2000 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2}\mathrm{d}x = $ ______.

(2) 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 在点 $(1, -2, 2)$ 处的法线方程为______.

(3) 微分方程 $xy'' + 3y' = 0$ 的通解为______.

(4) 已知方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解,则 $a = $ ______.

(5) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$,A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等,则 $P(A) = $ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x)$,$g(x)$ 是恒大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$,则当 $a < x < b$ 时,有(　　)

(A) $f(x)g(b) > f(b)g(x)$.　　(B) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$.

(C) $f(x)g(x) > f(b)g(b)$.　　(D) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$.

(2) 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geqslant 0)$,$S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分,则有(　　)

(A) $\iint\limits_S x\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S$.　　(B) $\iint\limits_S y\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S$.

(C) $\iint\limits_S z\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}S$.　　(D) $\iint\limits_S xyz\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{S_1} xyz\mathrm{d}S$.

(3) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则必收敛的级数为(　　)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$.　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$.　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$.

(4) 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m (m < n)$ 线性无关,则 n 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件为(　　)

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示.

(B) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 等价.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 与矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)$ 等价.

(5) 设二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布,则随机变量 $\xi = X + Y$ 与 $\eta = X - Y$ 不相关的充分必要条件为(　　)

(A) $E(X) = E(Y)$.　　(B) $E(X^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2$.

(C) $E(X^2) = E(Y^2)$.　　(D) $E(X^2) + [E(X)]^2 = E(Y^2) + [E(Y)]^2$.

三、(本题满分 5 分)

求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

四、(本题满分 5 分)

设$z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$,其中$f$具有二阶连续偏导数,$g$具有二阶连续导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

五、(本题满分 6 分)

计算曲线积分$I=\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$,其中$L$是以点$(1,0)$为中心,$R$为半径的圆周$(R>1)$,取逆时针方向.

六、(本题满分 7 分)

设对于半空间$x>0$内任意的光滑有向封闭曲面S,都有

$$\oiint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-e^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

其中函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内具有连续的一阶导数,且$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$. 求$f(x)$.

七、(本题满分 6 分)

求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+(-2)^n}\dfrac{x^n}{n}$的收敛区间,并讨论该区间端点处的收敛性.

八、(本题满分 7 分)

设有一半径为R的球体,P_0是此球的表面上的一个定点,球体上任一点的密度与该点到P_0距离的平方成正比(比例常数$k>0$),求球体的重心位置.

九、(本题满分 6 分)

设函数$f(x)$在$[0,\pi]$上连续,且$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$,$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$. 试证:在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2$,使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

十、(本题满分 6 分)

设矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$,且$\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$,其中$\boldsymbol{E}$为4阶单位矩阵,求矩阵$\boldsymbol{B}$.

十一、(本题满分 8 分)

某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计,然后将$\frac{1}{6}$熟练工支援其他生产部门,其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有$\frac{2}{5}$成为熟练工. 设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n,记成向量$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

(1) 求$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$的关系式并写成矩阵形式:$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$;

(2) 验证 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量,并求出相应的特征值;

(3) 当$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$时,求$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

十二、(本题满分 8 分)

某流水生产线上每个产品不合格的概率为$p(0 < p < 1)$,各产品合格与否相互独立,当出现一个不合格产品时即停机检修. 设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为X. 求X的数学期望$E(X)$和方差 $D(X)$.

十三、(本题满分 6 分)

设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x \geqslant \theta, \\ 0, & x < \theta, \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数. 又设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 X 的一组样本观测值,求参数 θ 的最大似然估计值.