

1996 年全国硕士研究生招生考试

数 学 (一)

(科目代码:301)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

- (1) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = 8$, 则 $a =$ _____.
- (2) 设一平面经过原点及点 $(6, -3, 2)$, 且与平面 $4x - y + 2z = 8$ 垂直, 则此平面方程为 _____.
- (3) 微分方程 $y'' - 2y' + 2y = e^x$ 的通解为 _____.
- (4) 函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1, 0, 1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3, -2, 2)$ 方向的方向导数为 _____.
- (5) 设 A 是 4×3 矩阵, 且 A 的秩 $r(A) = 2$, 而 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $r(AB) =$ _____.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

- (1) 已知 $\frac{(x+ay)dx + ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分, 则 a 等于().
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2
- (2) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则().
(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
(C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- (3) 设 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 常数 $\lambda \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(n \tan \frac{\lambda}{n}\right) a_{2n}$ ().
(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛
(C) 发散 (D) 收敛性与 λ 有关
- (4) 设 $f(x)$ 有连续导数, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f(t) dt$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 k 等于().
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(5) 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于().

(A) $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$

(B) $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$

(C) $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$

(D) $(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$

三、(本题共 2 小题, 每小题 5 分, 满分 10 分)

(1) 求心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 的全长, 其中 $a > 0$ 是常数.

(2) 设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} (n = 1, 2, \dots)$, 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限.

四、(本题共 2 小题, 每小题 6 分, 满分 12 分)

(1) 计算曲面积分 $\iint_S (2x + z) dy dz + z dx dy$, 其中 S 为有向曲面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$, 其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

(2) 设变换 $\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay \end{cases}$ 可把方程 $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 求常数 a , 其中 $z = z(x, y)$ 有二阶连续的偏导数.

五、(本题满分 7 分)

求级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

六、(本题满分 7 分)

设对任意的 $x > 0$, 曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$, 求 $f(x)$ 的一般表达式.

七、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且满足条件: $|f(x)| \leq a$, $|f''(x)| \leq b$, 其中 a, b 都是非负常数, c 为 $(0, 1)$ 内任意一点.

(1) 写出 $f(x)$ 在点 $x = c$ 处带拉格朗日余项的一阶泰勒公式;

(2) 证明: $|f'(c)| \leq 2a + \frac{b}{2}$.

八、(本题满分 6 分)

设 $A = E - \xi \xi^T$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵, ξ 是 n 维非零列向量, ξ^T 是 ξ 的转置, 证明:

(1) $A^2 = A$ 的充分必要条件是 $\xi^T \xi = 1$;

(2) 当 $\xi^T \xi = 1$ 时, A 是不可逆矩阵.

九、(本题满分 8 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2.

- (1) 求参数 c 的值及此二次型对应矩阵的特征值;
- (2) 指出方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示何种二次曲面.

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)

- (1) 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1% 和 2%, 现从由 A 厂和 B 厂的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件, 发现是次品, 则该次品属于 A 厂生产的概率为 _____.
- (2) 设 ξ, η 是两个相互独立且均服从正态分布 $N\left(0, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$ 的随机变量, 则随机变量 $|\xi - \eta|$ 的数学期望 $E(|\xi - \eta|) =$ _____.

十一、(本题满分 6 分)

设 ξ, η 是相互独立且都服从同一分布的两个随机变量, 且 ξ 的分布律为 $P\{\xi = i\} = \frac{1}{3}$ ($i = 1, 2, 3$), 又设 $X = \max\{\xi, \eta\}, Y = \min\{\xi, \eta\}$.

- (1) 写出二维随机变量 (X, Y) 的分布律:

Y	X		
	1	2	3
1			
2			
3			

- (2) 求随机变量 X 的数学期望 $E(X)$.