Macchine di Turing multinastro: equivalenza

22 aprile 2022

Varianti della MdT

Esistono diverse varianti della definizione di macchina di Turing deterministica.

Vedremo:

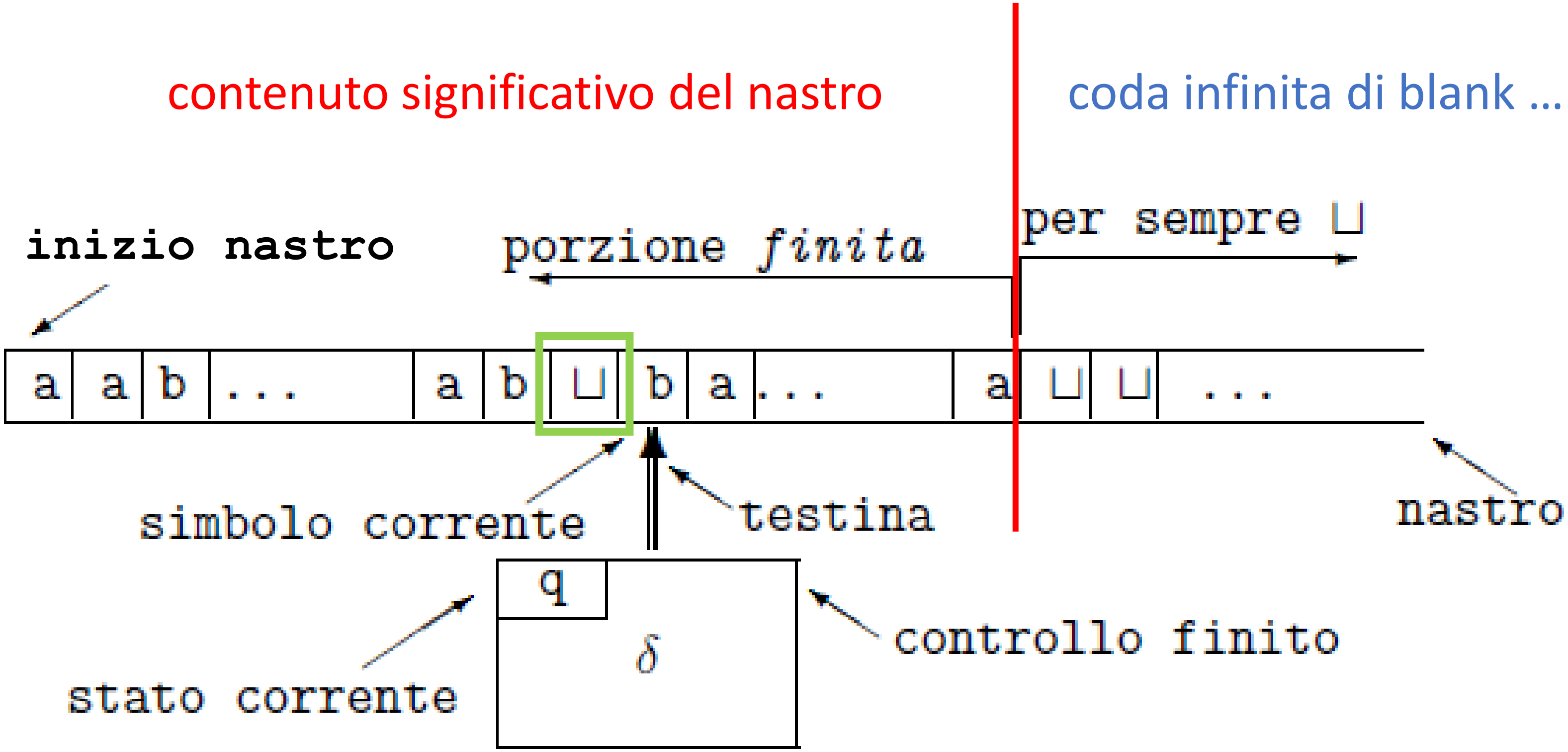
- la Macchina di Turing multinastro
- la Macchina di Turing non deterministica

Tali macchine di Turing hanno lo stesso potere computazionale (o espressivo) delle MdT deterministiche, cioè riconoscono la stessa classe di linguaggi.

Sono stati proposti molti altri modelli di computazione (+ o – simili alle MdT). Sorprendentemente:

Tutti i modelli «ragionevoli» con un accesso non restrittivo ad una memoria illimitata risultano essere equivalenti.

