Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica – A.A. 2020/21

CAPITOLO 1 – Analisi combinatoria

N.B. La presente dispensa non sostituisce i libri di testo e non va resa accessibile sul web.

Gli argomenti indicati con ($\star\star$) sono da considerarsi facoltativi.

1.1 Introduzione

Problema. Un sistema di comunicazione consiste di n antenne allineate. Ogni antenna può essere funzionante oppure difettosa. Quante sono le possibili configurazioni?

Avendo 2 casi per ogni antenna, il numero di possibili configurazioni è

$$2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$$

Ad esempio, se $n = 4$ vi sono $2^4 = 16$ possibili configurazioni:

$$\begin{array}{cccc} 0\,0\,0\,0 & 0\,1\,0\,0 & 1\,0\,0\,0 & 1\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 & 0\,1\,0\,1 & 1\,0\,0\,1 & 1\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 & 0\,1\,1\,0 & 1\,0\,1\,0 & 1\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,1 & 0\,1\,1\,1 & 1\,0\,1\,1 & 1\,1\,1\,1 \end{array}$$

(1 = antenna funzionante)

(0 = antenna difettosa)

Supponiamo che il sistema sia funzionante se non vi sono 2 antenne difettose consecutive. Sapendo che esattamente m delle n antenne sono difettose, qual è la probabilità che il sistema sia funzionante?

Ad esempio, se $n = 4$ e $m = 2$ le possibili configurazioni sono 6:

(1 = antenna funzionante)
(0 = antenna difettosa)

0	0	1	1 :	sistema **non** funzionante
0	1	0	1 :	sistema funzionante
0	1	1	0 :	sistema funzionante
1	0	0	1 :	sistema **non** funzionante
1	0	1	0 :	sistema funzionante
1	1	0	0 :	sistema **non** funzionante

3 casi su 6: possiamo affermare che la probabilità che il sistema sia funzionante è

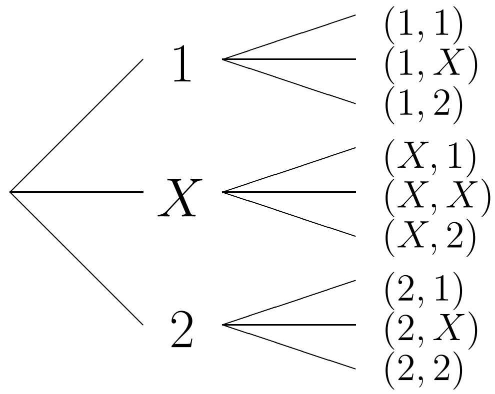
$$\text{prob.} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ ?}$$

In molti problemi il calcolo delle probabilità si effettua semplicemente calcolando il numero di modi in cui avviene un dato evento; sarà questo l'argomento dell'*analisi combinatoria*.

1.2 Il principio fondamentale del calcolo combinatorio

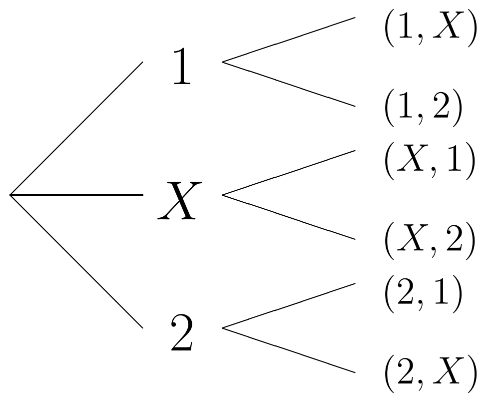
Esempio. Un giocatore scommette su 2 partite di calcio, con esiti 1, X, 2. In quanti modi può scegliere come scommettere?

Soluzione. $3 \times 3 = 9$



Esempio. Due giocatori (avversari) scommettono su una partita di calcio, con esiti 1, X, 2. In quanti modi si possono effettuare le scelte?

Soluzione. $3 \times 2 = 6$



Principio fondamentale del calcolo combinatorio. Si realizzino 2 esperimenti. Si supponga che il primo esperimento abbia m esiti possibili, e che per ognuno di questi il secondo esperimento abbia n esiti possibili. Se sequenze distinte di esiti dei due esperimenti producono esiti finali distinti, allora vi sono in tutto mn esiti possibili.

Dimostrazione. Elenchiamo tutti gli esiti dei due esperimenti:

$$
m \text{ righe:} \quad \left\{ \begin{array}{cccccl}
(1,1) & (1,2) & \ldots & (1,n) & \leftarrow & n \text{ elementi} \\
(2,1) & (2,2) & \ldots & (2,n) & \leftarrow & n \text{ elementi} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \\
(m,1) & (m,2) & \ldots & (m,n) & \leftarrow & n \text{ elementi}
\end{array} \right.
$$

dove si intende che l'esito finale è la coppia ordinata (i,j) se il primo esperimento ha prodotto esito i e il secondo ha prodotto esito j. L'insieme dei possibili esiti consiste di m righe, ognuna contenente n elementi. Quindi vi sono in tutto mn esiti possibili.

