1999 年数学(一)真题解析

一、填空题

(1)【答案】 $\dfrac{1}{3}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

(2)【答案】 $\sin x^2$.

【解】 由$\int_0^x \sin(x-t)^2\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 \sin u^2(-\mathrm{d}u)=\int_0^x \sin u^2\mathrm{d}u$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin(x-t)^2\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin u^2\mathrm{d}u=\sin x^2.$$

(3)【答案】 $C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{4}x\mathrm{e}^{2x}$($C_1,C_2$ 为任意常数).

【解】 特征方程为$\lambda^2-4=0$,特征根为$\lambda_1=-2,\lambda_2=2$,

则 $y''-4y=0$ 的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$;

令 $y''-4y=\mathrm{e}^{2x}$ 的特解为$y_0(x)=ax\mathrm{e}^{2x}$,代入得 $a=\dfrac{1}{4}$,

故 $y''-4y=\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{4}x\mathrm{e}^{2x}$($C_1,C_2$ 为任意常数).

(4)【答案】 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$

【解】 **方法一** 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda-n)=0$ 得

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$.

方法二 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,从而 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值的个数与 $r(\boldsymbol{A})$ 相同,

由 $r(\boldsymbol{A})=1$ 得 A 只有一个非零特征值,

又因为 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}=n=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$.

(5)【答案】 $\dfrac{1}{4}$.

【解】 令 $P(A)=p$,

而 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=3p-3p^2,$$

则 $3p-3p^2=\dfrac{9}{16}$,解得 $p=\dfrac{1}{4}$ 或 $p=\dfrac{3}{4}$,

由 $P(A)<\dfrac{1}{2}$ 得 $P(A)=\dfrac{1}{4}$.

二、选择题

(1)【答案】 (A).

【解】 若 $f(x)$ 是奇函数,$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,

则 $F(-x)=\int_a^{-x}f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} \int_{-a}^{x}f(-u)(-\mathrm{d}u)=\int_{-a}^{x}f(u)\mathrm{d}u$

$$=\int_{-a}^{a}f(u)\mathrm{d}u+\int_{a}^{x}f(u)\mathrm{d}u=\int_{a}^{x}f(u)\mathrm{d}u=F(x),$$

即 $F(x)$ 为偶函数,应选(A).

(2)**【答案】** (D).

【解】 $f'_{+}(0)=\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=0$;

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^{-}}xg(x)=0,$$

因为 $f'_{+}(0)=f'_{-}(0)$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,应选(D).

(3)**【答案】** (C).

【解】 显然 $S(x)$ 是以 2 为周期的偶函数,则 $S\left(-\dfrac{5}{2}\right)=S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=S\left(\dfrac{1}{2}\right)$,

而 $S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{f\left(\dfrac{1}{2}-0\right)+f\left(\dfrac{1}{2}+0\right)}{2}=\dfrac{3}{4}$,应选(C).

(4)**【答案】** (B).

【解】 当 $m>n$ 时,$r(\boldsymbol{A})\leqslant n,r(\boldsymbol{B})\leqslant n$,

因为 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$,所以 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant n$,

于是 $r(\boldsymbol{AB})<m$,即 $\boldsymbol{AB}$ 为降秩矩阵,故 $|\boldsymbol{AB}|=0$,应选(B).

(5)**【答案】** (B).

【解】 因为 X,Y 相互独立且 $X\sim N(0,1),Y\sim N(1,1)$,

所以 $X+Y\sim N(1,2)$,故 $P\{X+Y\leqslant1\}=\dfrac{1}{2}$,应选(B).

三、**【解】** $z=xf(x+y)$ 与 $F(x,y,z)=0$ 两边对 x 求导得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f+x\left(1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)f',\\ F'_x+F'_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}-xf'\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f+xf',\\ F'_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-F'_x,\end{cases}$$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(f+xf')F'_y-xf'F'_x}{F'_y+xf'F'_z}\quad(F'_y+xf'F'_z\neq0)$.

四、**【解】** 令 $P(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)$, $Q(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y-ax$,

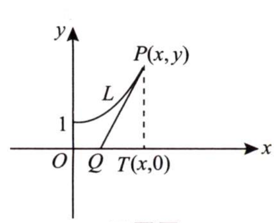
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y-a,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y-b,$$

$I=\left(\oint_{L+\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}}\right)[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$,

而 $\oint_{L+\overline{OA}}[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y=\iint\limits_D(b-a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{\pi}{2}(b-a)a^2$,

$\int_{\overline{OA}}[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y=-\int_0^{2a}bx\,\mathrm{d}x=-2a^2b$,

故 $I=\dfrac{\pi}{2}(b-a)a^2+2a^2b=\left(\dfrac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\dfrac{\pi}{2}a^3$.