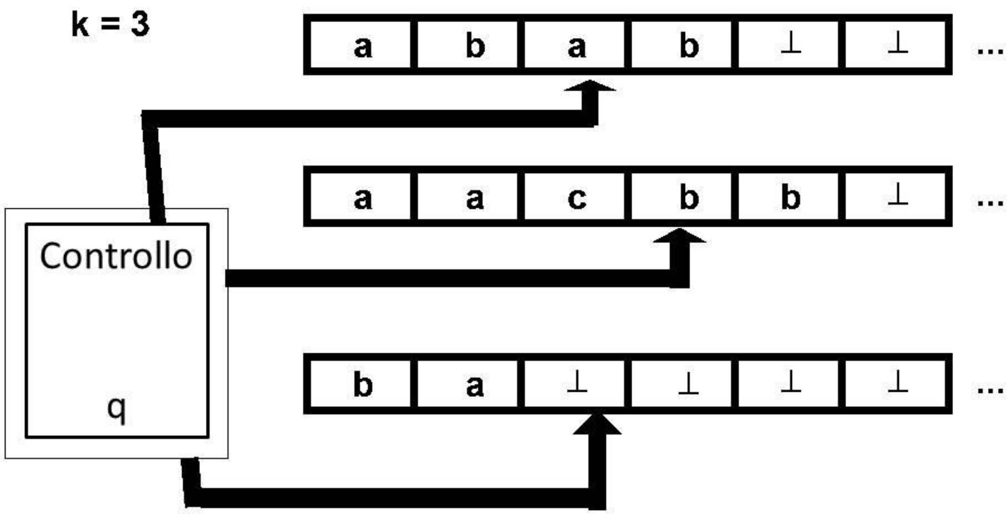
Una MdT



Il contenuto significativo del nastro è una stringa $w \in \Gamma^*$, con la convenzione che il suo ultimo carattere (se $w \neq \varepsilon$) non sia blank.
La stringa w PUO’ contenere blank al suo interno.
A volte nel progetto di una MdT si definiscono delle transizioni per scrivere un carattere speciale nella prima cella del nastro, per meglio individuarla.

Macchina di Turing multinastro

Una macchina di Turing multinastro (abbreviata MdTM) è una macchina di Turing in cui si hanno più nastri contemporaneamente accessibili in scrittura e lettura che vengono aggiornati tramite più testine (una per nastro).



Macchina di Turing multinastro

Definizione (MdT a k nastri)

Dato un numero intero positivo k, **una macchina di Turing con k nastri** *è una settupla*

$$(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$$

dove $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{accept}, q_{reject}$ sono definiti come in una MdT deterministica e la funzione di transizione δ è definita al modo seguente:

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{ L, R, S \}^k$$

Nota: Γ^k è il prodotto cartesiano di k copie di Γ e $\{L, R, S\}^k$ è il prodotto cartesiano di k copie di $\{L, R, S\}$.

Definizione (MdT multinastro)

Una **macchina di Turing multinastro** *è una macchina di Turing a k nastri, dove k è un numero intero positivo.*

Funzione di transizione di una MdTM

Espressione

$$\delta(q_i, a_1, \ldots, a_k) = (q_j, b_1, \ldots, b_k, D_1, \ldots, D_k)$$

indica che se la MdT a k nastri M

- si trova nello stato q_i
- la testina t legge a_t per $t = 1 \ldots, k$

allora

- M va nello stato q_j
- la testina t scrive b_t e si muove nella direzione $\mathsf{D}_t \in \{L, S, R\}$, per $t = 1 \ldots, k$

Computazione di una MdTM

Se $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ è una macchina di Turing con k nastri,

$(q_0 w, q_0, \ldots, q_0)$ è una configurazione iniziale con input w

$(u_1 q_{accept} v_1, \ldots, u_k q_{accept} v_k)$ è una configurazione di accettazione.

Il linguaggio $L(M)$ riconosciuto da M è

$$\begin{aligned} L(M) \quad = \quad & \{w \in \Sigma^* \mid \exists u_t, v_t \in \Gamma^*, t \in \{1, \ldots, k\} : \\ & (q_0 w, \ldots, q_0) \to^* (u_1 q_{accept} v_1, \ldots, u_k q_{accept} v_k)\} \end{aligned}$$

Il modello di MdT «potenziato» con la possibilità di avere più di un nastro, permette di riconoscere più linguaggi?

Teorema

I due modelli di Mdt e MdTM hanno stesso potere computazionale.

Dimostrazione

In un verso è ovvio: ogni MdT è una MdTM con k=1 nastri.

Viceversa, dimostriamo che per ogni MdT multinastro M esiste una MdT (a singolo nastro) S equivalente ad M, cioè L(S) = L(M).