Notiamo che sequenze distinte di esiti dei due esperimenti producono esiti finali distinti; in altri termini (i,j) è un risultato distinto da (j,i).

Esempio. Si lanciano a caso due dadi da gioco. Quanti sono i risultati possibili?
Soluzione. Il lancio del primo dado dà l'esito del primo esperimento, e il lancio del secondo dado dà l'esito del secondo esperimento; per il principio fondamentale del calcolo combinatorio vi sono in tutto $6 \times 6 = 36$ risultati possibili.

Esempio. Un campionato di calcio prevede 10 partite in una giornata, ed ognuna può dar luogo a 3 tipi di risultati (1, X, 2). Se si deve scegliere una partita e un risultato, quante sono le scelte possibili?
Soluzione. Si può vedere la scelta della partita come l'esito del primo esperimento e la scelta del risultato come l'esito del secondo esperimento; per il principio fondamentale del calcolo combinatorio vi sono in tutto $10 \times 3 = 30$ scelte possibili.

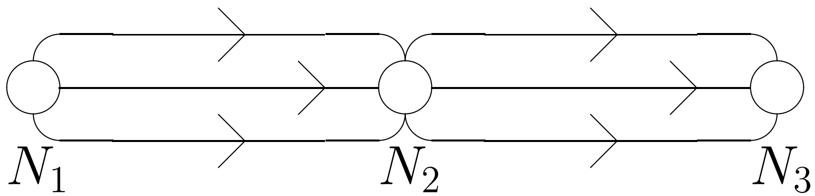
Esempio. Uno studente può inserire nel piano di studi 2 insegnamenti a scelta, di cui uno deve essere selezionato da un elenco di 9 insegnamenti e l'altro da un elenco distinto di 10 insegnamenti. In quanti modi diversi può completare il piano di studi?
Soluzione. Si hanno in totale $9 \times 10 = 90$ modi diversi.

Esempio. Quante sono le funzioni booleane definite su $\{0,1\}$?

Soluzione. Per ogni $x \in \{0,1\}$ risulta $f(x)$ uguale a 0 o 1, con $f(0)$ corrispondente all'esito del primo esperimento e $f(1)$ all'esito del secondo esperimento. Vi sono pertanto $2 \times 2 = 4$ funzioni siffatte.

x	$f(x) = 0$	$f(x) = x$	$f(x) = \overline{x}$	$f(x) = 1$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Esempio. Si cosideri il seguente grafo orientato. Quanti sono i percorsi distinti possibili che portano dal nodo N_1 al nodo N_3?



Soluzione. Vi sono $3 \times 3 = 9$ percorsi distinti.

Esempio. Si lancia a caso un dado da gioco. Se esce un numero pari si lancia nuovamente il dado. Se esce un numero dispari si lancia un dado truccato, in cui il 6 è stato modificato in 5. Quanti sono i risultati possibili?
Soluzione. Tenendo conto delle alternative relative al primo lancio, per il principio fondamentale del calcolo combinatorio vi sono in tutto $3 \times 6 + 3 \times 5 = 33$ esiti possibili.

Esempio. Un'urna contiene un dado regolare ed un dado con numeri 7, 8, 9, 10, 11, 11. Si lancia un dado estratto a caso dall'urna. Quanti sono i risultati possibili?
Soluzione. Tenendo conto delle 2 alternative relative all'estrazione, vi sono in tutto $6 + 5 = 11$ esiti possibili.

Esempio. Si effettuano due esperimenti. Il primo ha m possibili esiti. Se il primo esperimento produce l'esito $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, il secondo può avere k_i possibili esiti. Supponendo che sequenze distinte di esiti dei due esperimenti producano esiti finali distinti, quanti sono gli esiti finali possibili?
Soluzione. Gli esiti possibili sono $\sum_{i=1}^{m} k_i = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$.

Esempio. Si lanciano due dadi. Se il prodotto dei due numeri usciti è dispari allora vince Dario, se è pari allora vince Piero. Chi ha più possibilità di vincere?

Soluzione. Dario vince se il prodotto è dispari, ossia se entrambi i numeri usciti sono dispari. Ciò si realizza in $3 \times 3 = 9$ modi distinti. Piero vince se il prodotto è pari, ossia se almeno uno dei numeri usciti è pari. Ciò si realizza in $3 \times 6 + 3 \times 3 = 18 + 9 = 27$ modi distinti (pari e qualsiasi oppure dispari e pari). Quindi Piero è avvantaggiato.

Principio fondamentale (generalizzato) del calcolo combinatorio. Si realizzino r esperimenti. Si supponga che il primo esperimento abbia n_1 esiti possibili, e che per ognuno di questi il secondo esperimento abbia n_2 esiti possibili, e ancora che per ognuno degli esiti dei primi 2 esperimenti il terzo esperimento abbia n_3 esiti possibili, ecc. Allora, se sequenze distinte di esiti degli r esperimenti producono esiti finali distinti, allora gli r esperimenti producono in tutto $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$ esiti possibili.

