

Lezioni di Ricerca Operativa

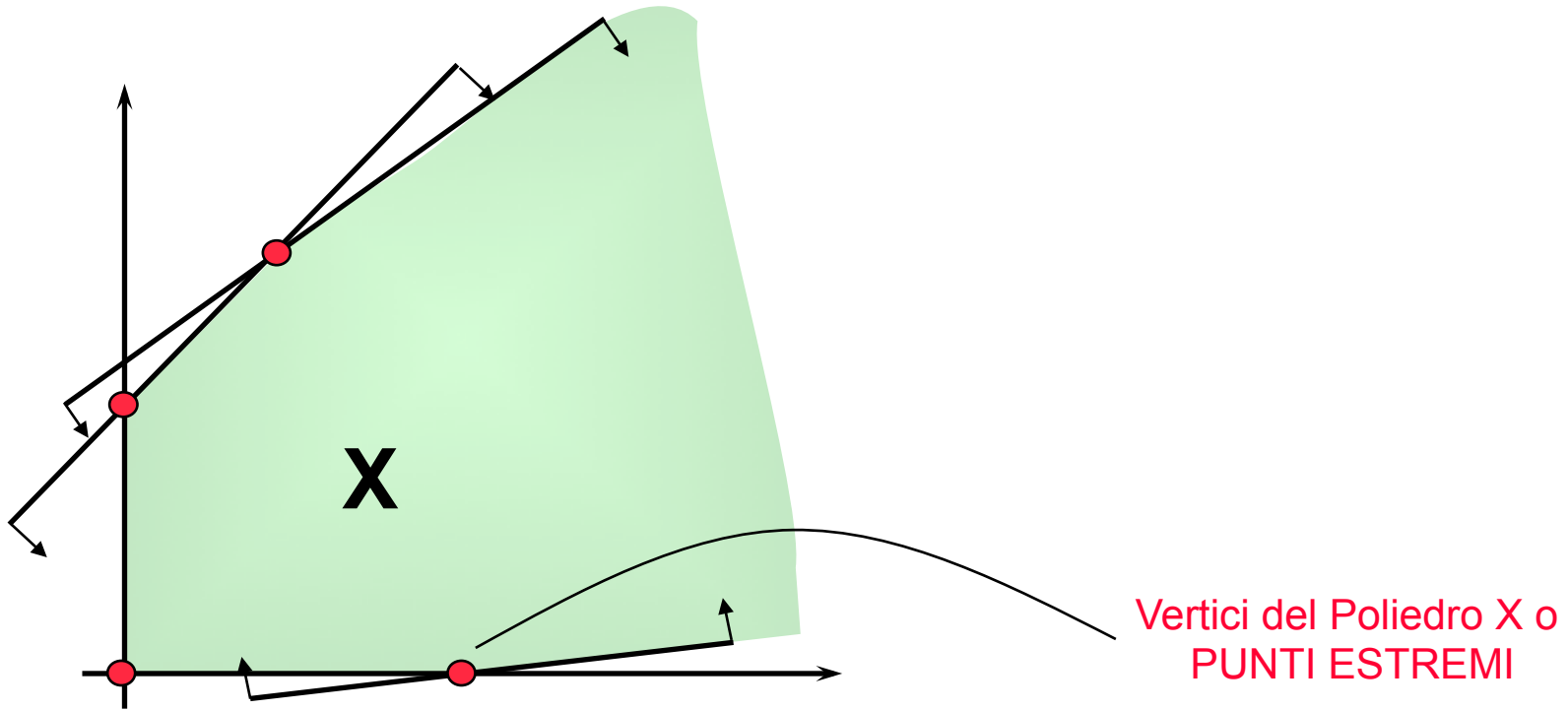
Corso di Laurea in Informatica ed Informatica Applicata
Università di Salerno

Lezione n° 7

- Cono di recessione.
- Teorema della rappresentazione.

R. Cerulli – F. Carrabs

Vertici di un poliedro



Definizione

Un punto di un poliedro X è un **punto estremo** se e solo se non può essere espresso come combinazione convessa STRETTA di altri punti di X .

Teorema (no dim.)

(Proprietà dei punti estremi di un poliedro limitato)

Dato un poliedro X non vuoto e limitato con punti estremi $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k$, ogni punto $\underline{y} \in X$ può essere espresso come combinazione convessa dei punti estremi di X , cioè:

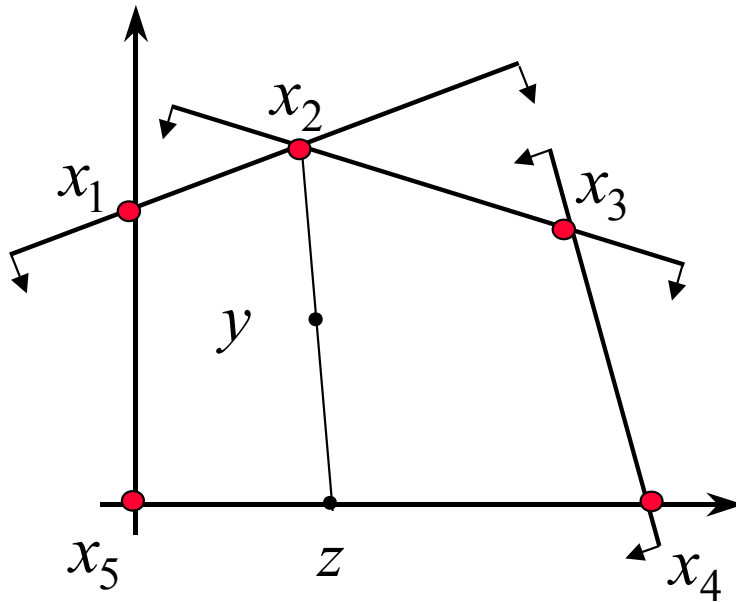
$$\underline{y} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \underline{x}_j$$

con

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_j \geq 0 \quad \forall j=1, \dots, k$$

Esempio

Voglio esprimere il vettore \underline{y} come combinazione convessa dei vertici del politopo



$$\underline{y} = \lambda \underline{x}_2 + (1 - \lambda) \underline{z} \quad \lambda \in (0, 1)$$

$$\underline{z} = \mu \underline{x}_5 + (1 - \mu) \underline{x}_4 \quad \mu \in (0, 1)$$

sostituisco:

$$\underline{y} = \lambda \underline{x}_2 + \mu(1 - \lambda) \underline{x}_5 + (1 - \mu)(1 - \lambda) \underline{x}_4$$

