2020 年数学(一)真题解析

一、填空题

(1)**【答案】** (D).

【解】 当 $x\to 0^+$ 时,$\int_0^x (e^{t^2}-1)dt \sim \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3$;

$$\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt \sim \int_0^x t^{\frac{3}{2}}dt = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}};$$

$$\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt \sim \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3;$$

$$\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,dt \sim \int_0^{\frac{1}{2}x^2} t^{\frac{3}{2}}dt = \frac{\sqrt{2}}{20}x^5,$$

应选(D).

方法点评:确定变积分限型无穷小的阶数时,通常有如下方法:

(1) 洛必达法则,如:

【例 1】 设 $f(x)$ 连续,且 $f(0)=0, f'(0)=4$,且 $\int_0^x tf(x-t)dt \sim kx^n (x\to 0)$,求 k,n.

【解】 $\int_0^x tf(x-t)dt \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 (x-u)f(u)(-du) = x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$,

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(x-t)dt}{x^n} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du}{x^n} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du}{nx^{n-1}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{n(n-1)x^{n-2}}$

得 $n-2=1$,即 $n=3$,

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(x-t)dt}{x^3} = \dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{1}{6}f'(0) = \dfrac{2}{3}$ 得

$$\int_0^x tf(x-t)dt \sim \frac{2}{3}x^3,\text{故 } k=\frac{2}{3}, n=3.$$

(2) 等价无穷小,即积分限及表达式用其等价无穷小代替,如:

【例 2】 设 $\alpha = \int_0^{e^{x^2}-1}\frac{\sin t^2}{t}dt \sim ax^b (x\to 0)$,求 a,b.

【解】 由 $\alpha = \int_0^{e^{x^2}-1}\frac{\sin t^2}{t}dt \sim \int_0^{x^2}\frac{t^2}{t}dt = \int_0^{x^2} t\,dt = \frac{1}{2}x^4$ 得

$$a=\frac{1}{2}, b=4.$$

(2)**【答案】** (C).

方法一

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,由 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ 得 $f(0)=0$,

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,所以 $f(x)$ 为 x 的同阶或高阶无穷小,故

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$,应选(C).

方法二

取 $f(x)=|x|$,显然 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$,但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导,(A) 不对;

取 $f(x)=\begin{cases}2, & x=0, \\ x^2, & x \neq 0,\end{cases}$ 显然 $f(x)$ 在$(-1,1)$内有定义且$\lim\limits_{x \to 0} f(x)=0$,显然$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}=0$,但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续,从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导,(B) 不对;

取 $f(x)=2x$,显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,但$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$不存在,(D) 不对,应选(C).

(3)**【答案】** (A).

【解】 因为 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处可微,

所以 $\Delta z=f(x,y)-f(0,0)=f(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}y+o(\sqrt{x^2+y^2})$,

于是$\dfrac{\partial f}{\partial x}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}y-f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$,即 $\boldsymbol{n} \cdot (x,y,f(x,y))=o(\sqrt{x^2+y^2})$,

故 $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{|\boldsymbol{n} \cdot (x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在,应选(A).

(4)**【答案】** (A).

【解】 因为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R,所以当 $|x|<R$ 时,级数绝对收敛,进而,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛,所以,当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时,$|r| \geqslant R$,应选(A).

(5)**【答案】** (B).

【解】 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等列变换得到 $\boldsymbol{B}$,故存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_i(i=1,2\cdots,t)$ 使

$$\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_t=\boldsymbol{B},$$

因 $\boldsymbol{P}_i$ 均可逆,故有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_t^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}$,记 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_t^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}$,故应选(B).

方法点评: 矩阵进行一次初等行变换或一次初等列变换等价于矩阵的左边乘以一个初等矩阵或右边乘以一个初等矩阵;矩阵进行若干次初等行变换等价于矩阵左乘可逆矩阵,矩阵进行若干次初等列变换等价于矩阵右乘可逆矩阵,故有如下结论:

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换化为 $\boldsymbol{B}$ 等价于存在可逆矩阵 $\boldsymbol{M}$,使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{MA}$;

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等列变换化为 $\boldsymbol{B}$ 等价于存在可逆矩阵 $\boldsymbol{N}$,使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AN}$;

(3) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换化为 $\boldsymbol{B}$ 等价于存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAQ}$.

(6)**【答案】** (C).