Esempio. (i) Quante sono le targhe automobilistiche formate da 7 caratteri, di cui 3 sono numeri e 4 sono lettere (scelte tra le 26 lettere dell'alfabeto anglosassone)?
(ii) Quante targhe vi sono escludendo le ripetizioni tra numeri e lettere?
Soluzione. Per il principio fondamentale (generalizzato) del calcolo combinatorio,
(i) vi sono $10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 = 456\,976\,000$ targhe possibili;
(ii) vi sono $10 \times 9 \times 8 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23 = 258\,336\,000$ targhe senza ripetizioni.

Esempio. Quanti sono i risultati possibili se si lancia a caso una moneta per n volte, se l'ordine è rilevante?
Soluzione. Ognuno degli n esperimenti consistenti nel lancio della moneta ha 2 possibili esiti, e quindi i risultati possibili sono $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$.
Ad esempio, per $n = 3$ si hanno 8 risultati: $ccc, cct, ctc, ctt, tcc, tct, ttc, ttt$.

Esempio. Si lancia un dado e poi si lanciano tante monete pari al risultato del lancio del dado. Quanti sono gli esiti finali possibili?
Soluzione. Gli esiti possibili sono $2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6 = \sum_{i=1}^{6} 2^i = 2^7-2 = 126$, avendo usato la formula $\sum_{i=1}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} - 1$, valida per $x \neq 1$.

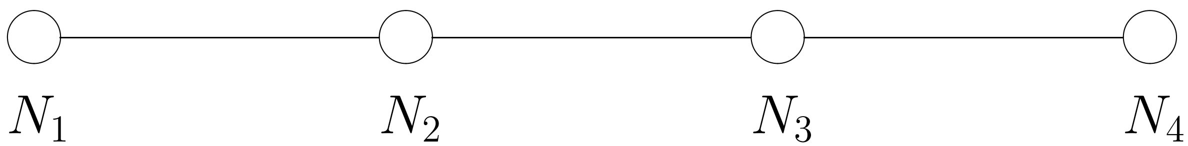
Esempio. In quanti modi si possono scegliere r oggetti in un insieme di n oggetti, se l'ordine delle scelte è rilevante? (Corrisponde a estrazioni senza reinserimento)

Soluzione. $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

Esempio. Quanti sono i risultati possibili se si estraggono in sequenza 6 biglie da un'urna contente 90 biglie distinte (tenendo conto dell'ordine delle estrazioni)?

Soluzione. Nella prima estrazione vi sono 90 possibili risultati, nella seconda ve ne sono 89, e così via nella sesta ve ne sono 85, quindi i risultati possibili sono in tutto $90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86 \times 85 = 448\,282\,533\,600$.

Esempio. Si cosideri il seguente grafo. Avendo a disposizione 3 colori distinti, in quanti modi è possibile colorare i nodi del grafo dando colori diversi a nodi adiacenti? Cosa cambia se si aggiunge un arco che congiunge N_1 a N_4?



Soluzione. Vi sono $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$ colorazioni possibili. Nel secondo caso 18.

1.3 Permutazioni

In quanti modi si possono ordinare le lettere a, b, c? Per il principio fondamentale del calcolo combinatorio i casi possibili sono $3 \times 2 \times 1 = 6$: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Ciascuno di questi ordinamenti prende il nome di *permutazione*.

Le permutazioni distinte di n oggetti sono $n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

$$
\begin{array}{ll}
0! = 1 & 10! = 3\,628\,800 \\
1! = 1 & 11! = 39\,916\,800 \\
2! = 2 & 12! = 479\,001\,600 \\
3! = 6 & 13! = 6\,227\,020\,800 \\
4! = 24 & 14! = 87\,178\,291\,200 \\
5! = 120 & 15! = 1\,307\,674\,368\,000 \\
6! = 720 & 16! = 20\,922\,789\,888\,000 \\
7! = 5\,040 & 17! = 355\,687\,428\,096\,000 \\
8! = 40\,320 & 18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000 \\
9! = 362\,880 & 19! = 121\,645\,100\,408\,832\,000
\end{array}
$$

Esempio. Si eseguono simultaneamente 10 programmi, di cui 4 sono scritti in Linguaggio C e 6 in Java. Viene poi stilato l'elenco dei programmi nell'ordine di terminazione delle esecuzioni. Sapendo che le 10 esecuzioni hanno avuto termine in istanti diversi,
(a) quanti sono i possibili elenchi dei programmi?
(b) quanti sono i possibili elenchi, se i programmi in C e Java compaiono in 2 liste, con precedenza alla lista dei programmi in C?

Soluzione. (a) Ad ogni elenco corrisponde una possibile permutazione di 10 oggetti, quindi la risposta è $10! = 3\,628\,800$.
(b) Vi sono $4!$ elenchi dei programmi in C e $6!$ elenchi dei programmi in Java; per il principio fondamentale del calcolo combinatorio vi sono quindi $4! \cdot 6! = 24 \cdot 720 = 17\,280$ diversi elenchi se i programmi in C e Java compaiono in 2 liste, con precedenza alla lista dei programmi in C.