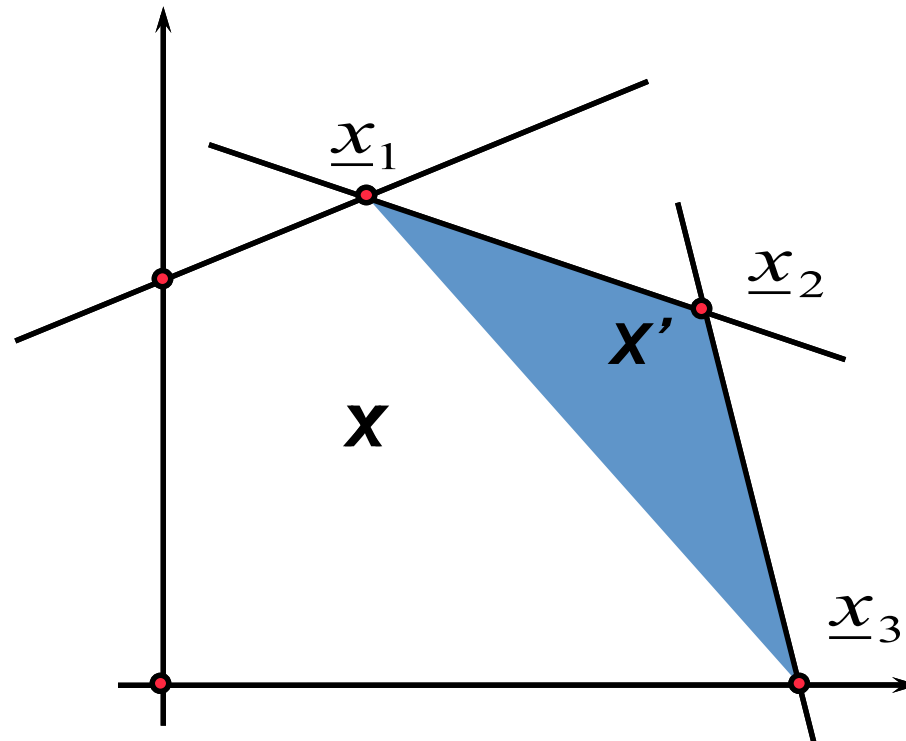
Nota che :

$$1. \quad \lambda \geq 0 \quad \mu(1 - \lambda) \geq 0 \quad (1 - \mu)(1 - \lambda) \geq 0$$

$$2. \quad \lambda + \mu(1 - \lambda) + (1 - \mu)(1 - \lambda) = \lambda + (1 - \lambda)(\mu + 1 - \mu) = 1$$

In generale:

Una combinazione convessa di $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$ permette di ottenere tutti i punti di $X' \subset X$



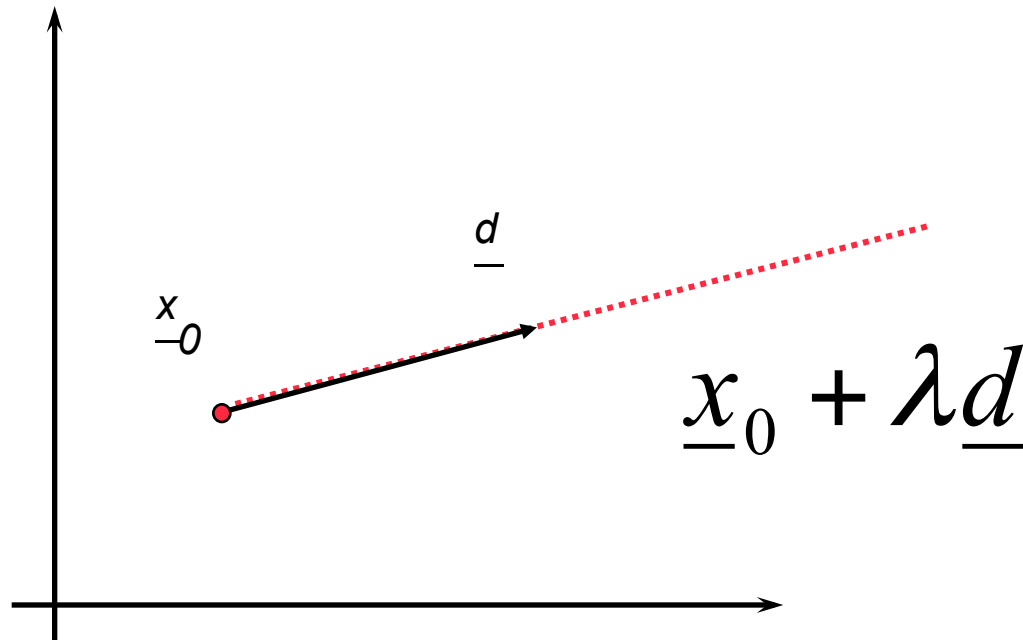
Quando un poliedro è illimitato?

Bisogna considerare le sue **direzioni estreme**

Raggi e direzioni di un poliedro

Definizione.

Un RAGGIO R di vertice \underline{x}_0 e di direzione \underline{d} è un insieme di punti della forma: $R = \{ \underline{x}_0 + \lambda \underline{d} : \lambda \geq 0 \}$



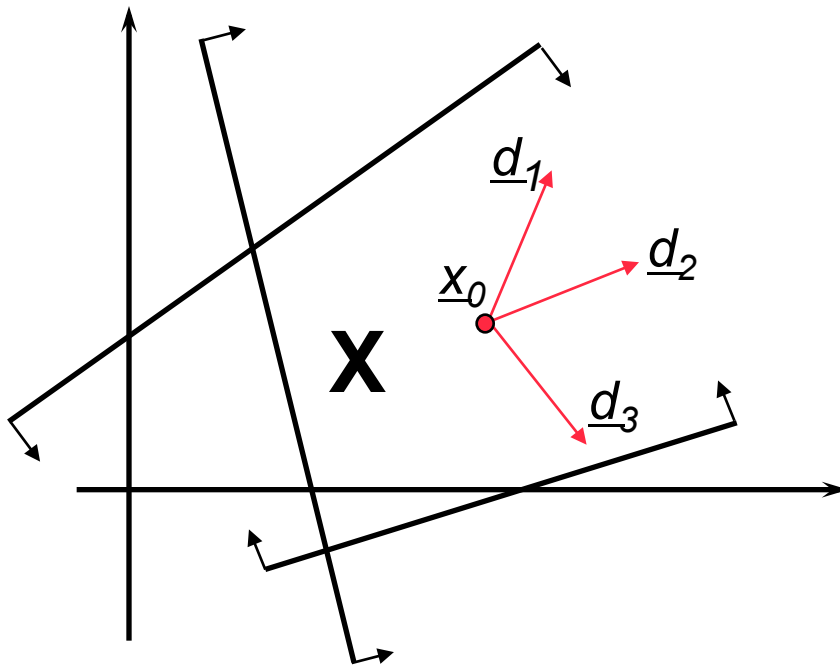
Raggi e direzioni di un poliedro

Definizione

Dato un poliedro X , il vettore \underline{d} è una **direzione** di X se e solo se per ogni punto $\underline{x}_0 \in X$, il raggio

$$\underline{x}_0 + \lambda \underline{d}, \lambda \geq 0$$

appartiene a X .