Ci riferiremo al contenuto (significativo) del nastro.

Supponiamo che M sia una MdT a k nastri.

M = Multi
S = Singolo

Costruiamo una MdT (a singolo nastro)

$$S = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$$

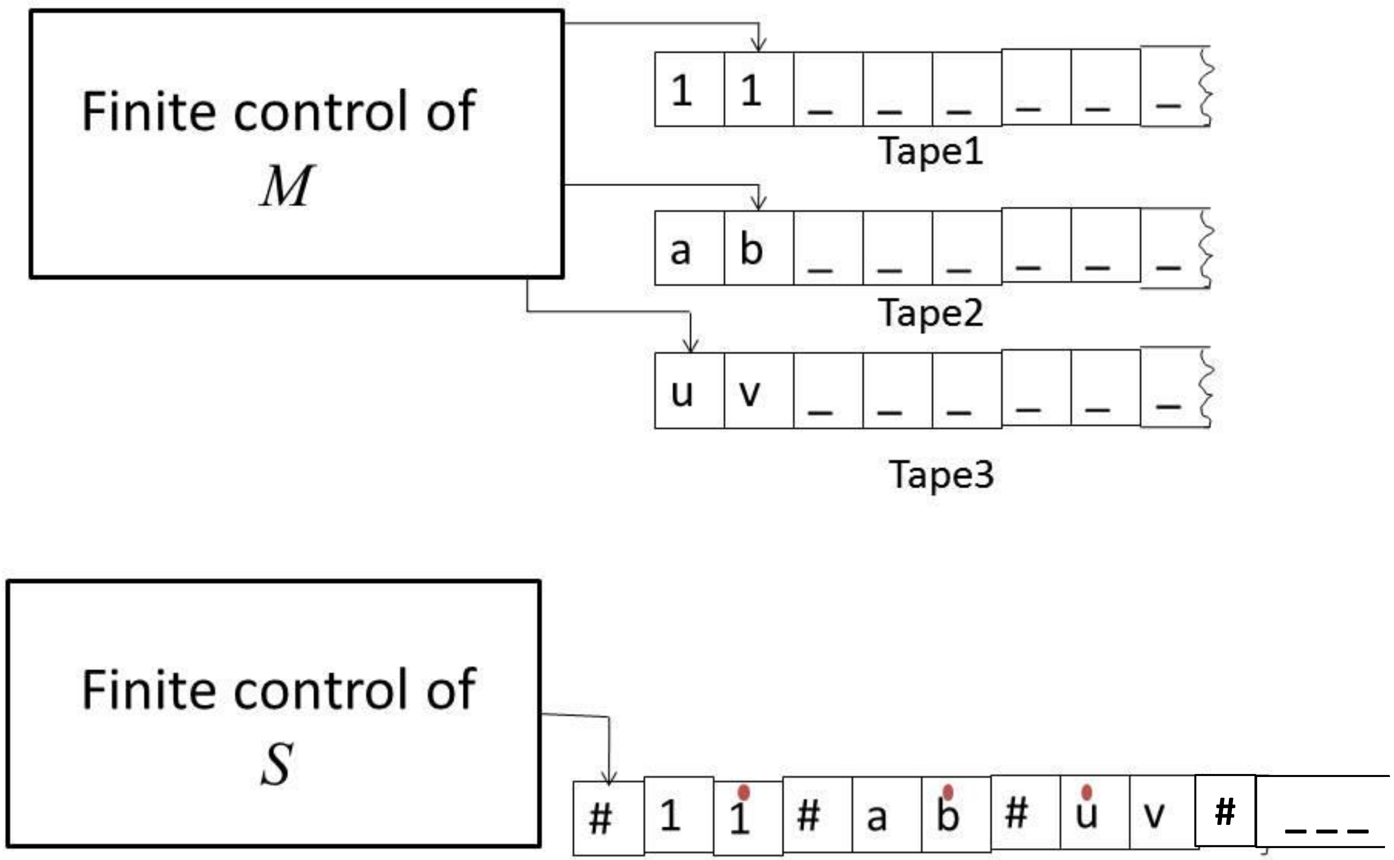
che simuli M.

La macchina S deve codificare su un solo nastro

- il contenuto significativo di ogni nastro
- la posizione della testina su ogni nastro

Vediamo come fare dapprima su un esempio.

