2006 年数学(一)真题解析

一、填空题

(1)【答案】 2.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=2.$

(2)【答案】 $y=Cx\mathrm{e}^{-x}$(C 为任意常数).

【解】 方法一　由 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$,得 $y'-\left(\dfrac{1}{x}-1\right)y=0$,

通解为 $y=C\mathrm{e}^{-\int-(\frac{1}{x}-1)\mathrm{d}x}=Cx\mathrm{e}^{-x}$($C$ 为任意常数).

方法二　$y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 化为$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{x}-1$,即$(\ln y)'=\dfrac{1}{x}-1$,从而 $\ln y=\ln x+\ln \mathrm{e}^{-x}+\ln C$,

故原方程的通解为 $y=Cx\mathrm{e}^{-x}$(C 为任意常数).

(3)【答案】 2π.

【解】 补充 $\Sigma_0:z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$ 取上侧,则

$$\iint\limits_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_0}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=6\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\pi\int_0^1 z^2\mathrm{d}z=2\pi,$$

而$\iint\limits_{\Sigma_0}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,

所以$\iint\limits_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi$.

(4)【答案】 $\sqrt{2}$.

【解】 点(2,1,0)到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|3\times 2+4\times 1|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\sqrt{2}$.

方法点评:本题考查点到平面的距离.

空间解析几何部分需要掌握如下几个距离公式:

(1) 两点之间的距离:设 $A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$,则两点之间的距离公式为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2};$$

(2) 点到平面的距离:设平面 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$,点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\notin D$,则 M_0 到 π 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

(3) **点到直线的距离**：设 $L:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，$M_1(x_1,y_1,z_1)\notin L$，令 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，$\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$，则点 M_1 到直线 L 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}.$$

(5)**【答案】** 2.

【解】 由 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$，得 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$，两边取行列式，得 $|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=4$，

因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$，所以 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=2$，于是 $|\boldsymbol{B}|=2$.

(6)**【答案】** $\dfrac{1}{9}$.

【解】 由 $X\sim U(0,3)$，$Y\sim U(0,3)$ 得 X,Y 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 0<x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 0<y<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由 X,Y 独立得

$$\begin{aligned}P\{\max(X,Y)\leqslant 1\}&=P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}\\&=P\{X\leqslant 1\}P\{Y\leqslant 1\}=\int_0^1\frac{1}{3}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{3}\mathrm{d}y=\frac{1}{9}.\end{aligned}$$

二、选择题

(7)**【答案】** (A).

【解】 **方法一**

$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$，　$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x\,(x<\xi<x+\Delta x)$，

因为 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 单调增加，于是 $0<f'(x)<f'(\xi)$.

再由 $\Delta x>0$，得 $0<f'(x)\Delta x<f'(\xi)\Delta x$，即 $0<\mathrm{d}y<\Delta y$，应选(A).

方法二　由泰勒公式得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,\text{其中 }\xi\text{ 介于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间},$$

因为 $f''(x)>0$，所以 $f(x)-f(x_0)\geqslant f'(x_0)(x-x_0)$，等号成立当且仅当 $x=x_0$，故 $\Delta y\geqslant \mathrm{d}y$.

因为 $f'(x_0)>0$，$\Delta x=x-x_0>0$，所以 $\mathrm{d}y=f'(x_0)(x-x_0)>0$，于是 $\Delta y>\mathrm{d}y>0$，应选(A).

方法三　$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(\xi)\Delta x\,(x_0<\xi<x_0+\Delta x)$，

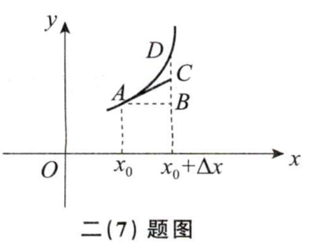
$$\begin{aligned}\text{则 }\Delta y-\mathrm{d}y&=[f'(\xi)-f'(x_0)]\Delta x\\&=f''(\eta)(\xi-x_0)\Delta x\,(x_0<\eta<\xi),\end{aligned}$$

由 $f''(x)>0$ 得 $\Delta y-\mathrm{d}y>0$，即 $\Delta y>\mathrm{d}y$，又 $\mathrm{d}y>0$，

故 $\Delta y>\mathrm{d}y>0$，应选(A).

