2024年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）试题

考试时间：180 分钟，满分：150 分

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

1. 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{\cos t}dt$， $g(x)=\int_0^{\sin x} e^{t^2}dt$，则

A. f(x)为奇函数，$g_{(x)}$为偶函数

B. f(x)为偶函数，$g_{(x)}$为奇函数

C. f(x) 与 $g_{(x)}$ 均为奇函数

D. f(x) 与 $g_{(x)}$ 均为周期函数

2. 设 $P=P(x,y,z),Q=Q(x,y,z)$ 均为连续函数，

Σ 为曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}\,(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 的上侧， 则 $\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x=$

A. $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

B. $\iint\limits_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P+\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

C. $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

D. $\iint\limits_{\Sigma}\left(-\frac{x}{z}P-\frac{y}{z}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

3. 已知幂函数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}na_{2n}=$

A. $-\frac{1}{6}$

B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{3}$

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，则

A. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=m$ 时，$f'(0)=m$.

B. 当 $f'(0)=m$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=m$.

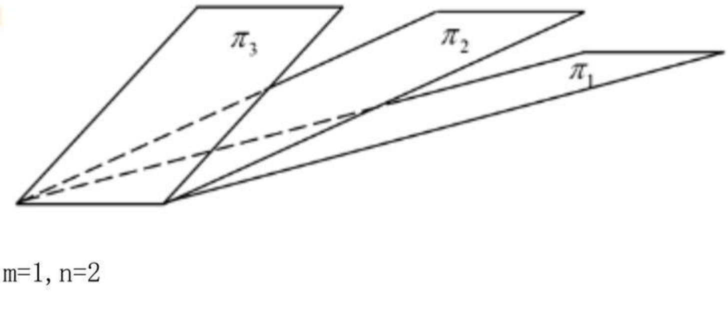
C. 当 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=m$ 时，$f'(0)=m$.

D. 当 $f'(0)=m$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=m$.

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，三张平面 π_i：$a_i x+b_i y+c_i z=d_i$

$(i=1,2,3)$ 位置关系如图所示，记 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,b_i,c_i)$，$\boldsymbol{\beta}_i=(a_i,b_i,c_i,d_i)$，

若 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}=m$，$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}=n$，则



5.

A. m=1, n=2

B. m=n=2

C. m=2, n=3

D. m=n=3

设向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\b\\a\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\\1\end{pmatrix}$，若 α_1，α_2，α_3 线性相关，且其中任意两个向量均线性无关，则

6.

A. a=1, b≠-1

B. a=1, b=-1

C. a≠-2, b=2

D. a=-2, b=2

3 阶矩阵 A 的秩为 2，非零向量 α 满足 $A\alpha=0$，任意向量 β，使得 $\beta^T\alpha=0$，且 $A\beta=\beta$，则下列结论正确的是

7.

A. A^3的迹为 2

B. A^3的迹为 5

C. A^5的迹为 7

D. A^5的迹为 9

8. 设随机变量 X 与 Y 独立，X 服从 N（0，2）的正态分布，Y 服从 N（-2，2）的正态分布，若 P{2X+Y<a}=P{X>Y}，则 a=

A. $-2-\sqrt{10}$

B. $-2+\sqrt{10}$

C. $-2-\sqrt{6}$

D. $-2+\sqrt{6}$

9. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，在 $X=x$ 的条件下，Y 在区间（x, 1）上服从均匀分布，则 $\operatorname{cov}(X,Y)=$

A. $-\frac{1}{36}$

B. $-\frac{1}{72}$

C. $\frac{1}{72}$

D. $\frac{1}{36}$

10. 设随机变量 X，Y 相互独立，且均服从参数为λ的指数分布，令 Z=|X-Y|，则下列随机变量与 Z 同分布的是

A. X+Y

B. $\frac{X+Y}{2}$

C. 2X

D. X

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

11. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1+ax^2\right)^{\sin x}-1}{x^3}=6$，则 $a=$

$z=f(u,v)$ 有二阶连续导数，$\mathrm{d}f\big|_{(1,1)}=3\mathrm{d}u+4\mathrm{d}v$，

$y=f(\cos x,1+x^2)$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$

12.

13.

若函数 $f(x)=x+1$. 若 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$. $x\in[0,\pi]$. 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\sin a_{2n-1}=$

微分方程 $y'=\dfrac{1}{(x+y)^2}$，满足条件 $y(1)=0$ 的解为.

14.

设实矩阵 $A=\begin{pmatrix}a+1 & a\\ a & a\end{pmatrix}$，若对任意实向量 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$，

$(\alpha^T\mathbf{A}\beta)^2\le\alpha^T\mathbf{A}\alpha\beta^T\mathbf{A}\beta$ 都成立，则 a 的取值范围是

15.

16. 随机试验每次成功的概率为 P，现进行三次独立重复实险，已知至少成功一次的条件下全部成功概率为 $\dfrac{4}{13}$，现 P=

三、解答题:17-22 小题，共 70 分。请将解答写在答题纸指定位置上解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid \sqrt{1-y^2}\le x\le 1, -1\le y\le 1\}$，计算 $\iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\sigma$.

17.

18. 设f(χ，y)=$x^3+y^3-(x+y)^2+3$，曲面 z=f(x,y)在(1,1,1)处的切平面为 T，T 与三个坐标面所围有界区域在 xoy 面的设影为 D

（1）求 T 的方程

（2）求 f(x,y)在 D 上的最大值和最小值

设 $f(x)$ 二阶可导，$f'(0)=f'(0)$，$|f''(x)|\le 1$，证：

1）$\left|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x\right|\le \frac{x(1-x)}{2}$.

2）$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{f(0)+f(1)}{2}\right|\le \frac{1}{12}$

19.

20. 已知有向曲线 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=2x$ 与平面 2x-z-1=0 的交线从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，计算曲线积分 $\int_L (6xyz-yz^2)dx+2x^2zdy+xyzdz$

已知数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足 $x_0=-1, y_0=0, z_0=2$，且 $\begin{cases} x_n=-2x_{n-1}+2z_{n-1} \\ y_n=-2y_{n-1}-2z_{n-1} \\ z_n=-6x_{n-1}-3y_{n-1}+3z_{n-1} \end{cases}$，

记 $\alpha_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$，写出满足 $\alpha_n=A\alpha_{n-1}$ 的矩阵 A，并求 A^n 及 $x_n, y_n, z_n (n=1,2,\cdots)$.

21.

22.

设总体 $X \sim U(0,\theta)$，θ 未知，$X_1, X_2 \cdots X_n$ 为简单随机样本，$X_{(n)} = \max(X_1, X_2 \cdots X_n)$，$T_c = cX_{(n)}$.

（1）求 c 时，使得 T_c 为 θ 的无偏估计.

（2）记 $h(c) = E(T_c - \theta)^2$，求 c 使得 $h(c)$ 取最小值.