\underline{d}_1 NON è direzione

\underline{d}_2 è direzione

\underline{d}_3 NON è direzione

Come si calcolano le direzioni di un poliedro?

(Procedimento algebrico)

$$X = \left\{ \underline{x} : A\underline{x} \leq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0} \right\} \text{ (poliedro)}$$

Dato un qualsiasi punto $\underline{x} \in X$, il vettore \underline{d} è una direzione del poliedro X se:

$$(i) \quad A(\underline{x} + \lambda \underline{d}) \leq \underline{b}$$

$$(ii) \quad \underline{x} + \lambda \underline{d} \geq \underline{0}$$

$$(iii) \quad \underline{d} \neq \underline{0}$$

$$(i) \quad A(\underline{x} + \lambda \underline{d}) \leq \underline{b}$$

$$(ii) \quad \underline{x} + \lambda \underline{d} \geq \underline{0}$$

$$(iii) \quad \underline{d} \neq \underline{0}$$

(i) poiché $x \in X$:

$$A(\underline{x} + \lambda \underline{d}) \leq \underline{b} \Leftrightarrow A\underline{x} + \lambda A\underline{d} \leq \underline{b} \Leftrightarrow \lambda A\underline{d} \leq 0 \Leftrightarrow A\underline{d} \leq \underline{0}$$

$$(ii) \quad \underline{x} + \lambda \underline{d} \geq \underline{0} \Leftrightarrow \underline{d} \geq \underline{0}$$

Quindi le direzioni \underline{d} del poliedro X sono tutti e soli i vettori tali che:

$$A\underline{d} \leq \underline{0}$$

$$\underline{d} \geq \underline{0}$$

$$\underline{d} \neq \underline{0}$$

Adesso vediamo un esempio poi vediamo
come si interpretano geometricamente

Esempio 1

$$X = \left\{ (x_1, x_2) : -3x_1 + x_2 \leq -2, -x_1 + x_2 \leq 2, -x_1 + 2x_2 \leq 8 \right. \\ \left. x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$$

L'insieme delle direzioni di X è dato dai vettori

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

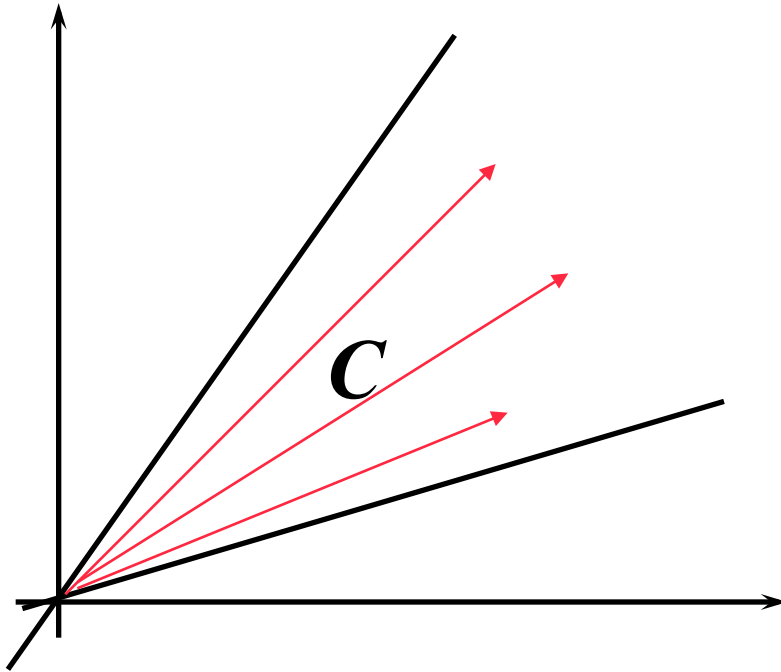
$$D = \left\{ (d_1, d_2) : -3d_1 + d_2 \leq 0, -d_1 + d_2 \leq 0, -d_1 + 2d_2 \leq 0 \right. \\ \left. d_1 + d_2 = 1, d_1 \geq 0, d_2 \geq 0 \right\}$$

$$\underline{d}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \underline{d}'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

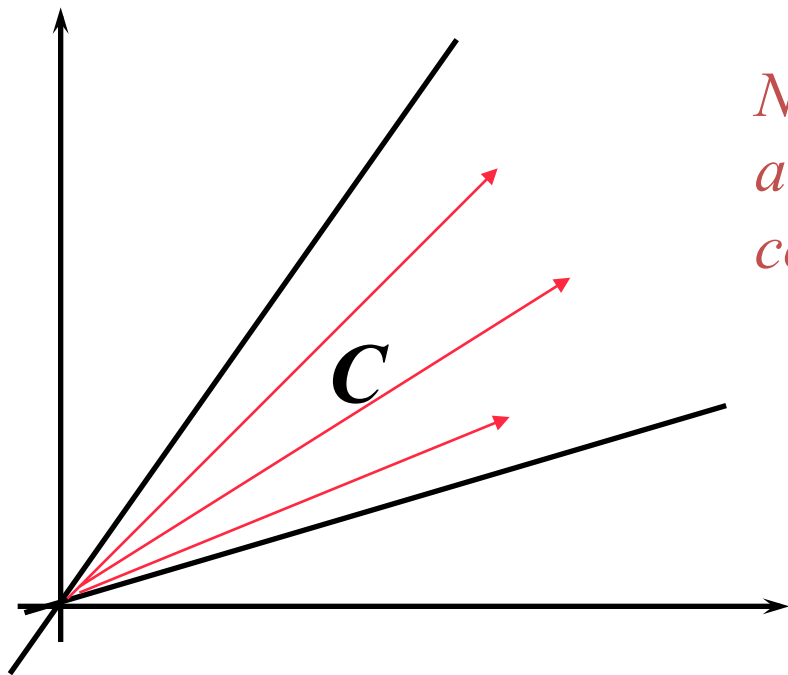
Coni Convessi

Definizione:

Un cono convesso C è un insieme convesso tale che se $\underline{x} \in C$ allora anche $\lambda \underline{x} \in C \quad \forall \lambda \geq 0$.