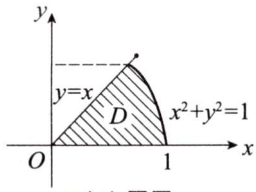
方法四　因为 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，所以 $y=f(x)$ 为单调增加的凹函数，如图所示，

因为 $\Delta x>0$，所以 $\mathrm{d}y=|BC|>0$，$\Delta y=|BD|>|BC|$，应选(A).



二(7) 题图

(8)【答案】 (C).



二(8) 题图

【解】 将 $D=\left\{(r,\theta)\middle|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant r\leqslant 1\right\}$ 转化为 Y 型区域为

$$D=\left\{(x,y)\middle|y\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2},0\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\right\},$$

则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$,应选(C).

(9)【答案】 (D).

【解】 方法一 令 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在,令 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$.

令 $S_n^{(1)}=\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_2+a_3}{2}+\cdots+\frac{a_n+a_{n+1}}{2}=S_n-\frac{a_1}{2}+\frac{a_{n+1}}{2}$,

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n^{(1)}=S-\frac{a_1}{2}$ 存在,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛,应选(D).

方法二

取 $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,(A),(B)不对;

取 $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

因为 $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\sim\frac{1}{n}$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,所以 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 发散,(C)不对,应选(D).

方法三 由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}a_{n+1}$ 收敛,由级数收敛的基本性质得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛.

方法点评:常数项级数敛散性判断通常考虑如下几个方面:
(1) 是否满足级数收敛的必要条件,若不满足必要条件,则级数一定发散;
(2) 是否可以由级数收敛的定义判断,即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 是否存在.
确定具体的级数类型,如正项级数或交错级数,再根据该类级数敛散判别法.

(10)【答案】 (D).

【解】 方法一 因为 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$ 且 $\varphi(x_0,y_0)=0$,所以 $\varphi(x,y)=0$ 确定 y 为 x 的函数,设为 $y=y(x)$,代入 $z=f(x,y)$ 中,得 $z=f[x,y(x)]$.

因为 (x_0,y_0) 为极值点,所以 $\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f_x'(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0)\cdot y'(x_0)=0$,

若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$,应选(D).

方法二 令 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$,因为 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值点,所以 $\begin{cases}F_x'(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x'(x_0,y_0)=0,\\F_y'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y'(x_0,y_0)=0.\end{cases}$

若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则由 $f'_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi'_x(x_0,y_0)=0$ 得 $\lambda\neq 0$.

因为 $\varphi'_y(x_0,y_0)\neq 0$,所以 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$,应选(D).

方法点评:本题需要正确区分二元函数无条件极值与条件极值的区别.

(1) 设 $z=f(x,y)$ 可微,且 (x_0,y_0) 为 $z=f(x,y)$ 的极值点,则 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的驻点,即 $f'_x(x_0,y_0)=0$, $f'_y(x_0,y_0)=0$,反之不对;

(2) 设 $z=f(x,y)$ 可微, (x_0,y_0) 为函数 $f(x,y)$ 在约束条件 $h(x,y)=0$ 下的极值点,则 (x_0,y_0) 满足 $\begin{cases}F'_x(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)+\lambda h'_x(x_0,y_0)=0,\\ F'_y(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)+\lambda h'_y(x_0,y_0)=0,\\ h(x_0,y_0)=0,\end{cases}$ 反之不对.

(11)**【答案】** (A).

【解】 **方法一** 令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$, $(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s)=\boldsymbol{AQ}$,

则 $r(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s)=r(\boldsymbol{AQ})\leqslant r(\boldsymbol{Q})$.

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则 $r(\boldsymbol{Q})<s$,于是 $r(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s)\leqslant r(\boldsymbol{Q})<s$.

即 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关,应选(A).

方法二 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0},$$

等式两边左乘 $\boldsymbol{A}$ 得

$$k_1\boldsymbol{A\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A\alpha}_s=\boldsymbol{0},$$

由线性相关的定义得 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关,应选(A).

(12)**【答案】** (B).

【解】 由矩阵的初等变换与初等矩阵的定义,得

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PA},\quad \boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{BP}^{-1},$$

于是 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$,应选(B).

(13)**【答案】** (C).

【解】 由 $P(A|B)=1$,得 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1$,即 $P(B)=P(AB)$,

于是 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)$,应选(C).

(14)**【答案】** (A).

