数字信号处理与频谱分析初步

Ariel Xiong

浙江工商大学萨塞克斯人工智能学院

ArielHeleneto@outlook.com

2025 年 7 月 2 日

2025-07-02

数字信号处理初步

数字信号处理与频谱分析初步
Ariel Xiong
浙江工商大学萨塞克斯人工智能学院
ArielHeleneto@outlook.com
2025 年 7 月 2 日

目录 I

2025-07-02

数字信号处理初步

└─目录

目录 I
1 系统分析与控制入门
- 控制系统简介
- 拉普拉斯变换和傅里叶变换
2 数字信号处理初步
- 定义
- 采样
- 傅里叶变换
- 数字系统
- 门限法
3 滤波器设计
- Z 变换
- 传递函数和系统稳定性

目录 II

- 滤波器设计

目录 II
- 滤波器设计

控制系统

定义控制系统的一些基本术语受控变量和控制信号或操纵变量受控变量是被测量和控制的量或状态。

控制信号或操纵变量是由控制器改变的量或状态，从而影响受控变量的值。通常，受控变量是系统的输出。控制意味着测量系统的受控变量的值，并将控制信号应用于系统，以校正或限制测量值与期望值的偏差。工厂工厂可能是一件设备，也可能只是一组协同工作的机器零件，其目的是执行特定的操作。过程任何需要控制的操作都称为过程。例如化学、经济和生物过程。系统系统是协同作用并执行特定目标的组件的组合。系统不必是物理的。系统的概念可以应用于抽象的动态现象，例如经济学中遇到的现象。因此，“系统”一词应解释为物理、生物、经济等系统。

PID 系统

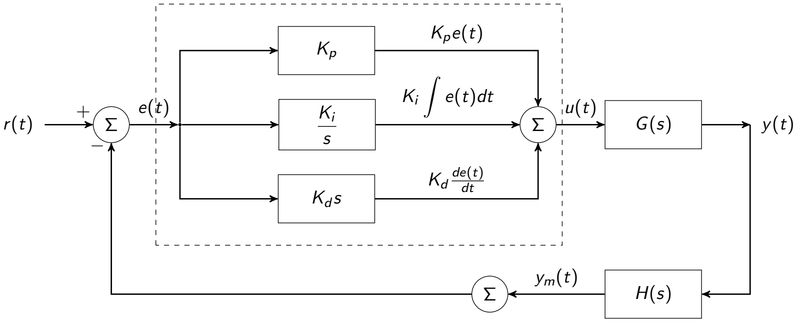
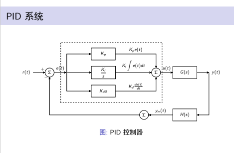


图: PID 控制器

2025-07-02

数字信号处理初步
└系统分析与控制入门
  └控制系统简介
    └PID 系统



拉普拉斯变换

定义 (拉普拉斯变换)

信号或函数 f 的拉普拉斯变换（定义于 $t \geq 0$）是函数

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

2025-07-02
数字信号处理初步
└─系统分析与控制入门
└─拉普拉斯变换和傅里叶变换
└─拉普拉斯变换

拉普拉斯变换
定义 (拉普拉斯变换)
信号或函数 f 的拉普拉斯变换（定义于 $t \geq 0$）是函数
$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

傅里叶变换

定义 (傅里叶变换)

信号或函数 f 的傅里叶变换是函数

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

傅里叶变换
定义 (傅里叶变换)
信号或函数 f 的傅里叶变换是函数
$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

信号的性质

定义 (信号)

携带信息的量。

定义 (模拟信号)

用连续变量物理量表示的信号。

定义 (数字信号)

用物理量的离散值表示的信号。

2025-07-02

数字信号处理初步
└─数字信号处理初步
　└─定义
　　└─信号的性质

信号的性质

定义 (信号)
携带信息的量。
定义 (模拟信号)
用连续变量物理量表示的信号。
定义 (数字信号)
用物理量的离散值表示的信号。

模拟信号：电压
常见的数字信号：数字式电压表量出来的值
需要注意的是，这里的数字信号不一定只能是0和1

常见的数字信号 I

定义 (冲激信号)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1(n = 0) \\ 0(n \neq 0) \end{cases} \tag{1}$$

