1.4 Disposizioni e combinazioni

Quanti insiemi di r oggetti si possono formare a partire da n oggetti distinti?

Per risolvere questo problema va specificato se gli insiemi da formare sono *ordinati* (in cui l'ordine è rilevante) o *non ordinati* (dove l'ordine non è rilevante).

Nel caso di insiemi *ordinati* le sequenze da formare si dicono **disposizioni semplici** se non sono ammesse ripetizioni, altrimenti si dicono **disposizioni con ripetizioni**.

Per il principio fondamentale del calcolo combinatorio
– il numero di disposizioni semplici di n oggetti raggruppati in r classi è

$$D_{n,r} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = (n)_r$$

dove $(n)_r := n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ è detto *fattoriale discendente*;
– il numero di disposizioni con ripetizioni di n oggetti raggruppati in r classi è

$$D'_{n,r} = n \cdot n \cdot n \cdots n = n^r.$$

Esempio. Quante parole di lunghezza 2 si possono formare da un alfabeto di 4 lettere

(a) se le lettere non possono ripetersi?

(b) se le lettere possono ripetersi?

Soluzione. (a) Si tratta di disposizioni semplici di $n = 4$ oggetti raggruppati in $r = 2$ classi, quindi $D_{4,2} = (4)_2 = 4 \cdot 3 = 12$.

(ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc)

(b) Si tratta di disposizioni con ripetizioni di $n = 4$ oggetti raggruppati in $r = 2$ classi, quindi $D'_{4,2} = 4^2 = 16$.

(aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, ca, cb, cc, cd, da, db, dc, dd)

Esempio. Da un'urna che contiene n biglie numerate da 1 a n si effettuano k estrazioni a caso tenendo conto dell'ordine di apparizione. Quante sono le sequenze distinte ottenibili se le estrazioni

(a) si effettuano senza reinserimento?

(b) si effettuano con reinserimento?

Soluzione. (a) $(n)_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$; (b) n^k.

($\star\star$) **Esempio.** Quante sono le operazioni distinte definite su 2 variabili booleane?

Soluzione. Essendo $x_1 \in \{0,1\}$ e $x_2 \in \{0,1\}$, vi sono 4 coppie (x_1, x_2) distinte. Ad ognuna di queste si può assegnare valore 0 o 1. Si tratta quindi di determinare il numero di disposizioni con ripetizioni di 2 oggetti (i valori 0 e 1) in quattro classi (le coppie (x_1, x_2)); vi sono pertanto $D'_{2,4} = 2^4 = 16$ operazioni distinte.

x_1	x_2	0	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \wedge \overline{x_2}$	x_1	$\overline{x_1} \wedge x_2$	x_2	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \vee x_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x_1	x_2	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$	$\overline{x_1 \oplus x_2}$	$\overline{x_2}$	$x_1 \vee \overline{x_2}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1} \vee x_2$	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$\big(\wedge = \text{AND},\ \vee = \text{OR},\ \oplus = \text{OR ESCLUSIVO}\big)$

Consideriamo il problema di determinare quanti insiemi non ordinati di r oggetti si possono formare a partire da n oggetti distinti.

Nel caso di insiemi *non ordinati* le sequenze si dicono **combinazioni semplici** se non sono ammesse ripetizioni, altrimenti si dicono **combinazioni con ripetizioni**.

In generale, dato che $(n)_r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$ rappresenta il numero di scelte di r oggetti tra n, tenendo conto dell'ordine nel quale questi vengono selezionati, e dato che ogni insieme di r oggetti viene in tal modo contato $r!$ volte, si ha che il numero di sottoinsiemi di r oggetti che si possono formare da un insieme di n oggetti è

$$C_{n,r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{(n)_r}{r!}.$$

Notiamo anche che $D_{n,r} = C_{n,r} \cdot r!$, in quanto il numero di sequenze ordinate è uguale al numero di sequenze non ordinate per il numero di permutazioni di r oggetti, e pertanto

$$C_{n,r} = \frac{D_{n,r}}{r!} = \frac{(n)_r}{r!}$$

Per $r = 0, 1, \ldots, n$ definiamo il *coefficiente binomiale*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

Se $r < 0$ o se $r > n$ si pone

$$\binom{n}{r} = 0.$$

Il numero $C_{n,r}$ di combinazioni semplici di n oggetti raggruppati in r classi è

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

Questo denota il numero di sottoinsiemi di dimensione r che si possono formare con gli elementi di un insieme di dimensione n senza tener conto dell'ordine della selezione.

