2013 年数学(一) 真题解析

一、选择题

(1)**【答案】** (D).

【解】 **方法一** 由洛必达法则,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{k(1+x^2)x^{k-1}}=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^{k-1}},$$

于是 $k-1=2$,即 $k=3$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=\dfrac{1}{3}$,应选(D).

方法二 由 $\arctan x=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ 得 $x-\arctan x\sim\dfrac{x^3}{3}$,

于是 $k=3$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}=\dfrac{1}{3}$,应选(D).

(2)**【答案】** (A).

【解】 令 $F(x,y,z)=x^2+\cos(xy)+yz+x$,

则 $\boldsymbol{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)=(2x-y\sin(xy)+1,-x\sin(xy)+z,y)$,

曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$,

切平面方程为 $\pi:(x-0)-(y-1)+(z+1)=0$,即 $\pi:x-y+z=-2$,应选(A).

(3)**【答案】** (C).

【解】 将函数 $f(x)$ 进行奇延拓,再进行周期延拓,函数 $f(x)$ 的正弦级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$.

$S(x)$ 为正弦级数的和函数,显然 $S(x)$ 是以 2 为周期的函数.

于是 $S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=S\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-S\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

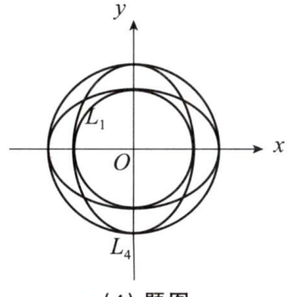
因为 $x=\dfrac{1}{4}$ 为 $f(x)$ 的连续点,所以 $S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=S\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-S\left(\dfrac{1}{4}\right)=-f\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{4}$,

应选(C).

(4)**【答案】** (D).

【解】 如图所示,令 $D_1:x^2+y^2\leqslant 1$, $D_2:x^2+y^2\leqslant 2$,

$D_3:x^2+2y^2\leqslant 2$, $D_4:2x^2+y^2\leqslant 2$,



一(4) 题图

由格林公式,得 $I_1=\iint\limits_{D_1}\left(2-x^2-1-\dfrac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{D_1}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\pi-\iint\limits_{D_1}x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\iint\limits_{D_1}y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\pi-\frac{3}{2}\iint\limits_{D_1}x^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\pi-\frac{3}{4}\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi-\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{5\pi}{8};$$

$$I_2=\iint\limits_{D_2}\left(2-x^2-1-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_2}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=2\pi-\frac{3}{2}\iint\limits_{D_2}x^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi-\frac{3}{4}\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=2\pi-\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2},$$

$$I_3=\iint\limits_{D_3}\left(2-x^2-1-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_3}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(1-2r^2\cos^2\theta-\frac{1}{2}r^2\sin^2\theta\right)\sqrt{2}\,r\,\mathrm{d}r=\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi,$$

$$I_4=\iint\limits_{D_4}\left(2-x^2-1-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_4}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta)\sqrt{2}\,r\,\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi,$$

因为 I_4 最大,所以应选(D).

(5)**【答案】** (B).

【解】 令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$, $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$.

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$,得 $\boldsymbol{A\beta}_i=\boldsymbol{\gamma}_i(i=1,2,\cdots,n)$,即矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组可由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示.

因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆,所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CB}^{-1}$,即 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组线性表示.

故 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价,应选(B).

方法点评:令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b}$ 为列向量,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 等价于 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量表示.

令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$,则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 等价于 $\boldsymbol{A\beta}_i=\boldsymbol{\gamma}_i(i=1,2,\cdots,n)$,即 $\boldsymbol{C}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示.

(6)**【答案】** (B).

【解】 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵,所以 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 特征值相同.

$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=b,\lambda_3=0$.

