3.1 Introduzione

In questo capitolo introduciamo la

probabilità condizionata,

uno dei concetti più importanti della teoria della probabilità.

L'importanza del concetto è duplice.

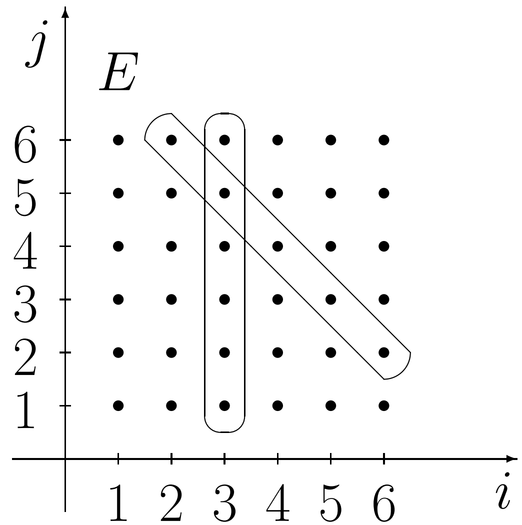
Innanzitutto si è spesso interessati a calcolare la probabilità di un evento disponendo di qualche informazione parziale.

Inoltre le probabilità condizionate sono spesso utilizzate per calcolare più facilmente le probabilità richieste.

3.1 Probabilità condizionata

Supponiamo di lanciare 2 dadi e che ognuno dei 36 possibili esiti sia *equiprobabile* con probabilità $\frac{1}{36}$. Supponiamo inoltre di osservare che l'esito del primo lancio è 3. Allora, data questa informazione, qual è la probabilità che la somma dei due dadi sia uguale a 8? Dato che il primo dado vale 3, vi sono al più 6 possibili esiti dell'esperimento: $(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)$.

Dato che all'inizio questi esiti erano equiprobabili, essi devono avere anche ora la stessa probabilità. Sapendo che il primo dado vale 3, la probabilità (condizionata) di ognuno dei 6 esiti è uguale a $\frac{1}{6}$, mentre la probabilità (condizionata) degli altri 30 punti dello spazio campionario è pari a 0. Pertanto la probabilità richiesta vale $\frac{1}{6}$, perché uno solo dei 6 risultati dà somma 8: $(3,5)$.



In assenza d'informazione sul primo lancio la probabilità di avere somma 8 vale $\frac{5}{36}$.

Definizione. Se $P(F) > 0$, la probabilità condizionata di E dato F è data da

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Tale definizione è giustificata dalle seguenti considerazioni:

Per esperimenti dotati di spazio campionario finito e con esiti equiprobabili, abbiamo visto che per ogni evento A risulta: $P(A) = |A|/|S|$.

Pertanto, volendo esprimere in tale ambito la probabilità condizionata di E dato F, siamo condotti ad usare il rapporto di casi favorevoli al verificarsi di E (sapendo che si è verificato F) su casi possibili (gli elementi di F), cosicché:

$$P(E|F) = \frac{|E \cap F|}{|F|} = \frac{|E \cap F|/|S|}{|F|/|S|} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Esempio. Nell'esperimento del lancio di un dado non truccato calcolare le probabilità condizionate di $A = \{1, 2\}$ dati gli eventi $B_1 = \{4, 5, 6\}$, $B_2 = \{1, 5, 6\}$, $B_3 = \{1, 2, 6\}$.

Soluzione. Risulta

$$P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(\emptyset)}{1/2} = 0,$$

$$P(A|B_2) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(\{1\})}{1/2} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3},$$

$$P(A|B_3) = \frac{P(A \cap B_3)}{P(B_3)} = \frac{P(\{1, 2\})}{1/2} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Pertanto, sebbene gli eventi B_1, B_2, B_3 siano equiprobabili, la probabilità condizionata di A dato B_k cambia al variare di k, ed in particolare risulta $P(A|B_2) = P(A)$.

Esempio. Uno studente sta svolgendo un test da consegnare dopo un'ora. Si suppone che la probabilità che lo studente termini il test in meno di t ore sia uguale a $t/2$, per ogni $t \in [0,1]$. Qual è la probabilità che che lo studente usufruisca dell'intera ora? Qual è la probabilità condizionata che che lo studente usufruisca dell'intera ora

(a) sapendo che egli è ancora al lavoro dopo 3/4 d'ora?

(b) sapendo che egli è ancora al lavoro dopo t ore?

Soluzione. Sia $L_t = \{\text{lo studente conclude l'esame in meno di } t \text{ ore}\}$, con $P(L_t) = t/2$ per $0 \leq t \leq 1$. Posto $F = \{\text{lo studente utilizza l'intera ora}\}$, si ha $F = \overline{L_1}$ e pertanto

$$P(F) = P(\overline{L_1}) = 1 - P(L_1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(a) Poiché $F \subset \overline{L_{3/4}}$, si ha $F \cap \overline{L_{3/4}} = F$ e quindi la probabilità cercata è

$$P(F|\overline{L_{3/4}}) = \frac{P(F \cap \overline{L_{3/4}})}{P(\overline{L_{3/4}})} = \frac{P(F)}{1 - P(L_{3/4})} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

(b) Analogamente, poiché $F \subset \overline{L_t}$, si ha $F \cap \overline{L_t} = F$ e quindi

$$P(F|\overline{L_t}) = \frac{P(F \cap \overline{L_t})}{P(\overline{L_t})} = \frac{P(F)}{1 - P(L_t)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{t}{2}} = \frac{1}{2 - t}, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Esempio. Nell'esperimento del lancio di una moneta ripetuto 2 volte, supponendo che i quattro punti dello spazio campionario $S = \{cc, ct, tc, tt\}$ siano equiprobabili, qual è la probabilità condizionata che venga testa in entrambi i lanci sapendo che esce testa (a) nel primo lancio; (b) in almeno un lancio?

Soluzione. Sia $E = \{tt\} = \{$testa in entrambi i lanci$\}$, e $F = \{tc, tt\} = \{$testa al primo lancio$\}$. La probabilità cercata in (a) è allora

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(\{tt\})}{P(\{tc, tt\})} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}.$$

Sia $A = \{ct, tc, tt\}$; la soluzione di (b) è

$$P(E|A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{tt\})}{P(\{ct, tc, tt\})} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Notiamo che $P(E|F)$ e $P(E|A)$ sono diversi da $P(E) = \dfrac{1}{4}$.

Esempio. Nell'esperimento del lancio di una moneta ripetuto n volte, supponendo che i 2^n punti dello spazio campionario S siano equiprobabili, qual è la probabilità condizionata che venga testa in ogni lancio sapendo che esce testa (a) nel primo lancio; (b) in almeno un lancio?

Soluzione. Sia $E = \{\text{testa in ogni lancio}\}$ e $F = \{\text{testa al primo lancio}\}$. La probabilità cercata in (a) è allora

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(E)}{P(F)} = \frac{1/2^n}{1/2} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Sia $A = \{\text{testa in almeno un lancio}\}$. Poiché $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, con $P(\overline{A}) = 1 - 1/2^n$, si ha

$$P(E|A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} = \frac{P(E)}{1 - P(\overline{A})} = \frac{1/2^n}{1 - 1/2^n} = \frac{1}{2^n - 1}.$$

Notiamo che $P(E|F)$ e $P(E|A)$ sono diversi da $P(E) = \dfrac{1}{2^n}$.

