Introducción al procesamiento de Imágenes

Ángela Mireya León Mecías

Universidad de La Habana

C4: Filtros lineales
31 marzo 2021

Filtros lineales

Filtro lineal: el valor de salida de un píxel es determinado por una suma con pesos aplicada a los valores de los píxels de entrada.

- filtrado espacial: uso de plantillas (máscaras) espaciales.
- desplazar una máscara por la imagen e ir calculando, para cada píxel, un nuevo valor que depende de la máscara y, de alguna forma, de los píxels que quedan cubiertos por ella, a estos últimos se les conoce como vecindad.

$$g(i,j) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} f(i+k, j+l)h(k,l) \tag{1}$$

$i, j \in \{1, ..., N\}$

Filtrado espacial lineal

Otra variante de escribir es

$$g(i,j) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} f(i-k, j-l)h(k,l) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} f(k,l)h(i-k, j-l)$$
$$= f(i,j) * h(i,j)$$

y se llama operador de convolución lineal en el espacio discreto $2-D$, h se llama función de respuesta al impulso[1]

- La convolución discreta se puede calcular de forma rápida usando la Transformada Discreta de Fourier (en su forma eficiente, FFT)
- si la dimensión del filtro es pequeña el cálculo directo puede ser más rápido
- La convolución lineal expresa la salida de una amplia variedad de sistemas eléctricos y mecánicos

[1] $h * \delta = h$

Convolución en sistemas continuos

Definition

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y g es una función acotada y localmente integrable, entonces el producto de convolución de f con g es una función de $\mathbb{R}^n$ definida por

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

Existen diferentes condiciones para asegurar que esta operación esté definida, p.e. si g es acotada y con soporte acotado, entonces solo se necesita que f sea localmente integrable.

Filtros de paso bajo (tienden a emborronar los bordes)

Atenuan (o eliminan) componentes de alta frecuencia (dominio de Fourier)

$$h = 1/9 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Imagen Original

Imagen Filtrada

Filtros de paso bajo. Otras máscaras

- Se aumenta la fuerza del píxel central y la de aquellos que están más cercanos
- La suma de los coeficientes debe ser la unidad
- También se les llama filtros de alisamiento

$$h = 1/10 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h = 1/16 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtro Gaussiano (filtro lineal de paso bajo)

$$h(i,j) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(i^2+j^2)/2\sigma^2} \tag{2}$$

- Produce una sucesión de imágenes que se conoce como espacio-escala Gaussiano
- Cada imagen es calculada mediante la convolución de la imagen original con el filtro Gaussiano, para σ creciente
- el espacio-escala puede ser pensado como que se desarrolla en el tiempo
- imagen espacio-escala g_t,

$$g_t = h_\sigma * f$$

- $\sigma = \sqrt{t}$ factor de escala
- para σ creciente los rasgos de la imagen menos significativos y el ruido comienzan a desaparecer, dejando solo rasgos de la imagen en grandes escalas

Filtro Gaussiano, forma continua

$$G_\sigma(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

- G_σ-función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria Gaussiana $2-D$, con varianza $2\sigma^2$
- $u_\sigma(\mathbf{x}) = G_\sigma * u_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x,y)$ convolución con una Gaussiana es equivalente a solución de la ecuación de difusión lineal (PRÓXIMAS CONFERENCIAS)

Filtros de paso alto (Destaca los bordes)

- La suma de los coeficientes es cero
- produce imagen de media cero, buscar forma de llevar al rango de la imagen original

$$h = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Imagen Original

Imagen Filtrada

Filtros de paso alto: Laplaciano

El Laplaciano de una imagen se define como

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$$

Dados $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$ se aproximan las derivadas por diferencias finitas :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}|_{i,j} \approx f_{i+1,j} - 2f_{ij} + f_{i-1,j} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}|_{i,j} \approx f_{i,j+1} - 2f_{ij} + f_{i,j-1}$$

se obtiene filtro de convolución:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio

Pruebe que efecto produce en una imagen f la siguiente operación

$$g(i,j) = f(i,j) - (f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{ij})$$

Complete con ceros de ser necesario

Filtros de paso alto: Otras máscaras

$$h=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad h_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad h_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Filtros con énfasis de las altas frecuencias

Se tiene que:

$$f_{pa}(x, y) = f_{original}(x, y) - f_{pb}(x, y)$$

- f_{pa}- imagen filtrada con filtro paso alto, f_{pb}-filtrada con filtro de paso bajo
- multiplicar imagen original por un factor de amplificación $\longrightarrow$ filtro de énfasis de las altas frecuencias

$$f_{pa}(x, y) = Af_{original}(x, y) - f_{pb}(x, y)$$

- técnica usada en la impresión y publicación de documentos

Tarea para entregar miércoles 14 de abril

Entregar resumen y experimentación sobre el efecto que causan los filtros en las imágenes

1. Equipo 1: Filtros no lineales de mediana y Bilaterales
2. Equipo 2: Filtro Gaussiano y Filtros de detección de bordes que usan la primera derivada
3. Equipo 3: Filtro Gaussiano y Filtros de detección de bordes que usan la segunda derivada
4. Equipo 4: Filtros de medias no locales y filtro bilateral
5. Equipo 5:Filtro que usa Minimización de la Variación Total
6. Equipo 6:Filtros Bilateral y Trilateral
7. Equipo 7: Filtro Bilateral y Filtro Armónico
8. Equipo 8:Filtro Bilateral y Filtro que usa Minimización de la Variación Total

Próxima Clase

Filtros Morfológicos, Profesora Marta Lourdes