2018 年数学(一)真题解析

一、选择题

(1)**【答案】** (D).

【解】 **方法一** 对 $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在,即 $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$ 在 $x=0$ 处不可导,应选(D).

方法二

当 $f(x)=|x|\sin|x|$ 时,$f(x)-f(0)\sim x^2$,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且导数为 0,不选(A);

当 $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$ 时,$f(x)-f(0)\sim|x|^{\frac{3}{2}}$,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且导数为 0,不选(B);

当 $f(x)=\cos|x|$ 时,$f(x)-f(0)\sim-\dfrac{1}{2}x^2$,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且导数为 0,不选(C),

应选(D).

(2)**【答案】** (B).

【解】 设切点为 (x_0,y_0,z_0),则

$$\begin{cases}z_0=x_0^2+y_0^2,\\(2x_0,2y_0,-1)\cdot(1,-1,0)=0,\\(2x_0,2y_0,-1)\cdot(x_0-1,y_0,z_0)=0,\end{cases}$$

解之得 $\begin{cases}x_0=0,\\y_0=0,\\z_0=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=1,\\y_0=1,\\z_0=2,\end{cases}$

故所求切平面为 $z=0$ 或 $2x+2y-z=2$. 应选(B).

(3)**【答案】** (B).

【解】 $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}$$
$$=\cos1+2\sin1,$$

应选(B).

(4)**【答案】** (C).

【解】 $M=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\pi$,

当 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时,$1+\sqrt{\cos x}>1>\dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x}$,

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x>\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x>\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$,即 $K>M>N$. 应选(C).

(5)**【答案】** (A).

【解】 **方法一**

令 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

显然矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 的特征值都是 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$,

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

因为 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{M})=r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$,所以应选(A).

方法二

取 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

因为 $\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,所以 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似,应选(A).

(6)**【答案】** (A).

【解】 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$,

显然 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=r[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})]\leqslant r(\boldsymbol{A})$,

又 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})\geqslant r(\boldsymbol{A})$,

于是 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$,应选(A).

(7)**【答案】** (A).

【解】 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.3$,

$P(X<0)=\int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0.5-0.3=0.2$,应选(A).

(8)**【答案】** (D).

【解】 若 σ^2 已知,则假设 H_0 的接受域:$|u|<u_{\frac{\alpha}{2}}$,其中 $u_{\frac{\alpha}{2}}$ 为正态分布的 $\frac{\alpha}{2}$(上)分位数.

若 σ^2 未知,则假设 H_0 的接受域:$|t|<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$,其中 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 为自由度是 $n-1$ 的 t 分布的 $\frac{\alpha}{2}$(上)分位数.显然检验水平 α 变小,接受域都变大.应选(D).

二、填空题

(9)【答案】 -2.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin kx}\cdot\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}-1\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin kx}\cdot\dfrac{-2\tan x}{1+\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{kx}\cdot\dfrac{-2x}{1+\tan x}=-\dfrac{2}{k}$,

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\mathrm{e}^{-\frac{2}{k}}=\mathrm{e}$,即 $k=-2$.

(10)【答案】 $2(\ln 2-1)$.

【解】 $f'(1)=(2^x)'\big|_{x=1}=2\ln 2$,

$$\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}f'(x)=xf'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=f'(1)-f(1)+f(0)$$
$$=2\ln 2-2=2(\ln 2-1).$$

(11)【答案】 $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$.

【解】 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}(1,1,0)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & -yz & zx\end{vmatrix}_{(1,1,0)}=(y\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}-x\boldsymbol{k})\Big|_{(1,1,0)}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$.

(12)【答案】 $-\dfrac{\pi}{3}$.

【解】 $\displaystyle\oint_L xy\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L(xy+yz+xz)\mathrm{d}s=\frac{1}{6}\oint_L[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]\mathrm{d}s$

$$=-\frac{1}{6}\oint_L\mathrm{d}s=-\frac{\pi}{3}.$$

(13)【答案】 -1.

【解】 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的线性无关的特征向量.
由 $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,得 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 也为 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征向量,因此 $\boldsymbol{A}^2$ 有二重特征值 $\lambda=1$.
因为 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同的特征值,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$,于是 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

(14)【答案】 $\dfrac{1}{4}$.

【解】由 $BC=\varnothing$,得 $P(BC)=0$,因为 $ABC\subset BC$,所以 $P(ABC)=0$.

$$P(AC\mid AB\cup C)=\frac{P[AC(AB\cup C)]}{P(AB\cup C)}=\frac{P[(ABC)\cup(AC)]}{P(AB\cup C)}=\frac{P(AC)}{P(AB\cup C)}$$

$$=\frac{P(A)P(C)}{P(A)P(B)+P(C)-P(ABC)}=\frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+P(C)-0}=\frac{1}{4},$$

解得 $P(C)=\dfrac{1}{4}$.