Esempio. Nel gioco del bridge le 52 carte sono distribuite equamente a 4 giocatori (Est, Ovest, Nord e Sud). Se Nord e Sud hanno in tutto 8 picche, qual è la probabilità p_k che Est abbia k delle 5 carte di picche rimanenti? $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$

Soluzione. Si tratta di probabilità condizionata, ma è più semplice procedere con lo spazio campionario ridotto. Dato che Nord-Sud hanno in tutto 8 picche tra le loro carte, vi sono esattamente 5 picche nelle rimanenti 26 carte di Est-Ovest. Per la equiprobabilità delle distribuzioni delle carte, le probabilità cercate sono date da

$$p_0 = \frac{\binom{5}{0}\binom{21}{13}}{\binom{26}{13}} = p_5 = \frac{\binom{5}{5}\binom{21}{8}}{\binom{26}{13}} = \frac{1 \cdot 203\,490}{10\,400\,600} = \frac{9}{460} \approx 0{,}0196$$

$$p_1 = \frac{\binom{5}{1}\binom{21}{12}}{\binom{26}{13}} = p_4 = \frac{\binom{5}{4}\binom{21}{9}}{\binom{26}{13}} = \frac{5 \cdot 293\,930}{10\,400\,600} = \frac{13}{92} \approx 0{,}141$$

$$p_2 = \frac{\binom{5}{2}\binom{21}{11}}{\binom{26}{13}} = p_3 = \frac{\binom{5}{3}\binom{21}{10}}{\binom{26}{13}} = \frac{10 \cdot 352\,716}{10\,400\,600} = \frac{39}{115} \approx 0{,}339$$

Esempio. Da un'urna contenente r biglie (di cui b sono blu) si estraggono in sequenza n biglie a caso, senza reinserimento ($n \leq r$).
(i) Qual è la probabilità che la prima biglia estratta sia blu?
(ii) Qual è la probabilità condizionata che la prima biglia estratta sia blu, sapendo che k delle biglie estratte sono blu?

Soluzione. (i) Ponendo $E = \{\text{la prima biglia estratta è blu}\}$, si ha

$$P(E) = \frac{b\,(r-1)\,(r-2)\,\cdots\,(r-n+1)}{r\,(r-1)\,(r-2)\,\cdots\,(r-n+1)} = \frac{b}{r}.$$

(ii) Ponendo $B_k = \{\text{vengono estratte } k \text{ biglie blu}\}$, $0 \leq k \leq n$, la probabilità condizionata può essere calcolata come rapporto tra il numero di sequenze di lunghezza n aventi una biglia blu al primo posto e $k-1$ biglie blu nei rimanenti $n-1$ posti diviso il numero di sequenze di lunghezza n aventi k biglie blu all'interno. Pertanto si ha

$$P(E|B_k) = \frac{\binom{1}{1}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k}{n}.$$

Moltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza $P(E|F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)}$ per $P(F)$, si ha

$$P(E \cap F) = P(F)\, P(E|F), \qquad \text{se } P(F) > 0.$$

Analogamente, si ha

$$P(E \cap F) = P(E)\, P(F|E), \qquad \text{se } P(E) > 0.$$

Una generalizzazione delle formule precedenti è mostrata qui di seguito, ed è spesso anche nota come *legge delle probabilità composte*.

Proposizione. (Regola del prodotto) Se $P(E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1}) > 0$, allora

$$P(E_1 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1)\, P(E_2|E_1)\, P(E_3|E_2 \cap E_1) \ldots P(E_n|E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1})$$

Dimostrazione. Per la definizione di probabilità condizionata, dal 2$^{\text{o}}$ membro si ha

$$P(E_1)\frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}\frac{P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{P(E_1 \cap E_2)} \ldots \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n)}{P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{n-1})} = P(E_1 \cap \ldots \cap E_n)$$

con le probabilità a denominatore strettamente positive perché $P(E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1}) > 0$.

Esempio. Da un'urna contenente n biglie numerate da 1 a n si estraggono 3 biglie a caso (senza reinserimento). Assumendo che vi sia concordanza all'estrazione k-esima se in tale estrazione fuoriesce la biglia avente numero k, calcolare la probabilità
(a) di avere 3 concordanze,
(a) di avere concordanza solo nelle prime 2 estrazioni.

Soluzione. Posto $A_k = \{\text{si ha concordanza all'estrazione } k\text{-esima}\}$, dalla legge delle probabilità composte segue che la probabilità richiesta in (a) è data da

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2}.$$

Analogamente, la probabilità richiesta in (b) è

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(\overline{A_3}|A_1 \cap A_2) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2}.$$

Esempio. Nel gioco del lotto si estraggono a caso 5 numeri da un'urna contenente 90 numeri compresi tra 1 e 90. (Le cinquine sono equiprobabili). (i) Se si sceglie un numero compreso tra 1 e 90 qual è la probabilità che questo sarà tra i 5 estratti? (ii) E se si scelgono 2 numeri distinti? (iii) E se, più in generale, se ne scelgono k $(1 \leq k \leq 5)$?

Soluzione. (i) Definiamo l'evento $A_1 = \{$il numero scelto è tra i 5 estratti$\}$; evidentemente risulta

$$P(A_1) = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}.$$

(ii) Definiamo l'evento $A_2 = \{$i 2 numeri scelti sono tra i 5 estratti$\}$; questo si può esprimere come intersezione degli eventi $B_1 = \{$il primo numero scelto è tra i 5 estratti$\}$ e $B_2 = \{$il secondo numero scelto è tra i 5 estratti$\}$. Quindi, usando la regola del prodotto e ricordando che le estrazioni sono senza reinserimento, si ha

$$P(A_2) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)\, P(B_2|B_1) = \frac{5}{90} \cdot \frac{4}{89} = \frac{2}{801} \approx 0{,}0025.$$

(iii) Se si scelgono k numeri distinti ($1 \leq k \leq 5$), definiamo l'evento $A_k = \{$i k numeri scelti sono tra i 5 estratti$\}$. Questo si può esprimere in termini degli eventi $B_i = \{$l'i-esimo numero scelto è tra i 5 estratti$\}$, $1 \leq i \leq k$:

$$A_k = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k, \qquad 1 \leq k \leq 5.$$

Dalla regola del prodotto segue

$$P(A_k) = P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k) = P(B_1)\, P(B_2|B_1)\, \ldots\, P(B_k|B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1}).$$

Poiché le estrazioni sono senza reinserimento, si ottiene:

$$\begin{aligned}
P(A_3) &= P(B_1)\, P(B_2|B_1)\, P(B_3|B_1B_2) = \frac{5}{90}\,\frac{4}{89}\,\frac{3}{88} = \frac{1}{11.748},\\
P(A_4) &= P(B_1)\, P(B_2|B_1)\, P(B_3|B_1B_2)\, P(B_4|B_1B_2B_3) = \frac{5}{90}\,\frac{4}{89}\,\frac{3}{88}\,\frac{2}{87} = \frac{1}{511.038},\\
P(A_5) &= P(B_1)\, P(B_2|B_1) \cdots P(B_5|B_1B_2B_3B_4) = \frac{5}{90}\,\frac{4}{89}\,\frac{3}{88}\,\frac{2}{87}\,\frac{1}{86} = \frac{1}{43.949.268}.
\end{aligned}$$

Esempio. Da un'urna contenente r biglie (di cui b sono blu) si estraggono in sequenza n biglie a caso, senza reinserimento ($n \leq r$). Sapendo che k delle biglie estratte sono blu,

(a) qual è la probabilità condizionata che la prima biglia estratta sia blu?

(b) qual è la probabilità condizionata che le prime 2 biglie estratte siano blu?

Soluzione. Poniamo $E = \{$la prima biglia estratta è blu$\}$, $F = \{$la seconda biglia estratta è blu$\}$, e inoltre $B_k = \{$vengono estratte k biglie blu$\}$, $0 \leq k \leq n$. Si ha allora

$$P(E|B_k) = \frac{k}{n}, \qquad P(E \cap F|B_k) = P(E|B_k)\, P(F|E \cap B_k) = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1}.$$

Infatti, sapendo che si è verificato l'evento B_k, la sequenza delle n biglie estratte è costituita da k biglie blu e $n-k$ biglie rosse.

(a) In tal caso vi sono k casi favorevoli, su n, affinché la prima biglia sia blu.

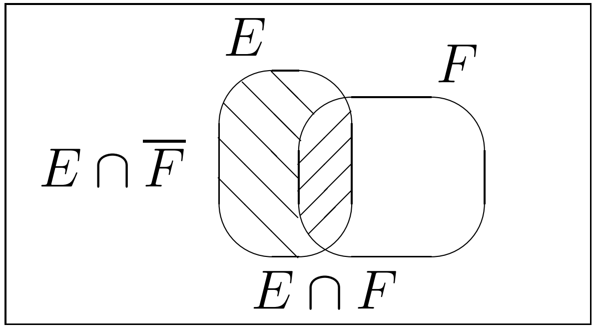
(b) Analogamente, vi sono $k-1$ casi favorevoli, su $n-1$, affinché la seconda biglia sia blu sapendo che la prima biglia è blu. Dalla legge delle probabilità composte segue il risultato.

