2016 年数学(一) 真题解析

一、选择题

(1)【答案】 (C).

【解】 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^a(1+x)^b}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^a(1+x)^b}+\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^a(1+x)^b}$,

由 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a \cdot \frac{1}{x^a(1+x)^b}=1$ 且 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^a(1+x)^b}$ 收敛得 $a<1$,

再由 $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{a+b} \cdot \frac{1}{x^a(1+x)^b}=1$ 且 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^a(1+x)^b}$ 收敛得 $a+b>1$,

即 $a<1$ 且 $a+b>1$,应选(C).

(2)【答案】 (D).

【解】 $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}(x-1)^2+C, & x<1,\\ x(\ln x-1)+C+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

取 $C=0$ 得 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$应选(D).

(3)【答案】 (A).

【解】 设 $y_1=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$, $y_2=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$,

由线性微分方程解的结构得 $y_2-y_1=2\sqrt{1+x^2}$ 为 $y'+p(x)y=0$ 的解,

代入得$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+p(x)\cdot 2\sqrt{1+x^2}=0$,解得 $p(x)=-\frac{x}{1+x^2}$;

再由线性微分方程解的结构,得$\frac{y_1+y_2}{2}=(1+x^2)^2$ 为 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解,代入得

$4x(1+x^2)-\frac{x}{1+x^2}\cdot(1+x^2)^2=q(x)$,解得 $q(x)=3x(1+x^2)$,应选(A).

(4)【答案】 (D).

【解】 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,

由 $f(0)=f(0-0)=f(0+0)=0$ 得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

由 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1$ 得 $f'_-(0)=1$;

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x},$$

由$\frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n}$ 得$\frac{n}{n+1}<\frac{x}{\frac{1}{n}}<1$,从而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{1}{n}}=1$,于是 $f'_+(0)=1$,

因为 $f'_-(0)=f'_+(0)=1$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,应选(D).

(5)**【答案】** (C).

【解】 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似可知,存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

对 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 两边取转置得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,或$[(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}]^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}[(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}]=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,

即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似,(A) 正确;

由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1}$,即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似,(B) 正确;

由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1}$ 得 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$,

即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似,(D) 正确,应选(C).

(6)**【答案】** (B).

【解】 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$,

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0$ 得

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=5,\lambda_2=\lambda_3=-1$,

二次型的规范形为 $f(x_1,x_2,x_3)=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$,

从而 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 表示的曲面为 $5y_1^2-y_2^2-y_3^2=2$,该曲面表示双叶双曲面,应选(B).

(7)**【答案】** (B).

【解】 由 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 得$\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$,

$$p=P\{X\leqslant\mu+\sigma^2\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\sigma\right\}=\Phi(\sigma),$$

则 p 随着 σ 的增加而增加,应选(B).

(8)**【答案】** (A).

【解】 **方法一** $X\sim B\left(2,\dfrac{1}{3}\right)$, $Y\sim B\left(2,\dfrac{1}{3}\right)$,

$E(X)=E(Y)=\dfrac{2}{3},D(X)=D(Y)=\dfrac{4}{9},E(XY)=1\times1\times P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{2}{9}$,

$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{2}{9}-\dfrac{4}{9}=-\dfrac{2}{9}$,

则 $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=-\dfrac{2}{9}\times\dfrac{9}{4}=-\dfrac{1}{2}$,应选(A).

方法二 $P\{X=0\}=C_2^0\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$,

$$P\{X=1\}=C_2^1\,\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},\quad P\{X=2\}=C_2^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{9},$$

$X\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\\dfrac{4}{9}&\dfrac{4}{9}&\dfrac{1}{9}\end{pmatrix}$,同理 $Y\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\\dfrac{4}{9}&\dfrac{4}{9}&\dfrac{1}{9}\end{pmatrix}$,

$$E(X)=\frac{2}{3},E(X^2)=\frac{8}{9},D(X)=\frac{8}{9}-\frac{4}{9}=\frac{4}{9},E(Y)=\frac{2}{3},D(Y)=\frac{4}{9}.$$

$P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{2}{9}$,

$P\{XY=0\}=\frac{7}{9}$,即 $XY\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{7}{9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}$.

$E(XY)=\frac{2}{9}$,$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{2}{9}-\frac{4}{9}=-\frac{2}{9}$,

$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=-\frac{2}{9}\times\frac{9}{4}=-\frac{1}{2}$.

二、填空题

(9)**【答案】** $\frac{1}{2}$.

【解】

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}=\frac{1}{2}.$$

(10)**【答案】** $\boldsymbol{j}+(y-1)\boldsymbol{k}$.

【解】 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x+y+z & xy & z\end{vmatrix}=\boldsymbol{j}+(y-1)\boldsymbol{k}$.

