2.5 Alcune semplici proprietà

Proposizione. Per ogni evento A

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Dimostrazione. Dall'Assioma 2 e dalla proprietà di additività finita, con A e $\overline{A}$ eventi incompatibili, segue

$$1 = P(S) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

da cui si giunge alla tesi.

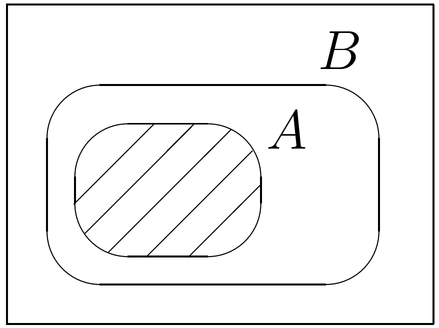
Esempio. Se la probabilità di ottenere 2 volte testa lanciando due monete è $1/4$, allora la probabilità di ottenere al più una volta testa deve essere $3/4$.

Esempio. Se la probabilità di ottenere n volte croce lanciando n monete è $1/2^n$, allora la probabilità di ottenere almeno una volta testa deve essere $1 - 1/2^n$.

Proposizione. Se $A \subset B$, allora

$$P(A) \leq P(B)$$

Dimostrazione. Essendo $A \subset B$, abbiamo che B può essere espresso come $B = A \cup (\overline{A} \cap B)$, con $A \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$.



$A \subset B$

Dalla proprietà di additività finita segue
$P(B) = P(A \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$,
da cui si ha $P(B) \geq P(A)$, essendo $P(\overline{A} \cap B) \geq 0$.

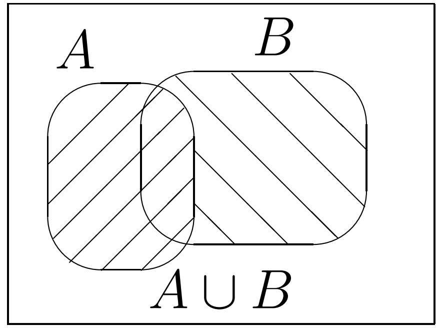
Esempio. Nel lancio di un dado, la probabilità che si ottenga 1 è minore della probabilità che si ottenga un numero dispari. Infatti, $A = \{1\} \subset \{1, 3, 5\} = B$.

Esempio. Nell'esperimento che consiste del lancio di n monete, la probabilità di $A = \{\text{esce testa 1 volta}\}$ è minore della probabilità di $B = \{\text{esce testa almeno 1 volta}\}$, essendo $A \subset B$. Infatti risulta $P(A) = n/2^n \leq 1 - 1/2^n = P(B)$.

Proposizione.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

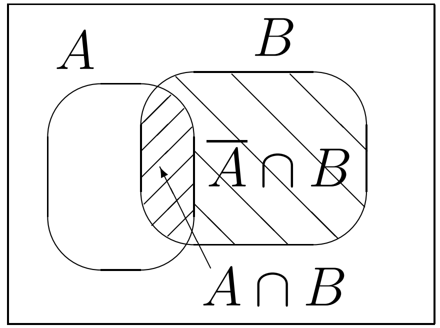
Dimostrazione. Notiamo che $A \cup B$ può essere espresso come unione di due eventi incompatibili A e $\overline{A} \cap B$. Grazie alla proprietà di additività finita otteniamo



$$P(A \cup B) = P(A \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A) + P(\overline{A} \cap B).$$

Inoltre, essendo $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, con $A \cap B$ e $\overline{A} \cap B$ eventi incompatibili, applicando nuovamente la proprietà di additività finita abbiamo

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$



o, equivalentemente,

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

che completa la dimostrazione.

Esempio. Uno studente deve sottoporsi a due test. Con probabilità 0,5 supererà il primo test; con probabilità 0,4 supererà il secondo test; con probabilità 0,3 li supererà entrambi. Quanto vale la probabilità che non supererà nessuno dei due test?

Soluzione. Sia B_i l'evento che lo studente superi il test i-esimo, $i = 1, 2$. La probabilità che superi almeno un test sarà quindi pari a

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}6.$$

La probabilità che lo studente non supererà nessuno dei due test è dunque

$$P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = P(\overline{B_1 \cup B_2}) = 1 - P(B_1 \cup B_2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$

Esercizio. Dimostrare le seguenti relazioni, per eventi A_1 e A_2 qualsiasi:

$$P(A_1 \cup A_2) \le P(A_1) + P(A_2), \qquad P(A_1 \cap A_2) \ge P(A_1) + P(A_2) - 1.$$

Esercizio. Mostrare che $P(A_1 \cap A_2) \ge 0{,}8$ e $P(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2) \le 0{,}2$ sapendo che A_1 e A_2 sono eventi tali che $P(A_1) = 0{,}9$ e $P(A_2) = 0{,}9$.

Proposizione.

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

Dimostrazione. Ricordando che $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$, si ha

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C),$$

e ancora

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C).$$

Per la legge distributiva si ha

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)),$$

da cui segue

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(C)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

ossia la tesi.