3.3 La formula delle alternative e la formula di Bayes

Proposizione. (Formula delle alternative) Sia F tale che $0 < P(F) < 1$. Se E è un evento qualsiasi risulta

$$P(E) = P(E|F)\, P(F) + P(E|\overline{F})\, P(\overline{F}).$$

Dimostrazione. L'evento E si può esprimere come $E = (E \cap F) \cup (E \cap \overline{F})$, con $E \cap F$ e $E \cap \overline{F}$ eventi incompatibili. Infatti, se un evento elementare appartiene all'evento E, esso inoltre appartiene o all'evento F o al suo complementare $\overline{F}$, e quindi appartiene o all'evento $E \cap F$ oppure a $E \cap \overline{F}$.



Usando la proprietà di additività finita e la regola del prodotto segue:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap F) + P(E \cap \overline{F}) && (E \cap F \text{ e } E \cap \overline{F} \text{ sono incompatibili}) \\ &= P(E|F)\, P(F) + P(E|\overline{F})\, P(\overline{F}), && \text{da cui segue la tesi.} \end{aligned}$$

La formula delle alternative permette di determinare la probabilità di un evento condizionandolo prima alla realizzazione o meno di un altro evento.

Esempio. Da un'urna contenente 5 biglie bianche e 1 biglia rossa, 6 giocatori estraggono a turno 1 biglia a caso, senza reinserimento. Qual è la probabilità che il giocatore k-esimo estragga la biglia rossa?

Soluzione. Posto $A_k = \{\text{il giocatore } k\text{-esimo estrae la biglia rossa}\}$, risulta

$$P(A_1) = \frac{1}{6}, \qquad P(A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|\overline{A_1})P(\overline{A_1}) = 0 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$$

Analogamente, si ottiene $P(A_k) = \dfrac{1}{6}$ per $k = 1, 2, \ldots, 6$.

Notiamo che risulta $P(A_k|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}}) = \dfrac{1}{6-(k-1)}$, per $k = 1, 2, \ldots, 6$.

Osserviamo inoltre che gli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_6$ sono necessari e a 2 a 2 incompatibili.

Esempio. Una compagnia assicuratrice suddivide le persone in due classi: quelle propense a incidenti (il 30%) e quelle che non lo sono (il 70%). Le statistiche mostrano che le persone propense a incidenti hanno probabilità 0,4 di avere un incidente in un anno, mentre per le altre vale 0,2.

(a) Qual è la probabilità che un nuovo assicurato abbia un incidente entro un anno?

(b) Se un nuovo assicurato ha un incidente entro un anno, qual è la probabilità che si tratti di una persona propensa agli incidenti?

Soluzione. Definiamo gli eventi $F = \{\text{una persona è propensa a incidenti}\}$ ed $E = \{\text{un nuovo assicurato ha un incidente entro un anno}\}$. Per le ipotesi fatte risulta:

$$P(F) = 0{,}3 \qquad P(\overline{F}) = 0{,}7 \qquad P(E|F) = 0{,}4 \qquad P(E|\overline{F}) = 0{,}2.$$

(a) Si ha: $P(E) = P(E|F)\,P(F) + P(E|\overline{F})\,P(\overline{F}) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}26.$

(b) Risulta:

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{P(E|F)\,P(F)}{P(E)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}3}{0{,}26} = \frac{6}{13} \approx 0{,}461.$$

Proposizione. (Formula delle alternative, con n alternative) Se gli eventi $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sono a due a due incompatibili, necessari, e ciascuno con probabilità positiva, e se E è un evento qualsiasi, allora risulta

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\, P(F_i).$$

Dimostrazione. Scrivendo

$$E = E \cap S = E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap F_i) \qquad \text{(con } E \text{ evento qualsiasi)}$$

e osservando che gli eventi $E \cap F_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sono a due a due incompatibili, per la proprietà di additività finita e per la regola del prodotto si ha infine

$$P(E) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (E \cap F_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(E \cap F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\, P(F_i).$$

Nella formula delle alternative

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\, P(F_i)$$

la probabilità di E viene espressa come media ponderata delle $P(E|F_i)$, dove il peso di ciascun termine è uguale alla probabilità dell'evento F_i, rispetto al quale si condiziona.

Dalle ipotesi che gli eventi $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sono a due a due incompatibili e necessari segue che in un esperimento si realizza uno e uno solo degli eventi $F_1, F_2, \ldots, F_n$, che evidentemente costituiscono una partizione dello spazio campionario, e quindi

$$\sum_{i=1}^{n} P(F_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = P(S) = 1,$$

per la proprietà di additività finita.

Esempio. Un'urna contiene 3 monete; la 1^a è non truccata, la 2^a mostra testa con probabilità p, mentre la 3^a dà testa con probabilità $1-p$, con $0<p<1$. Se si sceglie una moneta a caso qual è la probabilità che lanciata mostri testa? Se la moneta lanciata mostra testa, qual è la probabilità che si tratti della 2^a?

Soluzione. Definiamo gli eventi $T = \{\text{esce testa}\}$ e $F_j = \{\text{si sceglie la moneta } j\text{-esima}\}$, $j = 1,2,3$. Dalle ipotesi fatte segue

$$P(F_j) = \frac{1}{3} \qquad (j = 1,2,3),$$

e inoltre

$$P(T|F_1) = 0{,}5 \qquad P(T|F_2) = p \qquad P(T|F_3) = 1-p.$$

La probabilità di avere testa è quindi

$$P(T) = \sum_{j=1}^{3} P(T|F_j)\, P(F_j) = 0{,}5 \cdot \frac{1}{3} + p \cdot \frac{1}{3} + (1-p) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto,

$$P(F_2|T) = \frac{P(T \cap F_2)}{P(T)} = \frac{P(T|F_2)P(F_2)}{P(T)} = p\,\frac{2}{3}.$$

Esempio. Un vettore booleano di lunghezza 5 contiene 2 bit pari a **1** e 3 bit pari a **0**. Un algoritmo esamina i bit del vettore uno per volta, e si ferma in corrispondenza del primo bit pari a **1**. Qual è la probabilità che l'algoritmo si fermi al passo k-esimo ($1 \leq k \leq 4$)? Qual è la probabilità che il bit successivo al primo **1** sia pari a **0**?

Soluzione. Lo spazio campionario è costituito da $|S| = \binom{5}{2} = 10$ vettori booleani. Ponendo $F_k = \{$l'algoritmo si ferma al passo k-esimo$\}$ ($1 \leq k \leq 4$), tale evento è costituito da tutte le sequenze di S aventi **0** nei primi $k-1$ bit, **1** nel bit k-esimo, e che negli ultimi $5-k$ bit contengono un solo bit pari a **1**, pertanto:

$$P(F_1) = \frac{4}{10}, \qquad P(F_2) = \frac{3}{10}, \qquad P(F_3) = \frac{2}{10}, \qquad P(F_4) = \frac{1}{10}.$$

Posto $E = \{$il bit successivo al primo **1** è pari a **0**$\}$, si ha

$$P(E|F_1) = \frac{3}{4}, \qquad P(E|F_2) = \frac{2}{3}, \qquad P(E|F_3) = \frac{1}{2}, \qquad P(E|F_4) = 0,$$

e quindi $P(E) = \sum_{k=1}^{4} P(E|F_k)\, P(F_k) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot 0 = \frac{6}{10}.$

Se nell'esempio precedente il vettore booleano ha lunghezza n, allora $|S| = \binom{n}{2}$ e l'evento F_k è costituito dalle sequenze di S aventi **0** nei primi $k-1$ bit, **1** nel bit k-esimo, e che negli ultimi $n-k$ bit contengono un solo bit pari a **1**. Pertanto:

$$P(F_k) = \frac{n-k}{\binom{n}{2}} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}, \qquad P(E|F_k) = \frac{n-k-1}{n-k}, \qquad 1 \le k \le n-1,$$

e quindi

$$P(E) = \sum_{k=1}^{n-1} P(E|F_k)\, P(F_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k-1}{n-k} \cdot \frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=0}^{n-2} j,$$

avendo posto $j = n-k-1$. Ricordando che $\sum_{j=1}^{N} j = \frac{N(N+1)}{2}$, si ha

$$P(E) = \frac{2}{n(n-1)} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n-2}{n}.$$

Notiamo che: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} P(F_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{2}{n(n-1)} \frac{n(n-1)}{2} = 1.$

La formula delle alternative $P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\,P(F_i)$ permette di determinare la probabilità di un evento condizionandolo prima alla realizzazione di uno, e uno solo, degli n eventi $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Supponiamo ora che E si sia verificato e di voler determinare quali degli eventi alternativi $F_1, F_2, \ldots, F_n$ si sia anch'esso verificato.