定义 (阶跃信号)

$$u[n] = \begin{cases} 1(n \geq 0) \\ 0(n < 0) \end{cases} \tag{2}$$

2025-07-02

数字信号处理初步
└─数字信号处理初步
  └─定义
    └─常见的数字信号

常见的数字信号 I
定义 (冲激信号)
$$\delta[n] = \begin{cases} 1(n = 0) \\ 0(n \neq 0) \end{cases} \tag{1}$$
定义 (阶跃信号)
$$u[n] = \begin{cases} 1(n \geq 0) \\ 0(n < 0) \end{cases} \tag{2}$$

常见的数字信号 II

定义 (斜坡信号)

$$u[n] = \begin{cases} n(n \geq 0) \\ 0(n < 0) \end{cases} \tag{3}$$

2025-07-02
数字信号处理初步
└数字信号处理初步
└定义
└常见的数字信号

常见的数字信号 II
定义 (斜坡信号)
$$u[n] = \begin{cases} n(n \geq 0) \\ 0(n < 0) \end{cases} \tag{3}$$

冲击响应 I

定义 (冲激响应)

当系统的输入为冲击信号时，输出为该系统的冲激响应，用 $h[n]$ 表示。

2025-07-02
数字信号处理初步
└数字信号处理初步
└定义
└冲击响应

冲击响应 I
定义 (冲激响应)
当系统的输入为冲击信号时，输出为该系统的冲激响应，用 $h[n]$ 表示。

模数转换

将模拟信号转换为数字信号通常需要 ADC 组件。该组件一般公式如下。

$$\textbf{output} = \frac{\textbf{input}}{\textbf{range}} \times 2^{\textbf{bit}}$$

2025-07-02
数字信号处理初步
└─数字信号处理初步
└─采样
└─模数转换

模数转换

将模拟信号转换为数字信号通常需要 ADC 组件。该组件一般公式如下。

output = input/range × 2^bit

香农采样定理

定义 (香农采样定理)

包含最高频率 f_c 成分的模拟信号可以完全用样本表示，前提是采样率 $f_s \geq 2f_c$。

2025-07-02

数字信号处理初步
└─数字信号处理初步
└─采样
└─香农采样定理

香农采样定理

定义 (香农采样定理)
包含最高频率 f_c 成分的模拟信号可以完全用样本表示，前提是采样率 $f_s \geq 2f_c$。

混叠

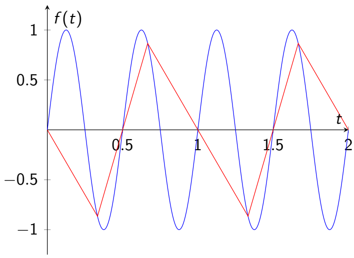
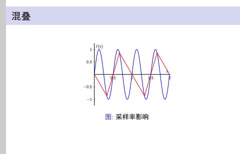


图: 采样率影响

2025-07-02

数字信号处理初步
└─数字信号处理初步
  └─采样
    └─混叠



傅里叶变换

定义 (傅里叶变换)

对于数字信号 $x[n]$，其傅里叶变换为

$$X(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

。其中，$\omega \in [0, 2\pi]$。

2025-07-02

傅里叶变换
定义 (傅里叶变换)
对于数字信号 $x[n]$，其傅里叶变换为
$$X(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$
。其中，$\omega \in [0, 2\pi]$。

傅里叶变换的性质

- 线性
- 时移：$x[n-n_0] \to X(\omega)e^{-j\omega n_0}$
- 卷积：$x_1[n] * x_2[n] \to X_1(\omega) \times X_2(\omega)$

傅里叶变换的性质
- 线性
- 时移：$x[n-n_0] \to X(\omega)e^{-j\omega n_0}$
- 卷积：$x_1[n] * x_2[n] \to X_1(\omega) \times X_2(\omega)$

离散傅里叶变换

定义 (离散傅里叶变换)

对于长度为 N 的序列，其离散傅里叶变换为

$$X[k] = \sum_{0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

2025-07-02
数字信号处理初步
└数字信号处理初步
└傅里叶变换
└离散傅里叶变换

离散傅里叶变换
定义 (离散傅里叶变换)
对于长度为 N 的序列，其离散傅里叶变换为
$X[k] = \sum_{0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$