【解】 由 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,得 $\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}\sim N(0,1)$, $\dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\sim N(0,1)$,

$$P\{|X-\mu_1|<1\}=P\left\{-\frac{1}{\sigma_1}<\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}<\frac{1}{\sigma_1}\right\}=\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_1}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-1,$$

$$P\{|Y-\mu_2|<1\}=P\left\{-\frac{1}{\sigma_2}<\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}<\frac{1}{\sigma_2}\right\}=\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_2}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)-1,$$

由 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$,得 $\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_1}\right)>\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_2}\right)$,即 $\dfrac{1}{\sigma_1}>\dfrac{1}{\sigma_2}$ 或 $\sigma_1<\sigma_2$,

应选(A).

三、解答题

(15)**【解】** $I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{r\,\mathrm{d}r}{1+r^2}$

$=\pi\int_0^1 \frac{r\,\mathrm{d}r}{1+r^2}=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2.$

方法点评：二重积分的计算注意如下的对称性：

(1) 设 D 关于 y 轴对称，y 轴右侧区域为 D_1，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & 若\ f(-x,y)=-f(x,y),\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & 若\ f(-x,y)=f(x,y).\end{cases}$$

(2) 设 D 关于 x 轴对称，x 轴上侧区域为 D_1，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & 若\ f(x,-y)=-f(x,y),\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & 若\ f(x,-y)=f(x,y).\end{cases}$$

(3) 设 D 关于直线 $y=x$ 对称，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma$.

(16)**【解】** (Ⅰ) 由 $0<x_1<\pi$，得 $x_2=\sin x_1\in(0,1]\subset\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

于是 $x_n\in(0,1)(n=2,3,\cdots)$，故数列 $\{x_n\}$ 有界.

又当 $x\geqslant 0$ 时，$\sin x\leqslant x$，所以 $x_{n+1}=\sin x_n\leqslant x_n$，即数列 $\{x_n\}$ 单调递减，由极限存在准则，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，对 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边求极限得 $A=\sin A$，则 $A=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sin x_n-x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{\sin x_n-x_n}{x_n}\right)^{\frac{x_n}{\sin x_n-x_n}}\right]^{\frac{\sin x_n-x_n}{x_n^3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x_n-x_n}{x_n^3}}$，

由 $\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t-t}{t^3}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\cos t-1}{3t^2}=-\frac{1}{6}$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x_n-x_n}{x_n^3}=-\frac{1}{6}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$.

(17)**【解】** $f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}=\frac{x}{(x+1)(2-x)}=\frac{x}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right)$，

而 $\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(-1<x<1)$，

$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}(-2<x<2)$，

于是 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left[(-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^{n+1}(-1<x<1)$.

(18)**【解】** （Ⅰ）令 $u=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{u}f'(u)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{u-\dfrac{x^2}{u}}{u^2}f'(u)+\frac{x^2}{u^2}f''(u)=\frac{y^2}{u^3}f'(u)+\frac{x^2}{u^2}f''(u),$$

由对称性得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{x^2}{u^3}f'(u)+\dfrac{y^2}{u^2}f''(u)$.

将 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 代入 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，得 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$.

（Ⅱ）**方法一** 由 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$ 即 $f''(u)+\dfrac{1}{u}f'(u)=0$，得 $f'(u)=C_1e^{-\int\frac{1}{u}du}=\dfrac{C_1}{u}$，

由 $f'(1)=1$ 得 $C_1=1$，即 $f'(u)=\dfrac{1}{u}$，于是 $f(u)=\ln u+C_2$，再由 $f(1)=0$ 得 $C_2=0$，

故 $f(u)=\ln u$.

方法二 由 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$，得 $uf''(u)+f'(u)=0$，即 $\dfrac{d}{du}[uf'(u)]=0$，

解得 $uf'(u)=C_1$，由 $f'(1)=1$ 得 $C_1=1$.

由 $f'(u)=\dfrac{1}{u}$ 得 $f(u)=\ln u+C_2$，由 $f(1)=0$ 得 $C_2=0$，故 $f(u)=\ln u$.

(19)**【证明】** 令 $P(x,y)=yf(x,y)$， $Q(x,y)=-xf(x,y)$，

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=f(x,y)+yf'_y(x,y)$， $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-f(x,y)-xf'_x(x,y)$.

