

Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica ed Informatica Applicata

Università di Salerno

Lezione n°11

Algoritmo del Simplexso:

- Passi fondamentali
- Esempio

R. Cerulli — F. Carrabs

Calcolo della soluzione ottima di un problema di PL.

Consideriamo il problema (PL) in Forma Standard

$$\begin{aligned}\min \quad & z = \underline{c}^T \underline{x} \\ & A\underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0}\end{aligned}$$

Data una base B ammissibile, riscriviamo il problema come:

$$\begin{aligned}\min \quad & z = z_0 - \sum_{j \in N} (z_j - c_j) x_j & z_0 &= \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b} \\ & & z_j &= \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j \\ \underline{x}_B &= \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j & \underline{\bar{b}} &= A_B^{-1} \underline{b} \\ & & \underline{y}_j &= A_B^{-1} \underline{a}_j \\ \underline{x} &\geq \underline{0}\end{aligned}$$

5. Teorema (Condizione di ottimalità)

Una soluzione di base non degenera di un problema di PL è ottima se e solo se:

$$1) \bar{b}_i \geq 0 \quad \forall i \in B \quad (\text{ammissibile})$$

$$2) z_j - c_j \leq 0 \quad \forall j \in N \quad (\text{non migliorabile})$$

Scelta della variabile entrante.

Quando le condizioni di ottimalità non sono verificate è sempre possibile scegliere una variabile fuori base x_k da portare in base per migliorare l'obiettivo.

Quando esistono più alternative la scelta non preclude il raggiungimento della soluzione ottima, ma può al peggio aumentare il tempo necessario per la sua ricerca.

Scelta della variabile entrante.

Il metodo del gradiente

Sceglie la variabile fuori base x_k che localmente fa aumentare più rapidamente l'obiettivo:

$$z_k - c_k = \max_{j \in N} \{z_j - c_j\}$$

Scelta della variabile uscente.

Determinata la variabile fuori base x_k da portare in base, si deve scegliere la variabile uscente.

Esistono due situazioni alternative:

a) $y_{ik} \leq 0 \quad \forall i=1, \dots, m$

La soluzione del problema è illimitata (non esiste un punto di ottimo).

In questo caso facendo aumentare x_k il valore di nessuna variabile di base diminuisce:

$$z = z_0 - (z_k - c_k)x_k \leq z_0 \quad \text{Per qualsiasi valore di } x_k$$

b) $y_{rk} > 0$ per almeno un r

La soluzione di base non è ottima, bisogna quindi passare alla base successiva.

Nota

- Se una variabile di base x_{B_i} è nulla (soluzione degenera) e $y_{ik} > 0$, allora x_k entra in base con valore nullo.
- In questo caso la soluzione non cambia, ed in particolare rimane degenera.
- Per questa ragione la ricerca della soluzione potrebbe rimanere bloccata generando sempre la medesima soluzione (**cycling**).
- Il cycling è piuttosto raro e comunque esistono strategie per evitarlo.

L' algoritmo del Simpleso

INPUT:

Problema di PL (in forma standard) e una soluzione di base ammissibile.

1. Test di ottimalità:

Se $z_j - c_j \leq 0 \quad \forall j \in N$ allora la soluzione corrente è ottima e l'algoritmo termina.

Altrimenti andare al passo 2.

2. Scelta della variabile entrante in base:

Scegliere una variabile fuori base x_k tale che $z_k - c_k > 0$ ed andare al passo 3.

3. Test di illimitatezza:

Se $y_{ik} \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$, allora la soluzione del problema è illimitata (non esiste ottimo finito), e l'algoritmo termina. Altrimenti vai al Passo 4.

4. Scelta della variabile uscente dalla base: Test dei minimi rapporti

Scegliere la variabile x_r tale che:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{j \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_j}{y_{jk}} : y_{jk} > 0 \right\}$$

x_r è la variabile uscente e la variabile entrante x_k assume valore pari a $\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$

5. Aggiornamento della base:

Aggiornare gli indici delle variabili in base (B) e quelli delle variabili fuori base (N).
Tornare al passo 1.

Esempio: Applicazione del Simplexso

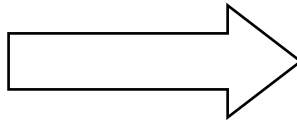
$$\min z = -x_1 - 2x_2$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 \geq -2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$\underline{x} \geq 0$$



$$\min z = -x_1 - 2x_2$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 = 2$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 5$$

$$\underline{x} \geq 0 \quad x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \{3, 4, 5\} \quad N = \{1, 2\}$$

Esempio: Applicazione del Simplexso (Cont.)

$$A_B = \begin{matrix} & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} \Leftrightarrow \underline{x}_B = I \underline{b} \Leftrightarrow \underline{x}_B = \underline{b}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = A_B^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = 1, x_4 = 2, x_5 = 5$$

$$z_0 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b} \Rightarrow z_0 = [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 0$$

Esempio: Applicazione del Simplexso (Cont.)

Test di Ottimalità: calcolo di $z_j - c_j$ per $j \in N$

$$B = \{3, 4, 5\} \quad N = \{1, 2\}$$

$$z_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j \quad \forall j \in N$$

$$(z_1 - c_1) = [0 \ 0 \ 0] I \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = 0 + 1 = 1$$

$$(z_2 - c_2) = [0 \ 0 \ 0] I \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - (-2) = 0 + 2 = 2$$

Esempio: Applicazione del Simpleso (Cont.)

$$(z_2 - c_2) = \max_{j \in N} \{z_j - c_j\} \Leftrightarrow \max_{j \in \{1,2\}} \{(z_1 - c_1), (z_2 - c_2)\}$$

$$(z_2 - c_2) = \max\{1,2\} = 2 \quad \Longrightarrow \quad x_2 \text{ entra in base}$$

Quale variabile esce dalla base?