而 $|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & -a & -1\\ -a & 2-b & -a\\ -1 & -a & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -a & -1\\ -a & 2-b & -a\\ 0 & -2a & 0\end{vmatrix}=2a\begin{vmatrix}1 & -1\\ -a & -a\end{vmatrix}=-4a^2$,

所以 $a=0$,即 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & b & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也为 $\lambda_1=2,\lambda_2=b,\lambda_3=0$.

故当 $a=0,b$ 为任意常数时,$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,应选(B).

(7)**【答案】** (A).

【解】 由 $X_1\sim N(0,1)$,得

$$p_1=P\{-2\leqslant X_1\leqslant 2\}=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1.$$

由 $X_2\sim N(0,2^2)$,得$\dfrac{X_2}{2}\sim N(0,1)$,于是 $p_2=P\left\{-1\leqslant\dfrac{X_2}{2}\leqslant 1\right\}=2\Phi(1)-1$.

由 $X_3\sim N(5,3^2)$,得$\dfrac{X_3-5}{3}\sim N(0,1)$,于是

$$p_3=P\left\{-\frac{7}{3}\leqslant\frac{X_3-5}{3}\leqslant -1\right\}=\Phi(-1)-\Phi\left(-\frac{7}{3}\right)=\Phi\left(\frac{7}{3}\right)-\Phi(1).$$

由 $p_1>p_2,p_2>p_3$,得 $p_1>p_2>p_3$,应选(A).

(8)**【答案】** (C).

【解】 因为 $X\sim t(n)$,所以存在 $U\sim N(0,1),V\sim\chi^2(n)$ 且 U,V 相互独立,使得

$$X=\frac{U}{\sqrt{V/n}},\quad X^2=\frac{U^2/1}{V/n}\sim F(1,n),\text{从而 } Y=X^2,$$

于是 $P\{Y>c^2\}=P\{X^2>c^2\}=P\{X>c\}+P\{X<-c\}$,

由 $X\sim t(n)$ 得 $P\{X>c\}=P\{X<-c\}$,

故 $P\{Y>c^2\}=P\{X>c\}+P\{X<-c\}=2\alpha$,应选(C).

二、填空题

(9)**【答案】** 1.

【解】 将 $x=0$ 代入 $y-x=\mathrm{e}^{x(1-y)}$ 中,得 $y=1$.

$y-x=\mathrm{e}^{x(1-y)}$ 两边对 x 求导,得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1=\mathrm{e}^{x(1-y)}\cdot\left(1-y-x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$.

将 $x=0,y=1$ 代入,得$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f'(0)=1$.

于是$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f(0)}{\dfrac{1}{n}}=f'(0)=1$.

(10)**【答案】** $C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}-x\mathrm{e}^{2x}$($C_1,C_2$ 为任意常数).

【解】 设二阶常系数非齐次线性微分方程为 $y''+py'+qy=f(x)$.

由线性微分方程解的结构得 $y_1-y_3=\mathrm{e}^{3x},y_2-y_3=\mathrm{e}^x$ 为方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个解,则该方程的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$,故方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}-x\mathrm{e}^{2x}\ (C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

(11)【答案】 $\sqrt{2}$.

【解】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{\sin t+t\cos t-\sin t}{\cos t}=t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{\cos t},$$

于是$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$.

(12)【答案】 $\ln 2$.

【解】 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=-\int_1^{+\infty}\ln x\, d\left(\frac{1}{1+x}\right)=-\left.\frac{\ln x}{1+x}\right|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx=\ln\left.\frac{x}{1+x}\right|_1^{+\infty}=\ln 2.$$

(13)【答案】 -1.

【解】 由$A_{ij}=-a_{ij}$,得$\boldsymbol{A}^{T}=-\boldsymbol{A}^{*}$,两边取行列式,得$|\boldsymbol{A}|=(-1)^3|\boldsymbol{A}^{*}|=-|\boldsymbol{A}|^2$,于是$|\boldsymbol{A}|=0$或$|\boldsymbol{A}|=-1$.