Proposizione. (Formula di Bayes) Se E è un evento avente probabilità positiva, e $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sono eventi a due a due incompatibili, ciascuno avente probabilità positiva, e necessari, allora

$$P(F_j|E) = \frac{P(E|F_j)\,P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\,P(F_i)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Dimostrazione. Dalla definizione di probabilità condizionata, dalla regola del prodotto e dalla formula delle alternative segue immediatamente

$$P(F_j|E) = \frac{P(E \cap F_j)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)\,P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\,P(F_i)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Verifichiamo che le probabilità della formula di Bayes sommano all'unità; infatti risulta

$$\sum_{j=1}^{n} P(F_j|E) = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(E|F_j)\, P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)\, P(F_i)} = 1.$$

Esempio. In un gioco vi sono 3 carte identiche per la forma, la prima con entrambe le facce di colore rosso, la seconda con entrambe le facce di colore nero, la terza con una faccia rossa e una nera. Si sceglie a caso una carta e la si appoggia sul tavolo; se la faccia superiore della carta è rossa, qual è la probabilità che l'altra faccia sia nera?

Soluzione. Indichiamo con F_1, F_2 e F_3 gli eventi riferiti alle 3 carte, e poniamo $R = \{\text{la faccia superiore della carta scelta è rossa}\}$. Dalla formula di Bayes segue

$$P(F_3|R) = \frac{P(R|F_3)\, P(F_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(R|F_i)\, P(F_i)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Notiamo che tale risultato si può ottenere anche come rapporto di casi favorevoli su casi possibili, in quanto una sola delle tre facce rosse ha una faccia nera sul retro.

Esempio. Un sistema di gestione della posta elettronica riceve un messaggio, che si suppone sia *spam* con probabilità 0,7 e *non spam* con probabilità 0,3. Il sistema effettua un controllo su ogni messaggio ricevuto; se riceve un messaggio *spam* lo valuta come tale con probabilità 0,9 (e lo valuta come *non spam* con probabilità 0,1) mentre se riceve un messaggio *non spam* lo valuta come tale con probabilità 0,8 (e lo valuta come *spam* con probabilità 0,2).

(i) Calcolare la probabilità che il sistema valuti come *spam* il messaggio ricevuto.

(ii) Se il sistema ha valutato come *spam* il messaggio ricevuto, qual è la probabilità che invece sia *non spam*?

(iii) Se il sistema ha valutato come *non spam* il messaggio ricevuto, qual è la probabilità che invece sia *spam*?

Soluzione. Per le ipotesi sull'evento $F = \{\text{il messaggio è } \textit{spam}\}$ si ha

$$P(F) = 0{,}7 \qquad P(\overline{F}) = 0{,}3.$$

Inoltre, posto $E = \{$il sistema valuta come *spam* il messaggio ricevuto$\}$, risulta

$$P(E \mid F) = 0{,}9 \qquad P(\overline{E} \mid F) = 0{,}1 \qquad P(\overline{E} \mid \overline{F}) = 0{,}8 \qquad P(E \mid \overline{F}) = 0{,}2.$$

Pertanto, dalla formula delle alternative segue

$$P(E) = P(E \mid F)\, P(F) + P(E \mid \overline{F})\, P(\overline{F}) = 0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}69.$$

Dalla formula di Bayes si ricavano le probabilità condizionate richieste:

$$P(\overline{F} \mid E) = \frac{P(E \mid \overline{F})\, P(\overline{F})}{P(E)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}3}{0{,}69} = \frac{0{,}06}{0{,}69} = 0{,}0870$$

e

$$P(F \mid \overline{E}) = \frac{P(\overline{E} \mid F)\, P(F)}{P(\overline{E})} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}7}{0{,}31} = \frac{0{,}07}{0{,}31} = 0{,}2258.$$

Esempio. Si lanciano a caso n monete non truccate; per ogni moneta che mostra testa si inserisce una biglia nera in un'urna, mentre per ogni croce si inserisce una biglia bianca. Se poi si estrae a caso una biglia dall'urna, qual è la probabilità che sia nera? Se la biglia estratta è nera, qual è la probabilità che nell'urna vi erano k biglie nere?

Soluzione. Sia $E_k = \{\text{esce testa } k \text{ volte}\} = \{\text{nell'urna vi sono } k \text{ biglie nere e } n-k \text{ bianche}\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Tali eventi sono a due a due incompatibili, sono necessari, e $P(E_k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} > 0$. Sia $A = \{\text{la biglia è nera}\}$; per la formula delle alternative si ha

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} P(A|E_k)\, P(E_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1},$$

essendo $\frac{k}{n} \cdot \binom{n}{k} = \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$. Ponendo $r = k-1$, dal teorema del binomio segue

$$P(A) = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} = \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2}.$$

Per ricavare $P(E_k|A)$ facciamo uso della formula di Bayes:

$$P(E_k|A) = \frac{P(A|E_k)\,P(E_k)}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(A|E_i)\,P(E_i)} = \frac{\dfrac{k}{n}\cdot\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}}{\dfrac{1}{2}} = \begin{cases} 0 & \text{se } k=0 \\ \dfrac{\binom{n-1}{k-1}}{2^{n-1}} & \text{se } k=1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

È facile verificare che la somma delle probabilità $P(E_k|A)$ è unitaria:

$$\sum_{k=0}^{n} P(E_k|A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot 2^{n-1} = 1.$$

3.4 Eventi indipendenti

La probabilità condizionata di E dato F non è generalmente uguale a $P(E)$. In altri termini, la conoscenza della realizzazione dell'evento F modifica in generale la possibilità del realizzarsi o meno di E.

Se $P(E|F) = P(E)$ diciamo che E è indipendente da F. Cioè, E è indipendente da F se la conoscenza della realizzazione di F non cambia la probabilità che si realizzi E.

Se $P(F) > 0$, dalla formula $P(E|F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)}$ si vede che E è indipendente da F se

$$P(E \cap F) = P(E)\, P(F).$$

Tale formula è simmetrica in E ed F, pertanto se $P(E) > 0$ e $P(F) > 0$, l'evento E è indipendente da F se F è indipendente da E e viceversa.

La seguente definizione include anche i casi in cui $P(E) = 0$ oppure $P(F) = 0$.

Definizione. Due eventi E ed F si dicono *indipendenti* se vale

$$P(E \cap F) = P(E)\, P(F).$$

Due eventi che non sono indipendenti si dicono *dipendenti*.

Esempio. Uno studente deve sottoporsi a due test. Con probabilità 0,5 supererà il primo test; con probabilità 0,4 supererà il secondo test; con probabilità 0,3 li supererà entrambi. Gli eventi relativi al superamento dei due test sono indipendenti?
Soluzione. Sia B_i l'evento che lo studente superi il test i-esimo, $i = 1, 2$. Risulta

$$P(B_1 \cap B_2) = 0{,}3 \neq 0{,}2 = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = P(B_1)\, P(B_2),$$

quindi gli eventi B_1 e B_2 sono dipendenti.

Proposizione. Se A e B eventi tali che $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, allora le seguenti uguaglianze sono equivalenti:

(i) $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$,

(ii) $P(A|B) = P(A)$,

(iii) $P(B|A) = P(B)$.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\, P(B)}{P(B)} = P(A).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii):

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B)\, P(B)}{P(A)} = \frac{P(A)\, P(B)}{P(A)} = P(B).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i):

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A) = P(A)\, P(B).$$

Esercizio. Nell'esperimento che consiste nel lancio di n monete non truccate, sia $T_1 = \{\text{esce testa al primo lancio}\}$, $U = \{\text{esce lo stesso risultato negli } n \text{ lanci}\}$, $A = \{\text{esce testa almeno 1 volta}\}$. Mostrare che T_1 e U sono indipendenti, ed inoltre che T_1 e A non sono indipendenti. Mostrare che A e U sono indipendenti se, e solo se, $n = 1$.