Regola del minimo rapporto:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{j \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_j}{y_{jk}} : y_{jk} > 0 \right\}$$

$$\underline{y}_j = A_B^{-1} \underline{a}_j$$

$$\underline{\bar{b}} = A_B^{-1} \underline{b}$$

Esempio: Applicazione del Simplexso (Cont.)

$$\underline{y}_2 = A_B^{-1} \underline{a}_2 = I \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\bar{b}_1}{y_{12}} = \min_{j \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_j}{y_{jk}} : y_{jk} > 0 \right\} \Rightarrow x_2 = 1 = \min \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{1} \right\}$$

x_3 esce dalla base; x_2 entra in base con valore 1

Nuova base: $B = \{2, 4, 5\}$ $N = \{1, 3\}$

Esempio: Applicazione del Simplexso (Cont.)

$$A_B = \begin{array}{c} x_2 \quad x_4 \quad x_5 \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

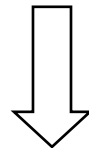
Calcoliamo A_B^{-1}

$$A_B^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Esempio: Applicazione del Simpleso (Cont.)

$$\underline{\mathbf{x}}_B = \mathbf{A}_B^{-1} \underline{\mathbf{b}} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_B^{-1} \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$z_0 = \underline{\mathbf{c}}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \underline{\mathbf{b}}$$



$$z_0 = [-2 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = [-2 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = -2$$

Esempio: Applicazione del Simplexso (Cont.)

Test di Ottimalità: calcolo di $z_j - c_j$ per $j \in N$

$$B = \{2, 4, 5\} \quad N = \{1, 3\}$$

$$z_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j \quad \forall j \in N$$

$$(z_1 - c_1) = [-2 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = [-2 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = 5$$

$$(z_3 - c_3) = [-2 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = [-2 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -2$$

Esempio: Applicazione del Simpleso (Cont.)

$$z_j - c_j > 0 \text{ per } j=1 \quad \Rightarrow \quad x_1 \text{ entra in base}$$

Quale variabile esce dalla base?

Regola del minimo rapporto:

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{j \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_j}{y_{jk}} : y_{jk} > 0 \right\}$$

$$\underline{y}_j = A_B^{-1} \underline{a}_j$$

$$\underline{\bar{b}} = A_B^{-1} \underline{b}$$

Esempio: Applicazione del Simpleso (Cont.)

$$\underline{y}_1 = A_B^{-1} \underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\bar{b}_2}{y_{21}} = \min_{j \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_j}{y_{jk}} : y_{jk} > 0 \right\} \Rightarrow x_1 = 1 = \min \left\{ \frac{1}{1}, \frac{4}{3} \right\}$$

x_4 esce dalla base; x_1 entra in base con valore 1

Nuova base: $B = \{2, 1, 5\}$ $N = \{4, 3\}$

Esempio: Applicazione del Simpleso (Cont.)

$$A_B = \begin{array}{c} x_2 \quad x_1 \quad x_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

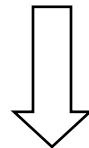
Calcoliamo A_B^{-1}

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio: Applicazione del Simpleso (Cont.)

$$\underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = A_B^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z_0 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b}$$



$$z_0 = [-2 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = [3 \ -5 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = -7$$

Esempio: Applicazione del Simpleso (Cont.)

Test di Ottimalità: calcolo di $z_j - c_j$ per $j \in N$

$$B = \{2, 1, 5\} \quad N = \{4, 3\}$$

$$z_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j \quad \forall j \in N$$

$$(z_3 - c_3) = [-2 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = [3 \ -5 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 3$$

$$(z_4 - c_4) = [-2 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = [3 \ -5 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -5$$

Esempio: Applicazione del Simpleso (Cont.)

$$z_j - c_j > 0 \text{ per } j=3 \quad \Rightarrow \quad x_3 \text{ entra in base}$$

Quale variabile esce dalla base?

Regola del minimo rapporto:

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{j \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_j}{y_{jk}} : y_{jk} > 0 \right\}$$

$$\underline{y}_j = A_B^{-1} \underline{a}_j$$

$$\bar{\underline{b}} = A_B^{-1} \underline{b}$$

Esempio: Applicazione del Simplexso (Cont.)

$$y_3 = A_B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{\bar{b}_3}{y_{33}} = \min_{j \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_j}{y_{jk}} : y_{jk} > 0 \right\} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2} = \min \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

x_5 esce dalla base; x_3 entra in base con valore 1/2

Nuova base: $B = \{2, 1, 3\}$ $N = \{4, 5\}$

Esempio: Applicazione del Simpleso (Cont.)

$$A_B = \begin{matrix} & x_2 & x_1 & x_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

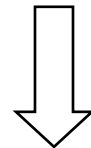
Calcoliamo A_B^{-1}

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Esempio: Applicazione del Simpleso (Cont.)

$$\underline{\mathbf{x}}_B = \mathbf{A}_B^{-1} \underline{\mathbf{b}} \implies \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_B^{-1} \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$z_0 = \underline{\mathbf{c}}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \underline{\mathbf{b}}$$



$$z_0 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = -\frac{17}{2}$$

Esempio: Applicazione del Simplexso (Cont.)

Test di Ottimalità: calcolo di $z_j - c_j$ per $j \in N$

$$B = \{2, 1, 3\} \quad N = \{4, 5\}$$

$$z_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j \quad \forall j \in N$$

$$(z_4 - c_4) = [-2 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = [0 \ -1/2 \ -3/2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -\frac{1}{2}$$

$$(z_5 - c_5) = [-2 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = [0 \ -1/2 \ -3/2] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -\frac{3}{2}$$