2002 年数学(一)真题解析

一、填空题

(1)【答案】 1.

【解】 $\int_{e}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}=\int_{e}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_{e}^{+\infty}=1.$

(2)【答案】 -2.

【解】 当 $x=0$ 时,$y=0$.

$e^y+6xy+x^2-1=0$ 两边对 x 求导,得 $e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6y+6x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2x=0$,则 $y'(0)=0$.

$e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6y+6x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2x=0$ 两边对 x 求导,

得 $e^y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+e^y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+12\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2=0$,于是 $y''(0)=-2$.

(3)【答案】 $y=\sqrt{x+1}$.

【解】 **方法一** 令 $y'=p$,则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,方程 $yy''+y'^2=0$ 化为 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0$.

因为 $p\neq 0$,所以$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y}p=0$,解得 $p=C_1e^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}=\frac{C_1}{y}$.

由 $y(0)=1,y'(0)=\frac{1}{2}$,得 $C_1=\frac{1}{2}$,于是 $yy'=\frac{1}{2}$,解得$\frac{1}{2}y^2=\frac{x}{2}+C$.

由 $y(0)=1$,得 $C=\frac{1}{2}$,故 $y=\sqrt{x+1}$.

方法二 由 $yy''+y'^2=0$,得$(yy')'=0$,解得 $yy'=C_1$.

由 $y(0)=1,y'(0)=\frac{1}{2}$,得 $C_1=\frac{1}{2}$,即 $yy'=\frac{1}{2}$ 或$(y^2)'=1$,解得 $y^2=x+C_2$.

由 $y(0)=1$,得 $C_2=1$,故满足初始条件的特解为 $y=\sqrt{x+1}$.

方法点评:本题考查可降阶的微分方程的求解.特定类型微分方程的求解可以用相应类型微分方程的解法求解,注意运用灵活简洁的方法,往往可使解题简单且正确率高.

(4)【答案】 2.

【解】 **方法一** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{pmatrix}$,因为二次型经过正交变换得标准形为 $f=6y_1^2$,

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=0$,由 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ 得 $a=2$.

方法二 因为二次型 f 经过正交变换化为 $f=6y_1^2$,所以$\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=0$,于是$|\boldsymbol{A}|=0$.

由$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{vmatrix}=(a+4)(a-2)^2=0$,得 $a=-4$ 或 $a=2$.

当 $a=-4$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}$.

由 $|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+4 & -2 & -2\\ -2 & \lambda+4 & -2\\ -2 & -2 & \lambda+4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+6)^2=0$，得 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=-6$，矛盾，

故 $a=2$.

(5)**【答案】** 4.

【解】 由 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，得 $P\{X\leqslant\mu\}=P\{X>\mu\}=\dfrac{1}{2}$.

当 $\Delta=16-4X<0$，即 $X>4$ 时，方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根.

由方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\dfrac{1}{2}$，得 $P\{X>4\}=\dfrac{1}{2}$，于是 $\mu=4$.

方法点评：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，常用知识点有：

(1) $P\{X\leqslant\mu\}=P\{X>\mu\}=\dfrac{1}{2}$；

(2) $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$；

(3) $P\{a<X\leqslant b\}=\Phi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$；

(4) $\Phi(-a)=1-\Phi(a)$.

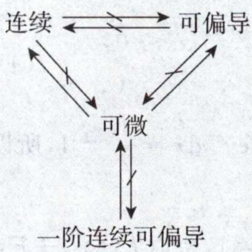
二、选择题

(6)**【答案】** (A).

【解】 若 $f(x,y)$ 两个偏导数连续，则 $f(x,y)$ 一定可微，反之不对；

若 $f(x,y)$ 可微，则 $f(x,y)$ 连续且可偏导，反之不对，应选(A).

方法点评：二元函数 $f(x,y)$ 在一点处的连续性、可偏导性、可微性、一阶连续可偏导性之间的关系图如下：



(7)**【答案】** (C).