Proposizione. Principio di inclusione/esclusione

La probabilità dell'unione di n eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ può esprimersi al seguente modo:

per $n = 2$: $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$;

per $n = 3$:
$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3); \end{aligned}$$

in generale:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \;&=\; \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &\quad + \;\ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n). \end{aligned}$$

La seguente formula esprime in modo compatto il principio di inclusione/esclusione:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}).$$

Il numero di termini a 2° membro è $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} = 2^n - 1$ in quanto la sommatoria $\displaystyle\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r})$ è calcolata per tutti gli $\binom{n}{r}$ possibili modi di scegliere gli r indici $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ dall'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Infatti, i termini a 2° membro sono

$2^n - 1 = 3$ per $n = 2$:
$P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$;

$2^n - 1 = 7$ per $n = 3$:
$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

2.6 Spazi campionari con esiti equiprobabili

In molti esperimenti è naturale assumere che tutti gli esiti dello spazio campionario siano equiprobabili, con S insieme finito: $S = \{1, 2, \ldots, N\}$. Allora si ipotizza che

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \ldots = P(\{N\})$$

il che implica

$$P(\{i\}) = \frac{1}{N}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N,$$

essendo $1 = P(S) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \ldots \cup \{N\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + \ldots + P(\{N\})$.
Per la proprietà di additività avremo perciò che per ogni evento A

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\text{numero di elementi di } A}{\text{numero di elementi di } S} \qquad \text{(definizione classica di probabilità)}$$

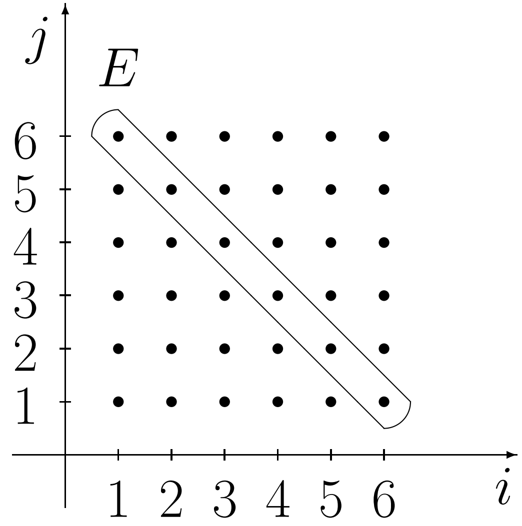
Se assumiamo che tutti gli esiti di un esperimento siano equiprobabili, allora la probabilità di ogni evento A è uguale alla proporzione degli esiti dello spazio campionario contenuti in A (come rapporto di casi favorevoli su casi possibili).

Esempio. Se si lanciano 2 dadi, qual è la probabilità che la somma dei valori sulla faccia superiore sia uguale a 7?

Soluzione. Assumendo che i 36 possibili esiti siano equiprobabili, poiché ci sono 6 possibili esiti che danno come somma 7,

$E = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$,

la probabilità desiderata sarà uguale a $6/36$ ossia $1/6$.



Esempio. Se estraiamo 3 biglie a caso da un'urna che contiene 6 biglie bianche e 5 nere, qual è la probabilità che una sia bianca e le altre due nere?

Soluzione. Se teniamo conto dell'ordine di estrazione e supponiamo che ogni possibile esito dello spazio campionario sia equiprobabile, la probabilità richiesta è

$$\frac{(6 \cdot 5 \cdot 4) + (5 \cdot 6 \cdot 4) + (5 \cdot 4 \cdot 6)}{11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{3 \cdot 120}{990} = \frac{4}{11} = 0{,}3636$$

Esempio. Se estraiamo 3 biglie a caso da un'urna che contiene 6 biglie bianche e 5 nere, qual è la probabilità che una sia bianca e le altre due nere?

Soluzione. Se non teniamo conto dell'ordine di estrazione, la probabilità richiesta è

$$\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{6 \cdot 10}{165} = \frac{4}{11} = 0{,}3636$$

Esempio. Una commissione di 5 persone viene estratta da un gruppo composto di 6 uomini e 9 donne. Se la selezione avviene in modo casuale, qual è la probabilità che la commissione consti di 3 uomini e 2 donne oppure di 2 uomini e 3 donne?

Soluzione. Ognuna delle $\binom{15}{5}$ combinazioni è estratta in modo equiprobabile, quindi:

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} + \frac{\binom{6}{2}\binom{9}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{20 \cdot 36}{3003} + \frac{15 \cdot 84}{3003} = \frac{240}{1001} + \frac{420}{1001} = \frac{660}{1001} = 0{,}6593.$$

Esempio. Un'urna contiene n biglie, di cui una è bianca. Se estraiamo k biglie una alla volta, in modo tale che a ogni estrazione la probabilità di estrarre una qualunque delle biglie rimanenti sia la stessa, qual è la probabilità che la biglia bianca sia estratta?

