2023 年全国硕士研究生招生考试（数学一）试题

绝密 ★ 启用前

考试形式：闭卷　考试时间：180 分钟　满分：150 分

注意： 1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、选择题：1-10 题.（每题 10 分，共 50 分）

1. 曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程为(　　)

A. $y=x+\mathrm{e}$　　B. $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　C. $y=x$　　D. $y=x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

2. 若微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界, 则(　　)

A. $a<0,b>0$　　B. $a>0,b>0$　　C. $a=0,b>0$　　D. $a=0,b<0$

3. 设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases} x=2t+|t|, \\ y=|t|\sin t \end{cases}$ 确定, 则(　　)

A. $f(x)$ 连续, $f'(0)$ 不存在.
B. $f'(0)$ 存在, $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.
C. $f'(x)$ 连续, $f''(0)$ 不存在.
D. $f''(0)$ 存在, $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

4. 已知 $a_n<b_n(n=1,2,\cdots)$, 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛, 则 “$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛” 是 “$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛” 的(　　)

A. 充分必要条件.
B. 充分不必要条件.
C. 必要不充分条件.
D. 既不充分也不必要条件.

5. 已知 n 阶矩阵 A,B,C 满足 $ABC=O,E$ 为 n 阶单位矩阵. 记矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ BC & E \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} AB & C \\ O & E \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} E & AB \\ AB & O \end{bmatrix}$ 的秩分别为 r_1,r_2,r_3, 则(　　)

A. $r_1\le r_2\le r_3$　　B. $r_1\le r_3\le r_2$　　C. $r_3\le r_2\le r_1$　　D. $r_2\le r_1\le r_3$

6. 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是(　　)

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示, 也可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示, 则 $\boldsymbol{\gamma}=($ $)$

A. $k\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$. B. $k\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$ C. $k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$ D. $k\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$.

8. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $E(|X-EX|)=($ $)$

A. $\frac{1}{\mathrm{e}}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{2}{\mathrm{e}}$. D. 1.

9. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体的 $N\left(\mu_1, \sigma^2\right)$ 的简单随机样本, $Y_1, Y_2, \cdots Y_n$, 为来自总体的 $N\left(\mu_2, 2\sigma^2\right)$ 的简单随机样本, 且两样本相互独立, 记

$$\bar{X}=\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y}=\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i, S_1^2=\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n\left(X_i-\bar{X}\right)^2,\ S_2^2=\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2$$

则( )

A. $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n, m)$.

B. $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1)$.

C. $\frac{2 S_1^2}{S_2^2} \sim F(n, m)$.

D. $\frac{2 S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1)$.

10. 设 X_1, X_2 为来自总体 $\left(\mu, \sigma^2\right)$ 的简单随机样本, 其中 $\sigma(\sigma>0)$ 是末知参数, 若 $\hat{\sigma}=a\left|X_1-X_2\right|$ 为 σ 的无偏估计, 则 $a=($ $)$

A. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2 \pi}}{2}$ C. $\sqrt{\pi}$ D. $\sqrt{2 \pi}$

二、填空题：11-16 题.(每题 5 分，共 30 分)

11. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x)=a x+b x^2+\ln (1+x)$ 与 $g(x)=\mathrm{e}^{x^2}-\cos x$ 是等价无穷小, 则 $ab=$______

12. 曲面 $z=x+2y+\ln\left(1+x^2+y^2\right)$ 在点 $(0,0,0)$ 处的切平面方程为______.

13. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 且 $f(x)=1-x, x \in[0,1]$. 若 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \pi x$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}=$______.

14. 设连续函数 $f(x)$ 满足: $f(x+2)-f(x)=x, \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=$_____

15. 已知向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$. 若 $\gamma^{\top}\alpha_1=\beta^{\top}\alpha_i(i=1,2,3)$, 则 $k_1^2+k_2^2+k_3^2=$_____.

16. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X\sim B\left(1,\frac{1}{3}\right), Y\sim B\left(2,\frac{1}{2}\right)$, 则 $P\{X=Y\}$. _____

三、解答题：17-22 小题，共 70 分.

17. (**本小题满分 10 分**) 设曲线 $y=y(x)(x>0)$ 经过点 $(1,2)$, 该曲线上任一点 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

 (1) 求 $y(x)$;

 (2) 求函数 $f(x)=\int_1^x y(t)\mathrm{d}t$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值.

18. (**本小题满分 12 分**)

 求函数 $f(x,y)=\left(y-x^2\right)\left(y-x^3\right)$ 的极值.

19. (**本小题满分 12 分**)

 设空间有界区域 Ω 由柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0$ 和 $x+z=1$ 围成. Σ 为 Ω 的边界曲面的外侧. 计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma} 2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xz\cos y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3yz\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

20. (**本小题满分 12 分**)

 设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上具有 2 阶连续导数. 证明:

 (1) 若 $f(0)=0$, 则存在 $\xi\in(-a,a)$, 使得

$$f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$$

 (2) 若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内取得极值, 则存在 $\eta\in(-a,a)$, 使得

$$|f''(\eta)|\geq\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$$

21. (**本小题满分 12 分**)

 已知二次型

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3,$$
$$g\left(y_1,y_2,y_3\right)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3.$$

 (1) 求可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 化成 $g\left(y_1,y_2,y_3\right)$;

 (2) 是否存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 化成 $g\left(y_1,y_2,y_3\right)$?

22. (**本小题满分 12 分**)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\left(x^2+y^2\right), & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$, 求

(1) 求 X 与 Y 的协方差;

(2) X 与 Y 是否相互独立?

(3) 求 $Z=X^2+Y^2$ 的概率密度.