【解】 令 $L_1:\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}=t$ 得 $L_1:\begin{cases}x=a_2+a_1t, \\ y=b_2+b_1t, \\ z=c_2+c_1t,\end{cases}$ 即 $L_1:\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_1$,

同理 $L_2:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_2$,

因为 L_1 与 L_2 相交,故存在 t,使得 $\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_2$,即 $\boldsymbol{\alpha}_3=t\boldsymbol{\alpha}_1+(1-t)\boldsymbol{\alpha}_2$,故 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示,应选(C).

(7)**【答案】** (D).

【解】 $P(A\overline{B}\,\overline{C})=P(A\cdot\overline{B+C})=P(A)-P(AB+AC)$

$$=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$

$P(\overline{A}B\overline{C})=P(B\cdot\overline{A+C})=P(B)-P(AB+BC)$

$$=P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$

$P(\overline{A}\,\overline{B}C)=P(C\cdot\overline{A+B})=P(C)-P(AC+BC)$

$$=P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=\frac{1}{4}-\frac{2}{12}=\frac{1}{12},$$

故所求概率为 $P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$,应选(D).

(8)**【答案】** (B).

【解】 $E(X)=\frac{1}{2},E(X^2)=\frac{1}{2}$,则 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{4}$,

由中心极限定理得 $\sum\limits_{i=1}^{100}X_i$ 近似服从 $N(50,25)$,

从而 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{100}X_i-50}{5}$ 近似服从 $N(0,1)$,故

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i\leqslant 55\right\}=P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{100}X_i-50}{5}\leqslant 1\right\}\approx\Phi(1),\text{应选(B)}.$$

二、填空题

(9)**【答案】** -1.

【解】
$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e^x+1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-e^x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1-(x+1)e^x}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-(x+1)e^x}{x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(x+2)e^x=-1.$$

(10)**【答案】** $-\sqrt{2}$.

【解】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}=\dfrac{1}{t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{1}{t}\right)\Big/dt}{dx/dt}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}=-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3},$$

故 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$.

(11)**【答案】** $n+am$.

【解】 由 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0$ 得特征方程为

$$\lambda^2+a\lambda+1=0,$$

因为 $\lambda_1+\lambda_2=-a<0,\lambda_1\lambda_2=1>0$,所以 $\lambda_1<0,\lambda_2<0$,

于是 $f(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x},f'(x)=C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x}$,

显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$,

故 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=-\int_0^{+\infty}[f''(x)+af'(x)]dx=-f'(x)\big|_0^{+\infty}-af(x)\big|_0^{+\infty}=n+am$.

(12)**【答案】** 4e.

【解】 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{xt^2}dt=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{xy}e^{(\sqrt{x}t)^2}d(\sqrt{x}t)=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{x^{\frac{3}{2}}y}e^{t^2}dt$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{3}{2}ye^{x^3y^2}-\frac{\int_0^{x^{\frac{3}{2}}y}e^{t^2}dt}{2x^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{3}{2}e^{x^3y^2}+3x^3y^2e^{x^3y^2}-\frac{1}{2}e^{x^3y^2},$$

故 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=4e$.

(13)**【答案】** a^4-4a^2.

【解】
$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1\\ 0 & a & 1 & -1\\ -1 & 1 & a & 0\\ 1 & -1 & 0 & a\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & a\\ -1 & a & 1 & 0\\ 0 & 1 & a & -1\\ a & -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & a\\ 0 & a & 0 & a\\ 0 & 1 & a & -1\\ 0 & -1 & a & 1-a^2\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} a & 0 & a\\ 1 & a & -1\\ -1 & a & 1-a^2\end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & a & -1\\ -1 & a & 1-a^2\end{vmatrix}$$

$$=-a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & a & -2\\ 0 & a & 2-a^2\end{vmatrix}=-4a^2+a^4.$$

(14)**【答案】** $\frac{2}{\pi}$.

【解】 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$E(X)=0$,

$$E(XY)=E(X\sin X)=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\,\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left(x\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x\right)=\frac{2}{\pi},$$

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(XY)=\frac{2}{\pi}$.