$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两边对 t 求导数，得 $xf'_x(tx,ty)+yf'_y(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y)$，

取 $t=1$ 得 $xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=-2f(x,y)$，

或 $xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)+2f(x,y)=0$，

由格林公式得

$$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$
$$=-\iint_D[xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)+2f(x,y)]dxdy=0.$$

(20)**【解】** （Ⅰ）令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&b\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，原方程组可表示为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 至少有两行不成比例，所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的三个线性无关解，则 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

令 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$，则 $(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_1-k_1\boldsymbol{\alpha}_2-k_2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $k_1=k_2=0$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，即 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 至少有两个线性无关解，于是 $4-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$ 或 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$，故 $r(\boldsymbol{A})=2$.

（Ⅱ）**方法一** $\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&1-a&3-a&b-a&1+a\end{array}\right)$，

因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$，所以 $\dfrac{-1}{1-a}=\dfrac{1}{3-a}=\dfrac{-5}{b-a}=\dfrac{3}{1+a}$，解得 $a=2,b=-3$，

由 $\overline{\boldsymbol{A}} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，

得原方程的通解为 $\boldsymbol{X}=C_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}$（$C_1,C_2$ 为任意常数）.

方法二　因为 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的所有三阶子式都为零.

由 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ a & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & b \end{vmatrix}=0$ 得 $a=2,b=-3$.

由 $\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，

得原方程组的通解为 $\boldsymbol{X}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}$（$k_1,k_2$ 为任意常数）.

方法点评： 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，若 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})$ 时，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解.

若 $r(\boldsymbol{A})=r$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含 $n-r(\boldsymbol{A})$ 个解向量，但 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 线性无关的解向量组所含解向量的个数最多含 $n-r(\boldsymbol{A})+1$ 个.

(21)【解】（Ⅰ）根据特征值与特征向量的定义，由 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_3=3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，

$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为其对应的特征向量.

因为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，所以 $\lambda=0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，所以 $\lambda=0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，于是 $\lambda_1=\lambda_2=0$，其对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=3$,其中 $\lambda_3=3$ 对应的所有特征向量为 $k\boldsymbol{\alpha}_3$(k 为任意的非零常数);$\lambda_1=\lambda_2=0$ 对应的所有特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$($k_1,k_2$ 为不全为零的任意常数).

(Ⅱ)令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

(22)**【解】** (Ⅰ)$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}$,

当 $y<0$ 时,$F_Y(y)=0$;

当 $0\leqslant y<1$ 时,$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\sqrt{y}}\dfrac{1}{4}\mathrm{d}x=\dfrac{3\sqrt{y}}{4}$;

当 $1\leqslant y<4$ 时,$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=P\{-1\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{y}}{4};$$

当 $y\geqslant 4$ 时,$F_Y(y)=1$,

于是 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{3\sqrt{y}}{4} & 0\leqslant y<1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{y}}{4}, & 1\leqslant y<4,\\ 1, & y\geqslant 4,\end{cases}$ 故 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1,\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\leqslant y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(Ⅱ)$F\left(-\dfrac{1}{2},4\right)=P\left\{X\leqslant-\dfrac{1}{2},Y\leqslant 4\right\}=P\left\{X\leqslant-\dfrac{1}{2},-2\leqslant X\leqslant 2\right\}$

$$=P\left\{-2\leqslant X\leqslant-\frac{1}{2}\right\}=P\left\{-1\leqslant X\leqslant-\frac{1}{2}\right\}=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

方法点评:本题考查一维随机变量函数的分布.

一维连续型随机变量函数的分布通常有:

(1)定义法:设 X 为连续型随机变量,其密度函数为 $f_X(x)$,$Y=\varphi(X)$ 为随机变量 X 的函数,则 Y 的分布函数为 $P\{Y\leqslant y\}=P\{\varphi(X)\leqslant y\}=\int_{\varphi(x)\leqslant y}f_X(x)\mathrm{d}x$;

(2)公式法.

(23)**【解】** 似然函数为
$$\begin{aligned}L(\theta) &= P\{X_1 = x_1\}P\{X_2 = x_2\}\cdots P\{X_n = x_n\}\\ &= P\{X = x_1\}P\{X = x_2\}\cdots P\{X = x_n\}\\ &= \theta^N(1-\theta)^{n-N},\end{aligned}$$

$$\ln L(\theta) = N\ln\theta + (n-N)\ln(1-\theta),$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta) = \dfrac{N}{\theta} - \dfrac{n-N}{1-\theta} = 0$ 得参数 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = \dfrac{N}{n}$.