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{u_n}=0$，

$$S_n=\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}\right)-\left(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}\right)+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}},$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{u_1}$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ 收敛，(A)，(D) 不对；

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right),$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$ 得 $\frac{1}{u_n}\sim\frac{1}{n}$，$\quad \frac{1}{u_{n+1}}\sim\frac{1}{n+1}$，

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_{n+1}}$ 都发散，

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 发散，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 条件收敛，应选(C).

(8)**【答案】** (B).

【解】 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\neq 0$，不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A>0$.

取 $\varepsilon_0=\frac{A}{2}>0$，则存在 $X>0$，当 $x>X$ 时，$|f'(x)-A|<\frac{A}{2}$，于是 $f'(x)>\frac{A}{2}$.

当 $x>X$ 时，$f(x)-f(X)=f'(\xi)(x-X)$，其中 $\xi\in(X,x)$，

则 $f(x)>f(X)+\frac{A}{2}(x-X)$，

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(X)+\frac{A}{2}(x-X)\right]=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，与 $f(x)$ 有界矛盾，应选(B).

(9)**【答案】** (B).

【解】 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无数个解，即三个平面有无数个交点，因为(A) 只有一个交点，而(C)，(D) 没有交点，所以应选(B).

(10)**【答案】** (D).

【解】 **方法一** 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)+f_2(x)]\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x=2\neq 1$，

所以 $f_1(x)+f_2(x)$ 一定不是某个随机变量的密度函数，(A) 不对；

设 $X_1\sim E(1)$，$X_2\sim E(1)$，则

$$f_1(x)=f_2(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x>0,\end{cases}\quad f_1(x)f_2(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\end{cases}$$

因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\neq 1$，所以 $f_1(x)f_2(x)$ 不是某个随机变量的密度函数，(B) 不对；

因为 $F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=2\neq 1$，所以 $F_1(x)+F_2(x)$ 不是某个随机变量的分布函数，(C) 不对，应选(D).

方法二 因为 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 为两个随机变量的分布函数，所以 $0\leqslant F_1(x)\leqslant 1$，$0\leqslant F_2(x)\leqslant 1$，$F_1(x)$，$F_2(x)$ 单调不减，$F_1(x)$，$F_2(x)$ 右连续且

$$F_1(-\infty)=F_2(-\infty)=0,\quad F_1(+\infty)=F_2(+\infty)=1,$$

于是 $F_1(x)F_2(x)$ 满足：$0\leqslant F_1(x)F_2(x)\leqslant 1$，$F_1(x)F_2(x)$ 单调不减，$F_1(x)F_2(x)$ 右连续且 $F_1(-\infty)F_2(-\infty)=0$，$F_1(+\infty)F_2(+\infty)=1$，故 $F_1(x)F_2(x)$ 为某个随机变量的分布函数，应选(D).

三、解答题

(11)【解】 将 $h=0$ 代入 $af(h)+bf(2h)-f(0)=o(h)$ 中，得 $(a+b-1)f(0)=0$.

由 $f(0)\neq 0$，得 $a+b=1$；

由 $af(h)+bf(2h)-f(0)=o(h)$，得 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{o(h)}{h}=0$，

而 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-(a+b)f(0)}{h}$

$$=a\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+2b\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)}{2h}$$

$$=(a+2b)f'(0),$$

所以 $(a+2b)f'(0)=0$，由 $f'(0)\neq 0$ 得 $a+2b=0$，于是 $\begin{cases}a+b=1,\\ a+2b=0.\end{cases}$

由 $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1\neq 0$ 得方程组 $\begin{cases}a+b=1,\\ a+2b=0\end{cases}$ 有唯一解，故存在唯一一组 $a=2,b=-1$，使得

$$af(h)+bf(2h)-f(0)=o(h).$$

(12)【解】 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt=e^{-\arctan^2 x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$，$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt\Big|_{x=0}=1$，

因为曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$ 在 $(0,0)$ 处切线相同，所以 $f'(0)=1$ 且 $f(0)=0$.

