2004 年全国硕士研究生招生考试试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 曲线 $y = \ln x$ 上与直线 $x + y = 1$ 垂直的切线方程为______.

(2) 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$,且 $f(1) = 0$,则 $f(x) =$ ______.

(3) 设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分,则曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}y - 2y\mathrm{d}x$ 的值为______.

(4) 欧拉方程 $x^2 \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 4x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0 (x > 0)$ 的通解为______.

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^* = 2\boldsymbol{BA}^* + \boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵,则 $|\boldsymbol{B}| =$ ______.

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 $P\{X > \sqrt{D(X)}\} =$ ______.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(7) 把 $x \to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos(t^2)\mathrm{d}t, \beta = \int_0^{x^2} \tan\sqrt{t}\mathrm{d}t, \gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin(t^3)\mathrm{d}t$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小量,则正确的排列次序是(　　)

(A) α,β,γ.　　(B) α,γ,β.　　(C) β,α,γ.　　(D) β,γ,α.

(8) 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f'(0) > 0$,则存在 $\delta > 0$,使得(　　)

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x \in (0,\delta)$,有 $f(x) > f(0)$.

(D) 对任意的 $x \in (-\delta,0)$,有 $f(x) > f(0)$.

(9) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数. 下列结论中正确的是(　　)

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 λ,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$.

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则存在非零常数 λ,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$.

(10) 设 $f(x)$ 为连续函数,$F(t) = \int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$,则 $F'(2)$ 等于(　　)

(A) $2f(2)$.　　(B) $f(2)$.　　(C) $-f(2)$.　　(D) 0.

(11) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$,再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\boldsymbol{C}$,则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为( )

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(12) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵,则必有( )

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

(13) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$,对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$,数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$. 若 $P\{|X|<x\}=\alpha$,则 x 等于( )

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (D) $u_{1-\alpha}$.

(14) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 独立同分布,且其方差为 $\sigma^2>0$. 令 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,则( )

(A) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\frac{\sigma^2}{n}$. (B) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\sigma^2$.

(C) $D(X_1+Y)=\frac{n+2}{n}\sigma^2$. (D) $D(X_1-Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$.

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 12 分)

设 $\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$,证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

(16)(本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时,为了减少滑行距离,在触地的瞬间,飞机尾部张开减速伞,以增大阻力,使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机,着陆时的水平速度为 700 km/h. 经测试,减速伞打开后,飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k=6.0\times10^6$). 问从着陆点算起,飞机滑行的最长距离是多少?

(注:kg 表示千克,km/h 表示千米/小时.)

(17)(本题满分 12 分)

计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}2x^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geqslant0)$ 的上侧.

(18)（本题满分 11 分）

设有方程 $x^n+nx-1=0$,其中 n 为正整数. 证明此方程存在唯一正实根 x_n,并证明当 $\alpha>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

(19)（本题满分 12 分）

设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数,求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

(20)（本题满分 9 分）

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \qquad\cdots\cdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0,\end{cases}\qquad (n\geqslant 2),$$

试问 a 取何值时,该方程组有非零解,并求出其通解.

(21)（本题满分 9 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$的特征方程有一个二重根,求 a 的值,并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

(22)（本题满分 9 分）

设 A,B 为随机事件,且 $P(A)=\dfrac{1}{4},P(B\mid A)=\dfrac{1}{3},P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$,令

$$X=\begin{cases}1,A\text{ 发生},\\0,A\text{ 不发生};\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1,B\text{ 发生},\\0,B\text{ 不发生}.\end{cases}$$

求:(Ⅰ) 二维随机变量(X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ)X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)（本题满分 9 分）

设总体 X 的分布函数为

$$F(x;\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1,\end{cases}$$

其中未知参数 $\beta>1,X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,求:

(Ⅰ)β 的矩估计量;

(Ⅱ)β 的最大似然估计量.