INSITUTO POLITECNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FISICA Y MATEMATICAS
INGENIERIA MATEMATICA

Ejercicio 5.

Rosas Hernández Ariel Jesús

Calcular $E[Z_N]$ y $V[Z_N]$

Si definimos $X_1 + X_2 + \cdots + X_N = \ numero\ de\ dardos\ que\ cayeron\ dentro$

Tomamos una variable llamada Z_N

$$Z_N = 4\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N}$$

Ahora bien, la esperanza de $Z_N\ es$

$$E[Z_N] = 4\frac{E[X_1 + X_2 + \cdots + X_N]}{N}$$

$$E[Z_N] = 4\frac{E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_N]}{N}$$

$$E[Z_N] = 4\frac{N\mathrm{p}}{N} = 4\mathrm{p} = 4{*}\frac{\pi}{4}$$

$$E[Z_N] = \pi$$

Para la varianza tenemos

$$V[Z_N] = \left(\frac{4}{N}\right)^2\ V[X_1 + X_2 + \cdots + X_N]$$

$$V[Z_N] = \left(\frac{4}{N}\right)^2\ [\,V[X_1] + \ V[X_2] + \cdots\ + V[X_N]$$

$$V[Z_N] = \frac{16}{N^2}Np(1-p) = \frac{16}{N}p(1-p)$$

$$V[Z_N] = \frac{16}{N}p(1-p)$$

¿Qué valor debe tomar N para que el error sea de 0.01? Usando la desigualdad de Tchebyshev

$$P(z_{N^-\pi}| \leq \varepsilon) < \frac{16p(1-p)}{N\varepsilon^2}$$

$$P(z_{N^-\pi}| \leq 0.01) < \frac{16p(1-p)}{N(0.01)^2}$$

$$< \frac{16p(1\ /\ 4)}{N(0.01)^2}$$

$$\frac{16p(1\ /\ 4)}{N10^{-4}} < 0.001$$

Despejamos N

$$N > \frac{16\left(\frac{1}{4}\right)}{10^{-4}(0.001)}$$

$$N > \frac{4}{10^{-4} * 10^{-3}}$$

$$N > 4 * 10^7$$

$$N > 40{,}000{,}000$$