Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica – A.A. 2009/10

CAPITOLO 6 – Leggi congiunte di variabili aleatorie

6.1 Funzioni di distribuzione congiunte

6.2 Variabili aleatorie indipendenti

6.3 Somme di variabili aleatorie indipendenti

6.4 Distribuzioni condizionate: il caso discreto

6.1 Funzioni di distribuzione congiunte

Definizione. Date due variabili aleatorie X e Y, la funzione di distribuzione congiunta di (X, Y) è

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

dove si intende $P(X \leq x, Y \leq y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})$. La funzione di distribuzione di X può essere ottenuta da quella congiunta di (X, Y) come segue:

$$\begin{aligned}\lim_{y\to+\infty} F(x, y) = \lim_{y\to+\infty} P(X \leq x, Y \leq y) &= P\left(\lim_{y\to+\infty}\{X \leq x, Y \leq y\}\right) \\ &= P(X \leq x, Y < +\infty) = P(X \leq x) = F_X(x).\end{aligned}$$

In maniera analoga la funzione di distribuzione di Y è data da

$$\lim_{x\to+\infty} F(x, y) = F_Y(y).$$

Le funzioni $F_X(x)$ e $F_Y(y)$ sono dette funzioni di distribuzione *marginali* di X e di Y.

Notiamo che sussistono i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to+\infty} F(x,y) = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} F(x,y) = 0, \qquad \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0.$$

Probabilità riferite a (X, Y) si possono esprimere in termini di $F(x, y)$.
Ad esempio, la probabilità che X sia maggiore di a e Y sia maggiore di b è data da

$$\begin{aligned}
P(X > a, Y > b) &= 1 - P(\{X \le a\} \cup \{Y \le b\}) \\
&= 1 - [P(X \le a) + P(Y \le b) - P(X \le a, Y \le b)] \\
&= 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F(a,b).
\end{aligned}$$

Inoltre, per $a_1 < a_2$ e $b_1 < b_2$ risulta

$$\begin{aligned}
&P(a_1 < X \le a_2, b_1 < Y \le b_2) \\
&\quad = P(X \le a_2, b_1 < Y \le b_2) - P(X \le a_1, b_1 < Y \le b_2) \\
&\quad = F(a_2, b_2) - F(a_2, b_1) - F(a_1, b_2) + F(a_1, b_1).
\end{aligned}$$

Procedendo al limite per $a_2 \to \infty$ e $b_2 \to \infty$ si ottiene la relazione precedente.

Se X e Y sono variabili aleatorie discrete, la densità discreta congiunta di (X,Y) è

$$p(x,y) = P\left(X = x, Y = y\right).$$

Notiamo che

$$p(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y, \qquad \sum_x \sum_y p(x,y) = 1.$$

Per ogni sottoinsieme $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}^2$ si ha

$$P\{(X,Y) \in \mathcal{D}\} = \sum_{(x,y)\in\mathcal{D}} p(x,y).$$

Quindi la funzione di distribuzione congiunta di (X,Y) è così esprimibile:

$$F(x,y) = P\left(X \leq x, Y \leq y\right) = \sum_{u\,:\,u\leq x} \sum_{v\,:\,v\leq y} p(u,v).$$

Le densità discrete di X e di Y si ottengono da $p(x,y)$ al seguente modo:

$$p_X(x) = P\left(X = x\right) = \sum_{y\,:\,p(x,y)>0} p(x,y);$$

$$p_Y(y) = P\left(Y = y\right) = \sum_{x\,:\,p(x,y)>0} p(x,y).$$

Esempio. Un esperimento consiste nello scegliere a caso una sequenza booleana di lunghezza 5, avente 2 bit pari a **1**. Sia X la posizione in cui si trova il secondo bit pari a **1** e sia Y la lunghezza della più lunga sottosequenza composta da bit pari a **0**. Ricavare la densità congiunta di (X, Y) e le densità discrete di X e Y.