五题图

五、**【解】** **方法一** 曲线 $y=y(x)$ 上任一点 $P(x,y)$ 处的切线为

$$Y-y=y'(X-x),$$

令 $Y=0$ 得 $X=x-\dfrac{y}{y'}$，切线与 x 轴的交点为 $Q\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$，垂足为 $T(x,0)$，

则 $S_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y}{y'}\cdot y=\dfrac{y^2}{2y'}$，$\quad S_2=\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$，

由 $2S_1-S_2=1$ 得 $\dfrac{y^2}{y'}-\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=1$，

两边对 x 求导并整理得 $yy''=y'^2$.

令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入得 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p^2$，

因为 $p\neq 0$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-\dfrac{1}{y}p=0$，解得 $p=C_1\mathrm{e}^{-\int-\frac{1}{y}\mathrm{d}y}=C_1y$，

由 $y(0)=1,y'(0)=1$ 得 $C_1=1$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0$，

解得 $y=C_2\mathrm{e}^{-\int-\mathrm{d}x}=C_2\mathrm{e}^x$，再由 $y(0)=1$ 得 $C_2=1$，故 $y=\mathrm{e}^x$.

方法二　曲线 $y=y(x)$ 上任一点 $P(x,y)$ 处的切线为 $Y-y=y'(X-x)$，

令 $Y=0$ 得 $X=x-\dfrac{y}{y'}$，切线与 x 轴的交点为 $Q\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$，垂足为 $T(x,0)$，

则 $S_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y}{y'}\cdot y=\dfrac{y^2}{2y'}$，$\quad S_2=\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$，

由 $2S_1-S_2=1$ 得 $\dfrac{y^2}{y'}-\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=1$，

两边对 x 求导并整理得 $yy''=y'^2$，从而 $\dfrac{yy''-y'^2}{y^2}=0$，即 $\left(\dfrac{y'}{y}\right)'=0$，于是 $\dfrac{y'}{y}=C_1$，

由 $y(0)=1,y'(0)=1$ 得 $C_1=1$，即 $y'-y=0$，

解得 $y=C_2\mathrm{e}^{-\int-\mathrm{d}x}=C_2\mathrm{e}^x$，

再由 $y(0)=1$ 得 $C_2=1$，故 $y=\mathrm{e}^x$.

六、**【证明】**　令 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，$\quad f(1)=0$，

$f'(x)=2x\ln x+x-\dfrac{1}{x}-2(x-1)=2x\ln x-x-\dfrac{1}{x}+2$，$\quad f'(1)=0$，

$f''(x)=2\ln x+2-1+\dfrac{1}{x^2}=2\ln x+1+\dfrac{1}{x^2}$，$\quad f''(1)=2>0$，

$f'''(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2(x^2-1)}{x^3}$，

当 $0<x<1$ 时 $f'''(x)<0$；当 $x>1$ 时 $f'''(x)>0$，则 $x=1$ 为 $f''(x)$ 的最小值点，

由 $f''(1)=2>0$ 得 $f''(x)\geqslant 2>0$，

由 $\begin{cases}f'(1)=0,\\f''(x)>0(x>0)\end{cases}$ 得 $\begin{cases}f'(x)<0, & 0<x<1,\\f'(x)>0, & x>1,\end{cases}$ 从而 $x=1$ 为 $f(x)$ 的最小值点，

于是当 $x>0$ 时 $f(x)\geqslant f(1)=0$，故当 $x>0$ 时 $(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

七、**【解】**　设将空斗从井底拉至井口拉力做功为 W_1，则

$$W_1=400\times 30=12\ 000(\mathrm{J});$$

设拉力对绳做功为 W_2，取井底起点为原点，x 轴垂直向上，

取 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,30]$，$\mathrm{d}W_2=50(30-x)\mathrm{d}x$，则

$$W_2=50\int_0^{30}(30-x)\mathrm{d}x=50\times 450=22\ 500(\mathrm{J});$$

设拉力对污泥做功为 W_3，取$[t,t+\mathrm{d}t]\subset[0,10]$，$\mathrm{d}W_3=(2\,000-20t)\cdot 3\mathrm{d}t$，则

$$W_3=3\int_0^{10}(2\,000-20t)\mathrm{d}t=57\,000(\mathrm{J}),$$

故拉力所做的功为 $W=12\,000+22\,500+57\,000=91\,500(\mathrm{J})$.