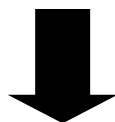


Un cono convesso è un insieme convesso che contiene raggi che partono dall'origine (perché?)



*Nota:
alcuni raggi possono essere espressi
come combinazione conica di altri*

*In generale:
un cono convesso può essere espresso in funzione dei suoi raggi*

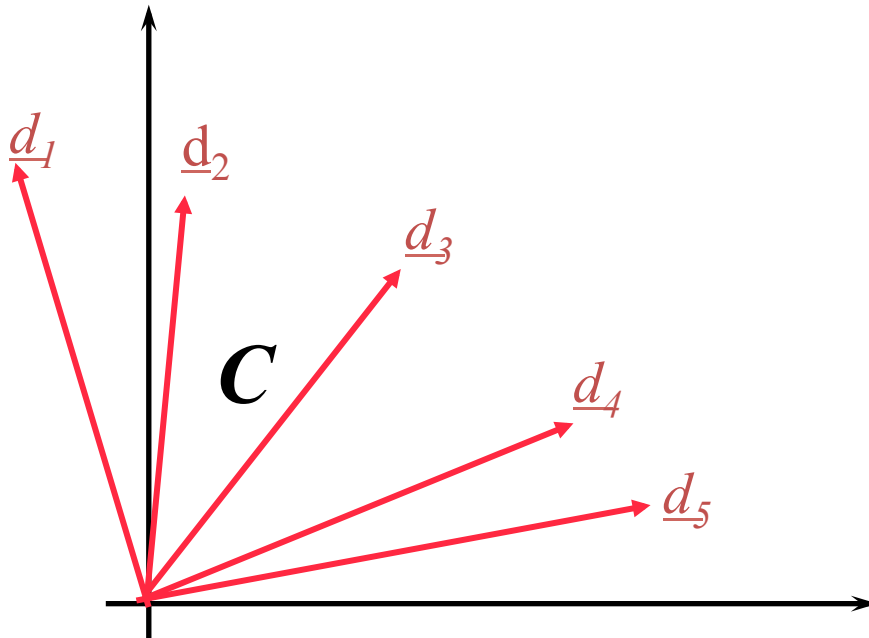


*Solo alcuni raggi sono sufficienti (detti RAGGI ESTREMI) perché gli
altri sono espressi come combinazione conica di questi*

Coni Convessi

Dato un insieme di vettori $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \dots, \underline{d}_k$ il cono convesso generato da questi vettori è dato da:

$$C = \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j \underline{d}_j : \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, k \right\}$$



Direzioni estreme di un poliedro

Definizione.

Una direzione \underline{d} di un poliedro X , è una **direzione estrema** di X se e solo se non è esprimibile come combinazione conica di altre direzioni di X .

Come si calcolano le direzioni di un poliedro?

(Procedimento geometrico)

$$X = \left\{ \underline{x} : A\underline{x} \leq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0} \right\} \text{ (poliedro)}$$

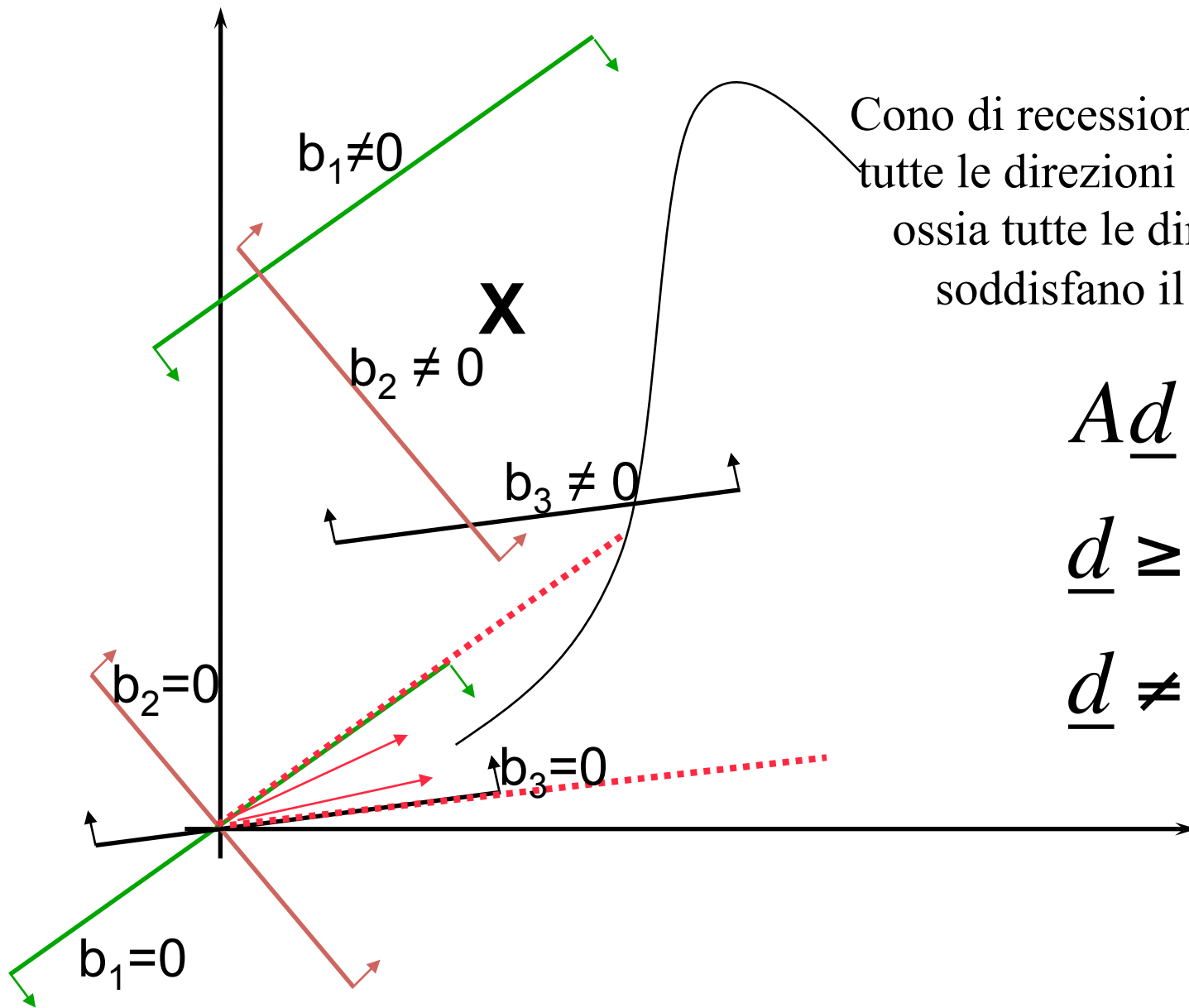
Abbiamo visto che d è una direzione del poliedro se:

$$A\underline{d} \leq \underline{0}$$

$$\underline{d} \geq \underline{0}$$

$$\underline{d} \neq \underline{0}$$

Questo è un sistema omogeneo che definisce un cono poliedrico (detto CONO di RECESSIONE) ottenuto traslando gli iperpiani che definiscono X parallelamente a se stessi fino all'origine

