1995 年数学(一)真题解析

一、填空题

(1)【答案】 e^6.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^{\frac{6x}{\sin x}}=e^6$.

(2)【答案】 $-\int_0^{x^2}\cos t^2\,dt-2x^2\cos x^4$.

【解】 $\dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^{0}x\cos t^2\,dt=-\dfrac{d}{dx}\left(x\int_0^{x^2}\cos t^2\,dt\right)=-\int_0^{x^2}\cos t^2\,dt-2x^2\cos x^4$.

(3)【答案】 4.

【解】 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$

$$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4.$$

(4)【答案】 $\sqrt{3}$.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}\cdot\left|\dfrac{2^n+(-3)^n}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}\right|=\dfrac{1}{3}$ 得收敛半径 $R=\sqrt{3}$.

(5)【答案】 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

【解】 由 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}$ 得 $\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{ABA}$,然后右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得 $\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB}$,

解得 $\boldsymbol{B}=6(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}=6[\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})]^{-1}=6(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}$,

由 $\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$,得 $(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$,故 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

二、选择题

(1)【答案】 (C).

【解】 直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{1,3,2\}\times\{2,-1,-10\}=\{-28,14,-7\}$

$$=-7\{4,-2,1\},$$

因为平面 π 的法向量平行于 L 的方向向量,所以 $L\perp\pi$,选(C).

(2)【答案】 (B).

【解】 由拉格朗日中值定理得 $f(1)-f(0)=f'(c)$,其中 $0<c<1$,

由 $f''(x)>0$ 得 $f'(x)$ 单调递增,再由 $0<c<1$ 得 $f'(1)>f'(c)>f'(0)$,应选(B).

(3)【答案】 (A).

【解】 $F'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)-f(0);$$

$F'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+f(x)\cdot\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)+f(0),$$

$F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件是 $f'(0)-f(0)=f'(0)+f(0)$，即 $f(0)=0$，

即 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件，应选(A).

(4)**【答案】** (C).

【解】 由 $\left\{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$ 单调递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=0$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，

由 $u_n^2=\ln^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{1}{n}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散，应选(C).

(5)**【答案】** (C).

【解】 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行加到第 3 行，再将第 1 行与第 2 行对调得 $\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}，应选(C).$$

三、

(1)**【解】** $u=f(x,y,z)$ 两边对 x 求导得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1'+f_2'\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f_3'\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x};$$

$\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$ 两边对 x 求导得

$$2x\varphi_1'+\varphi_2'\cdot\mathrm{e}^y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\varphi_3'\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,$$

又 $y=\sin x$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x$，解得 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-2x\frac{\varphi_1'}{\varphi_3'}-\frac{\varphi_2'}{\varphi_3'}\mathrm{e}^{\sin x}\cos x$，

故 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1'+f_2'\cdot\cos x-f_3'\cdot\left(2x\frac{\varphi_1'}{\varphi_3'}+\frac{\varphi_2'}{\varphi_3'}\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\right)$.

(2)**【解】** **方法一** 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$F(1)=A$，则

$$\begin{aligned}\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)[F(1)-F(x)]\mathrm{d}x\\&=A\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)F(x)\mathrm{d}x=A^2-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}F(x)\\&=A^2-\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1=\frac{1}{2}A^2.\end{aligned}$$

方法二

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y,$$

又
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(y)f(x)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^x f(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned}2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^x f(y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y=\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2=A^2,\end{aligned}$$

故 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}A^2$.

四、

(1)【解】 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$,其中 $x^2+y^2\leqslant 2x$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

则 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2x}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2x}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{16}{3}\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{32}{9}\sqrt{2}.$$

(2)【解】 将 $f(x)$ 进行偶延拓再进行周期延拓,则

$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x=0$;

$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^2(x-1)\mathrm{d}\left(\sin\frac{n\pi x}{2}\right)=\frac{2}{n\pi}(x-1)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}-\frac{8}{n^2\pi^2}, & n=1,3,5,\cdots,\\ 0, & n=2,4,6,\cdots,\end{cases}$$

$b_n=0, n=1,2,3,\cdots$,则

$x-1=-\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2}+\cdots\right)$,其中 $0\leqslant x\leqslant 2$.