Esempio. Quanti sono gli anagrammi di S T A T I S T I C A ?

Soluzione. Se le 10 lettere da permutare fossero distinte vi sarebbero $10! = 3\,628\,800$ permutazioni possibili. Tuttavia le lettere non sono distinte: se permutiamo le lettere S tra di loro, le lettere T tra di loro, le lettere A tra di loro, e le lettere I tra di loro, si ottiene comunque la stessa parola. Il numero di anagrammi distinti è quindi

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{3\,628\,800}{2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2} = 75\,600.$$

Permutazioni di oggetti non tutti distinti

Un ragionamento analogo a quello svolto nell'esempio precedente mostra che vi sono

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

permutazioni distinte di n oggetti presi da r categorie, dei quali n_1 sono identici fra loro, n_2 sono identici fra loro e distinti dai precedenti, ..., n_r sono identici fra loro e distinti dai precedenti, con

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r.$$

Esempio. Si eseguono simultaneamente 10 programmi, di cui 4 sono scritti in Linguaggio C e 6 in Java. Viene poi stilato l'elenco dei programmi nell'ordine di terminazione delle esecuzioni. Quanti sono i possibili elenchi dei programmi se è indicato solo il loro linguaggio?

Soluzione. Trattandosi di permutazioni di oggetti non tutti distinti, gli elenchi possibili sono

$$\frac{10!}{4!\,6!} = \frac{3\,628\,800}{24 \cdot 720} = 210.$$

Esempio. Quanti sono i vettori booleani di dimensione n costituiti da k bit pari a 1 e da $n-k$ bit pari a 0?

Soluzione. I possibili vettori siffatti sono $\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Per $n=4$ e $k=2$ i vettori sono $\dfrac{4!}{2!\,(4-2)!} = 6$: 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100.

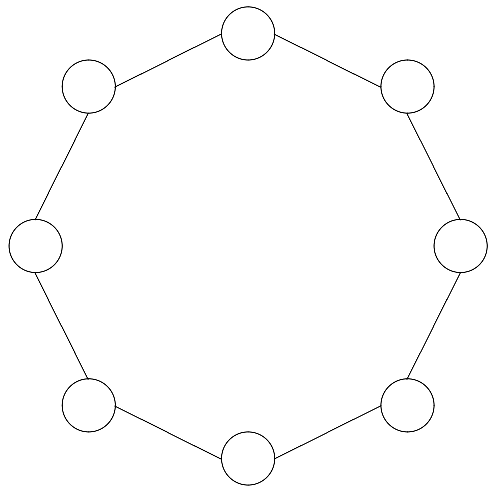
Esempio. In una giornata di un campionato di calcio vi sono 10 partite, ed ognuna può dar luogo a 3 tipi di risultati (1, X, 2). (i) Quanti sono i risultati possibili? (ii) Quante sono le sequenze di risultati possibili se vi sono 5 vincite in casa e 3 pareggi?

Soluzione. (i) I possibili risultati sono $3^{10} = 59\,049$.

(ii) Nel caso di 5 vincite in casa e 3 pareggi, allora le sequenze di risultati possibili sono

$$\frac{10!}{5!\,3!\,2!} = 2\,520.$$

Esercizio. Quante configurazioni si possono realizzare disponendo n oggetti in un allineamento circolare?



Soluzione. $n!/n = (n-1)!$

poiché per ogni permutazione ve ne sono n equivalenti.

1.4 Disposizioni e combinazioni

Quanti insiemi di r oggetti si possono formare a partire da n oggetti distinti?

Per risolvere questo problema va specificato se gli insiemi da formare sono *ordinati* (in cui l'ordine è rilevante) o *non ordinati* (dove l'ordine non è rilevante).

Nel caso di insiemi *ordinati* le sequenze da formare si dicono **disposizioni semplici** se non sono ammesse ripetizioni, altrimenti si dicono **disposizioni con ripetizioni**.

Per il principio fondamentale del calcolo combinatorio
– il numero di disposizioni semplici di n oggetti raggruppati in r classi è

$$D_{n,r} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = (n)_r$$

dove $(n)_r := n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ è detto *fattoriale discendente*;
– il numero di disposizioni con ripetizioni di n oggetti raggruppati in r classi è

$$D'_{n,r} = n \cdot n \cdot n \cdots n = n^r.$$

Esempio. Quante parole di lunghezza 2 si possono formare da un alfabeto di 4 lettere
(a) se le lettere non possono ripetersi?
(b) se le lettere possono ripetersi?

Soluzione. (a) Si tratta di disposizioni semplici di $n = 4$ oggetti raggruppati in $r = 2$ classi, quindi $D_{4,2} = (4)_2 = 4 \cdot 3 = 12$.
(ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc)
(b) Si tratta di disposizioni con ripetizioni di $n = 4$ oggetti raggruppati in $r = 2$ classi, quindi $D'_{4,2} = 4^2 = 16$.
(aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, ca, cb, cc, cd, da, db, dc, dd)

Esempio. Da un'urna che contiene n biglie numerate da 1 a n si effettuano k estrazioni a caso tenendo conto dell'ordine di apparizione. Quante sono le sequenze distinte ottenibili se le estrazioni
(a) si effettuano senza reinserimento?
(b) si effettuano con reinserimento?