线性时不变系统

定义 (线性系统)

如果一个系统满足线性性质，那么对于任意输入信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，以及任意常数 a 和 b，如果输入为 $ax_1(t)+bx_2(t)$，则输出为 $ay_1(t)+by_2(t)$，其中 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 分别是输入 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的响应。

定义 (时不变系统)

如果一个系统满足时不变性质，那么对于任意输入信号 $x(t)$ 和任意时间延迟 τ，如果输入为 $x(t-\tau)$，则输出为 $y(t-\tau)$，其中 $y(t)$ 是输入 $x(t)$ 的响应。

2025-07-02

数字信号处理初步
└数字信号处理初步
　└数字系统
　　└线性时不变系统

线性时不变系统

定义 (线性系统)

如果一个系统满足线性性质，那么对于任意输入信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，以及任意常数 a 和 b，如果输入为 $ax_1(t)+bx_2(t)$，则输出为 $ay_1(t)+by_2(t)$，其中 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 分别是输入 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的响应。

定义 (时不变系统)

如果一个系统满足时不变性质，那么对于任意输入信号 $x(t)$ 和任意时间延迟 τ，如果输入为 $x(t-\tau)$，则输出为 $y(t-\tau)$，其中 $y(t)$ 是输入 $x(t)$ 的响应。

线性时不变系统的描述

定义 (线性时不变系统)

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=1}^{N} b_k x[n-k]$$

2025-07-02

线性时不变系统的描述
定义 (线性时不变系统)
$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=1}^{N} b_k x[n-k]$$

因果系统

定义 (因果)

因果系统，称一个系统是“因果”的，是指此系统满足因果性。即对输入的响应不可能在此输入到达的时刻之前出现；也就是说系统的输出仅与当前与过去的输入有关，而与将来的输入无关。

因果系统

定义 (因果)

因果系统，称一个系统是“因果”的，是指此系统满足因果性。即对输入的响应不可能在此输入到达的时刻之前出现；也就是说系统的输出仅与当前与过去的输入有关，而与将来的输入无关。

转换模拟信号到数字信号

- $y(t)$ 转换为 $y[n]$。
- $x(t)$ 转换为 $x[n]$。
- $\frac{dy(t)}{dt}$ 转换为 $\frac{y[n]-y[n-1]}{T}$。
- $\frac{dy^2(t)}{dt^2}$ 转换为 $\frac{\frac{y[n]-y[n-1]}{T}-\frac{y[n-1]-y[n-2]}{T}}{T}$。

转换模拟信号到数字信号

- $y(t)$ 转换为 $y[n]$。
- $x(t)$ 转换为 $x[n]$。
- $\frac{dy(t)}{dt}$ 转换为 $\frac{y[n]-y[n-1]}{T}$。
- $\frac{dy^2(t)}{dt^2}$ 转换为 $\frac{\frac{y[n]-y[n-1]}{T}-\frac{y[n-1]-y[n-2]}{T}}{T}$。

门限法滤噪音

将傅里叶变换后幅度低于一定值的噪声幅度调整为0，然后还原原始信号。

2025-07-02
数字信号处理初步
└─数字信号处理初步
　└─门限法
　　└─门限法滤噪音

门限法滤噪音

将傅里叶变换后幅度低于一定值的噪声幅度调整为0，然后还原原始信号。

短时距傅里叶变换

计算短时距傅里叶变换的过程是将长时间信号分成数个较短的等长信号，然后再分别计算每个较短段的傅里叶变换。通常拿来描绘频域与时域上的变化，为时频分析中其中一个重要的工具。

定义 (短时距傅里叶变换)

对于数字信号 $x[n]$，其短时距傅里叶变换为

$$\mathbf{STFT}\{x[n]\}(m,\omega) \equiv X(m,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]w[n-m]e^{-j\omega n}$$

。其中，$\omega \in [0, 2\pi]$。

2025-07-02

数字信号处理初步
└数字信号处理初步
　└门限法
　　└短时距傅里叶变换

短时距傅里叶变换
计算短时距傅里叶变换的过程是将长时间信号分成数个较短的等长信号，然后再分别计算每个较短段的傅里叶变换。通常拿来描绘频域与时域上的变化，为时频分析中其中一个重要的工具。
定义 (短时距傅里叶变换)
对于数字信号 $x[n]$，其短时距傅里叶变换为
$$\mathbf{STFT}\{x[n]\}(m,\omega) \equiv X(m,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]w[n-m]e^{-j\omega n}$$
。其中，$\omega \in [0, 2\pi]$。

