1992年全国硕士研究生招生考试

数 学 (一)

(科目代码:301)

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分)

(1) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定,则 $\frac{dy}{dx}=$________.

(2) 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\mathbf{grad}\, u\,|_M=$________.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ 则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于________.

(4) 微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为________.

(5) 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}$,其中 $a_i\neq 0,b_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n$,则矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩 $r(\mathbf{A})=$________.

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分)

(1) 当 $x\to 1$ 时,函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限( ).

(A) 等于2　　(B) 等于0

(C) 为 ∞　　(D) 不存在但不是 ∞

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)$(常数 $\alpha>0$)( ).

(A) 发散　　(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛　　(D) 收敛性与 α 有关

(3) 在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中,与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线( ).

(A) 只有1条　　(B) 只有2条

(C) 至少3条　　(D) 不存在

(4) 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$,则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为( ).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

(5) 要使 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 都是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，只要系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为（　　）.

(A) $(-2\quad 1\quad 1)$

(B) $\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\4 & -2 & -2\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

三、(本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

(2) 设 $z=f(e^x\sin y, x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0,\\ e^{-x}, & x>0,\end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x-2)\,dx$.

四、(本题满分 6 分)

求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 的通解.

五、(本题满分 8 分)

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

六、(本题满分 7 分)

设 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明：对任意的 $x_1>0$，$x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

七、(本题满分 8 分)

在变力 $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$，问：当 ξ,η,ζ 取何值时，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 最大？并求出 W 的最大值.

八、(本题满分 7 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？证明你的结论；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？证明你的结论.

九、(本题满分 7 分)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$,对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix},\text{又向量 }\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

(1) 将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性表示;

(2) 求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$($n$ 为自然数).

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,共 6 分)

(1) 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$,则事件 A,B,C 全不发生的概率为________.

(2) 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布,则数学期望 $E(X+\mathrm{e}^{-2X})=$________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 与 Y 独立,X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,Y 服从 $[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布,试求 $Z=X+Y$ 的概率密度(计算结果用标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 表示,其中 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$).