Soluzione. (a) $(n)_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$; (b) n^k.

(⋆⋆) **Esempio.** Quante sono le operazioni distinte definite su 2 variabili booleane?

Soluzione. Essendo $x_1 \in \{0,1\}$ e $x_2 \in \{0,1\}$, vi sono 4 coppie (x_1, x_2) distinte. Ad ognuna di queste si può assegnare valore 0 o 1. Si tratta quindi di determinare il numero di disposizioni con ripetizioni di 2 oggetti (i valori 0 e 1) in quattro classi (le coppie (x_1, x_2)); vi sono pertanto $D'_{2,4} = 2^4 = 16$ operazioni distinte.

x_1	x_2	0	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \wedge \overline{x_2}$	x_1	$\overline{x_1} \wedge x_2$	x_2	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \vee x_2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

x_1	x_2	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$	$\overline{x_1 \oplus x_2}$	$\overline{x_2}$	$x_1 \vee \overline{x_2}$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1} \vee x_2$	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$\big(\wedge = $ AND, $\vee = $ OR, $\oplus = $ OR ESCLUSIVO$\big)$

Consideriamo il problema di determinare quanti insiemi non ordinati di r oggetti si possono formare a partire da n oggetti distinti.

Nel caso di insiemi *non ordinati* le sequenze si dicono **combinazioni semplici** se non sono ammesse ripetizioni, altrimenti si dicono **combinazioni con ripetizioni**.

In generale, dato che $(n)_r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$ rappresenta il numero di scelte di r oggetti tra n, tenendo conto dell'ordine nel quale questi vengono selezionati, e dato che ogni insieme di r oggetti viene in tal modo contato $r!$ volte, si ha che il numero di sottoinsiemi di r oggetti che si possono formare da un insieme di n oggetti è

$$C_{n,r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{(n)_r}{r!}.$$

Notiamo anche che $D_{n,r} = C_{n,r} \cdot r!$, in quanto il numero di sequenze ordinate è uguale al numero di sequenze non ordinate per il numero di permutazioni di r oggetti, e pertanto

$$C_{n,r} = \frac{D_{n,r}}{r!} = \frac{(n)_r}{r!}$$

Per $r = 0, 1, \ldots, n$ definiamo il *coefficiente binomiale*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

Se $r < 0$ o se $r > n$ si pone

$$\binom{n}{r} = 0.$$

Il numero $C_{n,r}$ di combinazioni semplici di n oggetti raggruppati in r classi è

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

Questo denota il numero di sottoinsiemi di dimensione r che si possono formare con gli elementi di un insieme di dimensione n senza tener conto dell'ordine della selezione.

Il numero $C'_{n,r}$ di combinazioni con ripetizioni di n oggetti raggruppati in r classi è

$$C'_{n,r} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!} = \frac{(n+r-1)_r}{r!} = \frac{(n+r-1)(n+r-2)\cdots n}{r!}.$$

Tabella riepilogativa

	Disposizioni (l'ordine è rilevante)	Combinazioni (l'ordine non è rilevante)
semplici (senza ripetizioni)	$D_{n,k} = (n)_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \dfrac{(n)_k}{k!}$
composte (con ripetizioni)	$D'_{n,k} = n^k$	$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

Esempio. Quante combinazioni di 4 oggetti in gruppi di 2 si possono formare
(a) nel caso di combinazioni semplici? (gli oggetti non possono ripetersi)
(b) nel caso di combinazioni con ripetizioni? (gli oggetti possono ripetersi)

Soluzione. (a) $C_{4,2} = (4)_2/2! = (4 \cdot 3)/2 = 6 \quad (ab, ac, ad, bc, bd, cd)$.
(b) $C'_{4,2} = (5)_2/2! = (5 \cdot 4)/2 = 10 \quad (aa, ab, ac, ad, bb, bc, bd, cc, cd, dd)$.

Esempio. In quanti modi si possono scegliere 3 oggetti da un insieme di 20?

Soluzione. $C_{20,3} = \binom{20}{3} = \frac{(20)_3}{3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140.$

Esempio. Una classe di tango argentino ha 22 studenti, 10 donne e 12 uomini. In quanti modi si possono formare 5 coppie?

Soluzione. Vi sono $\binom{10}{5}$ modi di selezionare 5 persone da 10 donne, $\binom{12}{5}$ modi di selezionare 5 persone da 12 uomini, e 5! modi di accoppiare 5 donne con 5 uomini, quindi la soluzione è $\binom{10}{5}\binom{12}{5} 5! = 252 \cdot 792 \cdot 120 = 23\,950\,080.$

Esempio. (a) Quanti comitati composti da 2 donne e 3 uomini si possono formare da un gruppo di 5 donne e 7 uomini? (b) Quanti sono i comitati se 2 uomini che hanno litigato rifiutano di sedere insieme nel comitato?