Il numero $C'_{n,r}$ di combinazioni con ripetizioni di n oggetti raggruppati in r classi è

$$C'_{n,r} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!} = \frac{(n+r-1)_r}{r!} = \frac{(n+r-1)(n+r-2)\cdots n}{r!}.$$

Tabella riepilogativa

	Disposizioni (l'ordine è rilevante)	Combinazioni (l'ordine non è rilevante)
semplici (senza ripetizioni)	$D_{n,k} = (n)_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \dfrac{(n)_k}{k!}$
composte (con ripetizioni)	$D'_{n,k} = n^k$	$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

Esempio. Quante combinazioni di 4 oggetti in gruppi di 2 si possono formare
(a) nel caso di combinazioni semplici? (gli oggetti non possono ripetersi)
(b) nel caso di combinazioni con ripetizioni? (gli oggetti possono ripetersi)

Soluzione. (a) $C_{4,2} = (4)_2/2! = (4 \cdot 3)/2 = 6 \;\; (ab, ac, ad, bc, bd, cd)$.
(b) $C'_{4,2} = (5)_2/2! = (5 \cdot 4)/2 = 10 \;\; (aa, ab, ac, ad, bb, bc, bd, cc, cd, dd)$.

Esempio. In quanti modi si possono scegliere 3 oggetti da un insieme di 20?

Soluzione. $C_{20,3} = \binom{20}{3} = \frac{(20)_3}{3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140.$

Esempio. Una classe di tango argentino ha 22 studenti, 10 donne e 12 uomini. In quanti modi si possono formare 5 coppie?

Soluzione. Vi sono $\binom{10}{5}$ modi di selezionare 5 persone da 10 donne, $\binom{12}{5}$ modi di selezionare 5 persone da 12 uomini, e 5! modi di accoppiare 5 donne con 5 uomini, quindi la soluzione è $\binom{10}{5}\binom{12}{5} 5! = 252 \cdot 792 \cdot 120 = 23\,950\,080.$

Esempio. (a) Quanti comitati composti da 2 donne e 3 uomini si possono formare da un gruppo di 5 donne e 7 uomini? (b) Quanti sono i comitati se 2 uomini che hanno litigato rifiutano di sedere insieme nel comitato?

Soluzione. (a) Ci sono $\binom{5}{2}$ possibili insiemi con 2 donne, e $\binom{7}{3}$ possibili insiemi di 3 uomini; segue allora dal principio fondamentale del calcolo combinatorio che vi sono

$$\binom{5}{2}\binom{7}{3} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 350 \quad \text{comitati possibili formati da 2 donne e 3 uomini.}$$

(b) Se due uomini rifiutano di far parte insieme nel comitato, vi sono $\binom{2}{0}\binom{5}{3}$ insiemi di 3 uomini che non contengono nessuno dei 2 litiganti, e $\binom{2}{1}\binom{5}{2}$ insiemi di 3 uomini che contengono esattamente 1 dei 2 litiganti, e quindi vi sono $\binom{2}{0}\binom{5}{3} + \binom{2}{1}\binom{5}{2} = 30$ gruppi di 3 uomini senza i 2 litiganti. In totale vi sono $30 \cdot \binom{5}{2} = 300$ comitati.

Notiamo che il numero di comitati che contengono i 2 uomini che hanno litigato è: $\binom{5}{2}\binom{2}{2}\binom{5}{1} = 50.$

Esempio. Quanti sono i risultati possibili nel gioco del Superenalotto?

Soluzione. Se si tiene conto dell'ordine delle estrazioni, i possibili risultati sono $90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86 \times 85 = 448\,282\,533\,600$. Dividendo per il numero di possibili permutazioni dei numeri estratti, pari a $6! = 720$, si ottiene il numero dei risultati possibili nel gioco del Superenalotto (ossia senza tener conto dell'ordine delle estrazioni):

$$C_{90,6} = \binom{90}{6} = \frac{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86 \times 85}{6!} = \frac{448\,282\,533\,600}{720} = 622\,614\,630.$$

Esempio. Un network è costituito da n nodi. Quanti sono i collegamenti diretti che si possono attivare tra ciascun nodo e tutti i nodi rimanenti?