五、【解】 设 $M(x,y)$ 为 L 上的任意一点,L 上 M 处的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x),$$

令 $X=0$ 得 $Y=y-xy'$,即 $A(0,y-xy')$,

$$|\overline{MA}|=x\sqrt{1+y'^2},\quad |\overline{OA}|=y-xy',$$

由 $|\overline{MA}|=|\overline{OA}|$,有

$$|y-xy'|=\sqrt{(x-0)^2+(y-y+xy')^2},$$

化简后得
$$2xyy'-y^2+x^2=0.$$

再令 $z=y^2$,得 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}=-x$,

解得

$$z=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(-\int x\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=x(-x+C),$$

即
$$y^2=-x^2+Cx.$$

由于所求曲线在第一象限内,知 $y>0$,故

$$y=\sqrt{Cx-x^2}.$$

将已知条件 $y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$ 代入上式,得 $C=3$,于是曲线方程为

$$y=\sqrt{3x-x^2}\ (0<x<3).$$

六、【解】 由 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关得 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$,则 $Q(x,y)=x^2+\varphi(y)$,

$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^t 0\mathrm{d}x+\int_0^1[t^2+\varphi(y)]\mathrm{d}y=t^2+\int_0^1\varphi(y)\mathrm{d}y$,

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 0\mathrm{d}x + \int_0^t [1+\varphi(y)]\mathrm{d}y = t + \int_0^t \varphi(y)\mathrm{d}y,$$

由 $t + \int_0^t \varphi(y)\mathrm{d}y = t^2 + \int_0^1 \varphi(y)\mathrm{d}y$ 得 $\varphi(t) = 2t - 1$，

故 $Q(x,y) = x^2 + 2y - 1$.

七、**【证明】** (1)(反证法) 设存在 $c \in (a,b)$，使得 $g(c) = 0$，

由罗尔定理，存在 $\xi_1 \in (a,c)$，$\xi_2 \in (c,b)$，使得 $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$，

再由罗尔定理，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $g''(\xi) = 0$，矛盾，故在(a,b) 内 $g(x) \neq 0$.

(2) 令 $\varphi(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$，

则 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$，由罗尔定理知，存在 $\xi \in (a,b)$，使 $\varphi'(\xi) = 0$，即

$$f(\xi)g''(\xi) - f''(\xi)g(\xi) = 0,$$

因 $g(\xi) \neq 0$，$g''(\xi) \neq 0$，故得

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}, \quad \xi \in (a,b).$$

八、**【解】** 设 $\boldsymbol{\xi} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 对应的特征向量，

由 $\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = 0$ 得 $x_2 + x_3 = 0$，则 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

令 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

九、**【解】** **方法一** 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$ 得 $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = 1$，即 $|\boldsymbol{A}|^2 = 1$，

再由 $|\boldsymbol{A}| < 0$ 得 $|\boldsymbol{A}| = -1$.

于是 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = -|(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}| = -|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$，

故 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}| = 0$.

方法二 令 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0})$，

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X}$ 得 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \lambda\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，两边右乘 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 得

$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，即 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \lambda^2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$，或$(\lambda^2 - 1)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$，

由 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \|\boldsymbol{X}\|^2 > 0$ 得 $\lambda^2 - 1 = 0$，即 $\lambda = \pm 1$，

因为 $|\boldsymbol{A}| < 0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个特征值为 -1，从而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值至少有一个为 0，

故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}| = 0$.

十、**填空题**

(1)**【答案】** 18.4.

【解】 显然 $X \sim B(10, 0.4)$，

由 $E(X) = np = 4$，$D(X) = np(1-p) = 10 \times 0.4 \times 0.6 = 2.4$，得

$$E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = 2.4 + 16 = 18.4.$$

(2)【答案】 $\frac{5}{7}$.

【解】 令 $A=\{X\geqslant 0\}, B=\{Y\geqslant 0\}$,则 $P(A)=P(B)=\frac{4}{7}, P(AB)=\frac{3}{7}$,

于是
$$
\begin{aligned}
P\{\max(X,Y)\geqslant 0\} &= 1-P\{\max(X,Y)<0\}=1-P\{X<0,Y<0\} \\
&= 1-P(\overline{A}\cdot\overline{B})=1-P(\overline{A+B})=P(A+B) \\
&= P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{5}{7}.
\end{aligned}
$$

十一、【解】 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{e^X\leqslant y\}$,

当 $y<1$ 时,$F_Y(y)=0$;

当 $y\geqslant 1$ 时,$F_Y(y)=P\{X\leqslant \ln y\}=\int_0^{\ln y} e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_0^{\ln y}=1-\frac{1}{y}$,

即 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ 1-\frac{1}{y}, & y\geqslant 1,\end{cases}$ 故 $Y=e^X$ 的概率密度为

$$
f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \frac{1}{y^2}, & y\geqslant 1.\end{cases}
$$