Soluzione. (a) Ci sono $\binom{5}{2}$ possibili insiemi con 2 donne, e $\binom{7}{3}$ possibili insiemi di 3 uomini; segue allora dal principio fondamentale del calcolo combinatorio che vi sono

$$\binom{5}{2}\binom{7}{3} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 350 \quad \text{comitati possibili formati da 2 donne e 3 uomini.}$$

(b) Se due uomini rifiutano di far parte insieme nel comitato, vi sono $\binom{2}{0}\binom{5}{3}$ insiemi di 3 uomini che non contengono nessuno dei 2 litiganti, e $\binom{2}{1}\binom{5}{2}$ insiemi di 3 uomini che contengono esattamente 1 dei 2 litiganti, e quindi vi sono $\binom{2}{0}\binom{5}{3} + \binom{2}{1}\binom{5}{2} = 30$ gruppi di 3 uomini senza i 2 litiganti. In totale vi sono $30 \cdot \binom{5}{2} = 300$ comitati.

Notiamo che il numero di comitati che contengono i 2 uomini che hanno litigato è: $\binom{5}{2}\binom{2}{2}\binom{5}{1} = 50$.

Esempio. Quanti sono i risultati possibili nel gioco del Superenalotto?

Soluzione. Se si tiene conto dell'ordine delle estrazioni, i possibili risultati sono $90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86 \times 85 = 448\,282\,533\,600$. Dividendo per il numero di possibili permutazioni dei numeri estratti, pari a $6! = 720$, si ottiene il numero dei risultati possibili nel gioco del Superenalotto (ossia senza tener conto dell'ordine delle estrazioni):

$$C_{90,6} = \binom{90}{6} = \frac{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86 \times 85}{6!} = \frac{448\,282\,533\,600}{720} = 622\,614\,630.$$

Esempio. Un network è costituito da n nodi. Quanti sono i collegamenti diretti che si possono attivare tra ciascun nodo e tutti i nodi rimanenti?

Soluzione. Ragionando nodo per nodo si ha che il numero di collegamenti diretti è $(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+2+1$. Inoltre la soluzione coincide col numero di combinazioni semplici di n oggetti in 2 classi:

$$\mathcal{C}_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad \text{pertanto} \quad \sum_{k=1}^{n-1} k = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Esempio. In un centro di calcolo 4 elaboratori devono smaltire 3 carichi di lavoro. (a) Quante sono le possibili distribuzioni dei 3 carichi? (b) Quante sono le possibili distribuzioni dei 3 carichi se ciascun elaboratore può smaltire al più un solo carico?

Soluzione. (a) Si tratta di combinazioni con ripetizioni (l'ordine non è rilevante). Quindi le possibili distribuzioni sono $\mathcal{C}'_{4,3} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$, e sono così rappresentabili: 0111, 1011, 1101, 1110, 0012, 0102, 1002, 0021, 0120, 1020, 0201, 0210, 1200, 2001, 2010, 2100, 0003, 0030, 0300, 3000.

(b) Poiché non sono ammesse ripetizioni la soluzione è $\mathcal{C}_{4,3} = \binom{4}{3} = 4$.

Tavola (di Tartaglia-Newton) dei coefficienti binomiali

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	somma
0	1	0	0	0	0	0	0	0	$1 = 2^0$
1	1	1	0	0	0	0	0	0	$2 = 2^1$
2	1	2	1	0	0	0	0	0	$4 = 2^2$
3	1	3	3	1	0	0	0	0	$8 = 2^3$
4	1	4	6	4	1	0	0	0	$16 = 2^4$
5	1	5	10	10	5	1	0	0	$32 = 2^5$
6	1	6	15	20	15	6	1	0	$64 = 2^6$
7	1	7	21	35	35	21	7	1	$128 = 2^7$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n)_k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n;$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{n!}{n!} = 1; \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1;$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1)!} = n; \qquad \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1)!} = n;$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{n-k}.$$

Formula di ricorrenza dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \qquad 1 \le r \le n.$$

(⋆⋆) Dimostrazione analitica

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!\,(n-r-1)!}$$
$$= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)\,(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{r\,(r-1)!\,(n-r-1)!}$$
$$= \left[\frac{1}{n-r} + \frac{1}{r}\right] \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r-1)!} = \frac{n}{r\,(n-r)}\,\frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r-1)!} = \binom{n}{r}.$$

(⋆⋆) Esercizio. Realizzare un programma che usi la formula di ricorrenza dei coefficienti binomiali per ottenere la tavola di Tartaglia-Newton per $\binom{n}{r}$, $0 \le r \le n \le N$, con N assegnato. Quali sono le condizioni iniziali da usare?