Soluzione. Lo spazio campionario è costituito da $|S| = \binom{5}{2} = 10$ sequenze equiprobabili. Quindi si ha:

	X	Y		X	Y
0 0 0 1 1	5	3	**0 1 1 0 0**	3	2
0 0 1 0 1	5	2	**1 0 0 0 1**	5	3
0 0 1 1 0	4	2	**1 0 0 1 0**	4	2
0 1 0 0 1	5	2	**1 0 1 0 0**	3	2
0 1 0 1 0	4	1	**1 1 0 0 0**	2	3

$x \setminus y$	1	2	3	$P(X = x)$
2	0	0	$1/10$	$1/10$
3	0	$2/10$	0	$2/10$
4	$1/10$	$2/10$	0	$3/10$
5	0	$2/10$	$2/10$	$4/10$
$P(Y = y)$	$1/10$	$6/10$	$3/10$	1

Le densità discrete di X e Y, dette *densità marginali*, si ottengono calcolando le somme sulle righe e sulle colonne, rispettivamente, e appaiono ai margini della tabella.

Esempio. Ricavare la densità discrete delle variabili aleatorie di Bernoulli X e Y, aventi densità congiunta

$$p(x,y) = p^{x+1-y}(1-p)^{1-x+y}, \quad x,y = 0,1 \quad (0<p<1).$$

Soluzione. Le densità discrete di X e di Y si ottengono da $p(x,y)$ al seguente modo:

$$p_X(x) = \sum_{y=0}^{1} p(x,y) = \sum_{y=0}^{1} p^{x+1-y}(1-p)^{1-x+y} = p^x(1-p)^{1-x}, \qquad x=0,1;$$

$$p_Y(y) = \sum_{x=0}^{1} p(x,y) = \sum_{x=0}^{1} p^{x+1-y}(1-p)^{1-x+y} = (1-p)^y p^{1-y}, \qquad y=0,1.$$

Pertanto X è di Bernoulli di parametro p, e Y è di Bernoulli di parametro $1-p$. Notiamo inoltre che per ogni $x,y=0,1$ risulta

$$p_X(x)\,p_Y(y) = p^x(1-p)^{1-x}\,(1-p)^y p^{1-y} = p^{x+1-y}(1-p)^{1-x+y} = p(x,y).$$

Esempio. Vengono scelte a caso 3 biglie da un'urna contenente 3 biglie rosse, 4 bianche e 5 blu. Se denotiamo con X e Y, rispettivamente, il numero di biglie rosse e bianche scelte, la densità congiunta di X e Y, $p(x,y) = P(X = x, Y = y)$, è data da

$$p(0,0) = \binom{5}{3} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{10}{220}, \qquad p(0,1) = \binom{4}{1}\binom{5}{2} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{40}{220},$$

$$p(0,2) = \binom{4}{2}\binom{5}{1} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{30}{220}, \qquad p(0,3) = \binom{4}{3} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{4}{220},$$

$$p(1,0) = \binom{3}{1}\binom{5}{2} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{30}{220}, \qquad p(1,1) = \binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{60}{220},$$

$$p(1,2) = \binom{3}{1}\binom{4}{2} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{18}{220}, \qquad p(2,0) = \binom{3}{2}\binom{5}{1} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{15}{220},$$

$$p(2,1) = \binom{3}{2}\binom{4}{1} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{12}{220}, \qquad p(3,0) = \binom{3}{3} \Big/ \binom{12}{3} = \frac{1}{220},$$

Le probabilità $p(x,y)$ possono essere facilmente tabulate, come di seguito mostrato.

$$p(x,y) = P(X=x, Y=y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{4}{y}\binom{5}{3-x-y}}{\binom{12}{3}} \qquad (x,y=0,1,2,3;\ x+y\leq 3)$$

$x \setminus y$	0	1	2	3	$P(X=x)$
0	$10/220$	$40/220$	$30/220$	$4/220$	$84/220$
1	$30/220$	$60/220$	$18/220$	0	$108/220$
2	$15/220$	$12/220$	0	0	$27/220$
3	$1/220$	0	0	0	$1/220$
$P(Y=y)$	$56/220$	$112/220$	$48/220$	$4/220$	1

