# 1989 年数学(一)真题解析

## 一、填空题

(1)**【答案】** $-1$.

**【解】** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{-h}=-\dfrac{1}{2}f'(3)=-1$.

(2)**【答案】** $x-1$.

**【解】** 令 $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,则 $f(x)=x+2A$,对此等式两边从 0 到 1 积分得 $A=\dfrac{1}{2}+2A$,

解得 $A=-\dfrac{1}{2}$,故 $f(x)=x-1$.

(3)**【答案】** $\pi$.

**【解】** **方法一** $\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_L\mathrm{d}s=\pi$.

**方法二** 令 $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t\end{cases}(\pi\leqslant t\leqslant 2\pi)$,则

$$\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_\pi^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\cdot\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\pi.$$

(4)**【答案】** 2.

**【解】** 由 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\dfrac{\partial(xy^2)}{\partial x}+\dfrac{\partial(y\mathrm{e}^z)}{\partial y}+\dfrac{\partial[x\ln(1+z^2)]}{\partial z}=y^2+\mathrm{e}^z+\dfrac{2xz}{1+z^2}$,

得 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}\Big|_{(1,1,0)}=2$.

(5)**【答案】** $\begin{pmatrix}1&0&0\\-\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

**【解】** **方法一** $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

由 $\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&2&0&-1&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$,得

$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

**方法二** $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=(1)$,

由 $(\boldsymbol{B}\,\vdots\,\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\1&2&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\0&2&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\0&1&-\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}\end{array}\right)$得

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\text{故}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

## 二、选择题

(1)**【答案】** (A).

**【解】** 由$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$,得 $y=1$ 为水平渐近线；

由$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$,得曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 无铅直渐近线,应选(A).

(2)**【答案】** (C).

**【解】** 设点 $P$ 的坐标为$(x_0,y_0,4-x_0^2-y_0^2)$,该点法向量为 $\boldsymbol{n}=\{2x_0,2y_0,1\}$,

由$\dfrac{2x_0}{2}=\dfrac{2y_0}{2}=\dfrac{1}{1}$ 得 $x_0=1,y_0=1$,故所求的点为(1,1,2),应选(C).

(3)**【答案】** (D).

**【解】** 显然 $y_1-y_3,y_2-y_3$ 为 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个线性无关解,

故 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的通解为

$$y=C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3=C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3,$$

应选(D).

(4)**【答案】** (B).

**【解】** 对 $f(x)$ 进行奇延拓,将 $f(x)$ 展成正弦级数,则 $S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-S\left(\dfrac{1}{2}\right)$,因为 $x=\dfrac{1}{2}$ 为函数 $f(x)$ 的连续点,所以 $S=\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$,故 $S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$,应选(B).

(5)**【答案】** (C).

**【解】** **方法一** 因为 $|\boldsymbol{A}|=0$,所以 $r(\boldsymbol{A})<4$,从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,即必有一列可由其余列线性表示,应选(C).

**方法二** 取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,显然 $|\boldsymbol{A}|=0$,

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 任何一列元素都不全为零,任何两列都不成比例,第 4 列不是第 1,2,3 列的线性组合,即排除(A)(B)(D),应选(C).

## 三、

(1)**【解】** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f'+g_1'+yg_2'$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f''+xg_{12}''+g_2'+xyg_{22}''$.

(2)**【解】** **方法一** $P=xy^2$, $Q=\varphi(x)y$,

因为曲线积分与路径无关,所以$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$,即 $\varphi'(x)=2x$,

解得 $\varphi(x)=x^2+C$,由 $\varphi(0)=0$ 得 $C=0$,故 $\varphi(x)=x^2$；

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+\varphi(x)y\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y=\int_0^1 0\mathrm{d}x+\int_0^1 y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

**方法二** $P = xy^2, Q = \varphi(x)y$,

由 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$,得 $\varphi'(x) = 2x$,

解得 $\varphi(x) = x^2 + C$,由 $\varphi(0) = 0$ 得 $C = 0$,故 $\varphi(x) = x^2$;

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x + \varphi(x)y\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x + x^2y\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2y^2) = \frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = \frac{1}{2}.$$

(3)**【解】** **方法一**

由 $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 得 $\Omega$ 在 $xOy$ 平面上的投影区域为 $D: x^2+y^2 \leqslant \dfrac{1}{2}$,

由对称性得 $\displaystyle\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}v = 0$,

$$\text{于是}\iiint_\Omega (x+z)\mathrm{d}v = \iiint_\Omega z\,\mathrm{d}v = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D (1-2x^2-2y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{1}{2} - x^2 - y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} r\left(\frac{1}{2} - r^2\right)\mathrm{d}r = \frac{\pi}{8}.$$

**方法二**

由对称性得 $\displaystyle\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}v = 0$,即 $\displaystyle\iiint_\Omega (x+z)\mathrm{d}v = \iiint_\Omega z\,\mathrm{d}v$,

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ $\left(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4}, 0 \leqslant r \leqslant 1\right)$,则

$$\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\cdot\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}.$$

**四、【解】** $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\dfrac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$,

$f'(x)$ 的幂级数为 $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\ (-1 < x < 1)$,

再由 $f(x) - f(0) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 得

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

注意到 $x = -1$ 时 $f(x)$ 有定义且级数 $\dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 收敛,

故 $f(x)$ 关于 $x$ 的幂级数为 $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\ (-1 \leqslant x < 1)$.