Formula di ricorrenza dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \qquad 1 \le r \le n.$$

($\star\star$) Dimostrazione combinatoria

Si basa sul fatto che i sottoinsiemi di r elementi di un insieme di n oggetti sono $\binom{n}{r}$. Consideriamo un insieme di n oggetti e fissiamo l'attenzione su uno di essi, che chiamiamo *oggetto 1*. Vi sono $\binom{n-1}{r-1}\binom{1}{1}$ sottoinsiemi di r elementi che contengono l'oggetto 1. Inoltre vi sono $\binom{n-1}{r}\binom{1}{0}$ sottoinsiemi di r elementi che non contengono l'oggetto 1. La somma dei termini $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ fornisce il numero $\binom{n}{r}$ di sottoinsiemi di r elementi.

Un generico sottoinsieme A di un insieme $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ può essere rappresentato da un vettore booleano $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dove $x_i = 1$ se $a_i \in A$ e $x_i = 0$ altrimenti, per $i = 1, 2, \ldots, n$. Quindi ad ogni sottoinsieme corrisponde un solo vettore e viceversa. Poiché in totale vi sono 2^n vettori, tanti sono i possibili sottoinsiemi. Poiché vi sono $\binom{n}{k}$ vettori aventi k bit pari a 1, tanti sono i sottoinsiemi di cardinalità k, per $k = 0, 1, \ldots, n$.

Esempio. Per $n = 4$ vi sono $2^4 = 16$ sottoinsiemi di $\{a, b, c, d\}$:

$$
\begin{array}{ll}
(0,0,0,0) : \{\} & (1,0,0,0) : \{a\} \\
(0,0,0,1) : \{d\} & (1,0,0,1) : \{a,d\} \\
(0,0,1,0) : \{c\} & (1,0,1,0) : \{a,c\} \\
(0,0,1,1) : \{c,d\} & (1,0,1,1) : \{a,c,d\} \\
(0,1,0,0) : \{b\} & (1,1,0,0) : \{a,b\} \\
(0,1,0,1) : \{b,d\} & (1,1,0,1) : \{a,b,d\} \\
(0,1,1,0) : \{b,c\} & (1,1,1,0) : \{a,b,c\} \\
(0,1,1,1) : \{b,c,d\} & (1,1,1,1) : \{a,b,c,d\}
\end{array}
$$

Teorema del binomio

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}, \qquad n \geq 1.$$

$\binom{n}{k}$ è detto *coefficiente binomiale* perché interviene nello sviluppo del binomio.

($\star\star$) Esercizio. Dimostrare il teorema del binomio per induzione su n.

Esempio. Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di n elementi?

Soluzione. Poiché vi sono $\binom{n}{k}$ sottoinsiemi di dimensione k, dal teorema del binomio per $x = y = 1$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

(Si veda anche l'ultima colonna della tavola dei coefficienti binomiali).

Nella somma $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ è incluso il caso $k = 0$ che corrisponde all'insieme vuoto. Quindi il numero di sottoinsiemi non vuoti di un insieme di n elementi è

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1.$$

Analogamente, il numero di sottoinsiemi costituiti da almeno 2 elementi è

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - n - 1.$$

Esercizio. Utilizzare il teorema del binomio per dimostrare che

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0, \qquad n > 0.$$

($\star\star$) **Proposizione.** Per ogni $n \geq k \geq 0$ sussiste la seguente identità:

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Dimostrazione. Procedendo per induzione su n, notiamo che per $n = k$ l'identità è valida, essendo

$$\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1.$$

Supponendo valida l'identità per n, vediamo che essa sussiste anche per $n+1$. Si ha

$$\sum_{j=k}^{n+1} \binom{j}{k} = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k}.$$

Ricordando la formula di ricorrenza $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ si ottiene

$\sum_{j=k}^{n+1} \binom{j}{k} = \binom{n+2}{k+1}$, da cui segue immediatamente la tesi.

Esempio. Calcolare quanti sono i vettori $(x_1, \dots, x_k)$ nei quali

(a) ogni x_i è un intero positivo tale che $1 \le x_i \le n$;

(b) ogni x_i è un intero positivo tale che $1 \le x_i \le n$, ed inoltre ogni x_i è diverso da ciascun intero $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$;

(c) ogni x_i è un intero positivo tale che $1 \le x_i \le n$, ed inoltre $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$;

(d) ogni x_i è un intero positivo tale che $1 \le x_i \le n$, ed inoltre $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_k$.

Soluzione. (a) $D'_{n,k} = n^k$; (b) $D_{n,k} = (n)_k$; (c) $C_{n,k} = \binom{n}{k}$; (d) $C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$.

(⋆⋆) Esercizio. Realizzare un programma che, per valori di k e di n assegnati,

(i) generi tutte le sequenze dei 4 casi dell'esercizio precedente;

(ii) conti quante sequenze sono state generate;

(iii) valuti le quantità n^k, $(n)_k$, $\binom{n}{k}$, $\binom{n+k-1}{k}$;

(iv) verifichi che i numeri di sequenze generate nei 4 casi corrispondano alle quantità valutate al punto (iii).