Soluzione. Ragionando nodo per nodo si ha che il numero di collegamenti diretti è $(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+2+1$. Inoltre la soluzione coincide col numero di combinazioni semplici di n oggetti in 2 classi:

$$\mathcal{C}_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad \text{pertanto} \quad \sum_{k=1}^{n-1} k = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Esempio. In un centro di calcolo 4 elaboratori devono smaltire 3 carichi di lavoro. (a) Quante sono le possibili distribuzioni dei 3 carichi? (b) Quante sono le possibili distribuzioni dei 3 carichi se ciascun elaboratore può smaltire al più un solo carico?

Soluzione. (a) Si tratta di combinazioni con ripetizioni (l'ordine non è rilevante). Quindi le possibili distribuzioni sono $\mathcal{C}'_{4,3} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$, e sono così rappresentabili: 0111, 1011, 1101, 1110, 0012, 0102, 1002, 0021, 0120, 1020, 0201, 0210, 1200, 2001, 2010, 2100, 0003, 0030, 0300, 3000.

(b) Poiché non sono ammesse ripetizioni la soluzione è $\mathcal{C}_{4,3} = \binom{4}{3} = 4$.

Tavola (di Tartaglia-Newton) dei coefficienti binomiali

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	somma
0	1	0	0	0	0	0	0	0	$1 = 2^0$
1	1	1	0	0	0	0	0	0	$2 = 2^1$
2	1	2	1	0	0	0	0	0	$4 = 2^2$
3	1	3	3	1	0	0	0	0	$8 = 2^3$
4	1	4	6	4	1	0	0	0	$16 = 2^4$
5	1	5	10	10	5	1	0	0	$32 = 2^5$
6	1	6	15	20	15	6	1	0	$64 = 2^6$
7	1	7	21	35	35	21	7	1	$128 = 2^7$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n)_k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n;$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{n!}{n!} = 1; \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1;$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1)!} = n; \qquad \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1)!} = n;$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{n-k}.$$

Formula di ricorrenza dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \qquad 1 \le r \le n.$$

(⋆⋆) Dimostrazione analitica

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!\,(n-r-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)\,(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{r\,(r-1)!\,(n-r-1)!}$$

$$= \left[\frac{1}{n-r} + \frac{1}{r}\right] \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r-1)!} = \frac{n}{r\,(n-r)}\,\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r-1)!} = \binom{n}{r}.$$

(⋆⋆) Esercizio. Realizzare un programma che usi la formula di ricorrenza dei coefficienti binomiali per ottenere la tavola di Tartaglia-Newton per $\binom{n}{r}$, $0 \le r \le n \le N$, con N assegnato. Quali sono le condizioni iniziali da usare?

Formula di ricorrenza dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \qquad 1 \le r \le n.$$

(⋆⋆) Dimostrazione combinatoria

Si basa sul fatto che i sottoinsiemi di r elementi di un insieme di n oggetti sono $\binom{n}{r}$. Consideriamo un insieme di n oggetti e fissiamo l'attenzione su uno di essi, che chiamiamo *oggetto 1*. Vi sono $\binom{n-1}{r-1}\binom{1}{1}$ sottoinsiemi di r elementi che contengono l'oggetto 1. Inoltre vi sono $\binom{n-1}{r}\binom{1}{0}$ sottoinsiemi di r elementi che non contengono l'oggetto 1. La somma dei termini $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ fornisce il numero $\binom{n}{r}$ di sottoinsiemi di r elementi.

Un generico sottoinsieme A di un insieme $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ può essere rappresentato da un vettore booleano $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dove $x_i = 1$ se $a_i \in A$ e $x_i = 0$ altrimenti, per $i = 1, 2, \ldots, n$. Quindi ad ogni sottoinsieme corrisponde un solo vettore e viceversa. Poiché in totale vi sono 2^n vettori, tanti sono i possibili sottoinsiemi. Poiché vi sono $\binom{n}{k}$ vettori aventi k bit pari a 1, tanti sono i sottoinsiemi di cardinalità k, per $k = 0, 1, \ldots, n$.

