2010 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$(　　)

(A)1.　　(B)e.　　(C)e^{a-b}.　　(D)e^{b-a}.

(2)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F'_2\neq0$,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$(　　)

(A)x.　　(B)z.　　(C)$-x$.　　(D)$-z$.

(3)设 m,n 均是正整数,则反常积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性(　　)

(A)仅与 m 的取值有关.　　(B)仅与 n 的取值有关.

(C)与 m,n 的取值都有关.　　(D)与 m,n 的取值都无关.

(4)$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$(　　)

(A)$\displaystyle\int_0^1dx\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.　　(B)$\displaystyle\int_0^1dx\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$.

(C)$\displaystyle\int_0^1dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$.　　(D)$\displaystyle\int_0^1dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.

(5)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 m 阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,则(　　)

(A)秩 $r(\boldsymbol{A})=m$,秩 $r(\boldsymbol{B})=m$.　　(B)秩 $r(\boldsymbol{A})=m$,秩 $r(\boldsymbol{B})=n$.

(C)秩 $r(\boldsymbol{A})=n$,秩 $r(\boldsymbol{B})=m$.　　(D)秩 $r(\boldsymbol{A})=n$,秩 $r(\boldsymbol{B})=n$.

(6)设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3,则 $\boldsymbol{A}$ 相似于(　　)

(A)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(B)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C)$\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(D)$\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(7)设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\geqslant1,\end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=$(　　)

(A)0.　　(B)$\dfrac{1}{2}$.　　(C)$\dfrac{1}{2}-e^{-1}$.　　(D)$1-e^{-1}$.

(8)设$f_1(x)$为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度，若

$$f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x\leq 0, \\ bf_2(x), & x>0 \end{cases} \quad (a>0,b>0)$$

为概率密度，则a,b应满足(　　)

(A)$2a+3b=4$.　　(B)$3a+2b=4$.　　(C)$a+b=1$.　　(D)$a+b=2$.

二、填空题(本题共6小题，每小题4分，共24分，把答案填在题中横线上.)

(9) 设$\begin{cases} x=e^{-t}, \\ y=\int_0^t \ln(1+u^2)\,du, \end{cases}$ 则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$______.

(10) $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx=$______.

(11)已知曲线L的方程为$y=1-|x|\ (x\in[-1,1])$，起点是$(-1,0)$，终点为$(1,0)$，则曲线积分

$\int_L xy\,dx+x^2\,dy=$______.

(12)设$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leq z\leq 1\}$，则$\Omega$的形心的竖坐标$\bar{z}=$______.

(13)设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$. 若由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$生成的向量空间的维数为2，则$a=$______.

(14)设随机变量X的概率分布为$P\{X=k\}=\dfrac{C}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，则$E(X^2)=$______.

三、解答题(本题共9小题，共94分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分10分)

求微分方程$y''-3y'+2y=2xe^x$的通解.

(16)(本题满分10分)

求函数$f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}\,dt$的单调区间与极值.

(17)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t (n=1,2,\cdots)$ 的大小,说明理由;

(Ⅱ)记 $u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t (n=1,2,\cdots)$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点,若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直,求点 P 的轨迹 C,并计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} \frac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}} \mathrm{d}S$,其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在 2 个不同的解.

(Ⅰ)求 λ, a;

(Ⅱ)求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$,且 $\boldsymbol{Q}$ 的第三列为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅰ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(Ⅱ)证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},\ -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度$f_{Y|X}(y\mid x)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

,

其中参数 $\theta\in(0,1)$未知. 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本(样本容量为 n)中等于 i 的个数$(i=1,2,3)$. 试求常数 a_1,a_2,a_3,使 $T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量,并求 T 的方差.