因为$\boldsymbol{A}$为非零矩阵,所以$a_{ij}(i,j=1,2,3)$不全为零,不妨设$a_{11}\neq 0$,

由$|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2)<0$,得$|\boldsymbol{A}|=-1$.

方法点评:在行列式计算中,若出现A_{ij}或者$\boldsymbol{A}^{*}$时,一般使用如下两个性质:

(1)$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=|\boldsymbol{A}|(i=1,2,\cdots,n)$;

(2)$|\boldsymbol{A}^{*}|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(14)【答案】 $1-\dfrac{1}{e}$.

【解】 由$Y\sim E(1)$,得Y的分布函数为$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

于是$P\{Y\leqslant a+1\mid Y>a\}=\dfrac{P\{a<Y\leqslant a+1\}}{P\{Y>a\}}=\dfrac{F(a+1)-F(a)}{1-F(a)}$

$$=\frac{e^{-a}-e^{-(a+1)}}{e^{-a}}=1-\frac{1}{e}.$$

三、解答题

(15)【解】 $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1 f(x)d(\sqrt{x})=2\sqrt{x}f(x)\Big|_0^1-2\int_0^1 f'(x)\sqrt{x}\,dx$

$$=-2\int_0^1 f'(x)\sqrt{x}\,dx=-2\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}dx=-4\int_0^1\ln(x+1)d(\sqrt{x})$$

$$=-4\sqrt{x}\ln(x+1)\Big|_0^1+4\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx=-4\ln 2+4\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$$

$$\xlongequal{\sqrt{x}=t}-4\ln 2+8\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt=-4\ln 2+8\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=-4\ln 2+8-8\arctan t\Big|_0^1=-4\ln 2+8-2\pi.$$

方法点评：计算定积分时，若出现变积分限函数求定积分时，一般采用分部积分法.

如：设 $f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$，则

$$\int_0^1 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx=-\int_0^1 xe^{x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1-e}{2}.$$

(16)【解】（Ⅰ）由逐项可导性得 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$，

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

由 $a_{n-2}-n(n-1)a_n=0$，得 $a_n=(n+2)(n+1)a_{n+2}(n=0,1,2,\cdots)$，

于是 $S''(x)=S(x)$ 或 $S''(x)-S(x)=0$.

（Ⅱ）$S''(x)-S(x)=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-1=0$，特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，

$$S(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x;$$

由 $S(0)=a_0=3,S'(0)=a_1=1$，得 $\begin{cases}C_1+C_2=3,\\-C_1+C_2=1,\end{cases}$ 解得 $C_1=1,C_2=2$，故幂级数的和函数 $S(x)=e^{-x}+2e^x$.

(17)【解】 函数 $f(x,y)$ 在整个平面上有定义.

由 $\begin{cases}f'_x=\left(x^2+\dfrac{x^3}{3}+y\right)e^{x+y}=0,\\f'_y=\left(y+\dfrac{x^3}{3}+1\right)e^{x+y}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-1,\\y=-\dfrac{2}{3},\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=-\dfrac{4}{3}.\end{cases}$

$f''_{xx}=\left(2x+2x^2+\dfrac{x^3}{3}+y\right)e^{x+y}$，$f''_{xy}=\left(x^2+\dfrac{x^3}{3}+y+1\right)e^{x+y}$，$f''_{yy}=\left(y+\dfrac{x^3}{3}+2\right)e^{x+y}$，

当 $\begin{cases}x=-1,\\y=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$ 时，

$A=f''_{xx}\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)=-e^{-\frac{5}{3}}$，$B=f''_{xy}\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)=e^{-\frac{5}{3}}$，$C=f''_{yy}\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)=e^{-\frac{5}{3}}$，

由 $AC-B^2<0$，得 $\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 不是函数 $f(x,y)$ 的极值点；

当 $\begin{cases}x=1,\\y=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$ 时，

$A=f''_{xx}\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)=3e^{-\frac{1}{3}}$，$B=f''_{xy}\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)=e^{-\frac{1}{3}}$，$C=f''_{yy}\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)=e^{-\frac{1}{3}}$，

由 $AC-B^2=2e^{-\frac{2}{3}}>0$ 且 $A>0$，得 $\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $f\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)=-e^{-\frac{1}{3}}$.