($\star\star$) Esercizio. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{\substack{i_2=1\\ i_2\neq i_1}}^{n}\cdots\sum_{\substack{i_k=1\\ i_k\neq i_r\ \forall r<k}}^{n} 1=(n)_k, \qquad \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}1=n^k,$$

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{i_1-1}\cdots\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}-1} 1=\binom{n}{k}, \qquad \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{i_1}\cdots\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}1=\binom{n+k-1}{k}.$$

Proposizione. Sussiste la seguente uguaglianza (detta di Vandermonde):

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k-1}+\cdots+\binom{n}{k}\binom{m}{0}.$$

Per la dimostrazione, si può procedere per via combinatoria. Ad esempio, considerando n biglie nere e m biglie bianche. In quanti modi si può formare un sacchetto di k biglie?

Esempio. Da un lotto di $N = 20$ pezzi costituito da 4 pezzi difettosi e 16 buoni si estraggono $n = 10$ pezzi a caso.
(a) Quanti sono i possibili campioni che non contengono pezzi difettosi?
(b) Quanti sono i possibili campioni che contengono 1 pezzo difettoso e 9 buoni?
(c) Quanti sono i possibili campioni che contengono almeno 2 pezzi difettosi?

Soluzione. (a) I possibili campioni che non contengono pezzi difettosi sono:

$$\binom{16}{10} = \binom{16}{6} = \frac{(16)_6}{6!} = 8\,008.$$

(b) I possibili campioni che contengono 1 pezzo difettoso e 9 buoni sono:

$$\binom{4}{1}\binom{16}{9} = 4\binom{16}{7} = 4\,\frac{(16)_7}{7!} = 45\,760.$$

(c) Facendo uso della formula di Vandermonde si ha che i possibili campioni che contengono almeno 2 pezzi difettosi sono:

$$\binom{20}{10} - \binom{16}{10} - \binom{4}{1}\binom{16}{9} = \frac{(20)_{10}}{10!} - 8\,008 - 45\,760 = 184\,756 - 53\,768 = 130\,988.$$

Esempio. Un lotto di 4 computer distinti deve essere assegnato a 2 laboratori.
(a) In quanti modi può essere fatto?
(b) E se ogni laboratorio deve ricevere almeno un computer?

Soluzione. (a) Assegnando k computer al primo laboratorio e $4-k$ al secondo laboratorio, l'assegnazione dei computer si può effettuare in $\binom{4}{k}$ modi; si ha quindi:

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} = 2^4 = 16;$$

tenendo conto che ogni computer può essere assegnato a ciascuno dei 2 laboratori, la soluzione è anche esprimibile come $D'_{2,4} = 2^4 = 16$.
(b) In questo caso si ha:

$$\sum_{k=1}^{3} \binom{4}{k} = 2^4 - \binom{4}{0} - \binom{4}{4} = 14.$$

Esercizi

1.1) Quanti sono i vettori booleani di lunghezza n
(i) che hanno almeno un elemento uguale a $\mathbf{1}$?
(ii) che hanno solo i primi due elementi uguali a $\mathbf{1}$?
(iii) che hanno tutti gli elementi uguali?

1.2) In una città ci sono 5 alberghi.
(i) In quanti modi 3 persone possono scegliere un albergo dove pernottare?
(ii) Cosa cambia se ogni persona deve scegliere un albergo diverso?

1.3) (i) Quanti sono i vettori booleani di lunghezza n?
(ii) Quanti sono i suddetti vettori con esattamente k elementi uguali a $\mathbf{0}$?
(iii) Quanti sono i suddetti vettori se i primi k elementi sono uguali?

1.4) Sia $S = \{1, 2, \ldots, 2n\}$; determinare
(i) il numero di sottoinsiemi di S aventi cardinalità k e che contengono il numero 1;
(ii) il numero dei sottoinsiemi di S aventi cardinalità k e che non contengono numeri pari.

1.5) Una squadra è formata da 11 titolari e 9 riserve. Selezionando 4 persone della squadra,
(i) quanti raggruppamenti distinti si possono formare?
(ii) quanti raggruppamenti distinti si possono formare, contenenti un solo titolare?
(iii) quanti raggruppamenti distinti si possono formare, contenenti almeno un titolare?

1.6) In quanti modi si possono disporre in fila 5 donne e 4 uomini in modo che 2 uomini non siano mai consecutivi?

1.7) Quanti sono i numeri di 6 cifre che contengono esattamente due volte la cifra 1, esattamente due volte la cifra 2 e non contengono lo 0?

1.8) Stabilire quante sono le sequenze del tipo abc tali che
(i) a è un intero tra 1 e 9, b e c sono interi tra 0 e 9, e risulta $a > b > c$;
(ii) a è un intero tra 1 e 9, b e c sono interi tra 0 e 9, e risulta $a \geq b \geq c$.

1.9) Calcolare le seguenti somme:

$$\text{(i)} \quad \binom{10}{2} + \binom{10}{3} \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{7} \binom{8}{k} \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{i=0}^{3} \binom{4}{i}\binom{4}{3-i}$$

1.10) Calcolare le seguenti espressioni:

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 2^k \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} 2^n \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{k=1}^{3} \binom{4}{k} 2^k 3^{n-k}$$