满分 7 分)

求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n}$ 的和.

六、(本题共 2 小题, 每小题 5 分, 满分 10 分)

(1) 设在 $[0, +\infty)$ 上函数 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f'(x) \geq k > 0, f(0) < 0$. 证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个零点.

(2) 设 $b > a > e$, 证明: $a^b > b^a$.

七、(本题满分 8 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3 (a > 0)$, 通过正交变换化为标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$, 求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

八、(本题满分 6 分)

设 A 是 $n \times m$ 矩阵, B 是 $m \times n$ 矩阵, 其中 $n < m$, E 是 n 阶单位矩阵, 若 $AB = E$, 证明 B 的列向量组线性无关.

九、(本题满分 6 分)

设物体 A 从点 $(0, 1)$ 出发, 以速度大小为常数 v 沿 y 轴正向运动, 物体 B 从点 $(-1, 0)$ 与 A 同时出发, 其速度大小为 $2v$, 方向始终指向 A, 试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程, 并写出初始条件.

十、填空题(本题共 2 小题, 每小题 3 分, 满分 6 分)

- (1) 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品, 任意抽取两次, 每次抽一个, 抽出后不再放回, 则第二次抽出的产品是次品的概率为_____.
- (2) 设随机变量 X 服从 $(0, 2)$ 上的均匀分布, 则随机变量 $Y = X^2$ 在 $(0, 4)$ 内的概率密度 $f_Y(y) =$ _____.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < +\infty$.

- (1) 求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$;
- (2) 求 X 与 $|X|$ 的协方差, 并问 X 与 $|X|$ 是否不相关?
- (3) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立? 为什么?