八、【解】 法向量为 $\boldsymbol{n}=\{x,y,2z\}$，切平面为

$$\pi:x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)=0,$$

整理得 $\pi:\dfrac{x}{2}X+\dfrac{y}{2}Y+zZ-1=0$，

$$\rho(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+z^2}},$$

$$S:z=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}},\quad D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\},$$

由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-x}{2z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-y}{2z}$ 得 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

$$\text{则}\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\iint_S z\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2}\,\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{4}\iint_{D_{xy}}(4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4r-r^3)\mathrm{d}r=\frac{3\pi}{2}.$$

九、【解】 (1)$a_{n+2}+a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}(\tan x)$

$$=\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1},$$

则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$，

$$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1},$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$ 得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=1$.

(2)$a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x\xlongequal{\tan x=t}\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{n}$，

于是 $0\leqslant\dfrac{a_n}{n^{\lambda}}\leqslant\dfrac{1}{n^{\lambda+1}}$，由 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛得出 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

十、【解】 由 $\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 得 $\begin{cases}-a+1+c=-\mu,\\-b-2=-\mu,\\c-1-a=\mu,\end{cases}$

解得 $a=c$，$\mu=-1$，$b=-3$；

再由 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&-1&a\\5&-3&3\\1-a&0&-a\end{vmatrix}=-1$ 得 $a=2$，$c=2$，

$\lambda_0=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\mu}=1$，故 $a=2$，$b=-3$，$c=2$，$\lambda_0=1$.

十一、【证明】 (必要性) 设 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵，由正定矩阵的定义，对任意的 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X})>0,$$

再由 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵得 $\boldsymbol{BX} \neq \boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{0}$ 只有零解,故 $r(\boldsymbol{B}) = n$.

(充分性) 设 $r(\boldsymbol{B}) = n$,对任意的 $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ABX} = (\boldsymbol{BX})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BX})$,

令 $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{Y}$,显然 $\boldsymbol{Y} \neq \boldsymbol{0}$.

若 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{0}$,由 $r(\boldsymbol{B}) = n$ 得 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$,矛盾.

因为 $\boldsymbol{Y} \neq \boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,所以 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ABX} = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AY} > 0$,即 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵.

十二、**【解】** 由 $p_{11} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{6}$ 得 $p_{11} = \dfrac{1}{24}$.

因为 X,Y 相互独立,所以 $p_{1\cdot} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{24}$,解得 $p_{1\cdot} = \dfrac{1}{4}$.

由 $\dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{8} + p_{13} = \dfrac{1}{4}$ 得 $p_{13} = \dfrac{1}{12}$.

由 $p_{\cdot 2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$ 得 $p_{\cdot 2} = \dfrac{1}{2}$,

由 $\dfrac{1}{8} + p_{22} = \dfrac{1}{2}$ 得 $p_{22} = \dfrac{3}{8}$,

由 $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} + p_{\cdot 3} = 1$ 得 $p_{\cdot 3} = \dfrac{1}{3}$,

由 $\dfrac{1}{12} + p_{23} = \dfrac{1}{3}$ 得 $p_{23} = \dfrac{1}{4}$,

再由 $\dfrac{1}{4} + p_{2\cdot} = 1$ 得 $p_{2\cdot} = \dfrac{3}{4}$.

十三、**【解】** (1)$E(X) = \displaystyle\int_0^{\theta} x \cdot \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x)\mathrm{d}x = \frac{6}{\theta^3}\int_0^{\theta}(\theta x^2 - x^3)\mathrm{d}x = \frac{\theta}{2}$,

由 $E(X) = \overline{X}$ 得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$.

(2) $E(X^2) = \displaystyle\int_0^{\theta} x^2 \cdot \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x)\mathrm{d}x = \frac{6}{\theta^3}\int_0^{\theta}(\theta x^3 - x^4)\mathrm{d}x = \frac{3\theta^2}{10}$,

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3\theta^2}{10} - \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{20},$$

故 $D(\hat{\theta}) = D(2\overline{X}) = \dfrac{4}{n}D(X) = \dfrac{\theta^2}{5n}$.