Esercizi sul Simplesso, Due Fasi e Big M

1. Considerare il seguente problema di programmazione lineare:

$$max - 4x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 12x_4$$

$$\begin{aligned} 7x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ 6x_2 - x_3 + 7x_4 \geq 3 \\ 3x_1 - 11x_3 - 18x_4 \leq 1 \\ x_1\ n.v., x_2 \leq 0, x_3\ n.v., x_4 \leq 0 \end{aligned}$$

a) **Riformulare il corrispondente modello matematico del problema definito nella prima fase del metodo delle due fasi (n.b. non risolvere il problema).**

b) **riformulare il problema come definito dal metodo del Big-M (n.b. non risolvere il nuovo problema)**

Soluzione:
Per prima cosa bisogna trasformare il problema in forma standard ossia tutti i vincoli devono divenire di uguaglianza e le variabili maggiori o uguali a zero. Per fare ciò usiamo le seguenti formule: $x_i \leq 0 \Rightarrow x'_i = -x_i$ e x_i n.v.$\Rightarrow x_i = x'_i - x''_i$ con $x'_i, x''_i \geq 0$. Usando queste trasformazioni e aggiungendo le variabili di slack otteniamo:

$$-min\ 4x'_1 - 4x''_1 + 8x'_2 + 2x'_3 - 2x''_3 + 12x'_4$$

$$\begin{aligned} 7x'_1 - 7x''_1 - x'_2 + 2x'_3 - 2x''_3 = 8 \\ -6x'_2 - x'_3 + x''_3 - 7x'_4 - x_5 = 3 \\ 3x'_1 - 3x''_1 - 11x'_3 + 11x''_3 + 18x_4 + x_6 = 1 \\ x'_1, x''_1, x'_2, x'_3, x''_3, x'_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

1*a*) Aggiungiamo le variabili artificiali al precedente sistema e inseriamo la f.o. per il metodo delle due fasi ottenendo:

$$min\ x_7 + x_8 + x_9$$

$$\begin{aligned} 7x'_1 - 7x''_1 - x'_2 + 2x'_3 - 2x''_3 + x_7 = 8 \\ -6x'_2 - x'_3 + x''_3 - 7x'_4 - x_5 + x_8 = 3 \\ 3x'_1 - 3x''_1 - 11x'_3 + 11x''_3 + 18x_4 + x_6 + x_9 = 1 \\ x'_1, x''_1, x'_2, x'_3, x''_3, x'_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0 \end{aligned}$$

1b) Aggiungiamo le variabili artificiali al problema in forma standard e modifichiamo la funzione obiettivo come segue:

$$-min\ 4x_1' - 4x_1'' + 8x_2' + 2x_3' - 2x_3'' + 12x_4' + Mx_7 + Mx_8 + Mx_9$$

$$\begin{aligned} 7x_1' - 7x_1'' - x_2' + 2x_3' - 2x_3'' + x_7 = 8 \\ -6x_2' - x_3' + x_3'' - 7x_4' - x_5 + x_8 = 3 \\ 3x_1' - 3x_1'' - 11x_3' + 11x_3'' + 18x_4 + x_6 + x_9 = 1 \\ x_1', x_1'', x_2', x_3', x_3'', x_4', x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0 \end{aligned}$$

****

2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} max\ -x_1 + 3/2x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ -1/2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) **Risolverlo applicando l'algoritmo del simplesso, utilizzando come base iniziale la base B={3,4};**

b) **Cambiare la funzione obiettivo da max a min e risolvere nuovamente il problema con il simplesso partendo sempre dalla base B={3,4}**

2a) **Soluzione:**
Per prima cosa riscriviamo il problema in forma standard aggiungendo le variabili di slack e per semplicità trasformiamo il problema da massimo a minimo.

$$-min\ x_1 - 3/2x_2$$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -1/2x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

A questo punto, data la sottomatrice
$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$x_B = \bar{b} = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

Poichè le componenti di $\bar{b}$ sono tutte non negative la base iniziale è ammissibile. Per verificare se la base è ottima dobbiamo calcolare i coefficienti di costo ridotto $z_j - c_j$:

$z_1 - c_1 = c_B A_B^{-1} a_j - c_j = [0\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \end{bmatrix} - 1 = -1 < 0$

$z_2 - c_2 = [0\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3/2 = 3/2 > 0$

Poichè i coefficienti di costo ridotto per la variabile fuori base x_2 sono positivi la soluzione di base corrente non è ottima e quindi x_2 entra in base. Stabilita qual è la variabile entrante in base è necessario individuare qual è la variabile uscente tramite il test dei minimi rapporti.

$\min\left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ij}} : y_{ij} > 0 \right\}$

Per prima cosa individuiamo il vettore y_j associato alla variabile entrante in base:

$y_2 = A_B^{-1} a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\min\left\{ \frac{4}{1}, \frac{5}{1} \right\} = 4$ quindi la variabile che esce dalla base è x_3. La nuova base diventa quindi $B = \{2, 4\}$. Si è effettuata in questo modo una iterazione (o pivot) del simplesso.

Data la nuova base dobbiamo verificare se è ottima. Prima però dobbiamo calcolare A_B^{-1}.

$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$z_1 - c_1 = c_B A_B^{-1} a_j - c_j = [-\frac{3}{2}\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \end{bmatrix} - 1 = [-\frac{3}{2}\ 0] \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \end{bmatrix} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0$

Poichè il coefficiente è positivo sicuramente la base non è ottima. Dobbiamo calcolare anche l'altro coefficiente di costo ridotto per poter scegliere quello di valore maggiore.

$z_3 - c_3 = [-\frac{3}{2}\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = [-\frac{3}{2}\ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -\frac{3}{2} < 0$

Quindi la variabile x_1 deve entrare in base. Usiamo il test dei minimi rapporti per calcolare la variabile uscente:

$y_1 = A_B^{-1} a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Poichè solo una componente del vettore y_2 è positiva sappiamo che la variabile uscente è x_4. La nuova base individuata sarà quindi: B={2,1}. Verifichiamo infine se questa base è ottima.

$A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$z_3 - c_3 = [-\frac{3}{2}\ 1] \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = [-\frac{1}{2}\ \ -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -\frac{1}{2} < 0$

$z_4 - c_4 = [-\frac{3}{2}\ 1] \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = [-\frac{1}{2}\ \ -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -1 < 0$

Poichè tutti i coefficienti di costo ridotto sono negativi la base è ottima.

$2b)$ **Soluzione:**

Consideriamo ora lo stesso problema dove la funzione non è più di massimo ma di minimo e trasformiamolo in forma standard:

$$min\ \ -x_1 + \frac{3}{2}x_2$$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -1/2x_2 + x_2 + x_4 &= 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Data la base di partenza $B = \{3, 4\}$ abbiamo:

$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$x_B = \bar{b} = A_B^{-1}b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

Verifichiamo se la base è ottima calcolando i coefficienti di costo ridotto:

$z_1 - c_1 = c_B A_B^{-1} a_j - c_j = [0\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \end{bmatrix} + 1 = 1 > 0$

$z_2 - c_2 = [0\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} < 0$

La base non è ottima e la variabile x_1 deve entrare in base. Calcoliamo il vettore y_1:

$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

Poichè entrambe le componenti del vettore y_1 sono negative la soluzione del problema è illimitata. $(-\infty)$.