(11)**【答案】** $-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$.

【解】 将 $x=0,y=1$ 代入得 $z=1$.

$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 两边关于 x 求偏导得

$$z+(x+1)z'_x=2xf(x-z,y)+x^2f'_1(x-z,y)\cdot(1-z'_x),$$

将 $x=0,y=1,z=1$ 代入得 $z'_x(0,1)=-1$;

$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 两边关于 y 求偏导得

$$(x+1)z'_y-2y=x^2[f'_1(x-z,y)(-z'_y)+f'_y(x-z,y)],$$

将 $x=0,y=1,z=1$ 代入得 $z'_y(0,1)=2$,故 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$.

(12)**【答案】** $\frac{1}{2}$.

【解】 **方法一** $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$, $\frac{1}{1+ax^2}=1-ax^2+o(x^2)$,

则 $\arctan x-\frac{x}{1+ax^2}=\left(a-\frac{1}{3}\right)x^3+o(x^3)$,

再由 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)$ 得

$$\frac{f'''(0)}{3!}=a-\frac{1}{3},\text{解得 } a=\frac{1}{2}.$$

方法二 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-ax^2}{(1+ax^2)^2}$,

$$f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}+\frac{6ax-2a^2x^3}{(1+ax^2)^3},$$

$$f'''(x)=-\frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}-\frac{(6a-6a^2x^2)(1+ax^2)-6ax(6ax-2a^2x^3)}{(1+ax^2)^4},$$

所以 $f'''(0)=-2+6a$，由 $-2+6a=1$ 得 $a=\frac{1}{2}$.

(13)**【答案】** $\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$.

【解】 $$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda\cdot\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 4 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\left[\lambda\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & \lambda+1\end{vmatrix}\right]+\begin{vmatrix}0 & -1\\ 4 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda[\lambda(\lambda^2+\lambda+2)+3]+4$$

$$=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$$

(14)**【答案】** $(8.2,10.8)$.

【解】 $$P\left\{-u_{0.025}<\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<u_{0.025}\right\}=0.95,$$

得 $P\left\{\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}<\mu<\overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}\right\}=0.95$，

由 $\overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}=10.8$ 得 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}=10.8-\overline{x}=1.3$，从而 $\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}=8.2$，

故 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为 $(8.2,10.8)$.

三、解答题

(15)**【解】** $$\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)}r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\theta+3\cos^3\theta+3\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\theta+3\cos^3\theta+3\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{16}{3}(I_4+3I_3+3I_2)=5\pi+\frac{32}{3}.$$

(16)**【证明】** (Ⅰ)微分方程 $y''+2y'+ky=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+k=0$，

解得 $\lambda_1=-1+\sqrt{1-k}$， $\lambda_2=-1-\sqrt{1-k}$，

因为 $0<k<1$，所以 $\lambda_1<0,\lambda_2<0$，从而 $\int_0^{+\infty}e^{\lambda_1 x}\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty}e^{\lambda_2 x}\mathrm{d}x$ 都收敛.

该方程的通解为 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$，

由 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=C_1\int_0^{+\infty}e^{\lambda_1 x}\mathrm{d}x+C_2\int_0^{+\infty}e^{\lambda_2 x}\mathrm{d}x$，得 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(Ⅱ) **方法一**　由 $\lambda_1<0,\lambda_2<0$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x})=0$,

$$\lim_{x\to+\infty}y'(x)=\lim_{x\to+\infty}(C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x})=0,$$

于是 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{k}\left[\int_0^{+\infty}y''(x)\mathrm{d}x+2\int_0^{+\infty}y'(x)\mathrm{d}x\right]$,

再由 $\int_0^{+\infty}y''(x)\mathrm{d}x=y'(x)\Big|_0^{+\infty}=-y'(0)=-1$,

$\int_0^{+\infty}y'(x)\mathrm{d}x=y(x)\Big|_0^{+\infty}=-y(0)=-1$,

得 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{k}$.

方法二　将 $y(0)=1,y'(0)=1$ 代入 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$ 得 $\begin{cases}C_1+C_2=1,\\ \lambda_1C_1+\lambda_2C_2=1.\end{cases}$

解得 $C_1=\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{2+\sqrt{1-k}}{2\sqrt{1-k}}$,　$C_2=\frac{\lambda_1-1}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{-2+\sqrt{1-k}}{2\sqrt{1-k}}$,

故 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=-\left(\frac{C_1}{\lambda_1}+\frac{C_1}{\lambda_1}\right)=\frac{3}{k}$.