Si ha:

$$P(X\geq 2) = \frac{28}{220} \approx 0{,}1273 \qquad P(Y\leq 1) = \frac{168}{220} \approx 0{,}7636$$

$$P(X\geq 2, Y\leq 1) = \frac{28}{220} \approx 0{,}1273 \qquad P(X=Y) = \frac{70}{220} \approx 0{,}3182.$$

La probabilità di estrarre z biglie blu è

$$P(3-X-Y=z) = \frac{\binom{5}{z}\binom{7}{3-z}}{\binom{12}{3}} \qquad (z=0,1,2,3).$$

Esempio. Supponiamo che il 15% delle famiglie in una certa comunità non abbia figli, che il 20% ne abbia 1, il 35% ne abbia 2 ed il 30% ne abbia 3. Supponiamo inoltre che in ogni famiglia ogni figlio sia con uguale probabilità maschio o femmina in maniera indipendente. Se si sceglie a caso una famiglia di questa comunità, allora il numero di maschi X e il numero di femmine Y hanno la seguente densità discreta congiunta

$x \setminus y$	0	1	2	3	$p_X(x)$
0	0,15	0,10	0,0875	0,0375	0,3750
1	0,10	0,175	0,1125	0	0,3875
2	0,0875	0,1125	0	0	0,2000
3	0,0375	0	0	0	0,0375
$p_Y(y)$	0,3750	0,3875	0,2000	0,0375	1

Ad esempio si ha:

$$\begin{aligned} p(0,0) &= P(\text{senza figli}) = 0{,}15 \\ p(0,1) &= P(\text{1 figlio femmina}) = P(\text{1 figlio})\, P(\text{1 femmina} \,|\, \text{1 figlio}) = 0{,}2\,\frac{1}{2} = 0{,}1 \\ p(0,2) &= P(\text{2 figli femmina}) = P(\text{2 figli})\, P(\text{2 femmine} \,|\, \text{2 figli}) = 0{,}35\,\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}0875. \end{aligned}$$

Diciamo che due variabili aleatorie X e Y sono *congiuntamente (assolutamente) continue* se esiste una funzione $f(x, y)$ integrabile, tale che per ogni sottoinsieme $\mathcal{C}$ dello spazio delle coppie di numeri reali risulti

$$P\{(X, Y) \in \mathcal{C}\} = \iint_{(x,y)\in\mathcal{C}} f(x, y)\, dx\, dy.$$

La funzione $f(x, y)$ è chiamata densità congiunta di X e Y. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una qualsiasi coppia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, allora definendo $\mathcal{C} = \{(x, y) : x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{B}\}$ otteniamo che

$$P\{X \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{B}\} = \int_{\mathcal{B}} \int_{\mathcal{A}} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Poiché

$$F(a, b) = P\{X \in (-\infty, a], Y \in (-\infty, b]\,\} = \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{a} f(x, y)\, dx\, dy,$$

differenziando segue che

$$f(a, b) = \frac{\partial^2}{\partial a\, \partial b} F(a, b).$$

Esempio. La distribuzione multinomiale. La distribuzione multinomiale si ottiene quando si ripete n volte un esperimento in condizioni di indipendenza, quando ogni esperimento può avere come risultato uno qualsiasi tra r possibili esiti, con probabilità $p_1, \ldots, p_r$, rispettivamente, tali che $p_1 + \ldots + p_r = 1$. Se denotiamo con X_i il numero degli n esperimenti che hanno dato come risultato l'esito i, allora si ha

$$P\left(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_r = n_r\right) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}\, p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}, \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{r} n_i = n.$$

Tale formula è verificata notando che ogni successione degli esiti degli n esperimenti che portano al fatto che l'esito i si verifichi esattamente n_i volte, per $i = 1, 2, \ldots, r$, avrà probabilità pari a $p_1^{n_1}\, p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}$, grazie all'ipotesi di indipendenza. La formula finale segue ricordando che $n!/(n_1! n_2! \ldots n_r!)$ è il numero di permutazioni di n oggetti di cui n_1 sono uguali tra loro, n_2 sono uguali tra loro, ... , n_r sono uguali tra loro.

Osserviamo che per $r = 2$ la distribuzione multinomiale si riduce a quella binomiale.