Esempio: k=3


Finite control of
M
1 1 _ _ _ _ _ _
Tape1
a b _ _ _ _ _ _
Tape2
u v _ _ _ _ _ _
Tape3
Finite control of
S
1 1 # a b # u v # _ _ _

Più in generale

- Il contenuto del nastro di S sarà la concatenazione di k blocchi separati da $\#$ (seguita da $\sqcup$).
- Ogni blocco corrisponderà a un nastro di M e avrà una lunghezza variabile che dipende dal contenuto del nastro corrispondente.
- Un elemento $\dot{\gamma}$, con $\gamma \in \Gamma$, nel blocco t-esimo indica la posizione della testina del nastro t-esimo, $t \in \{1, \ldots, k\}$.

Equivalenza fra MdT e MdTM

Quindi a una configurazione di M

$$(u_1 q a_1 v_1, \dots, u_k q a_k v_k)$$

corrisponderà la configurazione di S

$$q' \# u_1 \dot{a}_1 v_1 \# \dots \# u_k \dot{a}_k v_k \#$$

(per qualche stato q')

Nota: Se Γ' è l'alfabeto dei simboli di nastro di M, l'alfabeto dei simboli di nastro di S sarà $\Gamma' \cup \{\dot{\gamma} \mid \gamma \in \Gamma'\} \cup \{\#, \dot{\#}\}$.

Sia $w = w_1 \ldots w_n$ una stringa di input per S.

S comincia nella sua configurazione iniziale per w, cioè

$$q_0\, w_1 \ldots w_n$$

Poi, con una serie di passi, dalla sua configurazione iniziale passa alla configurazione corrispondente alla configurazione iniziale di M, cioè quella con w sul primo nastro, gli altri nastri vuoti e ogni testina sulla prima cella del suo nastro (per qualche stato q').

$$q' \# \dot{w}_1 \cdots w_n \# \dot{\sqcup} \# \ldots \# \dot{\sqcup} \#$$

Equivalenza fra MdT e MdTM

Per ogni mossa del tipo $\delta(q, a_1, ..., a_k) = (s, b_1, ..., b_k, D_1, ..., D_k)$

- S scorre il nastro verso destra, fino al primo $\perp$ memorizzando nello stato i simboli marcati sui singoli nastri; Memorizzazione: stato aggiuntivo per ogni possibile sequenza di $\leq k$ simboli di Γ
- la testina si riposiziona all'inizio del nastro,