三、解答题

(15)**【解】** 由 $\begin{cases}3x^2-y=0,\\24y^2-x=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{1}{6},\\y=\frac{1}{12};\end{cases}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=48y,$$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时, $A=0,B=-1,C=0$,

因为 $AC-B^2<0$,所以点 $(0,0)$ 不是函数 $f(x,y)$ 的极值点;

当 $(x,y)=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ 时, $A=1,B=-1,C=4$,

因为 $AC-B^2=3>0$ 且 $A>0$,所以点 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ 为函数 $f(x,y)$ 的极小值点,极小值为

$$f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{6^3}+8\times\frac{1}{12^3}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{12}=-\frac{1}{216}.$$

(16)**【解】** $P(x,y)=\frac{4x-y}{4x^2+y^2}$, $Q(x,y)=\frac{x+y}{4x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-4x^2+y^2-8xy}{(4x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-4x^2+y^2-8xy}{(4x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}((x,y)\neq(0,0)).$$

取 $L_0:4x^2+y^2=r^2$ ($r>0$, L_0 在 L 内,逆时针),且设 L 与 L_0^- 所围成的区域为 D_1, L_0 围成的区域为 D_2,

由 $\oint_{L+L_0^-}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_{D_1}0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$ 得

$$I=\int_L\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y=\oint_{L_0}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{r^2}\oint_{L_0}(4x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=\frac{2}{r^2}\iint_{D_2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{2}{r^2}\times\pi\times r\times\frac{r}{2}=\pi.$$

(17)**【解】** 由 $(n+1)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$ 得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}$,

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$,即幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R=1$,

故当 $|x|<1$ 时,幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$,则

$$S'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)a_nx^n$$

$$=1+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=1+xS'(x)+\frac{1}{2}S(x),$$

即 $S'(x)-\frac{1}{2(1-x)}S(x)=\frac{1}{1-x}$,解得

$$S(x)=(-2\sqrt{1-x}+C)\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\frac{C}{\sqrt{1-x}}-2,$$

由 $S(0)=0$ 得 $C=2$,故 $S(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x}}-2$.

(18)**【解】** 因为 Σ 的法向量为 $(x,y,-z)$,所以

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{1}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}[(x^2+y^2-z^2)f(xy)+2x^2+2y^2-z^2]\,\mathrm{d}S$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\iint_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}S.$$

记 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$,又

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}=\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+1}=\sqrt{2}.$$

故

$$I=\iint_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{14}{3}\pi.$$

(19)**【证明】**(Ⅰ)令 $M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|=|f(c)|$,其中 $c\in[0,2]$,

由拉格朗日中值定理,存在 $\xi_1\in(0,c)$,$\xi_2\in(c,2)$,使得

$$f(c)-f(0)=f'(\xi_1)c,$$

$$f(2)-f(c)=f'(\xi_2)(2-c),$$

则 $|f'(\xi_1)|c=M$,$|f'(\xi_2)|(2-c)=M$,

当 $c\in(0,1]$ 时,由 $|f'(\xi_1)|c=M$ 得 $|f'(\xi_1)|\geqslant M$,取 $\xi=\xi_1$;

当 $c\in[1,2)$ 时,$2-c\in(0,1]$,由 $|f'(\xi_2)|(2-c)=M$ 得 $|f'(\xi_2)|\geqslant M$,取 $\xi=\xi_2$.

则存在 $\xi\in(0,2)$,使 $|f'(\xi)|\geqslant M$.

(Ⅱ)(反证法)不妨设 $M>0$,则 $c\in(0,2)$,当 $c\neq 1$ 时,由拉格朗日中值定理,存在 $\xi_1\in(0,c)$,$\xi_2\in(c,2)$,使得

$$f(c)=f(c)-f(0)=f'(\xi_1)c,\text{其中 }0<\xi_1<c,$$

$$-f(c)=f(2)-f(c)=f'(\xi_2)(2-c),\text{其中 }c<\xi_2<2,$$

则 $M=|f(c)|=|f'(\xi_1)|c\leqslant Mc$,$M=|f(c)|=|f'(\xi_2)|(2-c)\leqslant M(2-c)$ 皆成立,

若 $0 < c < 1$，显然 $M = |f(c)| = |f'(\xi_1)|c \leqslant Mc$ 不对；

若 $1 < c < 2$，显然 $M = |f(c)| = |f'(\xi_2)|(2-c) \leqslant M(2-c)$ 不对，

即上述式子至少有一个不成立，矛盾，故 $M = 0$.

当 $c = 1$ 时，此时 $|f(1)| = M$，易知 $f'(1) = 0$.

若 $f(1) = M$，设 $G(x) = f(x) - Mx$，$0 \leqslant x \leqslant 1$，$G'(x) = f'(x) - M \leqslant 0$，

从而 $G(x)$ 单调递减又 $G(0) = G(1) = 0$，从而 $G(x) = 0$，即 $f(x) = Mx$，$0 \leqslant x \leqslant 1$.

因此，$f'(1) = M$，从而 $M = 0$；同理，当 $f(1) = -M$ 时，$M = 0$. 综上，$M = 0$.