三、解答题

(15)【解】 $\displaystyle\int\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\left(e^x\sqrt{e^x-1}-\int\sqrt{e^x-1}\,de^x\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\left[e^x\sqrt{e^x-1}-\frac{2}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x+2)\sqrt{e^x-1}+C.$$

(16)**【解】** 设铁丝分成的三段长分别是 x,y,z，则 $x+y+z=2$，且依次围成的圆、正方形与正三角形三个图形的面积之和为

$$f(x,y,z)=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{z}{3}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2,$$

构造拉格朗日函数：$L(x,y,z,\lambda)=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{\sqrt{3}}{36}z^2+\lambda(x+y+z-2)$

$$\text{令}\begin{cases}L'_x=\dfrac{x}{2\pi}+\lambda=0,\\ L'_y=\dfrac{y}{8}+\lambda=0,\\ L'_z=\dfrac{\sqrt{3}}{18}z+\lambda=0,\\ L'_\lambda=x+y+z-2=0,\end{cases}\quad\text{得}\begin{cases}x_0=\dfrac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}},\\ y_0=\dfrac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}},\\ z_0=\dfrac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}},\end{cases}\text{此时 } f(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}.$$

又当 $x+y+z=2,xyz=0$ 时，$f(x,y,z)$ 的最小值为 $f\left(0,\dfrac{8}{4+3\sqrt{3}},\dfrac{6\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1}{4+3\sqrt{3}}$.

所以三个图形的面积之和存在最小值，最小值为 $f(x_0,y_0,z_0)=\dfrac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$.

(17)**【解】** 补曲面 $\Sigma_1:\begin{cases}x=0,\\3y^2+3z^2=1,\end{cases}$ 取后侧，Ω 为 Σ 与 Σ_1 所围成的立体. 利用高斯公式可得

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x\,dy\,dz+(y^3+2)dz\,dx+z^3dx\,dy-\iint\limits_{\Sigma_1}x\,dy\,dz+(y^3+2)dz\,dx+z^3dx\,dy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)dx\,dy\,dz-0=\iiint\limits_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)dx\,dy\,dz$$

利用柱坐标变换 $y=r\cos\theta,z=r\sin\theta,x=x$ 得

$$\iiint\limits_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}dr\int_0^{\sqrt{1-3r^2}}(1+3r^2)r\,dx$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\sqrt{1-3r^2}(1+3r^2)r\,dr=\frac{2\pi}{3}\int_0^1(2-t^2)t^2dt=\frac{14\pi}{45}.$$

(18)**【解】** (Ⅰ) 当 $f(x)=x$ 时，方程化为 $y'+y=x$，其通解为

$$y=e^{-x}\left(C+\int xe^x dx\right)=e^{-x}(C+xe^x-e^x)=Ce^{-x}+x-1.$$

(Ⅱ) 方程 $y'+y=f(x)$ 的通解为 $y=e^{-\int_0^x dt}\left[C+\int_0^x e^{\int_0^t ds}f(t)dt\right]$，

即 $y=e^{-x}\left[C+\int_0^x e^t f(t)dt\right]$.

得 $y(x+T)-y(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[\left(\frac{1}{\mathrm{e}^T}-1\right)C+\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{x+T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t\right]$

若 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数,则

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{x+T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t&=\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_T^{x+T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{x}\mathrm{e}^{u+T} f(u+T)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{x}\mathrm{e}^{T}\mathrm{e}^u f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{x}\mathrm{e}^{s} f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

于是 $y(x+T)-y(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[\left(\frac{1}{\mathrm{e}^T}-1\right)C+\frac{1}{\mathrm{e}^T}\int_0^{T}\mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t\right]$,

因此当且仅当 $C=\frac{1}{\mathrm{e}^T-1}\int_0^T \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t$ 时,$y(x+T)-y(x)=0$,即方程存在唯一的以 T 为周期的解.

(19)**【证明】** 因为 $x_1\neq 0$,所以 $\mathrm{e}^{x_2}=\frac{\mathrm{e}^{x_1}-1}{x_1}$.

由微分中值定理,存在 $\xi\in(0,x_1)$,使得$\frac{\mathrm{e}^{x_1}-1}{x_1}=\mathrm{e}^{\xi}$,即 $\mathrm{e}^{x_2}=\mathrm{e}^{\xi}$,因此 $0<x_2<x_1$.

假设 $0<x_{n+1}<x_n$,则 $\mathrm{e}^{x_{n+2}}=\frac{\mathrm{e}^{x_{n+1}}-1}{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{\eta}(0<\eta<x_{n+1})$,得 $0<x_{n+2}<x_{n+1}$. 故 $\{x_n\}$ 是单调减少的数列,且有下界,从而$\{x_n\}$ 收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,在等式 $x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1$ 两边取极限,得 $a\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^a-1$,显然 $a=0$ 为其解.