(18)【证明】（Ⅰ）**方法一** 因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，于是 $f(0)=0$.

由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$.

方法二 因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，于是 $f(0)=0$.

令 $\varphi(x)=f(x)-x$，则 $\varphi(0)=0,\varphi(1)=f(1)-1=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$.

而 $\varphi'(x)=f'(x)-1$，于是 $f'(\xi)=1$.

(Ⅱ) 因为 $f'(x)$ 为偶函数，所以 $f'(-\xi)=1$.

令 $h(x)=[f'(x)-1]\mathrm{e}^x$，$h(-\xi)=h(\xi)=0$，由罗尔定理，存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $h'(\eta)=0$.

而 $h'(x)=f''(x)\mathrm{e}^x+[f'(x)-1]\mathrm{e}^x=[f''(x)+f'(x)-1]\mathrm{e}^x$ 且 $\mathrm{e}^x\neq 0$，

所以 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

方法点评：本题考查中值定理. 中值定理部分最难以掌握的部分就是辅助函数的构造，事实上构造辅助函数有一整套的方法，就本题辅助函数构造作如下补充：

(1) 若结论为 $f'(\xi)+kf(\xi)=0$，辅助函数为 $F(x)=\mathrm{e}^{kx}f(x)$；

(2) 若结论为 $\xi f'(\xi)+kf(\xi)=0$，辅助函数为 $F(x)=x^kf(x)$；

(3) 本题第二问，先将 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$ 改为 $f''(x)+f'(x)-1=0$，整理得 $[f'(x)-1]'+[f'(x)-1]=0$，显然辅助函数为 $F(x)=\mathrm{e}^x[f'(x)-1]$.

(19)【**解**】 (Ⅰ) 直线 L 的方向向量为 $\overrightarrow{AB}=(-1,1,1)$，

直线 L：$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$.

设 $M(x,y,z)$ 为曲面 Σ 上任意一点，其所在的圆位于 L 上的点为 $M_0(x_0,y_0,z)$，圆心为 $T(0,0,z)$，由 $|MT|=|M_0T|$，得 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$.

因为 $M_0(x_0,y_0,z)\in L$，所以 $\dfrac{x_0-1}{-1}=\dfrac{y_0}{1}=\dfrac{z}{1}$，从而 $\begin{cases}x_0=1-z,\\ y_0=z,\end{cases}$ 代入 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$，得 Σ：$x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$，即 Σ：$x^2+y^2=2z^2-2z+1$.

(Ⅱ) 设 Ω 的形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性得 $\bar{x}=0,\bar{y}=0,\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}$.

由 $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z^2-2z+1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^2(2z^2-2z+1)\mathrm{d}z=\dfrac{10}{3}\pi$，

$\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v=\int_0^2z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z^2-2z+1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^2(2z^3-2z^2+z)\mathrm{d}z=\dfrac{14}{3}\pi$，

得 $\bar{z}=\dfrac{7}{5}$，故形心坐标为 $\left(0,0,\dfrac{7}{5}\right)$.

(20)【**解**】 令 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+ax_3 & x_2+ax_4\\ x_1 & x_2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{CA}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2 & ax_1\\ x_3+x_4 & ax_3\end{pmatrix},$$

$$AC-CA=\begin{pmatrix}-x_2+ax_3 & -ax_1+x_2+ax_4\\ x_1-x_3-x_4 & x_2-ax_3\end{pmatrix},$$

由 $AC-CA=B$，得$\begin{cases}-x_2+ax_3=0,\\ -ax_1+x_2+ax_4=1,\\ x_1-x_3-x_4=1,\\ x_2-ax_3=b.\end{cases}$

