1994 年全国硕士研究生招生考试

数 学 (一)

(科目代码:301)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$________.

(2) 曲面 $z-e^{z}+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为________.

(3) 设 $u=e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$,则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点 $\left(2,\dfrac{1}{\pi}\right)$ 处的值为________.

(4) 设区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant R^2$,则 $\iint\limits_{D}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$________.

(5) 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$,$\boldsymbol{\beta}=\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$,设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,则 $\boldsymbol{A}^{n}=$________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\,\mathrm{d}x$,$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x$,$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x$,则(　　).

(A) $N<P<M$　　(B) $M<P<N$

(C) $N<M<P$　　(D) $P<M<N$

(2) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$,$f'_y(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的(　　).

(A) 充分条件但非必要条件　　(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

(3) 设常数 $\lambda>0$,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$(　　).

(A) 发散　　(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛　　(D) 收敛性与 λ 有关

(4) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$,其中 $a^2+c^2\neq 0$,则必有(　　).

(A) $b=4d$　　(B) $b=-4d$

(C) $a=4c$　　(D) $a=-4c$

(5) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,则向量组(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 设 $\begin{cases} x=\cos t^2, \\ y=t\cos t^2-\displaystyle\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\,\mathrm{d}u, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 在 $t=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ 时的值.

(2) 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数.

(3) 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}$.

四、(本题满分 6 分)

计算曲面积分 $\displaystyle\iint\limits_S\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$,其中 S 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两个平面 $z=R$, $z=-R(R>0)$ 所围成的立体表面的外侧.

五、(本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，且

$$[xy(x+y)-f(x)y]\mathrm{d}x+[f'(x)+x^2y]\mathrm{d}y=0$$

为一个全微分方程，求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

六、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

七、(本题满分 6 分)

已知点 A 与点 B 的直角坐标分别为 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,1)$，线段 AB 绕 z 轴旋转一周所围成的旋转曲面为 S，求由 S 及两平面 $z=0$，$z=1$ 所围成的立体的体积.

八、(本题满分 8 分)

设四元齐次线性方程组(Ⅰ)为 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ x_2-x_4=0.\end{cases}$ 又已知某线性齐次方程组(Ⅱ)的通解为 $k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求线性方程组(Ⅰ)的基础解系；

(2) 问线性方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)是否有非零公共解？若有，求出所有非零的公共解；若没有，说明理由.

九、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，当 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 时，证明：$|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

十、填空题(本题共 2 小题，每小题 3 分，满分 6 分)

(1) 设随机事件 A,B 满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$________.

(2) 设相互独立的两个随机变量 X,Y 具有同一分布律，且 X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律为________.

十一、(本题满分 6 分)

已知随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1,3^2)$ 和 $N(0,4^2)$，X,Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$.

(1) 求 Z 的数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$；

(2) 求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ}；

(3) 问 X 与 Z 是否相互独立？为什么？