2006 年真题参考答案

一、填空题

(1) 2.　(2) $y = Cxe^{-x}$,其中 C 为任意常数.　(3) 2π.　(4) $\sqrt{2}$.　(5) 2.　(6) $\frac{1}{9}$.

二、选择题

(7) A.　(8) C.　(9) D.　(10) D.　(11) A.　(12) B.　(13) C.　(14) A.

三、解答题

(15) $\frac{\pi}{2}\ln 2$.

(16) (Ⅰ) 证明略(可利用数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 单调下降且有界),$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(Ⅱ) $e^{-\frac{1}{6}}$.

(17) $f(x) = \frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n} - (-1)^n\right]x^n,\ |x| < 1$.

(18) (Ⅰ) 证明略.

(Ⅱ) $f(u) = \ln u$.

(19) 证明略.(可利用格林公式.)

(20) (Ⅰ) 证明略.(分别证明 $r(\boldsymbol{A}) \geqslant 2$ 和 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$.)

(Ⅱ) $a = 2,\ b = -3$,通解为 $\boldsymbol{x} = k_1(-2, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}} + k_2(4, -5, 0, 1)^{\mathrm{T}} + (2, -3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$,其中 $k_1,\ k_2$ 为任意常数.

(21) (Ⅰ) $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,0,3,对应于特征值 0 的全体特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$,其中 $k_1,\ k_2$ 为不全为零的任意常数,对应于特征值 3 的全体特征向量为 $k_3(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$,其中 k_3 为任意非零常数.

(Ⅱ) $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵,满足 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$.

(22) (Ⅰ) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0 < y < 1, \\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1 \leqslant y < 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(Ⅱ) $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right) = \frac{1}{4}$.

(23) $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$.