1988年全国硕士研究生招生考试

数　学　(一)

(科目代码:301)

一、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}$ 的收敛域.

(2) 已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x) \geqslant 0$,求 $\varphi(x)$,并写出其定义域.

(3) 设 S 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧,计算曲面积分 $I=\oiint\limits_S x^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

二、填空题(本题共 4 小题,每小题 3 分,满分 12 分)

(1) 设 $f(t)=\lim\limits_{x \to \infty} t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}$,则 $f'(t)=$________.

(2) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数,它在区间 $(-1,1]$ 上的表达式为

$f(x)=\begin{cases} 2, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ x^3, & 0<x<1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于________.

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $\int_0^{x^3-1} f(t)\mathrm{d}t=x$,则 $f(7)=$________.

(4) 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$,其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 都是 4 维列向量,且 $|\boldsymbol{A}|=4$,$|\boldsymbol{B}|=1$,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$________.

三、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 若函数 $y=f(x)$ 可导,且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$,则当 $\Delta x\to 0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是(　　).

(A) 与 Δx 等价的无穷小　　(B) 与 Δx 同阶的无穷小

(C) 比 Δx 低阶的无穷小　　(D) 比 Δx 高阶的无穷小

(2) 设 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解,若 $f(x_0)>0$ 且 $f'(x_0)=0$,则函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处(　　).

(A) 取得极大值　　(B) 取得极小值

(C) 某邻域内单调增加　　(D) 某邻域内单调减少

(3) 设空间区域 $\Omega_1:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2(z\geqslant 0)$;$\Omega_2:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0)$,则(　　).

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1}x\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}x\,\mathrm{d}v$　　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1}y\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}y\,\mathrm{d}v$

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1}z\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\,\mathrm{d}v$　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\,\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyz\,\mathrm{d}v$

(4) 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛,则该级数在 $x=2$ 处(　　).

(A) 条件收敛　　(B) 绝对收敛

(C) 发散　　(D) 收敛性不确定

(5) n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\leqslant s\leqslant n)$ 线性无关的充分必要条件是(　　).

(A) 有一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量都线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量,它不可由其余向量线性表示

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都不可由其余向量线性表示

四、(本题满分 6 分)

设 $u=yf\left(\dfrac{x}{y}\right)+xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$,其中 f,g 具有二阶连续导数,求 $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

五、(本题满分 8 分)

设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^x$,且其图形在点(0,1)处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合,求函数 $y=y(x)$.

六、(本题满分 9 分)

设位于点(0,1)的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$（$k>0$ 为常数，r 为质点 A 与质点 M 之间的距离），质点 M 沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 从点 $B(2,0)$ 运动到点 $O(0,0)$，求此运动过程中质点 A 对质点 M 的引力所做的功.

七、(本题满分 6 分)

已知 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^5$.

八、(本题满分 8 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似.

(1) 求 x,y;

(2) 求一个满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

九、(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内有 $f'(x)>0$. 证明：在 (a,b) 内存在唯一的 ξ，使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$，$x=a$ 所围成的平面图形的面积 S_1 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$，$x=b$ 所围成平面图形面积 S_2 的 3 倍.

十、填空题(本题共 3 小题，每小题 2 分，满分 6 分)

(1) 设三次独立重复试验中，事件 A 出现的概率相等，若已知 A 至少出现一次的概率为 $\frac{19}{27}$，则事件 A 在一次试验中出现的概率为________.

(2) 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则事件“两数之和小于 $\frac{6}{5}$”的概率为________.

(3) 设随机变量 X 服从均值为 10，均方差为 0.02 的正态分布，已知 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u$，$\Phi(2.5)=0.993\,8$，则 X 落在区间 $(9.95,10.05)$ 内的概率为________.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.