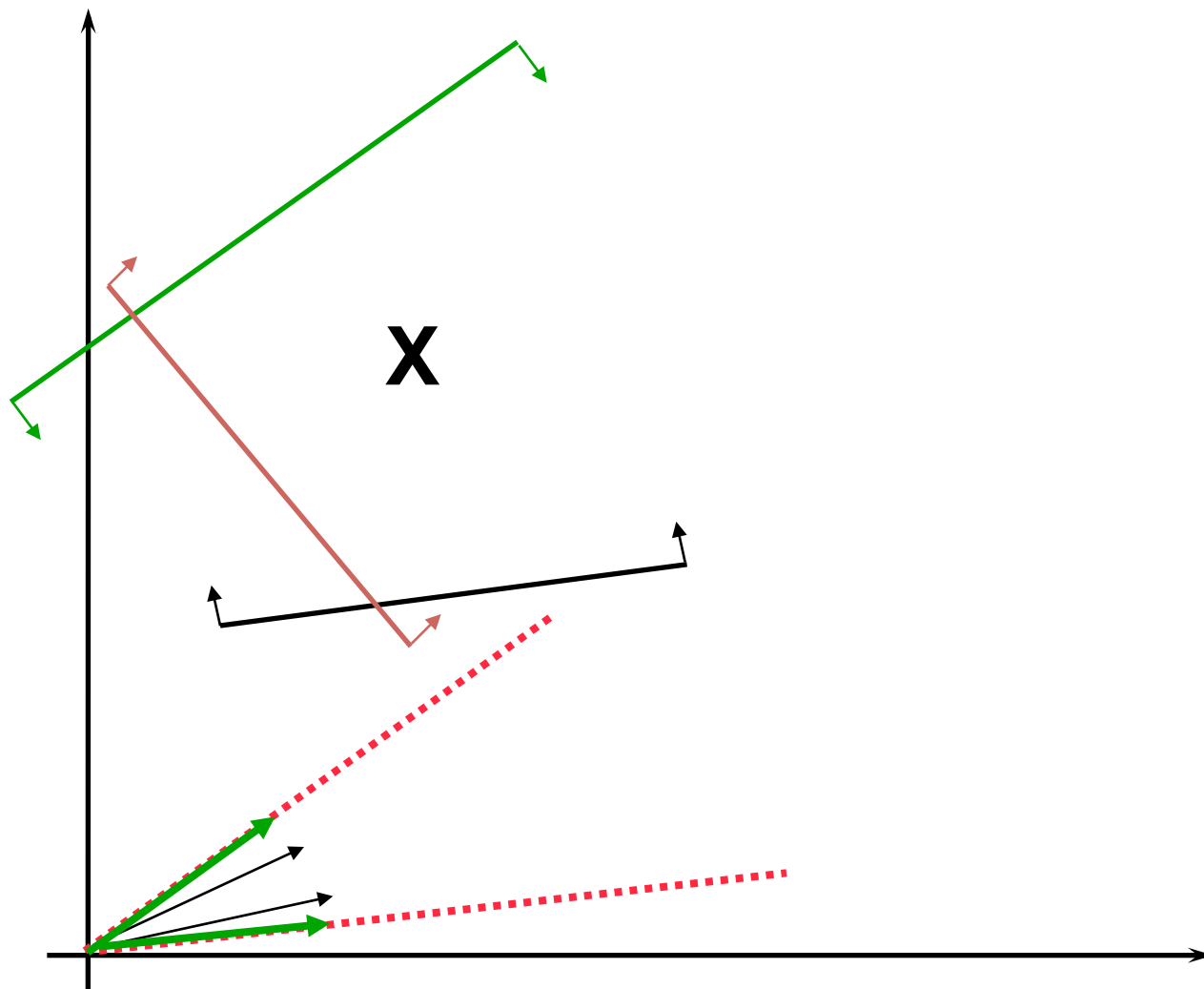


Cono di recessione contenente tutte le direzioni del poliedro, ossia tutte le direzioni che soddisfano il sistema:

$$A\underline{d} \leq \underline{0}$$

$$\underline{d} \geq \underline{0}$$

$$\underline{d} \neq \underline{0}$$



Direzioni estreme del poliedro (direzioni estreme del cono di recessione)

