2002 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} =$ ______.

(2) 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定,则 $y''(0) =$ ______.

(3) 微分方程 $yy'' + (y')^2 = 0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0} = 1, y'\big|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解是______.

(4) 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可化成标准形 $f = 6y_1^2$,则 $a =$ ______.

(5) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)(\sigma > 0)$,且二次方程 $y^2 + 4y + X = 0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$,则 $\mu =$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 考虑二元函数 $f(x, y)$ 的下面 4 条性质:

①$f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续; ②$f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数连续;

③$f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微; ④$f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数存在.

若用“$P \Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q,则有(　　)

(A)②⇒③⇒①. (B)③⇒②⇒①. (C)③⇒④⇒①. (D)③⇒①⇒④.

(2) 设 $u_n \neq 0 (n = 1, 2, 3, \cdots)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{u_n} = 1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right)$(　　)

(A) 发散. (B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛. (D) 收敛性根据所给条件不能判定.

(3) 设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导,则(　　)

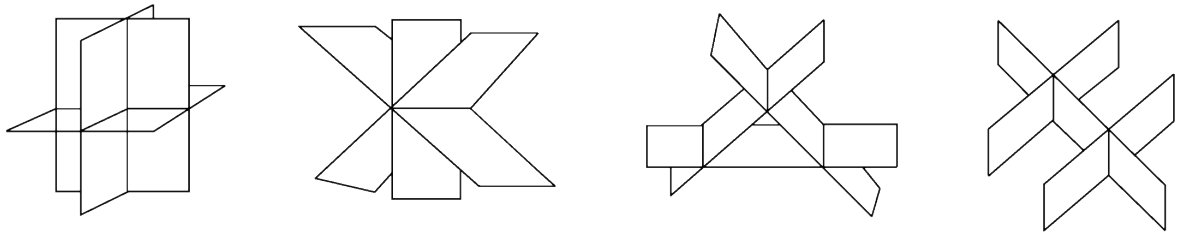
(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = 0$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = 0$.

(4) 设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i, i = 1, 2, 3$,它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2,则这三张平面可能的位置关系为(　　)



(A) (B) (C) (D)

(5) 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量,它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$,分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$,则(　　)

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

三、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数,且 $f(0)\neq 0$, $f'(0)\neq 0$,若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小,试确定 a,b 的值.

四、(本题满分 7 分)

已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同,写出此切线方程,并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)$.

五、(本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

六、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数,L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线,其起点为 (a,b),终点为 (c,d). 记

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y.$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关;

(2) 当 $ab=cd$ 时,求 I 的值.

七、(本题满分 7 分)

(1) 验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$;

(2) 利用(1) 的结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

八、(本题满分 7 分)

设有一小山,取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面,其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$,小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上一点,问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大?若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$,试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动,为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点. 也就是说,要在 D 的边界线 $x^2 + y^2 - xy = 75$ 上找出使(1) 中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点. 试确定攀登起点的位置.

九、(本题满分 6 分)

已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量,其中 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$. 如果 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解.

十、(本题满分 8 分)

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵,

(1) 如果 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似,试证 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等.

(2) 举一个 2 阶方阵的例子说明(1) 的逆命题不成立.

(3) 当 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵时,试证(1) 的逆命题成立.

十一、(本题满分 7 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次,用 Y 表示观察值大于 $\dfrac{\pi}{3}$ 的次数,求 Y^2 的数学期望.

十二、(本题满分 7 分)

设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\left(0 < \theta < \dfrac{1}{2}\right)$ 是未知参数,利用总体 X 的如下样本值

$$3,1,3,0,3,1,2,3,$$

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.