Z 变换

定义 (Z 变换)

对于数字信号 $x[n]$，其 Z 变换为

$$X(\mathcal{Z}) = \sum_{0}^{\infty} x[n]\mathcal{Z}^{-n}$$

。其中，$\mathcal{Z}$ 为一复数。

注意到，当 $\mathcal{Z} = e^{j\omega}$ 时，该变换退化为傅里叶变换。

2025-07-02

数字信号处理初步
└滤波器设计
  └Z 变换
    └Z 变换

Z 变换
定义 (Z 变换)
对于数字信号 $x[n]$，其 Z 变换为
$$X(\mathcal{Z}) = \sum_{0}^{\infty} x[n]\mathcal{Z}^{-n}$$
。其中，$\mathcal{Z}$ 为一复数。
注意到，当 $\mathcal{Z} = e^{j\omega}$ 时，该变换退化为傅里叶变换。

Z 变换练习 I

问题

求数字信号 $x[n] = \left\{1, 0.8, 0.8^2, \cdots, 0.8^n\right\}$ 的 Z 变换。

2025-07-02

Z 变换练习 I
问题
求数字信号 $x[n] = \left\{1, 0.8, 0.8^2, \cdots, 0.8^n\right\}$ 的 Z 变换。

Z 变换练习 II

解

$$
\begin{aligned}
X(\mathcal{Z}) = & \sum_{0}^{\infty} x[n]\mathcal{Z}^{-n} \\
= & (0.8\mathcal{Z}^{-}1)^{0} + (0.8\mathcal{Z}^{-}1)^{1} + (0.8\mathcal{Z}^{-}1)^{2} + \cdots (0.8\mathcal{Z}^{-}1)^{n} \\
= & \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \cdots (0.8\mathcal{Z}^{-}1)^{n}}{1 - 0.8\mathcal{Z}^{-}1} \\
= & \frac{z}{z - 0.8}
\end{aligned}
$$

2025-07-02

数字信号处理初步
└滤波器设计
　└Z 变换
　　└Z 变换练习

Z 变换练习 II
解
$$
\begin{aligned}
X(\mathcal{Z}) = & \sum_{0}^{\infty} x[n]\mathcal{Z}^{-n} \\
= & (0.8\mathcal{Z}^{-}1)^{0} + (0.8\mathcal{Z}^{-}1)^{1} + (0.8\mathcal{Z}^{-}1)^{2} + \cdots (0.8\mathcal{Z}^{-}1)^{n} \\
= & \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \cdots (0.8\mathcal{Z}^{-}1)^{n}}{1 - 0.8\mathcal{Z}^{-}1} \\
= & \frac{z}{z - 0.8}
\end{aligned}
$$

时移信号的 Z 变换

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]u[n-1]\mathcal{Z}^{-n} \\
=&x[-1]u[-1]\mathcal{Z}^{0} + x[0]\mathcal{Z}^{-1} + x[1]\mathcal{Z}^{-2} + x[2]\mathcal{Z}^{-3} + \cdots \\
=&\mathcal{Z}^{-1}(x[0]\mathcal{Z}^{0} + x[1]\mathcal{Z}^{-1} + x[2]\mathcal{Z}^{-2} + \cdots) \\
=&\mathcal{Z}^{-1}X(\mathcal{Z})
\end{aligned}
$$

时移信号的 Z 变换

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]u[n-1]\mathcal{Z}^{-n} \\
=&x[-1]u[-1]\mathcal{Z}^{0} + x[0]\mathcal{Z}^{-1} + x[1]\mathcal{Z}^{-2} + x[2]\mathcal{Z}^{-3} + \cdots \\
=&\mathcal{Z}^{-1}(x[0]\mathcal{Z}^{0} + x[1]\mathcal{Z}^{-1} + x[2]\mathcal{Z}^{-2} + \cdots) \\
=&\mathcal{Z}^{-1}X(\mathcal{Z})
\end{aligned}
$$

