2005 年真题参考答案

一、填空题

(1) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$. (2) $y = \frac{x}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right)$. (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (4) $(2-\sqrt{2})\pi R^3$. (5) 2. (6) $\frac{13}{48}$.

二、选择题

(7) C. (8) A. (9) B. (10) D. (11) B. (12) C. (13) B. (14) D.

三、解答题

(15) $\frac{3}{8}$.

(16) 收敛区间为$(-1,1)$; $f(x) = 2x\arctan x - \ln(1+x^2) + \frac{x^2}{1+x^2}$, $x \in (-1,1)$.

(17) 20.

(18) (Ⅰ) 证明略.(考虑函数 $g(x) = f(x) + x - 1$,可利用介值定理.)

(Ⅱ) 证明略.(可利用拉格朗日中值定理.)

(19) (Ⅰ) 证明略.

(Ⅱ) $\varphi(y) = -y^2$.

(20) (Ⅰ) 0.

(Ⅱ) $f(x_1,x_2,x_3) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 2y_1^2 + 2y_2^2$.

(Ⅲ) $\boldsymbol{x} = k(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数.

(21) 当 $k \neq 9$ 时,$\boldsymbol{x} = k_1(1,2,3)^{\mathrm{T}} + k_2(3,6,k)^{\mathrm{T}}$,其中 k_1, k_2 为任意常数. 当 $k = 9$ 时,若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,则通解为 $\boldsymbol{x} = k_1(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,其中 k_1 为任意常数;若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为1,则通解为 $\boldsymbol{x} = k_1(-b,a,0)^{\mathrm{T}} + k_2(-c,0,a)^{\mathrm{T}}$,其中 k_1, k_2 为任意常数.

(22) (Ⅰ) $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(Ⅱ) $f_Z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{2}, & 0 < z < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(23) (Ⅰ) $\frac{n-1}{n}$, $(i = 1,2,\cdots,n)$.

(Ⅱ) $-\frac{1}{n}$.