又令 $f(x)=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1$,则 $f'(x)=x\mathrm{e}^x$.

当 $x>0$ 时,$f'(x)=x\mathrm{e}^x>0$,函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上单调增加,

所以 $a=0$ 是方程 $a\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^a-1$ 在$[0,+\infty)$ 上的唯一解,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(20)**【解】** (Ⅰ)$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2=0$的充分必要条件是$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\x_2+x_3=0,\\x_1+ax_3=0.\end{cases}$ 对齐次线性方程组的系数矩阵作初等行变换得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&1&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix},$$

$a\neq 2$ 时,$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 只有零解 $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$,

$a=2$ 时,$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,

$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 有非零解 $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=k(-2,-1,1)^{\mathrm{T}}$,其中 $k\neq 0$.

(Ⅱ)$a\neq 2$ 时,令$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,

因$\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{vmatrix}=a-2\neq 0$,则矩阵$\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}$可逆,

所以 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

$a=2$ 时,

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2\\&=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3\\&=2(x_1-x_2+x_3)^2+\frac{3}{2}x_2^2+\frac{3}{2}x_3^2+3x_2x_3\\&=2(x_1-x_2+x_3)^2+\frac{3}{2}(x_2+x_3)^2\end{aligned}$$

所以 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2$.

(21)**【解】** (Ⅰ)显然 $r(\boldsymbol{A})=2$,因为初等变换不改变矩阵的秩,所以 $r(\boldsymbol{B})=2$,

而 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a+1&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&0&2-a\end{pmatrix}$,故 $a=2$.

(Ⅱ)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&3&0\\2&7&-2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$,

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)$,

由$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$得

$$\boldsymbol{X}_1=k_1\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6k_1+3\\2k_1-1\\k_1\end{pmatrix},\boldsymbol{X}_2=k_2\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6k_2+4\\2k_2-1\\k_2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}_3=k_3\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6k_3+4\\2k_3-1\\k_3\end{pmatrix},$$

则所求的可逆矩阵为 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$($k_1,k_2,k_3$ 为任意常数且 $k_2\neq k_3$).

(22)**【解】** (Ⅰ)因为 $E(X)=0,E(X^2)=1,E(Y)=\lambda$,以及 X,Y 相互独立,故

$\mathrm{Cov}(X,Z)=\mathrm{Cov}(X,XY)=E(X^2Y)-E(X)E(XY)=E(X^2)E(Y)-E^2(X)E(Y)=\lambda$.

(Ⅱ)由 Y 服从参数为 λ 的泊松分布,即 $P(Y=j)=\dfrac{\lambda^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda}(j=0,1,2,\cdots)$,于是,$Z$ 的所有可能取值为全体整数.故 Z 的概率分布为

1)当 k 为正整数时,有

$$P(Z=k)=P(XY=k)=P(X=1,Y=k)=P(X=1)P(Y=k)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=1,2,3,\cdots),$$

2）当 k 为负整数时，有

$$P(Z=k)=P(XY=k)=P(X=-1,Y=-k)=P(X=-1)P(Y=-k)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^{-k}}{(-k)!}e^{-\lambda}(k=-1,-2,-3,\cdots),$$

3）当 k 为 0 时，有

$$P(Z=0)=P(XY=0)=P(X=-1,Y=0)+P(X=1)P(Y=0)=P(X=-1,Y=0)$$
$$=\frac{1}{2}e^{-\lambda}+\frac{1}{2}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}.$$

故 $P(Z=k)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, & k=1,2,3,\cdots\\ e^{-\lambda}, & k=0,\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^{-k}}{(-k)!}e^{-\lambda}, & k=-1,-2,-3,\cdots\end{cases}$

(23)**【解】** （Ⅰ）似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma)=\frac{1}{2^n\sigma^n}e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|},-\infty<x_i<+\infty,i=1,2,\cdots$$

于是 $\ln L=-n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$，得 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$.

（Ⅱ）$E(\hat{\sigma})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(|X_i|)=E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x$

$$=-\int_0^{+\infty}x\,\mathrm{d}e^{-\frac{x}{\sigma}}=-xe^{-\frac{x}{\sigma}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x=\sigma.$$

$$D(\hat{\sigma})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(|X_i|)=\frac{D(|X|)}{n}=\frac{E[|X|^2-E^2(|X|)]}{n}$$
$$=\frac{1}{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^2\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x-\sigma^2\right)=\frac{1}{n}\left(\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x-\sigma^2\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left(\int_0^{+\infty}-x^2\mathrm{d}e^{-\frac{x}{\sigma}}-\sigma^2\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left(\int_0^{+\infty}2xe^{-\frac{x}{\sigma}}\mathrm{d}x-\sigma^2\right)=\frac{1}{n}(2\sigma^2-\sigma^2)=\frac{\sigma^2}{n}.$$