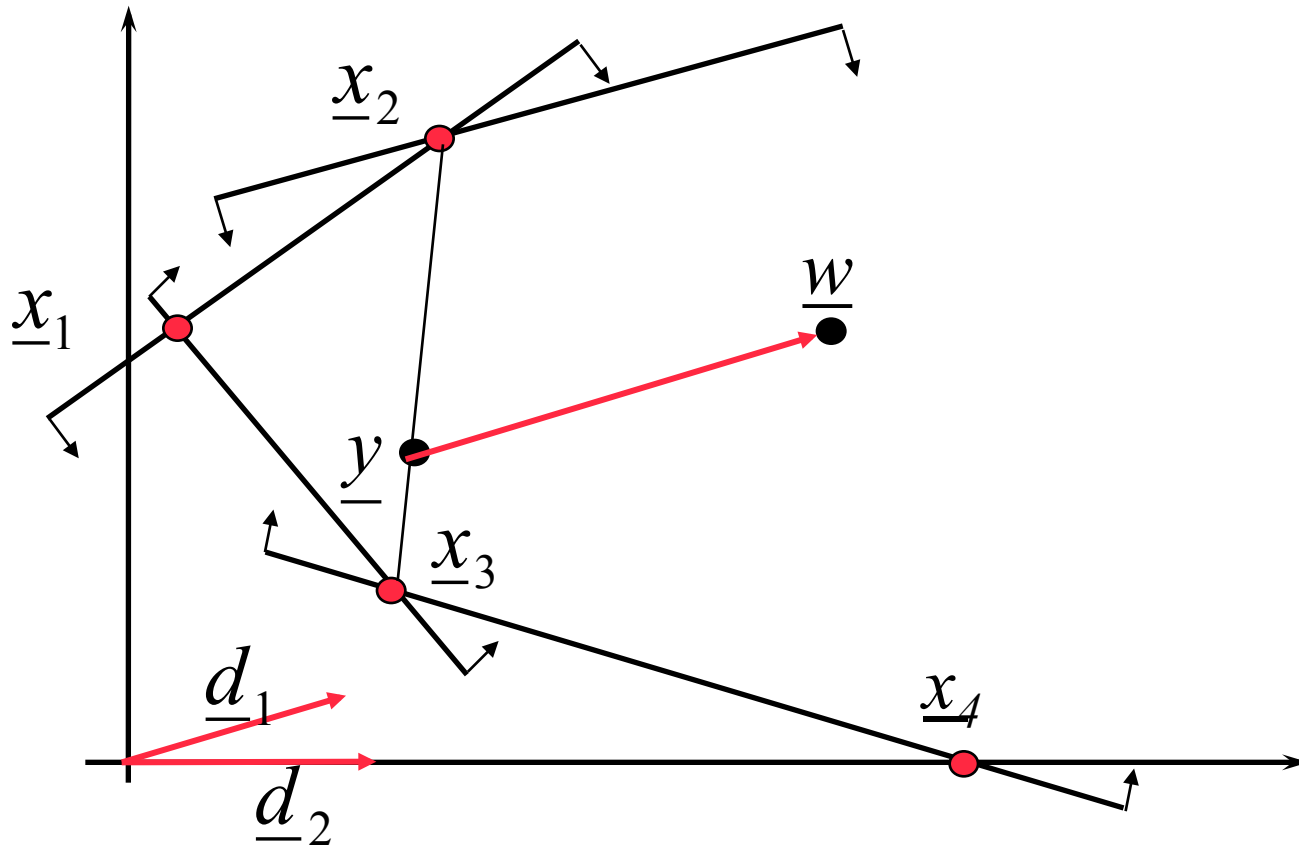
Teorema (di rappresentazione di poliedri) (no dim.)

Dato un poliedro X non vuoto con punti estremi \underline{x}_i con $i=1, \dots, k$ e direzioni estreme \underline{d}_j con $j=1, \dots, t$, ogni punto $\underline{x} \in X$ può essere espresso come combinazione convessa dei punti estremi di X e combinazione lineare non negativa (conica) delle sue direzioni estreme:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i + \sum_{j=1}^t \mu_j \underline{d}_j$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \quad \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, t$$



$$\underline{y} = \lambda \underline{x}_2 + (1 - \lambda) \underline{x}_3 \quad \lambda \in (0, 1)$$

$$\underline{w} = \underline{y} + \mu \underline{d}_1 \quad \mu \geq 0$$

quindi:
$$\underline{w} = \lambda \underline{x}_2 + (1 - \lambda) \underline{x}_3 + \mu \underline{d}_1$$

Soluzione dei problemi di PL

Consideriamo il problema (PL) in **Forma Standard**

$$\begin{aligned} \min z &= \underline{c}^T \underline{x} \\ \text{s.t. } A\underline{x} &= \underline{b} \\ \underline{x} &\geq \underline{0} \end{aligned}$$

$\underline{x}_i \quad i = 1, 2, \dots, k$ punti estremi $\underline{d}_j \quad j = 1, 2, \dots, t$ direzioni estreme

Ogni punto $\underline{x} \in X$ può essere espresso come combinazione convessa dei punti estremi di X e combinazione lineare non negativa delle sue direzioni estreme:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i + \sum_{j=1}^t \mu_j \underline{d}_j$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \quad \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \mu_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, t$$

Possiamo trasformare il problema di PL in un nuovo problema con incognite:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \text{ e } \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t$$

$$\min z = \sum_{i=1}^k (\underline{c}^T \underline{x}_i) \lambda_i + \sum_{j=1}^t (\underline{c}^T \underline{d}_j) \mu_j$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \quad \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \mu_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, t$$

Nota:

1. se esiste una direzione \underline{d}_j tale che $\underline{c}^T \underline{d}_j < 0 \Rightarrow$ *l'ottimo del problema è illimitato*
2. se $\underline{c}^T \underline{d}_j \geq 0$ per ogni $\underline{d}_j \Rightarrow
 - *le corrispondenti variabili $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t$ sono scelte uguali a zero*
 - *per minimizzare il resto della sommatoria basta calcolare tutti i valori $\underline{c}^T \underline{x}_i$, scegliere il minimo ad esempio $\underline{c}^T \underline{x}_p$ e fissare $\lambda_p = 1$ e tutti gli altri uguali a zero*$

RIASSUMENDO:

1. la soluzione ottima di un problema di minimo è finita se e solo se $\underline{c}^T \underline{d}_j \geq 0$ per ogni \underline{d}_j
2. in questo caso una soluzione ottima si trova su uno dei vertici del poliedro
3. se esistono più vertici ottimi allora ogni combinazione convessa di questi punti è una soluzione ottima