(20)**【解】**（Ⅰ）令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，则 $f(x_1, x_2) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 5) = 0,$$

解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 5$；

令 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$，则 $g(y_1, y_2) = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$；

因为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，所以 $\begin{cases} \operatorname{tr} \boldsymbol{A} = \operatorname{tr} \boldsymbol{B}, \\ |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a + b = 5, \\ ab = 4, \end{cases}$ 解得 $a = 4$，$b = 1$.

（Ⅱ）由 $0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$；

由 $5\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_2 = 5$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{Q}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$；

由 $0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量 $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$；

由 $5\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于 $\lambda_2 = 5$ 的特征向量 $\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{Q}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$，

由 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2$ 得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}$，

所求的正交矩阵为 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(21)**【解】** （Ⅰ）**方法一**

（反证法）设 $\boldsymbol{P}$ 不可逆，则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha}$ 线性相关，即 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha}$ 成比例，

于是 $\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{A\alpha}$ 或 $\boldsymbol{A\alpha}=l\boldsymbol{\alpha}$，

因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，所以 $\boldsymbol{A\alpha}=l\boldsymbol{\alpha}$ 不可能；

若 $\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{A\alpha}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 为非零向量，所以 $k\neq 0$，于是 $\boldsymbol{A\alpha}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{\alpha}$，矛盾，

故 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha}$ 线性无关，即 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

方法二

（反证法）设 $\boldsymbol{P}$ 不可逆，即 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha}$ 线性相关，则存在不全为零的常数 k_1,k_2，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0},$$

显然 $k_2\neq 0$，因为若 $k_2=0$，则 $k_1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 得 $k_1=0$，矛盾，故 $k_2\neq 0$.

由 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{A\alpha}=-\dfrac{k_1}{k_2}\boldsymbol{\alpha}$，矛盾，故 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

（Ⅱ）由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha},6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha})=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ 得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda & -6\\ -1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-2)=0$.

得 $\lambda_1=-3,\lambda_2=2$，因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 $\boldsymbol{B}$ 可以相似对角化，则 $\boldsymbol{A}$ 也可以相似对角化.

(22)**【解】** （Ⅰ）二维随机变量 (X_1,Y) 的分布函数为

$$\begin{aligned}F(x,y)&=P\{X_1\leqslant x,Y\leqslant y\}\\&=\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x,Y\leqslant y\mid X_3=0\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x,Y\leqslant y\mid X_3=1\}\\&=\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x,X_2\leqslant y\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x,X_1\leqslant y\}\\&=\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x\}P\{X_2\leqslant y\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x,X_1\leqslant y\},\end{aligned}$$

当 $x<y$ 时，

$$F(x,y)=\frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(x);$$

当 $x\geqslant y$ 时，同理可得

$$F(x,y)=\frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(y),$$

即 $F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\dfrac{1}{2}\Phi(x), & x<y,\\[2mm] \dfrac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\dfrac{1}{2}\Phi(y), & x\geqslant y.\end{cases}$

(Ⅱ)Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y \mid X_3=0\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y \mid X_3=1\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{X_2\leqslant y\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant y\}=\frac{1}{2}\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(y)=\Phi(y),$$

则 $Y\sim N(0,1)$.

(23)**【解】** (Ⅰ)$P\{T>t\}=1-P\{T\leqslant t\}=1-F(t)=\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$;

$$P\{T>s+t \mid T>s\}=\frac{P\{T>s,T>s+t\}}{P\{T>s\}}=\frac{P\{T>s+t\}}{P\{T>s\}}$$

$$=\frac{1-P\{T\leqslant s+t\}}{1-P\{T\leqslant s\}}=\frac{\mathrm{e}^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}}{\mathrm{e}^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}}=\mathrm{e}^{\left(\frac{s}{\theta}\right)^m-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}.$$

(Ⅱ)T 的概率密度为

$$f(t)=F'(t)=\begin{cases}\dfrac{mt^{m-1}}{\theta^m}\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$L(\theta)=f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)=m^n\theta^{-mn}(t_1t_2\cdots t_n)^{m-1}\mathrm{e}^{-\theta^{-m}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m}$,其中 $t_1>0,t_2>0,\cdots,t_n>0$,

$\ln L(\theta)=n\ln m-mn\ln\theta+(m-1)\sum\limits_{i=1}^{n}\ln t_i-\theta^{-m}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m$,

令 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=-\dfrac{mn}{\theta}+m\theta^{-(m+1)}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m=0$ 得

$$\hat{\theta}^m=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^m,$$

故 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\sqrt[m]{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^m}$.