Esempio. Per $n = 4$ vi sono $2^4 = 16$ sottoinsiemi di $\{a, b, c, d\}$:

$$
\begin{array}{ll}
(0,0,0,0) : \{\} & (1,0,0,0) : \{a\} \\
(0,0,0,1) : \{d\} & (1,0,0,1) : \{a,d\} \\
(0,0,1,0) : \{c\} & (1,0,1,0) : \{a,c\} \\
(0,0,1,1) : \{c,d\} & (1,0,1,1) : \{a,c,d\} \\
(0,1,0,0) : \{b\} & (1,1,0,0) : \{a,b\} \\
(0,1,0,1) : \{b,d\} & (1,1,0,1) : \{a,b,d\} \\
(0,1,1,0) : \{b,c\} & (1,1,1,0) : \{a,b,c\} \\
(0,1,1,1) : \{b,c,d\} & (1,1,1,1) : \{a,b,c,d\}
\end{array}
$$

Teorema del binomio

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}, \qquad n \geq 1.$$

$\binom{n}{k}$ è detto *coefficiente binomiale* perché interviene nello sviluppo del binomio.

($\star\star$) Esercizio. Dimostrare il teorema del binomio per induzione su n.

Esempio. Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di n elementi?

Soluzione. Poiché vi sono $\binom{n}{k}$ sottoinsiemi di dimensione k, dal teorema del binomio per $x = y = 1$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

(Si veda anche l'ultima colonna della tavola dei coefficienti binomiali).

Nella somma $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ è incluso il caso $k = 0$ che corrisponde all'insieme vuoto.
Quindi il numero di sottoinsiemi non vuoti di un insieme di n elementi è

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1.$$

Analogamente, il numero di sottoinsiemi costituiti da almeno 2 elementi è

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - n - 1.$$

Esercizio. Utilizzare il teorema del binomio per dimostrare che

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0, \qquad n > 0.$$

($\star\star$) **Proposizione.** Per ogni $n \geq k \geq 0$ sussiste la seguente identità:

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Dimostrazione. Procedendo per induzione su n, notiamo che per $n = k$ l'identità è valida, essendo

$$\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1.$$

Supponendo valida l'identità per n, vediamo che essa sussiste anche per $n+1$. Si ha

$$\sum_{j=k}^{n+1} \binom{j}{k} = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k}.$$

Ricordando la formula di ricorrenza $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ si ottiene $\sum_{j=k}^{n+1} \binom{j}{k} = \binom{n+2}{k+1}$, da cui segue immediatamente la tesi.

Esempio. Calcolare quanti sono i vettori $(x_1, \ldots, x_k)$ nei quali

(a) ogni x_i è un intero positivo tale che $1 \leq x_i \leq n$;

(b) ogni x_i è un intero positivo tale che $1 \leq x_i \leq n$, ed inoltre ogni x_i è diverso da ciascun intero $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$;

(c) ogni x_i è un intero positivo tale che $1 \leq x_i \leq n$, ed inoltre $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$;

(d) ogni x_i è un intero positivo tale che $1 \leq x_i \leq n$, ed inoltre $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k$.

Soluzione. (a) $D'_{n,k} = n^k$; (b) $D_{n,k} = (n)_k$; (c) $C_{n,k} = \binom{n}{k}$; (d) $C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$.

(⋆⋆) Esercizio. Realizzare un programma che, per valori di k e di n assegnati,

(i) generi tutte le sequenze dei 4 casi dell'esercizio precedente;

(ii) conti quante sequenze sono state generate;

(iii) valuti le quantità n^k, $(n)_k$, $\binom{n}{k}$, $\binom{n+k-1}{k}$;

(iv) verifichi che i numeri di sequenze generate nei 4 casi corrispondano alle quantità valutate al punto (iii).

(⋆⋆) **Esercizio.** Dimostrare le seguenti uguaglianze:

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{\substack{i_2=1\\ i_2\neq i_1}}^{n}\cdots\sum_{\substack{i_k=1\\ i_k\neq i_r\ \forall r<k}}^{n} 1=(n)_k,\qquad \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}1=n^k,$$

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{i_1-1}\cdots\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}-1} 1=\binom{n}{k},\qquad \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{i_1}\cdots\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}1=\binom{n+k-1}{k}.$$

Proposizione. Sussiste la seguente uguaglianza (detta di Vandermonde):

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+\cdots+\binom{n}{k}\binom{m}{0}.$$

Per la dimostrazione, si può procedere per via combinatoria. Ad esempio, considerando n biglie nere e m biglie bianche. In quanti modi si può formare un sacchetto di k biglie?

Esempio. Da un lotto di $N = 20$ pezzi costituito da 4 pezzi difettosi e 16 buoni si estraggono $n = 10$ pezzi a caso.