Soluzione dei problemi di PL: esempio

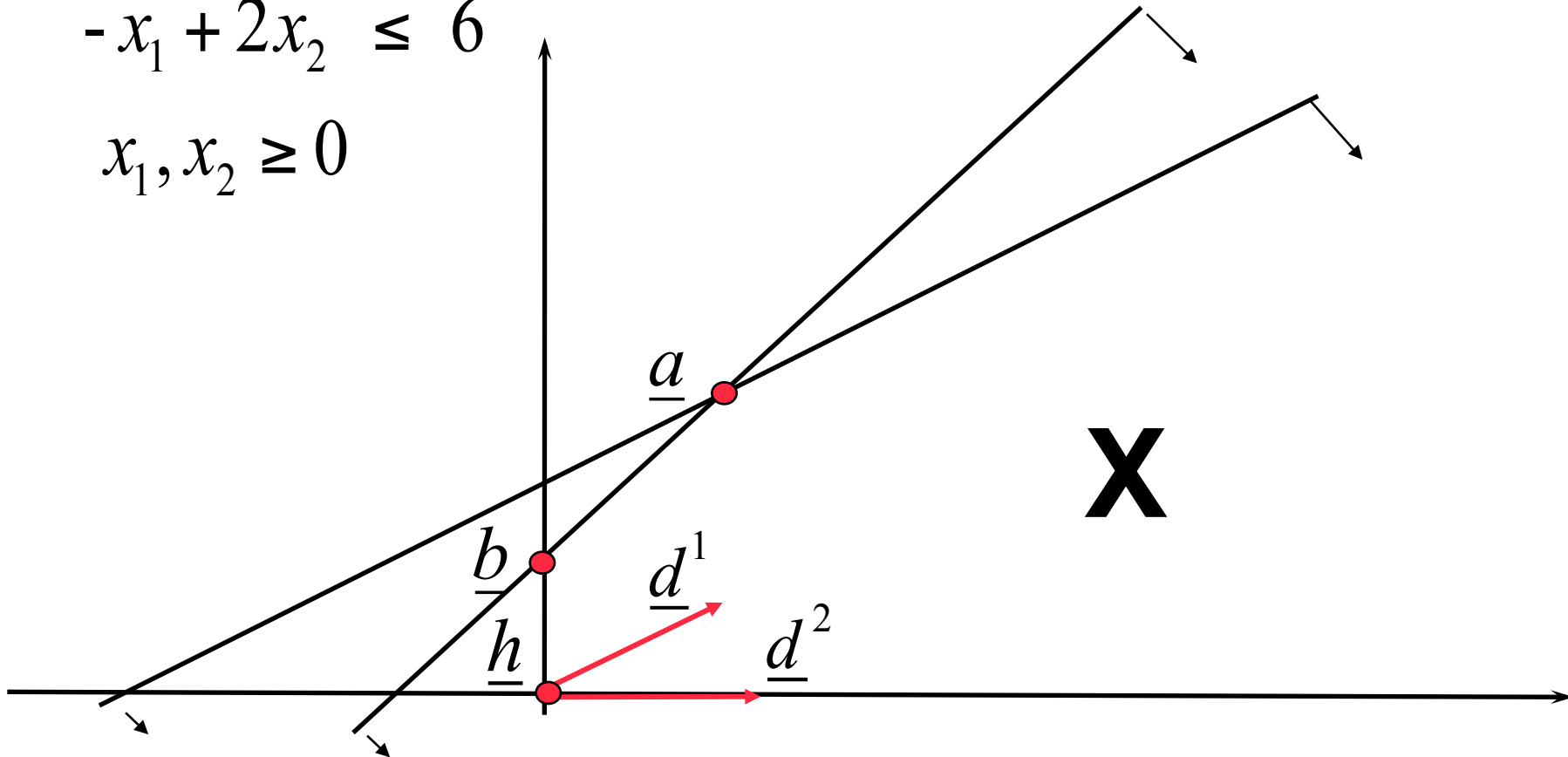
$$\min z = x_1 - 3x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

*Calcoliamo punti estremi
e direzioni estreme*



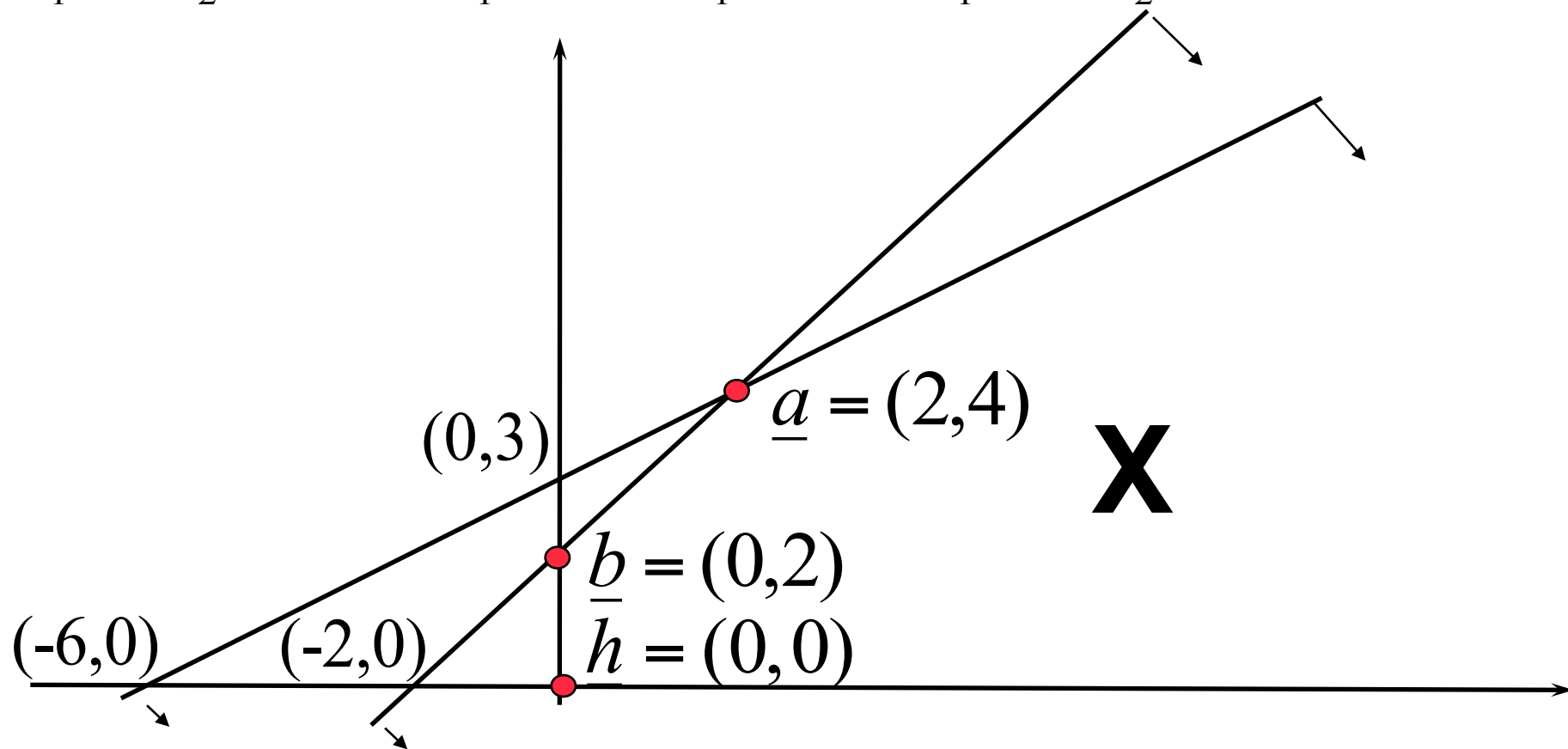
Soluzione dei problemi di PL: esempio(2)

$$-x_1 + x_2 = 2, x_1=0 \Rightarrow x_2=2; x_2=0 \Rightarrow x_1=-2$$

$$-x_1 + 2x_2 = 6; x_1=0 \Rightarrow x_2=3; x_2=0 \Rightarrow x_1=-6$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 2 + x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 6 \Rightarrow -x_1 + 4 + 2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4 \end{cases}$$