所以切线方程为 $y=x$，

而且 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{2}{n}\right)}{\dfrac{2}{n}}=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{2}{n}\right)-f(0)}{\dfrac{2}{n}}=2f'(0)=2.$

(13)【解】 **方法一** 如图所示，

令 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$，

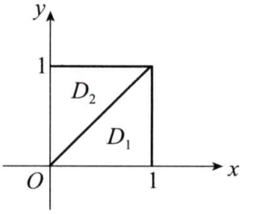
$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant 1\}$，

$$\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy=\iint_{D_1}e^{x^2}dxdy+\iint_{D_2}e^{y^2}dxdy$$

$$=\int_0^1 e^{x^2}dx\int_0^x dy+\int_0^1 e^{y^2}dy\int_0^y dx$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}dx+\int_0^1 ye^{y^2}dy$$

$$=2\int_0^1 xe^{x^2}dx=e^{x^2}\Big|_0^1=e-1.$$



三(13)题图

方法二 令 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$，

由对称性得 $\displaystyle\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy=2\iint_{D_1}e^{x^2}dxdy$

$$=2\int_0^1 e^{x^2}dx\int_0^x dy=2\int_0^1 xe^{x^2}dx=e^{x^2}\Big|_0^1=e-1.$$

(14)**【解】** (Ⅰ) $P(x,y)=\dfrac{1}{y}[1+y^2f(xy)]=\dfrac{1}{y}+yf(xy)$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}+f(xy)+xyf'(xy),$$

$$Q(x,y)=\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]=xf(xy)-\frac{x}{y^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}+f(xy)+xyf'(xy),$$

因为$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$,所以曲线积分 I 与路径 L 无关;

(Ⅱ) **方法一** $I=\displaystyle\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$

$$=\int_L \frac{1}{y}\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y+\int_L yf(xy)\mathrm{d}x+xf(xy)\mathrm{d}y,$$

$$\int_L \frac{1}{y}\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y=\int_{(a,b)}^{(c,d)}\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{x}{y}\Bigg|_{(a,b)}^{(c,d)}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{bd};$$

取 $L_1:xy=ab$(起点为(a,b),终点为(c,d)),

因为曲线积分与路径无关,所以

$$\begin{aligned}\int_L yf(xy)\mathrm{d}x+xf(xy)\mathrm{d}y&=\int_{L_1} yf(xy)\mathrm{d}x+xf(xy)\mathrm{d}y\\&=f(ab)\int_{L_1} y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=f(ab)\int_{(a,b)}^{(c,d)}\mathrm{d}(xy)\\&=f(ab)xy\Big|_{(a,b)}^{(c,d)}=0,\end{aligned}$$

于是 $I=\displaystyle\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y=\frac{bc-ad}{bd}$.

方法二 令 $f(u)$ 的原函数为 $F(u)$,则

$$\int_L yf(xy)\mathrm{d}x+xf(xy)\mathrm{d}y=\int_{(a,b)}^{(c,d)}\mathrm{d}F(xy)=F(xy)\Bigg|_{(a,b)}^{(c,d)}=F(cd)-F(ab)=0,$$

于是 $I=\displaystyle\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y=\frac{bc-ad}{bd}$.

(15)**【解】** 因为级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$的收敛半径为 $R=+\infty$,所以其收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

(Ⅰ)由$y'(x)=\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dfrac{x^8}{8!}+\cdots+\dfrac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots$,

$$y''(x)=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots,$$

$$y'''(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!}+\cdots,$$

得 $y''+y'+y=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots=\mathrm{e}^x$.

(Ⅱ)令 $y(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$,由(1)得 $y(x)$ 满足 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$.