设以上方程组对应的系数矩阵为 D，则

$$\overline{D}=\left(\begin{array}{cccc:c}0&-1&a&0&0\\-a&1&0&a&1\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}0&-1&a&0&0\\0&1&-a&0&1+a\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&1+a\\0&0&0&0&1+a\\0&0&0&0&b\end{array}\right).$$

当 $a=-1,b=0$ 时，线性方程组 $AC-CA=B$ 有解，

由 $\overline{D}\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&-1&1\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$，得 $AC-CA=B$ 的通解为

$$X=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1+k_2+1\\-k_1\\k_1\\k_2\end{pmatrix},$$

故 $C=\begin{pmatrix}k_1+k_2+1 & -k_1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}$（$k_1,k_2$ 为任意常数）.

(21)**【证明】**（Ⅰ）令 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则

$$f=2X^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot(a_1,a_2,a_3)X+X^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)X$$

$$=X^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})X+X^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})X=X^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})X,$$

则二次型 f 的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

（Ⅱ）由 $A\boldsymbol{\alpha}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$，得 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 A 的属于特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量；

由 $A\boldsymbol{\beta}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}$，得 $\boldsymbol{\beta}$ 为 A 的属于特征值 $\lambda_2=1$ 的特征向量；

因为 $r(A)=r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{\alpha})+r(\boldsymbol{\beta})=2<3$，

所以 $\lambda_3=0$ 为 A 的特征值，故二次型 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

(22)**【解】** (Ⅰ) $P\{Y=1\}=P\{X\geqslant 2\}=\int_2^3 \frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x=\frac{19}{27}$,

$$P\{Y=2\}=P\{X\leqslant 1\}=\int_0^1 \frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{27},$$

$P\{1<Y<2\}=1-\frac{19}{27}-\frac{1}{27}=\frac{7}{27}$,

$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}$,

当 $y<1$ 时,$F_Y(y)=0$;

当 $1\leqslant y<2$ 时,$F_Y(y)=P\{Y=1\}+P\{1<Y<y\}$

$$=\frac{19}{27}+\int_1^y \frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x=\frac{19}{27}+\frac{y^3-1}{27}=\frac{18+y^3}{27};$$

当 $y\geqslant 2$ 时,$F_Y(y)=1$,

于是 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \frac{18+y^3}{27}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$

(Ⅱ)$P\{X\leqslant Y\}=P\{X\leqslant Y\mid Y=1\}P\{Y=1\}+$

$$P\{X\leqslant Y\mid Y=2\}P\{Y=2\}+P\{X\leqslant Y\mid 1<Y<2\}P\{1<Y<2\}$$

$$=\frac{19}{27}P\{X\leqslant 1\}+\frac{1}{27}P\{X\leqslant 2\}+\frac{7}{27}P\{X\leqslant Y\}$$

$$=\frac{19}{27\times 27}+\frac{8}{27\times 27}+\frac{7}{27}=\frac{8}{27}.$$

方法点评:本题考查随机变量函数的概率分布.本题 X 为连续型随机变量,由 X 生成的随机变量 Y 既不是连续型随机变量又不是离散型随机变量,在计算关于 X,Y 的概率分布时,一定要针对 Y 使用全概率公式.

(23)**【解】** (Ⅰ)$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\theta^2}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}x$

$$=-\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\mathrm{d}\left(\frac{\theta}{x}\right)\xlongequal{\frac{\theta}{x}=t}-\theta\int_{+\infty}^0\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\theta,$$

令 $E(X)=\overline{X}$,则参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\overline{X}$.

(Ⅱ) 最大似然函数 $L(\theta)=f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)$

$$=\frac{\theta^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3}\mathrm{e}^{-\theta\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)}\ (x_i>0,i=1,2,\cdots,n),$$

$$\ln L(\theta)=2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^n\ln x_i-\theta\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i},$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}=0$,得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{2n}{\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}}$,

最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\frac{2n}{\sum_{i=1}^n\frac{1}{X_i}}$.