Nota. Se per gli eventi A e B risulta $A \subset B$, allora sussiste indipendenza tra i 2 eventi se e solo se $P(A) = 0$ oppure $P(B) = 1$.

Nota. Se $P(A) = 0$ oppure $P(A) = 1$, allora l'evento A è indipendente da qualsiasi altro evento B.

Proposizione. Se E ed F sono eventi indipendenti, allora E ed $\overline{F}$ sono indipendenti.

Dimostrazione. Poichè risulta $E = (E \cap F) \cup (E \cap \overline{F})$, con $E \cap F$ ed $E \cap \overline{F}$ eventi incompatibili, dalla proprietà di additività finita segue

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \overline{F}).$$

Poiché per ipotesi E ed F sono eventi indipendenti, si ha

$$P(E) = P(E)\, P(F) + P(E \cap \overline{F}),$$

ossia

$$P(E \cap \overline{F}) = P(E) - P(E)\, P(F) = P(E)\,[1 - P(F)] = P(E)\, P(\overline{F}).$$

Quindi E ed $\overline{F}$ sono indipendenti.

Notiamo pertanto che se E è indipendente da F, la probabilità che E si realizzi non è modificata dalla realizzazione o meno di F.

Inoltre, se E ed F sono indipendenti, tali sono anche $\overline{E}$ ed F, e gli eventi $\overline{E}$ ed $\overline{F}$.

Nel prossimo esempio vedremo che se E è indipendente da F e da G, allora non è detto che E sia indipendente da $F \cap G$.

Esempio. Consideriamo i seguenti eventi nel lancio di due dadi non truccati: $E = \{$la somma dei dadi è 7$\}$, $F = \{$il primo dado dà 4$\}$, $G = \{$il secondo dado dà 3$\}$. Esaminare l'indipendenza delle coppie di eventi E ed F, E e G, E ed $F \cap G$.

Soluzione. L'evento E è indipendente da F ed anche da G, in quanto

$$P(E \cap F) = P(\{(4,3)\}) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(E)\, P(F),$$

$$P(E \cap G) = P(\{(4,3)\}) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(E)\, P(G).$$

Inoltre, poiché $P(E|F \cap G) = 1$, l'evento E non è indipendente da $F \cap G$.

Ispirandoci a questo esempio, appare ragionevole definire l'indipendenza di tre eventi non limitandosi a richiedere l'indipendenza delle 3 possibili coppie, ma imponendo anche una condizione che coinvolga complessivamente i 3 eventi.

Definizione. Tre eventi E, F, G si dicono indipendenti se

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)\, P(F)\, P(G)$$

$$P(E \cap F) = P(E)\, P(F)$$

$$P(E \cap G) = P(E)\, P(G)$$

$$P(F \cap G) = P(F)\, P(G)$$

Si noti che se E, F, G sono indipendenti, allora E è indipendente da ogni evento formato a partire da F e G. Ad esempio E è indipendente da $F \cup G$. Infatti si ha

$$\begin{aligned}
P(E \cap (F \cup G)) &= P((E \cap F) \cup (E \cap G)) \\
&= P(E \cap F) + P(E \cap G) - P(E \cap F \cap G) \\
&= P(E)\, P(F) + P(E)\, P(G) - P(E)\, P(F)\, P(G) \\
&= P(E)\, [P(F) + P(G) - P(F)\, P(G)] \\
&= P(E)\, [P(F) + P(G) - P(F \cap G)] \\
&= P(E)\, P(F \cup G).
\end{aligned}$$

Esempio. Nel lancio di due monete non truccate, con $S = \{cc, ct, tc, tt\}$, stabilire se i seguenti eventi sono indipendenti:

$$T_1 = \{tc, tt\}, \qquad T_2 = \{ct, tt\}, \qquad U = \{cc, tt\}.$$

Soluzione. Si ricava facilmente che

$$\frac{1}{4} = P(\{tt\}) = P(T_1 \cap T_2) = P(T_1)\,P(T_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{4} = P(\{tt\}) = P(T_1 \cap U) = P(T_1)\,P(U) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{4} = P(\{tt\}) = P(T_2 \cap U) = P(T_2)\,P(U) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}.$$

Gli eventi T_1, T_2, U sono dunque indipendenti a coppie. Ciononostante, essendo

$$\frac{1}{4} = P(\{tt\}) = P(T_1 \cap T_2 \cap U) \neq P(T_1)\,P(T_2)\,P(U) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

i tre eventi non sono indipendenti.

Esempio. Nell'eperimento che consiste nel generare a caso una sequenza booleana di lunghezza 3, stabilire se i seguenti eventi sono indipendenti:

$$A = \{000, 001, 010, 100\}, \quad B = \{000, 001, 100, 101\}, \quad C = \{011, 100, 110, 111\}.$$

Soluzione. Lo spazio campionario è costituito da 8 sequenze equiprobabili, quindi

$$\frac{1}{8} = P(\{100\}) = P(A \cap B \cap C) \ = \ P(A)\, P(B)\, P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

$$\frac{3}{8} = P(\{000, 001, 100\}) = P(A \cap B) \ \neq \ P(A)\, P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{8} = P(\{100\}) = P(A \cap C) \ \neq \ P(A)\, P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{8} = P(\{100\}) = P(B \cap C) \ \neq \ P(B)\, P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Gli eventi A, B ,C non sono indipendenti poiché non sono indipendenti a coppie.

Definizione. Gli eventi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ si dicono indipendenti se per ogni sottoinsieme $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_r}$, $2 \le r \le n$, di questi eventi si ha

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_r}) = P(E_{i_1})\, P(E_{i_2})\ \ldots\ P(E_{i_r}).$$

Il numero di uguaglianze coinvolte nell'indipendenza di n eventi è pari al numero di sottoinsiemi di cardinalità $r = 2, 3, \ldots, n$ di un insieme di n elementi, ossia:

$$\sum_{r=2}^{n} \binom{n}{r} = 2^n - \binom{n}{1} - \binom{n}{0} = 2^n - n - 1.$$

Definizione. Gli eventi di una successione $E_1, E_2, \ldots$ si dicono indipendenti se ogni sottoinsieme finito di essi $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_r}$, $r \ge 2$, è formato da eventi indipendenti.

Notiamo che se gli eventi $E_1, E_2, \ldots$ sono indipendenti, allora ogni sequenza di eventi ottenuta sostituendo qualche evento E_i con l'evento complementare $\overline{E}_i$ è ancora costituita da eventi indipendenti.

Alcuni esperimenti talvolta consistono nell'effettuare una successione di sub-esperimenti identici, ripetuti nelle stesse condizioni, ai quali si dà il nome di *prove*.

Ad esempio, nel lancio ripetuto di una moneta, ogni lancio corrisponde ad una prova.

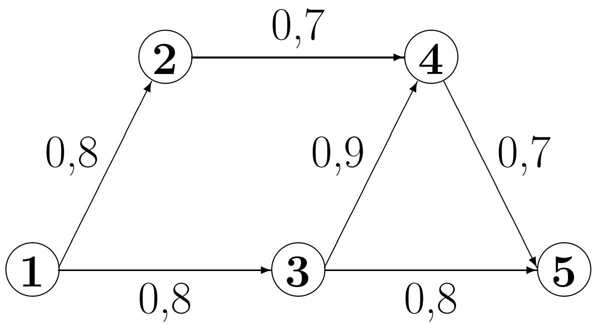
Talora è ragionevole supporre che gli esiti di ogni gruppo di prove non abbiano effetti sugli esiti delle altre prove. In tal caso diciamo che le prove sono indipendenti. Ne segue che la successione

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$$

costituisce un insieme di eventi indipendenti, dove E_i dipende esclusivamente dall'esito dell'i-esima prova.

Esercizio. Nel lancio di 3 monete non truccate, consideriamo i seguenti eventi: $T_1 = \{\text{testa al primo lancio}\}$, $B = \{\text{esce almeno una volta testa negli ultimi 2 lanci}\}$ e $U = \{\text{nei 3 lanci si ha lo stesso risultato}\}$. Studiare l'indipendenza di T_1, B e U.