Esempio. Nel lanciare 9 volte un dado equilibrato, indicando con X_k, $1 \leq k \leq 6$, il numero di volte che il risultato è k, si ha

$$
\begin{aligned}
&P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 2, X_4 = 1, X_5 = 1, X_6 = 0) \\
&= \frac{9!}{3!2!2!1!1!0!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^0 = \frac{9!}{3!2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^9 \approx 0{,}0015
\end{aligned}
$$

e inoltre

$$
P(X_1+X_2+X_3 = 7, X_4 = 1, X_5+X_6 = 1) = \frac{9!}{7!1!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{2^5} = 0{,}3125.
$$

Esempio. Siano p, q, $1-p-q$ le probabilità che una squadra di calcio vinca, perda, pareggi una partita. Supponendo di giocare n partite indipendenti, con probabilità costanti, posto $X =$“numero di vincite” e $Y =$“numero di sconfitte”, risulta

$$
P(X = x, Y = y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}\, p^x q^y (1-p-q)^{n-x-y}.
$$

6.2 Variabili aleatorie indipendenti

Le variabili aleatorie X ed Y si dicono *indipendenti* se, per ogni coppia $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, si ha

$$P\left(X \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{B}\right) = P\left(X \in \mathcal{A}\right) P\left(Y \in \mathcal{B}\right).$$

In altre parole, X e Y sono indipendenti se gli eventi $\{X \in \mathcal{A}\}$ e $\{Y \in \mathcal{B}\}$ sono indipendenti per ogni $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

La condizione di indipendenza si può equivalentemente esprimere richiedendo che per ogni coppia di numeri reali x, y risulti

$$P\left(X \leq a, Y \leq b\right) = P\left(X \leq a\right)\; P\left(Y \leq b\right),$$

In termini della distribuzione congiunta $F(x,y)$ di (X,Y), si ha che X e Y sono indipendenti se e solo se

$$F(x,y) = F_X(x)\, F_Y(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Proposizione. Le variabili aleatorie discrete X ed Y sono indipendenti se e solo se la loro densità discreta congiunta può essere espressa come

$$p(x,y) = p_X(x)\, p_Y(y), \qquad \text{per ogni}\, x, y.$$

Dimostrazione. Se vale $P(X \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{B}) = P(X \in \mathcal{A})\, P(Y \in \mathcal{B})$, allora la tesi segue ponendo $\mathcal{A} = \{x\}$ e $\mathcal{B} = \{y\}$. Viceversa, se vale $p(x,y) = p_X(x)\, p_Y(y)$ per ogni x, y, allora per ogni coppia di sottoinsiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}$ risulta

$$\begin{aligned} P(X \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{B}) &= \sum_{x \in \mathcal{A}} \sum_{y \in \mathcal{B}} p(x,y) = \sum_{x \in \mathcal{A}} \sum_{y \in \mathcal{B}} p_X(x)\, p_Y(y) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{A}} p_X(x) \sum_{y \in \mathcal{B}} p_Y(y) = P(X \in \mathcal{A})\; P(Y \in \mathcal{B}). \end{aligned}$$

Nel caso di variabili congiuntamente continue la condizione d'indipendenza è equivalente a richiedere che la densità congiunta possa essere fattorizzata come

$$f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y), \qquad \text{per ogni}\, x, y.$$

Esempio. Nell'esperimento che consiste nel lancio di una moneta ripetuto 3 volte, sia X il numero di volte che esce testa e sia Y il numero di variazioni, ossia quanti lanci danno risultati diversi dal lancio precedente. Stabilire se X e Y sono indipendenti.

Soluzione. È evidente che X e Y hanno distribuzione binomiale con parametri $(n, p) = (3, \frac{1}{2})$ e $(2, \frac{1}{2})$, rispettivamente. Ricaviamo ora la densità congiunta di (X, Y):

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
ccc	0	0
cct	1	1
ctc	1	2
ctt	2	1
tcc	1	1
tct	2	2
ttc	2	1
ttt	3	0

$x \backslash y$	0	1	2	$p_X(x)$
0	1/8	0	0	1/8
1	0	1/4	1/8	3/8
2	0	1/4	1/8	3/8
3	1/8	0	0	1/8
$p_Y(y)$	1/4	1/2	1/4	1

Risulta ad esempio $p(0, 0) = \frac{1}{8} \neq p_X(0)\, p_Y(0) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$; ne segue che X e Y non sono indipendenti.