$y''+y'+y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+\lambda+1=0$,特征根为 $\lambda_{1,2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,

$y''+y'+y=0$ 的通解为 $y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

又 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$ 有特解 $y=\frac{1}{3}\mathrm{e}^x$，故 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$ 的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x.$$

由 $y(0)=1,y'(0)=0$ 得 $C_1=\frac{2}{3},C_2=0$，故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数为

$$y(x)=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x\ (-\infty<x<+\infty).$$

(16)**【解】** (Ⅰ)$h(x,y)$ 在 $M(x_0,y_0)$ 处沿梯度的方向方向导数最大，且方向导数的最大值即为梯度的模，而梯度为

$$\mathbf{grad}\,h\,|_M=\{y_0-2x_0,x_0-2y_0\},$$

故 $g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}$.

(Ⅱ)由题意，求目标函数 $g(x,y)$ 在约束条件 $x^2+y^2-xy-75=0$ 下的最大值.

令 $F(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(x^2+y^2-xy-75)$，

令 $$\begin{cases}F'_x=10x-8y+\lambda(2x-y)=0,\\F'_y=10y-8x+\lambda(2y-x)=0,\\F'_\lambda=x^2+y^2-xy-75=0,\end{cases}$$

前两式相加得 $(x+y)(\lambda+2)=0$，则 $y=-x$ 或 $\lambda=-2$.

当 $y=-x$ 时，解得 $\begin{cases}x=-5,\\y=5,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=5,\\y=-5;\end{cases}$

当 $\lambda=-2$ 时，代入第一式得 $y=x$，解得 $\begin{cases}x=5\sqrt{3},\\y=5\sqrt{3},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-5\sqrt{3},\\y=-5\sqrt{3}.\end{cases}$

因为 $g(5,-5)=g(-5,5)=15\sqrt{2}$，$g(5\sqrt{3},5\sqrt{3})=g(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3})=5\sqrt{6}$，所以可以选择 $(5,-5)$ 或 $(-5,5)$ 作为攀登的起点.

(17)**【解】** 因为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为3，于是 $r(\boldsymbol{A})=3$.

又因为 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系含一个线性无关的解向量.

而 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 等价于 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$，由 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$，得 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$.

又 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 等价于 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$ 且 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的特解为 $\boldsymbol{\eta}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，故方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\ (k\text{ 为任意常数}).$$

方法点评：本题考查方程组解向量形式与方程组的通解.

本题关键需要使用 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的向量形式 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$ 及 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的向量形式 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{b}$.

(18)【解】 (Ⅰ)设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

于是 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\lambda\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|$

$$=|\boldsymbol{P}^{-1}|\,|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{P}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|.$$

(Ⅱ)令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,显然 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\lambda^2$.

因为 $r(\boldsymbol{A})=0\neq r(\boldsymbol{B})=1$,所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

(Ⅲ)设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$.

若 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$,则 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值,设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

因为 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 可对角化,所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1$,$\boldsymbol{P}_2$,使得

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$ 或 $(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{B}$,令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

(19)【解】 显然 $Y\sim B(4,p)$,其中

$$p=P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=\sin\frac{x}{2}\bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{1}{2},$$

于是 $Y\sim B\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$.

由 $E(Y)=4\times\dfrac{1}{2}=2$,$D(Y)=4\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=1$,得 $E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=5$.

(20)【解】 $E(X)=0\times\theta^2+1\times2\theta(1-\theta)+2\theta^2+3(1-2\theta)=3-4\theta$,

$$\overline{x}=\frac{3+1+3+0+3+1+2+3}{8}=2,$$

令 $E(X)=\overline{x}$ 得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{4}$.

似然函数为 $L(\theta)=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$,

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta),$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=\dfrac{6}{\theta}-\dfrac{2}{1-\theta}-\dfrac{8}{1-2\theta}=0$,得 $\theta=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{12}$.

因为 $\theta=\dfrac{7+\sqrt{13}}{12}>\dfrac{1}{2}$,所以 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$.