Soluzione. Ognuno dei $\binom{n}{k}$ possibili insiemi è estratto in modo equiprobabile, quindi:

$$P(\text{si estrae la biglia bianca}) = \frac{\binom{1}{1}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}}{\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}} = \frac{k}{n}$$

Alternativamente, sia $A_i = \{\text{la biglia bianca si estrae nell'}i\text{-esima estrazione}\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Risulta $P(A_i) = 1/n$ perché ognuna delle n biglie ha uguale probabilità di essere scelta all'i-esima estrazione. Poiché gli eventi A_i sono incompatibili si ha quindi

$$P(\text{si estrae la biglia bianca}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) = \frac{k}{n}$$

Esempio. Da un lotto di $N = 200$ pezzi, costituito da 40 pezzi difettosi e 160 buoni, si estrae a caso un campione di $n = 10$ pezzi.
(a) Qual è la probabilità che il campione estratto abbia la stessa frazione di pezzi difettosi del lotto originario?
(b) Qual è la probabilità che il campione estratto non contenga pezzi difettosi?
(c) Cosa cambia se si raddoppia il numero di pezzi estratti?
Soluzione. (a) Ognuno degli $\binom{N}{n}$ possibili insiemi è estratto in modo equiprobabile. La frazione di pezzi difettosi nel lotto è $p = 40/200 = 1/5$. Quindi, detto A l'evento d'interesse risulta

$$P(A) = \frac{\binom{40}{2}\binom{160}{8}}{\binom{200}{10}} = 0{,}3098$$

cosicché è più probabile che un campione estratto a caso da quel lotto non riproduca esattamente le caratteristiche dell'intero lotto.

(b) La probabilità che il campione non contenga pezzi difettosi è

$$P(E) = \frac{\binom{40}{0}\binom{160}{10}}{\binom{200}{10}} = 0{,}1013.$$

(c) Raddoppiando il numero di elementi del campione diminuisce la probabilità che questo riproduca la stessa frazione di pezzi difettosi, essendo ora

$$P(A) = \frac{\binom{40}{4}\binom{160}{16}}{\binom{200}{20}} = 0{,}2299$$

però diminuisce sensibilmente la probabilità che il campione estratto non contenga pezzi difettosi, poiché

$$P(E) = \frac{\binom{40}{0}\binom{160}{20}}{\binom{200}{20}} = 0{,}0089.$$

Esempio. Supponiamo che $n+m$ biglie, di cui n siano rosse e m blu, vengano disposte in fila in modo casuale, così che ognuna delle $(n+m)!$ possibili disposizioni sia equiprobabile. Se siamo interessati solo alla successione dei colori delle biglie in fila, si provi che tutti i possibili risultati rimangono equiprobabili.

Soluzione. Consideriamo ognuna delle $(n+m)!$ possibili disposizioni ordinate delle biglie: se permutiamo tra loro le biglie rosse e facciamo lo stesso con le blu, la successione dei colori non cambia. Ne segue che ogni successione dei colori corrisponde a $n!\,m!$ differenti disposizioni ordinate delle $n+m$ biglie, così che ogni distribuzione di colori ha probabilità di verificarsi

$$\frac{n!\,m!}{(n+m)!}$$

Ad esempio se $n=m=2$, delle $4!=24$ possibili disposizioni ordinate delle biglie, ci saranno $2!\,2!=4$ distribuzioni che danno la stessa distribuzione di colori; ad esempio

$$r_1, b_1, r_2, b_2, \qquad r_1, b_2, r_2, b_1, \qquad r_2, b_1, r_1, b_2, \qquad r_2, b_2, r_1, b_1.$$

Le 6 distribuzioni di colori distinte saranno: $bbrr$, $brbr$, $brrb$, $rbbr$, $rbrb$, $rrbb$.

Esempio. Nel gioco del lotto si estraggono a caso 5 numeri da un'urna contenente 90 numeri compresi tra 1 e 90. (Le cinquine sono equiprobabili). Se si fissano k numeri distinti compresi tra 1 e 90 qual è la probabilità che questi saranno tra i 5 estratti?

Soluzione. Poiché l'ordine di estrazione qui non è rilevante, lo spazio campionario è l'insieme delle $\binom{90}{5}$ combinazioni semplici di 90 oggetti in 5 classi.

L'evento $A_k = \{$i k numeri fissati sono tra i 5 estratti$\}$ è costituito dalle sequenze di S che presentano all'interno i k numeri fissati; pertanto la sua cardinalità è pari al numero di combinazioni semplici di $90-k$ oggetti in $5-k$ classi: $\binom{90-k}{5-k}$. Si ha quindi:

$P(A_k)$	$P(A_1)$	$P(A_2)$	$P(A_3)$	$P(A_4)$	$P(A_5)$
$\frac{\binom{90-k}{5-k}}{\binom{90}{5}}$	$\frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{18}$	$\frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{2}{801}$	$\frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{11.748}$	$\frac{\binom{86}{1}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{511.038}$	$\frac{\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{43.949.268}$