Esempio. Supponiamo che vengano eseguite $n + m$ prove indipendenti, ognuna delle quali abbia probabilità pari a p di risultare in un successo. Se X è il numero di successi nelle prime n prove e Y il numero di successi nelle m prove successive, allora X e Y sono indipendenti, in quanto conoscere il numero dei successi nelle prime n prove non modifica la distribuzione del numero di successi nelle ulteriori m prove, in virtù dell'ipotesi di indipendenza delle prove.

Infatti, per $x = 0, 1, \ldots, n$ e $y = 0, 1, \ldots, m$ si ha

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \binom{m}{y} p^y (1-p)^{m-y}.$$

Osserviamo che se $Z = X + Y$ è il numero totale di successi nelle $n + m$ prove, allora X e Z sono dipendenti, ossia non indipendenti.

Esempio. Supponiamo che il numero di richieste che un centro di servizio informatici riceve in un dato giorno sia una variabile di Poisson di parametro λ. Se ogni richiesta è ad alta priorità con probabilità p e a bassa priorità con probabilità $1-p$, si provi che il numero di richieste di servizi ad alta e a bassa priorità sono variabili aleatorie di Poisson indipendenti di parametri λp e $\lambda(1-p)$, rispettivamente.

Soluzione. Denotiamo con X ed Y il numero di richieste di servizi ad alta e a bassa priorità. Condizionando rispetto a $X+Y$ si ottiene

$$\begin{aligned} P(X=i, Y=j) &= P(X=i, Y=j \,|\, X+Y=i+j)\, P(X+Y=i+j) \\ &\quad + P(X=i, Y=j \,|\, X+Y \neq i+j)\, P(X+Y \neq i+j). \end{aligned}$$

Ovviamente si ha $P(X=i, Y=j \,|\, X+Y \neq i+j)=0$, e quindi

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i, Y=j \,|\, X+Y=i+j)\, P(X+Y=i+j).$$

Essendo $X+Y$ il numero totale di richieste di servizi, risulta

$$P(X+Y=i+j) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}.$$

Essendo giunte in totale $i+j$ richieste, di cui ognuna è ad alta priorità con probabilità p, la probabilità che i di esse siano ad alta priorità (e quindi j siano a bassa priorità) è la densità discreta di una variabile binomiale di parametri $i+j$ e p valutata in i, ossia

$$P(X=i, Y=j \mid X+Y=i+j) = \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j.$$

In conclusione si perviene all'indipendenza di X e Y notando che risulta

$$\begin{aligned} P(X=i, Y=j) &= \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j \, \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i \, [\lambda(1-p)]^j}{i! \, j!} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda p} (\lambda p)^i}{i!} \, \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)} [\lambda(1-p)]^j}{j!} \qquad (i=0,1,\ldots;\ j=0,1,\ldots) \end{aligned}$$

e

$$P(X=i) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}[\lambda(1-p)]^j}{j!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!} \quad (i=0,1,\ldots)$$

$$P(Y=j) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}[\lambda(1-p)]^j}{j!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}[\lambda(1-p)]^j}{j!} \quad (j=0,1,\ldots).$$

6.3 Somme di variabili aleatorie indipendenti

Molto spesso si è interessati a calcolare la distribuzione di $X + Y$ a partire dalle distribuzioni delle due variabili aleatorie X e Y, sotto l'ipotesi aggiuntiva che le due variabili siano indipendenti. Nel caso in cui le variabili X e Y siano assolutamente continue la variabile aleatoria $X + Y$ è a sua volta continua con densità

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(a-y) f_Y(y)\, dy.$$

In particolare si ha il seguente risultato.

Proposizione. Se X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sono variabili aleatorie indipendenti con distribuzione normale di parametri, rispettivamente, μ_i e σ_i^2, allora $\sum_{i=1}^{n} X_i$ è una variabile aleatoria normale di parametri $\sum_{i=1}^{n} \mu_i$ e $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$.