Esempio. Si consideri un sistema costituito da 5 unità collegate mediante archi orientati (vedi figura, dove su ogni arco è indicata la probabilità che esso sia attivo, indipendentemente dagli altri archi). Calcolare la probabilità che vi sia almeno un percorso da **1** a **5** con tutti gli archi attivi.



Soluzione. Sia A = {gli archi del percorso **1245** sono attivi}, B = {gli archi del percorso **1345** sono attivi} e C = {gli archi del percorso **135** sono attivi}. Per la formula di inclusione/esclusione e l'indipendenza degli archi, la probabilità richiesta è

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

con $P(A) = 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7 = 0{,}392$; $P(B) = 0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}7 = 0{,}504$; $P(C) = 0{,}8\cdot 0{,}8 = 0{,}64$; $P(A\cap B) = 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9 = 0{,}2822$; $P(A\cap C) = 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8 = 0{,}2509$; $P(B\cap C) = 0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8 = 0{,}4032$; $P(A\cap B\cap C) = 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}8 = 0{,}2258$; ne segue: $P(A\cup B\cup C) = 0{,}8255$.

Esempio. Con riferimento all'esempio precedente, trovare l'errore nel seguente testo:

$$\begin{aligned}
P(A\cup B\cup C) &= 1-P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\
&= 1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C})\\
&= 1-(1-0{,}392)\cdot(1-0{,}504)\cdot(1-0{,}64)\\
&= 1-0{,}1086=0{,}8914.
\end{aligned}$$

Soluzione. Gli eventi A, B, C non sono indipendenti, quindi la seconda uguaglianza è falsa. Invero, gli eventi A e C sono indipendenti, mentre gli eventi A e B, e gli eventi B e C, non sono indipendenti.

Esempio. In una sequenza infinita di prove indipendenti ogni prova ha 2 esiti: successo con probabilità p e insuccesso con probabilità $1-p$. Qual è la probabilità che
(a) vi sia almeno un successo nelle prime n prove;
(b) vi siano esattamente k successi nelle prime n prove;
(c) tutte le prove abbiano successo?

Soluzione. (a) Ponendo $E_i = \{$si ha successo alla prova i-esima$\}$, $i = 1, 2, \ldots$, con $P(E_i) = p$ e $P(\overline{E}_i) = 1-p$, la probabilità richiesta è

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = P\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E}_i}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{E}_i) = 1-(1-p)^n.$$

(b) Consideriamo le sequenze di prove che nei primi n esiti hanno k successi e $n-k$ insuccessi. Ognuna di esse si realizza, per l'indipendenza, con probabilità $p^k(1-p)^{n-k}$. Ad esempio

$$P(E_1 \ldots E_k \overline{E}_{k+1} \ldots \overline{E}_n) = P(E_1)\ldots P(E_k)P(\overline{E}_{k+1})\ldots P(\overline{E}_n) = p^k(1-p)^{n-k}.$$

Vi sono $\binom{n}{k}$ sequenze di questo tipo poiché vi sono $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ permutazioni distinte di k successi e $n-k$ insuccessi, quindi la probabilità richiesta è

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

(c) La probabilità di avere n successi nelle prime n prove è, per l'indipendenza,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(E_i\right) = p^n.$$

Di conseguenza, per la proprietà di continuità della probabilità, la probabilità che tutte le prove abbiano successo è data da

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} p^n = \begin{cases} 0 & \text{se } p < 1 \\ 1 & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Esempio. Nel lancio di 2 dadi si vince se esce almeno una volta 6. Determinare la probabilità che in 5 partite (a) si vinca 2 volte; (b) si vinca almeno una volta.

Soluzione. Posto $E_i = \{$il dado i-esimo dà 6$\}$, $i = 1, 2$, la probabilità di vincita di una partita è $p = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$. Per l'indipendenza dei lanci risulta $p = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1)P(E_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$.

(a) Poichè le 5 partite sono indipendenti, la probabilità che in una generica partita si vinca 2 volte (e quindi si perda 3 volte) è

$$\binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = \binom{5}{2} \left(\frac{11}{36}\right)^2 \left(\frac{25}{36}\right)^3 = 0{,}3127.$$

(b) Esprimendo la probabilità di vincere almeno una volta in termini dell'evento complementare si ha

$$1 - (1-p)^5 = 1 - \left(\frac{25}{36}\right)^5 = 0{,}8385.$$

Esempio. Risolvere i quesiti dell'esempio precedente supponendo che il primo dado è stato truccato, nel senso che il 5 è stato modificato in 6.

Soluzione. Posto $E_i = \{$il dado i-esimo dà $6\}$, $i = 1, 2$, la probabilità di vincita di una partita è $p = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$. Per l'indipendenza dei lanci risulta $p = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1)P(E_2) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} - \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

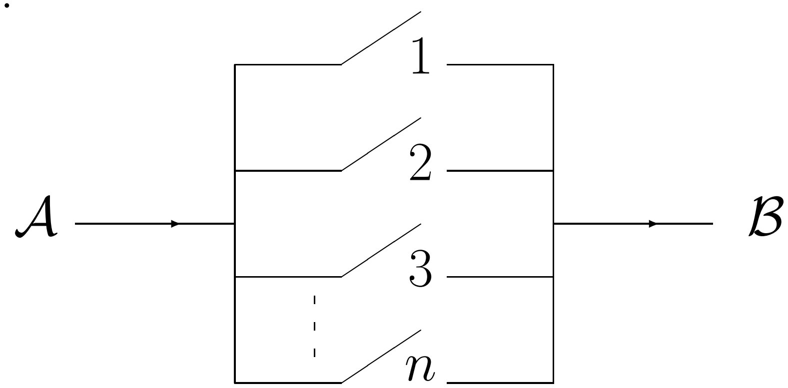
(a) Poichè le 5 partite sono indipendenti, la probabilità che in una generica partita si vinca 2 volte (e quindi si perda 3 volte) è

$$\binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = \binom{5}{2} \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{5}{9}\right)^3 = 0{,}3387.$$

(b) Esprimendo la probabilità di vincere almeno una volta in termini dell'evento complementare si ha

$$1 - (1-p)^5 = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^5 = 0{,}9471.$$

Esempio. Un sistema formato da n componenti è detto in parallelo se esso funziona quando almeno uno dei suoi componenti funziona.
Il componente i-esimo, indipendentemente dagli altri, funziona con probabilità p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Qual è la probabilità che il sistema funzioni?



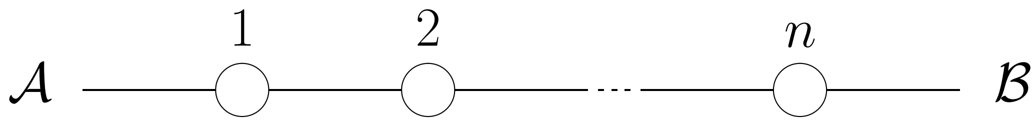
Soluzione.

Sia $E_i = \{$il componente i-esimo funziona$\}$. Allora

$$
\begin{aligned}
P(F_p) = P(\text{il sistema funziona}) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E_i}\right) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{E_i}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)
\end{aligned}
$$

per l'indipendenza.

Esempio. Un sistema formato da n componenti è detto in serie se esso funziona quando tutti i suoi componenti funzionano. Il componente i-esimo, indipendentemente dagli altri, funziona con probabilità p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Qual è la probabilità che il sistema funzioni?

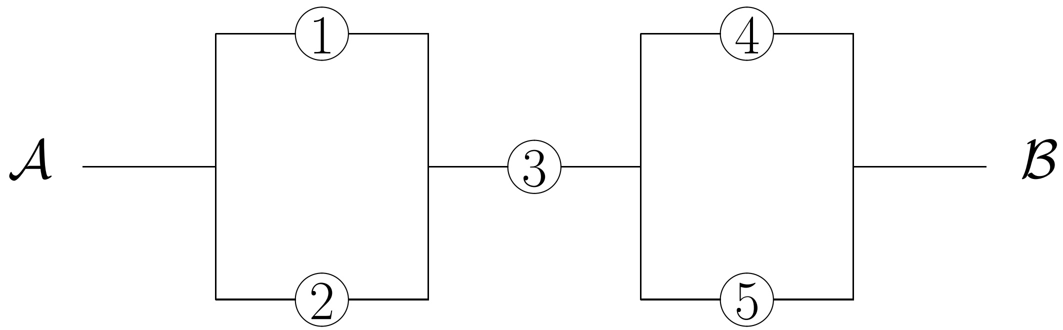


Soluzione. Sia $E_i = \{$il componente i-esimo funziona$\}$. Allora

$$P(F_s) = P(\text{il sistema funziona}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(E_i) = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

per l'indipendenza.