(17)**【解】**　**方法一**　由 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$ 得

$$f(x,y)=\frac{1}{2}e^{-y}\int(2x+1)\mathrm{d}(e^{2x})+\varphi(y)=\frac{1}{2}e^{-y}\left[(2x+1)e^{2x}-2\int e^{2x}\mathrm{d}x\right]+\varphi(y)$$
$$=xe^{2x-y}+\varphi(y).$$

由 $f(0,y)=y+1$ 得 $\varphi(y)=y+1$,于是 $f(x,y)=xe^{2x-y}+y+1$.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-xe^{2x-y}+1,$$

令 $P(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$,　$Q(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-(2x+1)e^{2x-y},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-(2x+1)e^{2x-y},$$

因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,所以曲线积分与路径无关,

于是 $I(t)=\int_0^1(2x+1)e^{2x}\mathrm{d}x+\int_0^t(1-e^{2-y})\mathrm{d}y=t+e^{2-t}$.

由 $I'(t)=1-e^{2-t}=0$ 得 $t=2$,

因为 $I''(t)=e^{2-t}>0$,所以当 $t=2$ 时,$I(t)$ 取最小值,最小值为 $I(2)=3$.

方法二　由 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$ 得 $f(x,y)=xe^{2x-y}+\varphi(y)$,

由 $f(0,y)=y+1$ 得 $\varphi(y)=y+1$,从而 $f(x,y)=xe^{2x-y}+y+1$.

于是 $I(t)=\int_{L_t}\mathrm{d}f(x,y)=f(1,t)-f(0,0)=e^{2-t}+t$.

由 $I'(t)=1-e^{2-t}=0$ 得 $t=2$,

当 $t<2$ 时,$I'(t)<0$;当 $t>2$ 时,$I'(t)>0$,则 $t=2$ 时 $I(t)$ 取最小值,且最小值为

$$I(2)=3.$$

(18)【解】 由高斯公式得 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(2x+1)\mathrm{d}v$，

而 $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 1\times 1=\frac{1}{3}$，

$$\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}v=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-\frac{y}{2}}\mathrm{d}z=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}\left(1-x-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x(1-x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{12},$$

故 $I=\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$.

(19)【证明】

(Ⅰ) $|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})|$，其中 ξ 介于 x_{n-1} 与 x_n 之间.

因为 $0<f'(x)<\frac{1}{2}$，所以 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|$，

由递推关系得 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$.

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|$ 收敛，

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛.

(Ⅱ) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 的部分和为

$$S_n=(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_{n+1}-x_n)=x_{n+1}-x_1,$$

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$x_{n+1}=f(x_n)$ 及函数 $f(x)$ 的连续性得 $a=f(a)$.

令 $\varphi(x)=x-f(x)$，即 $x=a$ 为 $\varphi(x)$ 的零点.

因为 $\varphi(0)=-f(0)=-1$，

$\varphi(2)=2-f(2)=1-[f(2)-f(0)]=1-2f'(\eta)>0$，其中 $\eta\in(0,2)$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,2)$ 内有零点.

又因为 $\varphi'(x)=1-f'(x)>0$，所以 $\varphi(x)$ 只有唯一的一个零点，且位于 $(0,2)$ 内，

于是 $0<a<2$，即 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

(20)【解】 方法一

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\2&a&1&1&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&1-a&0\end{array}\right)$$

当 $a\neq-2$ 且 $a\neq1$ 时，

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&1&\frac{3a}{a+2}\\0&1&0&0&\frac{a-4}{a+2}\\0&0&1&-1&0\end{array}\right),$$

$AX=B$ 有唯一解，$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & \frac{3a}{a+2}\\ 0 & \frac{a-4}{a+2}\\ -1 & 0\end{pmatrix}$；

当 $a=1$ 时，$(A\,\vdots\,B)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 3 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$，

由 $r(A)=r(A\,\vdots\,B)=2<3$ 得 $AX=B$ 有无数个解，

令 $X=(X_1,X_2)$，

由 $X_1=k_1\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-k_1-1\\k_1\end{pmatrix}$，　$X_2=k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-k_2-1\\k_2\end{pmatrix}$ 得

$$X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -k_1-1 & -k_2-1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}(k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

$a=-2$ 时，$(A\,\vdots\,B)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6\\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$，

因为 $r(A)\neq r(A\,\vdots\,B)$，所以 $AX=B$ 无解.