Esempio. Somme di variabili aleatorie indipendenti di Poisson. Se X e Y sono due variabili aleatorie di Poisson indipendenti di parametri λ_1 e λ_2, rispettivamente, si calcoli la densità discreta di $X+Y$.

Soluzione. Dalle ipotesi fatte segue che per $n = 0, 1, \ldots$

$$\begin{aligned}
P(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{n} P\left(X=k, Y=n-k\right) = \sum_{k=0}^{n} P\left(X=k\right)\, P\left(Y=n-k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!}\, \mathrm{e}^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k\, \lambda_2^{n-k}}{k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \lambda_1^k\, \lambda_2^{n-k} = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} (\lambda_1+\lambda_2)^n,
\end{aligned}$$

avendo fatto uso della formula del binomio.

Si ricava che $X+Y$ ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda_1+\lambda_2$.

Esempio. Somme di variabili aleatorie binomiali indipendenti. Se X e Y sono due variabili aleatorie binomiali indipendenti di parametri, rispettivamente, (n,p) e (m,p), mostrare che $X+Y$ è binomiale di parametri $(n+m,p)$.

Soluzione. Dalle ipotesi fatte, per $k=0,1,\ldots,n+m$ segue

$$\begin{aligned}
P(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} P\left(X=i, Y=k-i\right) = \sum_{i=0}^{k} P\left(X=i\right) P\left(Y=k-i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-k+i} \\
&= p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k},
\end{aligned}$$

avendo utilizzato l'identità combinatoria (formula di Vandermonde)

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}.$$

6.4 Distribuzioni condizionate: il caso discreto

Date due variabili aleatorie discrete X e Y, si definisce la densità discreta condizionata di X dato $Y = y$, come

$$p_{X|Y}(x|y) = P\,(X = x \,|\, Y = y) = \frac{P\,(X = x\,, Y = y)}{P\,(Y = y)} = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)},$$

per tutti i valori di y per i quali $p_Y(y) > 0$. In maniera analoga, per tutti gli y tali che $p_Y(y) > 0$, si definisce la funzione di distribuzione condizionata di X dato $Y = y$:

$$F_{X|Y}(x|y) = P\,(X \le x \,|\, Y = y) = \sum_{a \le x} p_{X|Y}(a|y).$$

Se X è indipendente da Y, le funzioni condizionate $p_{X|Y}(x|y)$ e $F_{X|Y}(x|y)$ coincidono con le versioni non condizionate. Infatti se X e Y sono indipendenti, si ha

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(x|y) &= P\,(X = x \,|\, Y = y) = \frac{P\,(X = x, Y = y)}{P\,(Y = y)} \\ &= \frac{P\,(X = x)\; P\,(Y = y)}{P\,(Y = y)} = P\,(X = x)\,. \end{aligned}$$

Esempio. Nell'esperimento che consiste nell'effettuare 5 estrazioni a caso da un'urna contenente 2 biglie nere e 3 biglie bianche, denotiamo con X l'estrazione in cui fuoriesce la prima biglia nera, e con Y il numero di biglie nere fuoriuscite nelle prime 3 estrazioni. Calcolare le densità discrete condizionate di X, dato $Y = y$, per $y = 0, 1, 2$.

Soluzione. Dall'esame delle $\binom{5}{2} = 10$ sequenze di estrazioni possibili segue la densità discreta congiunta di (X, Y), da cui ricava la densità discreta di Y; si perviene quindi alle densità discrete condizionate di X, dato $Y = y$, per $y = 0, 1, 2$.

$x \backslash y$	0	1	2	$p_X(x)$
1	0	2/10	2/10	4/10
2	0	2/10	1/10	3/10
3	0	2/10	0	2/10
4	1/10	0	0	1/10
$p_Y(y)$	1/10	6/10	3/10	1

x	1	2	3	4
$p_{X\|Y}(x\|0)$	0	0	0	1

x	1	2	3	4
$p_{X\|Y}(x\|1)$	1/3	1/3	1/3	0

x	1	2	3	4
$p_{X\|Y}(x\|2)$	2/3	1/3	0	0

Ad esempio $p(0, 0) = 0 \neq p_X(0)p_Y(0) = 0{,}04$; pertanto X e Y non sono indipendenti.