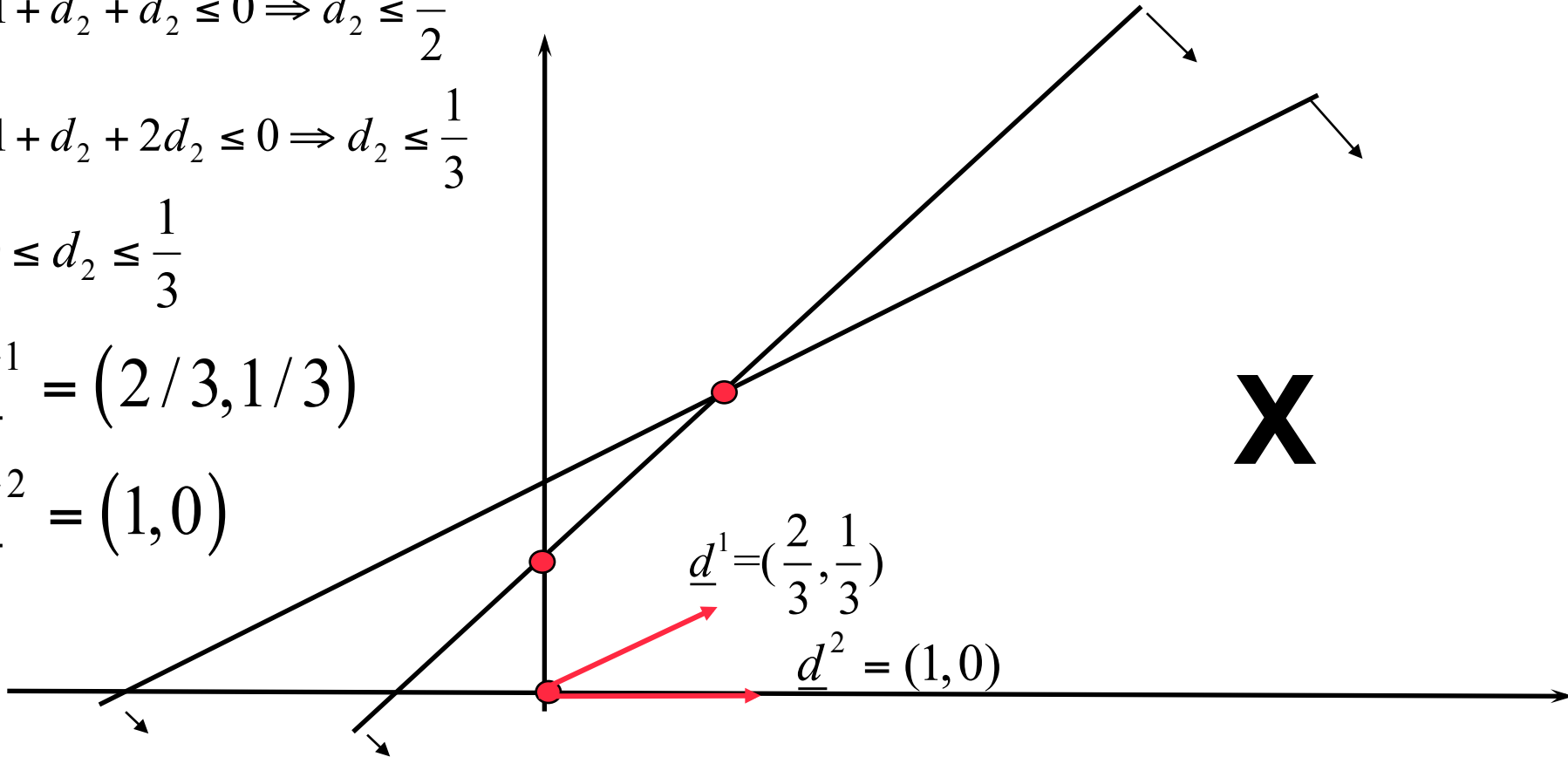
Soluzione dei problemi di PL: esempio(3)

$$D = \left\{ (d_1, d_2) : -d_1 + d_2 \leq 0, -d_1 + 2d_2 \leq 0, d_1 + d_2 = 1 \right\}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 \geq 0, d_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = 1 - d_2 \\ -1 + d_2 + d_2 \leq 0 \Rightarrow d_2 \leq \frac{1}{2} \\ -1 + d_2 + 2d_2 \leq 0 \Rightarrow d_2 \leq \frac{1}{3} \\ 0 \leq d_2 \leq \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\underline{d}^1 = (2/3, 1/3)$$

$$\underline{d}^2 = (1, 0)$$



Soluzione dei problemi di PL: esempio(4)

$$\min z = x_1 - 3x_2 \Rightarrow \underline{c}^T = (1, -3)$$

$$\underline{c}^T \underline{h} = (1, -3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0; \quad \underline{c}^T \underline{b} = (1, -3) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -6; \quad \underline{c}^T \underline{a} = (1, -3) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -10;$$

$$\underline{c}^T \underline{d}^1 = (1, -3) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = -1/3; \quad \underline{c}^T \underline{d}^2 = (1, -3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1;$$

$$\min 0\lambda_1 - 6\lambda_2 - 10\lambda_3 - 1/3\mu_1 + \mu_2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \geq 0$$

Ottimo illimitato

(facendo tendere μ_1 a ∞ la

f.o. tende a $-\infty$

***indipendentemente dai valori
scelti per le altre variabili)***

Soluzione dei problemi di PL: esempio(5)

Consideriamo una differente funzione obiettivo

$$\min z = 4x_1 - x_2 \Rightarrow \underline{c}^T = (4, -1)$$

$$\underline{c}^T \underline{h} = (4, -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0; \quad \underline{c}^T \underline{b} = (4, -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2; \quad \underline{c}^T \underline{a} = (4, -1) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 4;$$

$$\underline{c}^T \underline{d}^1 = (4, -1) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 7/3; \quad \underline{c}^T \underline{d}^2 = (4, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4;$$

$$\min \quad 0\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 7/3\mu_1 + 4\mu_2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \geq 0$$

Ottimo finito di valore -2 in corrispondenza del vertice b ottenuto assegnando alle variabili i valori

$$\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_3 = 0, \quad \lambda_2 = 1$$