(a) Quanti sono i possibili campioni che non contengono pezzi difettosi?

(b) Quanti sono i possibili campioni che contengono 1 pezzo difettoso e 9 buoni?

(c) Quanti sono i possibili campioni che contengono almeno 2 pezzi difettosi?

Soluzione. (a) I possibili campioni che non contengono pezzi difettosi sono:

$$\binom{16}{10} = \binom{16}{6} = \frac{(16)_6}{6!} = 8\,008.$$

(b) I possibili campioni che contengono 1 pezzo difettoso e 9 buoni sono:

$$\binom{4}{1}\binom{16}{9} = 4\binom{16}{7} = 4\,\frac{(16)_7}{7!} = 45\,760.$$

(c) Facendo uso della formula di Vandermonde si ha che i possibili campioni che contengono almeno 2 pezzi difettosi sono:

$$\binom{20}{10} - \binom{16}{10} - \binom{4}{1}\binom{16}{9} = \frac{(20)_{10}}{10!} - 8\,008 - 45\,760 = 184\,756 - 53\,768 = 130\,988.$$

Esempio. Un lotto di 4 computer distinti deve essere assegnato a 2 laboratori.
(a) In quanti modi può essere fatto?
(b) E se ogni laboratorio deve ricevere almeno un computer?

Soluzione. (a) Assegnando k computer al primo laboratorio e $4 - k$ al secondo laboratorio, l'assegnazione dei computer si può effettuare in $\binom{4}{k}$ modi; si ha quindi:

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} = 2^4 = 16;$$

tenendo conto che ogni computer può essere assegnato a ciascuno dei 2 laboratori, la soluzione è anche esprimibile come $D'_{2,4} = 2^4 = 16$.
(b) In questo caso si ha:

$$\sum_{k=1}^{3} \binom{4}{k} = 2^4 - \binom{4}{0} - \binom{4}{4} = 14.$$

Esercizi

1.1) Quanti sono i vettori booleani di lunghezza n
(i) che hanno almeno un elemento uguale a $\mathbf{1}$?
(ii) che hanno solo i primi due elementi uguali a $\mathbf{1}$?
(iii) che hanno tutti gli elementi uguali?

1.2) In una città ci sono 5 alberghi.
(i) In quanti modi 3 persone possono scegliere un albergo dove pernottare?
(ii) Cosa cambia se ogni persona deve scegliere un albergo diverso?

1.3) (i) Quanti sono i vettori booleani di lunghezza n?
(ii) Quanti sono i suddetti vettori con esattamente k elementi uguali a $\mathbf{0}$?
(iii) Quanti sono i suddetti vettori se i primi k elementi sono uguali?

1.4) Sia $S = \{1, 2, \ldots, 2n\}$; determinare
(i) il numero di sottoinsiemi di S aventi cardinalità k e che contengono il numero 1;
(ii) il numero dei sottoinsiemi di S aventi cardinalità k e che non contengono numeri pari.

1.5) Una squadra è formata da 11 titolari e 9 riserve. Selezionando 4 persone della squadra,
(i) quanti raggruppamenti distinti si possono formare?
(ii) quanti raggruppamenti distinti si possono formare, contenenti un solo titolare?
(iii) quanti raggruppamenti distinti si possono formare, contenenti almeno un titolare?

1.6) In quanti modi si possono disporre in fila 5 donne e 4 uomini in modo che 2 uomini non siano mai consecutivi?

1.7) Quanti sono i numeri di 6 cifre che contengono esattamente due volte la cifra 1, esattamente due volte la cifra 2 e non contengono lo 0?

1.8) Stabilire quante sono le sequenze del tipo abc tali che
(i) a è un intero tra 1 e 9, b e c sono interi tra 0 e 9, e risulta $a > b > c$;
(ii) a è un intero tra 1 e 9, b e c sono interi tra 0 e 9, e risulta $a \geq b \geq c$.

1.9) Calcolare le seguenti somme:

$$\text{(i)} \quad \binom{10}{2} + \binom{10}{3} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{7} \binom{8}{k} \qquad\qquad \text{(iii)} \quad \sum_{i=0}^{3} \binom{4}{i}\binom{4}{3-i}$$

1.10) Calcolare le seguenti espressioni:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 2^k \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} 2^n \qquad\qquad \text{(iii)} \quad \sum_{k=1}^{3} \binom{4}{k} 2^k 3^{n-k}$$