方法二　$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & a+2 & 3\\ 0 & 0 & a-1\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)$，

当 $a\neq-2$ 且 $a\neq1$ 时，因为 $r(A)=r(A\,\vdots\,B)=3$，所以 $AX=B$ 有唯一解，

由 $(A\,\vdots\,B)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3a}{a+2}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-4}{a+2}\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)$，

得
$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & \frac{3a}{a+2}\\ 0 & \frac{a-4}{a+2}\\ -1 & 0\end{pmatrix};$$

当 $a=1$ 时，$(A\,\vdots\,B)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 3 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$，

由 $r(A)=r(A\,\vdots\,B)=2<3$ 得 $AX=B$ 有无数个解，

令 $X=(X_1,X_2)$，

由 $\boldsymbol{X}_1=k_1\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-k_1-1\\k_1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{X}_2=k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-k_2-1\\k_2\end{pmatrix}$ 得

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&1\\-k_1-1&-k_2-1\\k_1&k_2\end{pmatrix}(k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

$a=-2$ 时，$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&0&3&-3&-6\\0&0&-3&3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right)$，

因为 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})$，所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解.

(21)**【解】** (Ⅰ)由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$ 得

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=0$.

将 $\lambda_1=-1$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，由 $-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-2&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_1=-1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$；

将 $\lambda_2=-2$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，由 $-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-2&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得

$\lambda_2=-2$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$；

将 $\lambda_3=0$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，由 $-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-2&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得

$$A^{99}=P\begin{pmatrix}(-1)^{99}&0&0\\0&(-2)^{99}&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^{99}&0&0\\0&(-2)^{99}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(Ⅱ) 由 $B^2=BA$ 得 $B^{100}=B^{98}B^2=B^{99}A=\cdots=BA^{99}$,

即 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$,

故 $\begin{cases}\beta_1=(2^{99}-2)\alpha_1+(2^{100}-2)\alpha_2+0\alpha_3,\\\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2+0\alpha_3,\\\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2+0\alpha_3.\end{cases}$

(22)**【解】** (Ⅰ) 区域 D 的面积为 $A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$,

随机变量 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D,\\0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$

(Ⅱ) 设 (U,X) 的联合分布函数为 $G(u,x)$,

$$G\left(0,\frac{1}{2}\right)=P\left\{U\leqslant 0,X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=P\left\{X>Y,X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}3\mathrm{d}y=\frac{1}{4},$$

$$P\{U\leqslant 0\}=P\{X>Y\}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}3\mathrm{d}y=\frac{1}{2},$$

$$P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{8},$$

因为 $\frac{1}{4}\neq\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{8}\right)$,所以 U 与 X 不独立.

(Ⅲ) 当 $z<0$ 时,$F(z)=0$;

当 $0\leqslant z<1$ 时,

$$F(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{U=0,X\leqslant z\}=P\{X>Y,X\leqslant z\}=\int_0^z\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}3\mathrm{d}y=\frac{3}{2}z^2-z^3;$$

当 $1\leqslant z<2$ 时,

$$\begin{aligned}F(z)&=P\{U+X\leqslant z\}=P\{U=0,X\leqslant z\}+P\{U=1,X\leqslant z-1\}\\&=\frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2;\end{aligned}$$

当 $z\geqslant 2$ 时,$F(z)=1$,

$$故\ F(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{3}{2}z^2-z^3, & 0\leqslant z<1,\\ \dfrac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}(z-1)^2, & 1\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant 2.\end{cases}$$

(23)**【解】** (Ⅰ)总体 X 的分布函数为 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$.

当 $x<0$ 时,$F(x)=0$;

当 $x\geqslant\theta$ 时,$F(x)=1$;

当 $0\leqslant x<\theta$ 时,$F(x)=\int_0^x \dfrac{3x^2}{\theta^3}\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{\theta^3}$,

$$即\ F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^3}{\theta^3}, & 0\leqslant x<\theta,\\ 1, & x\geqslant\theta.\end{cases}$$

设 T 的分布函数为 $F_T(t)$,则

$$\begin{aligned}F_T(t)&=P\{T\leqslant t\}=P\{\max\{X_1,X_2,X_3\}\leqslant t\}\\&=P\{X_1\leqslant t,X_2\leqslant t,X_3\leqslant t\}\\&=P\{X_1\leqslant t\}P\{X_2\leqslant t\}P\{X_3\leqslant t\}\\&=P^3\{X\leqslant t\}=F^3(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{t^9}{\theta^9}, & 0\leqslant t<\theta,\\ 1, & t\geqslant\theta.\end{cases}\end{aligned}$$

$$随机变量\ T\ 的概率密度为\ f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{9t^8}{\theta^9}, & 0<t<\theta,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(Ⅱ)$E(aT)=aE(T)=a\int_0^\theta t\cdot\dfrac{9t^8}{\theta^9}\mathrm{d}t=\dfrac{9a}{10}\theta$,

由 $E(aT)=\theta$ 得 $a=\dfrac{10}{9}$,即当 $a=\dfrac{10}{9}$ 时,aT 为参数 θ 的无偏估计.