

2011 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

- (1) 曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是()
(A) $(1,0)$. (B) $(2,0)$. (C) $(3,0)$. (D) $(4,0)$.
- (2) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n=1,2,\dots$) 无界, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为()
(A) $(-1,1]$. (B) $[-1,1)$. (C) $[0,2)$. (D) $(0,2]$.
- (3) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x) > 0$, $f'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x) \ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是()
(A) $f(0) > 1$, $f''(0) > 0$. (B) $f(0) > 1$, $f''(0) < 0$.
(C) $f(0) < 1$, $f''(0) > 0$. (D) $f(0) < 1$, $f''(0) < 0$.
- (4) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x) dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$, 则 I, J, K 的大小关系为()
(A) $I < J < K$. (B) $I < K < J$. (C) $J < I < K$. (D) $K < J < I$.
- (5) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵. 记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A =$ ()
(A) $P_1 P_2$. (B) $P_1^{-1} P_2$. (C) $P_2 P_1$. (D) $P_2 P_1^{-1}$.
- (6) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的基础解系可为()
(A) α_1, α_3 . (B) α_1, α_2 . (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.
- (7) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是()
(A) $f_1(x)f_2(x)$. (B) $2f_2(x)F_1(x)$.
(C) $f_1(x)F_2(x)$. (D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$.
- (8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 存在, 记 $U = \max\{X, Y\}$, $V = \min\{X, Y\}$, 则 $E(UV) =$ ()
(A) $E(U) \cdot E(V)$. (B) $E(X) \cdot E(Y)$.
(C) $E(U) \cdot E(Y)$. (D) $E(X) \cdot E(V)$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

- (9) 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s =$ _____.
- (10) 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y =$ _____.

(11) 设函数 $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$, 则 $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=2}} =$ _____.

(12) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz =$ _____.

(13) 若二次曲面的方程 $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$ 经正交变换化为 $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$, 则 $a =$ _____.

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $E(XY^2) =$ _____.

三、解答题 (本题共 9 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{e^x - 1}}$.

(16) (本题满分 9 分)

设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导, 且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$. 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$.

(17) (本题满分 10 分)

求方程 $k \arctan x - x = 0$ 不同实根的个数, 其中 k 为参数.

(18)(本题满分 10 分)

(I) 证明:对任意的正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 成立;

(II) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n (n = 1, 2, \cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(19)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1, y) = 0, f(x, 1) = 0, \iint_D f(x, y) dx dy = a$, 其中

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算二重积分 $I = \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy$.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值;

(II) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(21)(本题满分 11 分)

设 A 为 3 阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 且

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) 求 A 的所有特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 A .

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

,

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$.

(I) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) 求 $Z = XY$ 的概率分布;

(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

(23)(本题满分 11 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ_0 已知, $\sigma^2 > 0$ 未知, \bar{X} 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(I) 求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$;

(II) 计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$.