传递函数

定义 (传递函数)

对于一个输出为$y[n]$，输入为$x[n]$的系统，其传递函数为$H(\mathcal{Z}) = \frac{Y(\mathcal{Z})}{X(\mathcal{Z})}$。

2025-07-02

数字信号处理初步
└滤波器设计
　└传递函数和系统稳定性
　　└传递函数

传递函数

定义 (传递函数)

对于一个输出为$y[n]$，输入为$x[n]$的系统，其传递函数为$H(\mathcal{Z}) = \frac{Y(\mathcal{Z})}{X(\mathcal{Z})}$。

系统稳定性

定义 (系统稳定性)

$\lim_{n\to\infty} h[n] = 0$ 的系统为稳定系统。$\lim_{n\to\infty} h[n] = a \neq 0$ 的系统为临界稳定系统。

2025-07-02

数字信号处理初步
└滤波器设计
  └传递函数和系统稳定性
    └系统稳定性

系统稳定性

定义 (系统稳定性)
$\lim_{n\to\infty} h[n] = 0$ 的系统为稳定系统。$\lim_{n\to\infty} h[n] = a \neq 0$ 的系统为临界稳定系统。

零点和极点

定义 (零点)

使传递函数分子取得 0 的 z 的取值称为零点。

定义 (极点)

使传递函数分母取得 0 的 z 的取值称为零点。

2025-07-02

数字信号处理初步
└滤波器设计
　└传递函数和系统稳定性
　　└零点和极点

零点和极点
定义 (零点)
使传递函数分子取得 0 的 z 的取值称为零点。
定义 (极点)
使传递函数分母取得 0 的 z 的取值称为零点。

零点和极点的性质

在零点上增益总是 0，在极点上增益取得最大值。

零点和极点的性质
在零点上增益总是 0，在极点上增益取得最大值。

判断系统稳定性

极点的模小于 1。

2025-07-02

数字信号处理初步
└─滤波器设计
　└─传递函数和系统稳定性
　　└─判断系统稳定性

判断系统稳定性

极点的模小于 1。

练习设计一个滤波器 I

问题

一个电子设备需要配备一个数字滤波器，用于阻止 250 Hz 的频率并允许 500 Hz 的频率通过。采样率为 2000 Hz。在 $\mathcal{Z}$ 平面中，选择并显示一对零点和一对极点的位置，增益为 25，位于通过频率处。绘制从 *0* 到采样频率一半范围内的频率响应图，并标记任何具有特殊意义的值。

2025-07-02

数字信号处理初步
└─滤波器设计
  └─滤波器设计
    └─练习设计一个滤波器

练习设计一个滤波器 I

问题

一个电子设备需要配备一个数字滤波器，用于阻止 250 Hz 的频率并允许 500 Hz 的频率通过。采样率为 2000 Hz。在 $\mathcal{Z}$ 平面中，选择并显示一对零点和一对极点的位置，增益为 25，位于通过频率处。绘制从 *0* 到采样频率一半范围内的频率响应图，并标记任何具有特殊意义的值。

练习设计一个滤波器 II

解

- 确定传递函数：$H(\mathcal{Z}) = \frac{\left(\mathcal{Z}-1\angle\frac{\pi}{4}\right)\left(\mathcal{Z}+1\angle\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\mathcal{Z}-r\angle\frac{\pi}{2}\right)\left(\mathcal{Z}+r\angle\frac{\pi}{2}\right)}$
- 确定增益：$\left|H\left((\omega=\frac{\pi}{2}\right)\right| = 25$ 可以得到 $r = 0.971$
- 作图。
- 确定时域。

2025-07-02

数字信号处理初步
└─滤波器设计
  └─滤波器设计
    └─练习设计一个滤波器

练习设计一个滤波器 II
解
确定传递函数：$H(\mathcal{Z}) = \frac{\left(\mathcal{Z}-1\angle\frac{\pi}{4}\right)\left(\mathcal{Z}+1\angle\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\mathcal{Z}-r\angle\frac{\pi}{2}\right)\left(\mathcal{Z}+r\angle\frac{\pi}{2}\right)}$
确定增益：$\left|H\left((\omega=\frac{\pi}{2}\right)\right| = 25$ 可以得到 $r = 0.971$
作图。
确定时域。