Esempio. Un sistema è formato da 5 componenti come in figura. Il componente i-esimo, indipendentemente dagli altri, funziona con probabilità p_i, $i = 1, 2, \dots, 5$. Qual è la probabilità che il sistema funzioni? E se $p_i = p$ per ogni i? Confrontare tale probabilità con quelle dei sistemi in serie e in parallelo con 3 componenti.



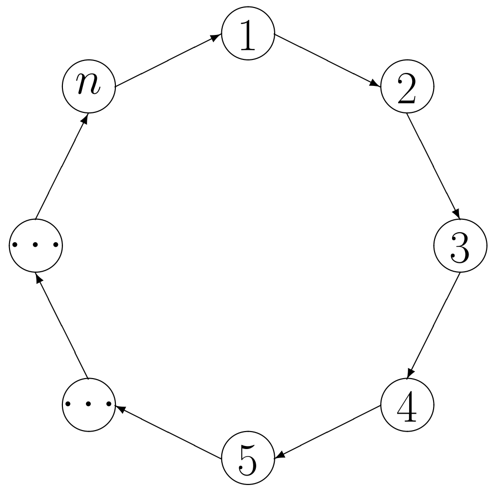
Soluzione. Sia $E_i = \{$il componente i-esimo funziona$\}$. Allora, per l'indipendenza,

$$\begin{aligned} P(F_m) &:= P(\text{il sistema funziona}) = P\left((E_1 \cup E_2) \cap E_3 \cap (E_4 \cup E_5)\right) \\ &= P(E_1 \cup E_2) P(E_3) P(E_4 \cup E_5) = (p_1 + p_2 - p_1 p_2)\, p_3\, (p_4 + p_5 - p_4 p_5). \end{aligned}$$

Pertanto, se $p_i = p$ per ogni i, risulta $P(F_m) = p^3 (2-p)^2$, $0 \le p \le 1$. Confrontando tale probabilità con con quelle dei sistemi in serie e in parallelo con 3 componenti si ha

$$P(F_s) = p^3 \le P(F_m) \le 1 - (1-p)^3 = P(F_p), \qquad 0 \le p \le 1.$$

Esempio. Si consideri un sistema costituito da n unità numerate da 1 a n (vedi figura). Ciascuna unità, indipendentemente dalle altre, sceglie a caso un numero da 1 a n e lo invia all'unità successiva in senso orario. Calcolare la probabilità che almeno un'unità riceva dall'unità precedente un numero identico al proprio, e valutarla quando $n \to \infty$ ricordando che $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha}$



Soluzione. Per $C_i = \{$l'unità i-esima riceve il mumero $i\}$, si ha $P(C_i) = \frac{1}{n}$ e quindi per l'indipendenza risulta

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{C}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{C}_i\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 1 - e^{-1} = 0{,}6321.$$

Esempio. Nell'esperimento che consiste nel lanciare n volte una moneta truccata, indicando con t la fuoriuscita di testa e con c di croce, lo spazio campionario è

$$S = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \colon \omega_i \in \{t, c\} \text{ per } 1 \le i \le n\},$$

le cui 2^n sequenze in generale non sono equiprobabili. Supponendo che per $0 < p < 1$

$$P(T_k) = P(\{\text{al } k\text{-esimo lancio esce testa}\}) = p, \qquad 1 \le k \le n,$$

e che i lanci siano indipendenti, calcolare le probabilità degli eventi $A_k = \{\text{nei primi } k$ lanci esce testa$\}$, $A'_k = \{\text{nei primi } k \text{ lanci esce croce}\}$, $B_k = \{\text{esce testa } k \text{ volte}\}$.

Soluzione. Per l'indipendenza si ha

$$P(A_k) = P(T_1 \cap T_2 \cap \ldots \cap T_k) = P(T_1)\, P(T_2) \ldots P(T_k) = p^k,$$

e analogamente $P(A'_k) = (1-p)^k$. Inoltre risulta

$$P(B_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

3.5 $P(\cdot|F)$ è una probabilità

Vedremo ora che la probabilità condizionata soddisfa i tre assiomi della probabilità.

Proposizione. Sia F un evento tale che $P(F) > 0$; allora la probabilità condizionata da F è una funzione $P(\cdot\,|F)\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ tale che

(a) $0 \leq P(A|F) \leq 1$ per ogni evento A;

(b) $P(S|F) = 1$;

(c) per ogni successione di eventi a due a due incompatibili $A_1, A_2, \ldots$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|F\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|F).$$

Dimostrazione. (a) Occorre mostrare che $0 \leq P(A \cap F)/P(F) \leq 1$. La prima disuguaglianza è ovvia, mentre la seconda discende dal fatto che $A \cap F \subset F$, da cui segue $P(A \cap F) \leq P(F)$.

(b) Si ha

$$P(S|F) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1.$$

(c) Risulta

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | F\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap F\right) \frac{1}{P(F)} = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap F)\right) \frac{1}{P(F)}.$$

Essendo gli eventi $A_i \cap F$ incompatibili, per la proprietà di additività numerabile si ha

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | F\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap F) \frac{1}{P(F)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|F),$$

e ciò conclude la dimostrazione.

Poiché la probabilità condizionata $P(\cdot\,|F)$ soddisfa gli assiomi della probabilità, ad essa si applicano le proposizioni sulla probabilità dimostrate in precedenza; ad esempio

$$P(A \cup B|F) = P(A|F) + P(B|F) - P(A \cap B|F).$$

Esempio. Stabilire se $\widetilde{P}(E|F) := \frac{P(E \cup F)}{P(F)}$, $\widetilde{Q}(E|F) := \frac{P(E \cap \overline{F})}{P(\overline{F})}$ e $\widetilde{R}(E|F) := \frac{P(E \cap \overline{F})}{P(F)}$ soddisfano i 3 assiomi della probabilità.

Soluzione. $\widetilde{P}(E|F)$ e $\widetilde{R}(E|F)$ non sono probabilità, $\widetilde{Q}(E|F)$ è una probabilità.

Proposizione. Siano F e B eventi tali che $P(F) > 0$, $P(B \cap F) > 0$ e $P(\overline{B} \cap F) > 0$; allora

$$P(A|F) = P(A|B \cap F)\, P(B|F) + P(A|\overline{B} \cap F)\, P(\overline{B}|F).$$

Dimostrazione. Dalle proprietà della probabilità condizionata segue

$$\begin{aligned} P(A|F) &= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A \cap B \cap F)}{P(F)} + \frac{P(A \cap \overline{B} \cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{P(A|B \cap F)\, P(B \cap F)}{P(F)} + \frac{P(A|\overline{B} \cap F)\, P(\overline{B} \cap F)}{P(F)} \\ &= P(A|B \cap F)\, P(B|F) + P(A|\overline{B} \cap F)\, P(\overline{B}|F). \end{aligned}$$

Notiamo che la formula appena dimostrata è un'estensione di quella delle alternative

$$P(A) = P(A|B)\, P(B) + P(A|\overline{B})\, P(\overline{B}).$$

Esempio. Un'urna contiene n biglie, di cui k sono rosse ($k \geq 3$) e le rimanenti sono blu. Se ne estraggono a caso 3 in sequenza, senza reinserimento. Se la prima estratta è rossa, qual è la probabilità che la terza estratta sia rossa?