Date due variabili aleatorie discrete X e Y, il valor medio condizionato di X dato $Y = y$, e quello di Y dato $X = x$, sono dati rispettivamente da:

$$E[X|Y = y] = \sum_x x \, p_{X|Y}(x|y), \qquad E[Y|X = x] = \sum_y y \, p_{Y|X}(y|x).$$

Analogamente, le varianze condizionate sono

$$\mathrm{Var}(X|Y = y) = \sum_x (x - E[X|Y = y])^2 \, p_{X|Y}(x|y),$$

$$\mathrm{Var}(Y|X = x) = \sum_y (y - E[Y|X = x])^2 \, p_{Y|X}(y|x).$$

Esempio. Supponiamo che X e Y siano due variabili aleatorie di Poisson indipendenti di parametri λ_1 e λ_2, rispettivamente. Si dimostri che la funzione di distribuzione condizionata di X dato $X+Y=n$ è binomiale di parametri n e $p=\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$.

Soluzione. Per $k=0,1,\ldots,n$ si ha che

$$
\begin{aligned}
P(X=k\,|\,X+Y=n) &= \frac{P(X=k,X+Y=n)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=k,Y=n-k)}{P(X+Y=n)} \\
&= \frac{P(X=k)\,P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)}.
\end{aligned}
$$

Ricordando che $X+Y$ ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda_1+\lambda_2$, e inoltre che $p=\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$, la precedente formula diventa

$$
\begin{aligned}
P(X=k\,|\,X+Y=n) &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1}\,\lambda_1^k}{k!}\,\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_2}\,\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}\,\frac{n!}{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda_1^k\,\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Esempio. Da un'urna contenente k biglie nere e $n-k$ biglie bianche si effettuano n estrazioni a caso con reinserimento. Denotiamo con Y il numero di biglie nere estratte, e con X l'estrazione in cui si estrae una biglia nera per la prima volta. Determinare $p_Y(r)$, $p_{X|Y}(j|r)$ e $p_X(j)$.

Soluzione. Poiché le estrazioni sono con reinserimento, Y ha distribuzione binomiale di parametri n e $p = k/n$; quindi risulta

$$p_Y(r) = P(Y = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}, \qquad r = 0, 1, \ldots, n \qquad \left(p = \frac{k}{n}\right).$$

Notiamo che, se $r \geq 1$, $p_{X|Y}(j|r)$ è la probabilità che una sequenza casuale costituita da r biglie nere e $n-r$ biglie bianche abbia la prima biglia nera al j-esimo posto, e pertanto si ha

$$p_{X|Y}(j|r) = P(X = j|Y = r) = \binom{n-j}{r-1} \Big/ \binom{n}{r}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-r+1.$$

Quindi, dovendo essere $r \geq 1$ e $j \leq n-r+1$, risulta

$$
\begin{aligned}
p_X(j) &= P(X=j) = \sum_{r=0}^{n} P(X=j|Y=r)\,P(Y=r) \\
&= \sum_{r=1}^{n-j+1} \frac{\binom{n-j}{r-1}}{\binom{n}{r}} \binom{n}{r} p^r\,(1-p)^{n-r} = \sum_{r=1}^{n-j+1} \binom{n-j}{r-1} p^r\,(1-p)^{n-r}.
\end{aligned}
$$

Ponendo $s=r-1$ si ottiene, per $j=1,2,\ldots,n-r+1$

$$
\begin{aligned}
p_X(j) &= \sum_{s=0}^{n-j} \binom{n-j}{s} p^{s+1}\,(1-p)^{n-s-1} \\
&= \sum_{s=0}^{n-j} \binom{n-j}{s} p^{s}\,(1-p)^{n-j-s}\,p\,(1-p)^{j-1} = p\,(1-p)^{j-1},
\end{aligned}
$$

che è una probabilità di tipo geometrico.