**五、【解】** 由 $\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ 得

$$f(x) = \sin x - x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,$$

两边求导得 $f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，或 $f'(x)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\cos x$，

$f'(x)+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\cos x$ 两边再求导得

$$f''(x)+f(x)=-\sin x,$$

特征方程为 $\lambda^2+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm\mathrm{i}$，

$f''(x)+f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$；

令 $f''(x)+f(x)=-\sin x$ 的特解为 $f_0(x)=x(a\cos x+b\sin x)$，

代入得 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=0$，

则原方程的通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{x}{2}\cos x$，

再由 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，得 $C_1=0$，$C_2=\dfrac{1}{2}$，故 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{x}{2}\cos x$.

六、**【证明】** $\int_0^\pi\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi\sqrt{2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_0^\pi\sin x\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2}$，

原方程即为 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-2\sqrt{2}$.

令 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+2\sqrt{2}$，由 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}=0$，得 $x=\mathrm{e}$，

$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，由 $f''(\mathrm{e})=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}<0$ 得 $x=\mathrm{e}$ 为 $f(x)$ 的最大值点，

最大值 $M=f(\mathrm{e})=2\sqrt{2}>0$，

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，所以 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内有且仅有两个零点，

从而方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^\pi\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ 在区间$(0,+\infty)$内有且仅有两个根.

七、**【解】** $\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&\lambda\\4&1&2&\lambda+2\\6&1&4&2\lambda+3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&2-3\lambda\\0&1&-2&3-4\lambda\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&2-3\lambda\\0&0&0&1-\lambda\end{array}\right)$，

当 $\lambda=1$ 时，方程组有解，

再由 $\lambda=1$ 时 $\overline{\boldsymbol{A}}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，得方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\quad(k\text{ 为任意常数}).$$

八、**【证明】** (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $\lambda\neq0$，设 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，即 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，

将 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$，

于是 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}$，即 $\dfrac{1}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，所以 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}$，

即 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

九、**【解】** 设 $\Sigma: x^2+y^2+(z-a)^2=R^2 \quad (0<R<2a)$，

由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^2+y^2+(z-a)^2=R^2 \end{cases}$ 得 $x^2+y^2=R^2-\dfrac{R^4}{4a^2}$，

位于定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内的曲面为

$$\Sigma: z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

其中，$(x,y)\in D_{xy}\left(x^2+y^2\leqslant R^2-\dfrac{R^4}{4a^2}\right)$，

$$S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=R\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$=2\pi R\int_0^{\sqrt{R^2-\frac{R^4}{4a^2}}}\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{R^2-r^2}}=-2\pi R\int_0^{\sqrt{R^2-\frac{R^4}{4a^2}}}\frac{\mathrm{d}(R^2-r^2)}{2\sqrt{R^2-r^2}}$$

$$=2\pi\left(R^2-\frac{R^3}{2a}\right),$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R}=2\pi\left(2R-\dfrac{3R^2}{2a}\right)=0$，得 $R=\dfrac{4}{3}a$，

当 $0<R<\dfrac{4}{3}a$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R}>0$；当 $R>\dfrac{4}{3}a$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R}<0$，故当 $R=\dfrac{4}{3}a$ 时，$\Sigma$ 位于定球面内的面积最大.

**十、填空题**

(1)**【答案】** 0.7.

**【解】** 由 $P(B\mid A)=0.8$，即 $\dfrac{P(AB)}{P(A)}=0.8$ 得 $P(AB)=0.4$，

于是 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.4=0.7$.

(2)**【答案】** 0.75.

**【解】** 设 $A=\{$甲命中目标$\}$， $B=\{$乙命中目标$\}$， $C=\{$目标被命中$\}$，

$P(A)=0.6, P(B)=0.5$，且 $C=A+B$，则

$$P(A\mid C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)}{P(A+B)}$$

$$=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(A)P(B)}=\frac{0.6}{0.6+0.5-0.3}=0.75.$$

(3)**【答案】** 0.8.

**【解】** 随机变量 $\xi$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}, & 1<x<6, \\ 0, & 其他,\end{cases}$

当 $\Delta=\xi^2-4\geqslant 0$，即 $\xi\leqslant -2$ 或 $\xi\geqslant 2$ 时，方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根，

则方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的概率为 $P\{\xi\geqslant 2\}=\displaystyle\int_2^6\frac{1}{5}\mathrm{d}x=0.8$.

十一、**【解】** 因为相互独立的正态随机变量的线性组合仍服从正态分布，

所以随机变量 $Z=2X-Y+3$ 服从正态分布，

又因为 $E(Z)=2E(X)-E(Y)+3=5$， $D(Z)=4D(X)+D(Y)=9$，

所以 $Z\sim N(5,3^2)$，

故随机变量 $Z$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$，$-\infty<z+\infty$.