Soluzione. Definiamo gli eventi $A_i = \{$l'i-esima biglia estratta è rossa$\}$, $i = 1, 2, 3$. Poiché si ha

$$P(A_2|A_1) = \frac{k-1}{n-1}, \qquad P(\overline{A_2}|A_1) = \frac{n-k}{n-1}$$

e

$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{k-2}{n-2}, \qquad P(A_3|A_1 \cap \overline{A_2}) = \frac{k-1}{n-2},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} P(A_3|A_1) &= P(A_3|A_1 \cap A_2)\, P(A_2|A_1) + P(A_3|A_1 \cap \overline{A_2})\, P(\overline{A_2}|A_1) \\ &= \frac{k-2}{n-2} \cdot \frac{k-1}{n-1} + \frac{k-1}{n-2} \cdot \frac{n-k}{n-1} = \frac{n(k-1) - 2(k-1)}{(n-2)(n-1)} \\ &= \frac{k-1}{n-1}. \end{aligned}$$

Notiamo che risulta $P(A_3|A_1) = P(A_2|A_1)$.

Un concetto importante della teoria della probabilità è quello della indipendenza condizionata di eventi.

Diciamo che due eventi A e B sono *condizionatamente indipendenti* dato F se

$$P(A|B \cap F) = P(A|F)$$

o, equivalentemente, se

$$P(A \cap B|F) = P(A|F)\, P(B|F).$$

La nozione di indipendenza condizionata si può facilmente estendere a più di 2 eventi.

Si noti che l'indipendenza di eventi non implica l'indipendenza condizionata, e viceversa.

Esempio. Un'urna contiene 3 monete, che danno testa con probabilità $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$.
(i) Se si lancia una moneta scelta a caso, qual è la probabilità che esca testa?
(ii) Se la moneta scelta dà testa al primo lancio, qual è la probabilità che la stessa dia testa anche al secondo lancio?

Soluzione. Definiamo gli eventi $F_j = \{\text{si sceglie la moneta } j\text{-esima}\}$, $j = 1, 2, 3$ e $T_i = \{\text{esce testa al lancio } i\text{-esimo}\}$, $i = 1, 2$. (i) Per la formula delle alternative si ha:

$$P(T_1) = \sum_{j=1}^{3} P(T_1|F_j)\, P(F_j) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

(ii) Se la moneta scelta dà testa al primo lancio, la probabilità che la stessa dia testa anche al secondo lancio è data da

$$P(T_2|T_1) = \frac{P(T_1 \cap T_2)}{P(T_1)}$$

dove

$$P(T_1 \cap T_2) = \sum_{j=1}^{3} P(T_1 \cap T_2|F_j)\, P(F_j).$$

È ragionevole assumere che i risultati di lanci distinti della medesima moneta siano condizionatamente indipendenti, quindi

$$P(T_1 \cap T_2|F_1) = P(T_1|F_1)\, P(T_2|F_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(T_1 \cap T_2|F_2) = P(T_1|F_2)\, P(T_2|F_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P(T_1 \cap T_2|F_3) = P(T_1|F_3)\, P(T_2|F_3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}.$$

Pertanto si ha

$$P(T_1 \cap T_2) = \sum_{j=1}^{3} P(T_1 \cap T_2|F_j)\, P(F_j) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{24}.$$

Infine, ricordando che $P(T_1) = \dfrac{1}{2}$ si ottiene

$$P(T_2|T_1) = \frac{P(T_1 \cap T_2)}{P(T_1)} = \frac{7/24}{1/2} = \frac{7}{12} = 0{,}5833.$$

Esempio. In un laboratorio di analisi l'esame del sangue è efficace al 95% nell'individuare la presenza di una certa malattia. L'esame tuttavia rileva anche dei "falsi positivi" nell'1% delle persone sane. (Con probabilità 0,01 l'esame indica erroneamente come malata una persona sana). Se lo 0,5% della popolazione è affetto dalla malattia, qual è la probabilità che una persona risultata positiva all'esame abbia la malattia?

Soluzione. Definiamo gli eventi $F = \{$la persona ha la malattia$\}$ ed $E = \{$l'esame dà esito positivo$\}$. Dalle ipotesi segue:

$$P(F) = 0{,}005 \qquad P(\overline{F}) = 0{,}995 \qquad P(E|F) = 0{,}95 \qquad P(E|\overline{F}) = 0{,}01$$

e quindi

$$P(E) = P(E|F)\,P(F) + P(E|\overline{F})\,P(\overline{F}) = 0{,}95 \cdot 0{,}005 + 0{,}01 \cdot 0{,}995 = 0{,}0147.$$

Pertanto la probabilità richiesta è

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{P(E|F)\,P(F)}{P(E)} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}005}{0{,}0147} = \frac{0{,}00475}{0{,}0147} \approx 0{,}323.$$

Esempio. Nell'esempio precedente, supponiamo che una persona si sottoponga 2 volte al test. Se la persona è risultata positiva entrambe le volte, qual è la probabilità che abbia la malattia?

Soluzione. Con riferimento agli eventi $F = \{$la persona scelta a caso ha la malattia$\}$ ed $E_k = \{$il k-esimo esame dà esito positivo$\}$, con $k = 1, 2$, dalle ipotesi fatte segue:

$$P(F) = 0{,}005 \qquad P(\overline{F}) = 0{,}995 \qquad P(E_k|F) = 0{,}95 \qquad P(E_k|\overline{F}) = 0{,}01.$$

Inoltre assumiamo che i 2 test siano *condizionatamente indipendenti*, ossia:

$$P(E_1 \cap E_2|F) = P(E_1|F)\, P(E_2|F) = (0{,}95)^2 = 0{,}9025$$

$$P(E_1 \cap E_2|\overline{F}) = P(E_1|\overline{F})\, P(E_2|\overline{F}) = (0{,}01)^2 = 0{,}0001$$

e quindi

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2) &= P(E_1 \cap E_2|F)\, P(F) + P(E_1 \cap E_2|\overline{F})\, P(\overline{F}) \\ &= 0{,}9025 \cdot 0{,}005 + 0{,}0001 \cdot 0{,}995 = 0{,}004612. \end{aligned}$$

Pertanto la probabilità richiesta è

$$P(F|E_1 \cap E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2|F)\, P(F)}{P(E_1 \cap E_2)} = \frac{0{,}9025 \cdot 0{,}005}{0{,}004612} = \frac{0{,}0045125}{0{,}004612} = 0{,}9784.$$

Esercizi per casa

3.a) Si consideri l'esperimento che consiste nell'estrarre 2 biglie da un'urna che contiene 1 biglia azzurra, 2 bianche e 3 rosse. Posto $A = \{\text{le 2 biglie estratte non sono rosse}\}$, $B = \{\text{almeno una delle 2 biglie estratte è bianca}\}$, $C = \{\text{una delle 2 biglie estratte è azzurra}\}$, studiare l'indipendenza di tali eventi, nel caso di estrazioni
(i) con reinserimento,
(ii) senza reinserimento.

3.b) Una moneta non truccata viene lanciata 4 volte. Calcolare la probabilità
(i) che esca testa almeno 2 volte,
(ii) che esca testa almeno 2 volte, sapendo che esce testa al primo lancio,
(iii) che esca testa al primo lancio, sapendo che esce testa almeno 2 volte nei 4 lanci.

3.c) Si estraggono le biglie in sequenza da un'urna contenente n biglie numerate da 1 a n. Si ha concordanza all'estrazione k-esima se in tale estrazione esce la biglia numero k, per $k = 1, 2, \ldots, n$.
(i) Se nella prima estrazione si verifica concordanza, qual è la probabilità che si abbia concordanza nella seconda estrazione?
(ii) Se nella seconda estrazione si verifica concordanza, qual è la probabilità che si abbia concordanza nella terza estrazione?

3.d) Da un'urna contenente $2n+1$ biglie numerate da $-n$ a n si estraggono due biglie a caso.
(i) Calcolare la probabilità che il prodotto dei due numeri estratti sia positivo, sia nullo, sia negativo.
(ii) Verificare che la somma delle tre probabilità è 1.

3.e) Se si effettua un vaccino antinfluenzale, la probabilità di contrarre l'influenza risulta pari a 0,3, mentre tale probabilità aumenta a 0,5 se si sceglie di non effettuare il vaccino.
(i) Sapendo che 6 individui su 10 si vaccinano, quanto vale la probabilità di contrarre l'influenza?
(ii) Se un individuo contrae l'influenza, qual è la probabilità che si era vaccinato?