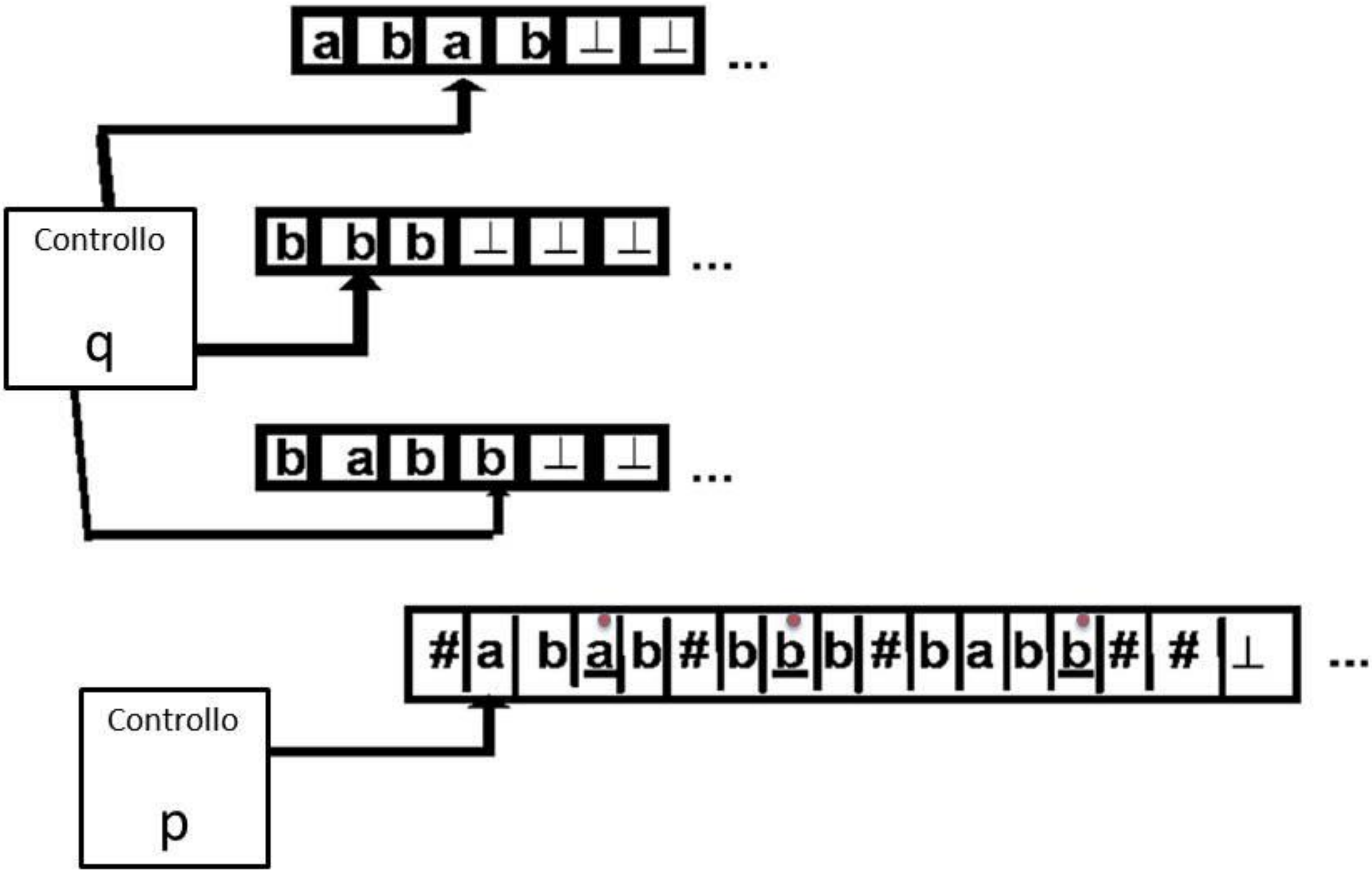
Primo passaggio

- poi il nastro viene scorso di nuovo eseguendo su ogni blocco (cioé un nastro di M) le azioni che simulano quelle delle testine di M: scrittura e spostamento.

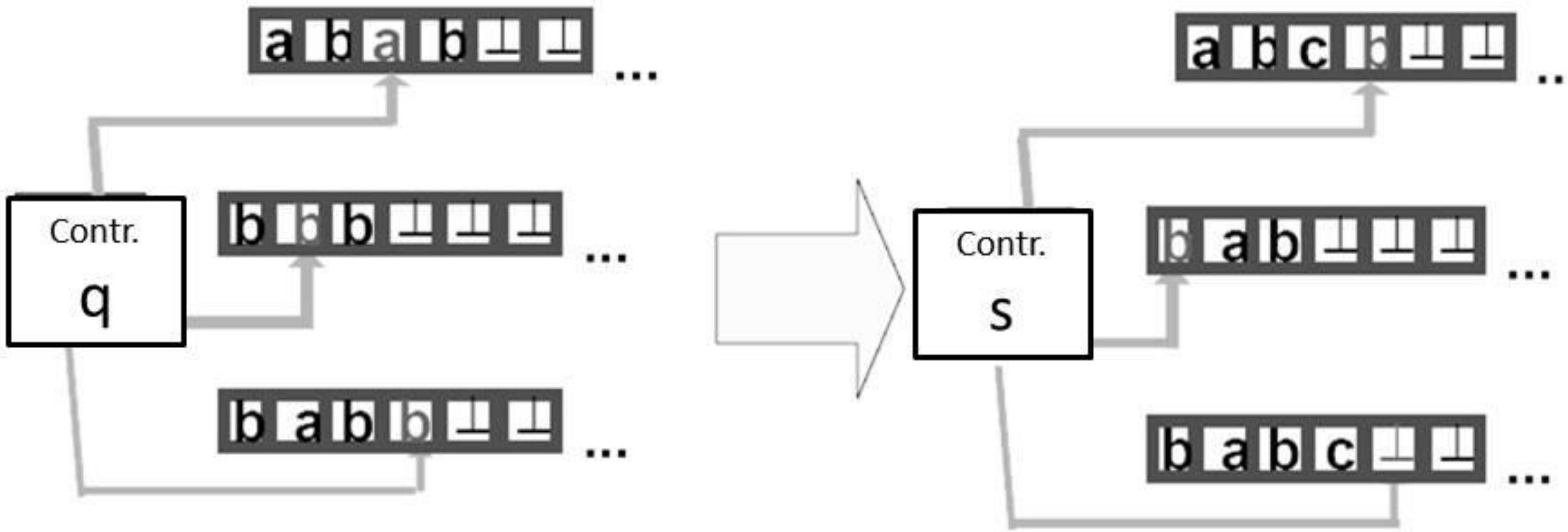
Secondo passaggio

- Durante il secondo passaggio S scrive su tutti i simboli "marcati" e
- sposta il marcatore alla nuova posizione della testina corrispondente di M

Esempio



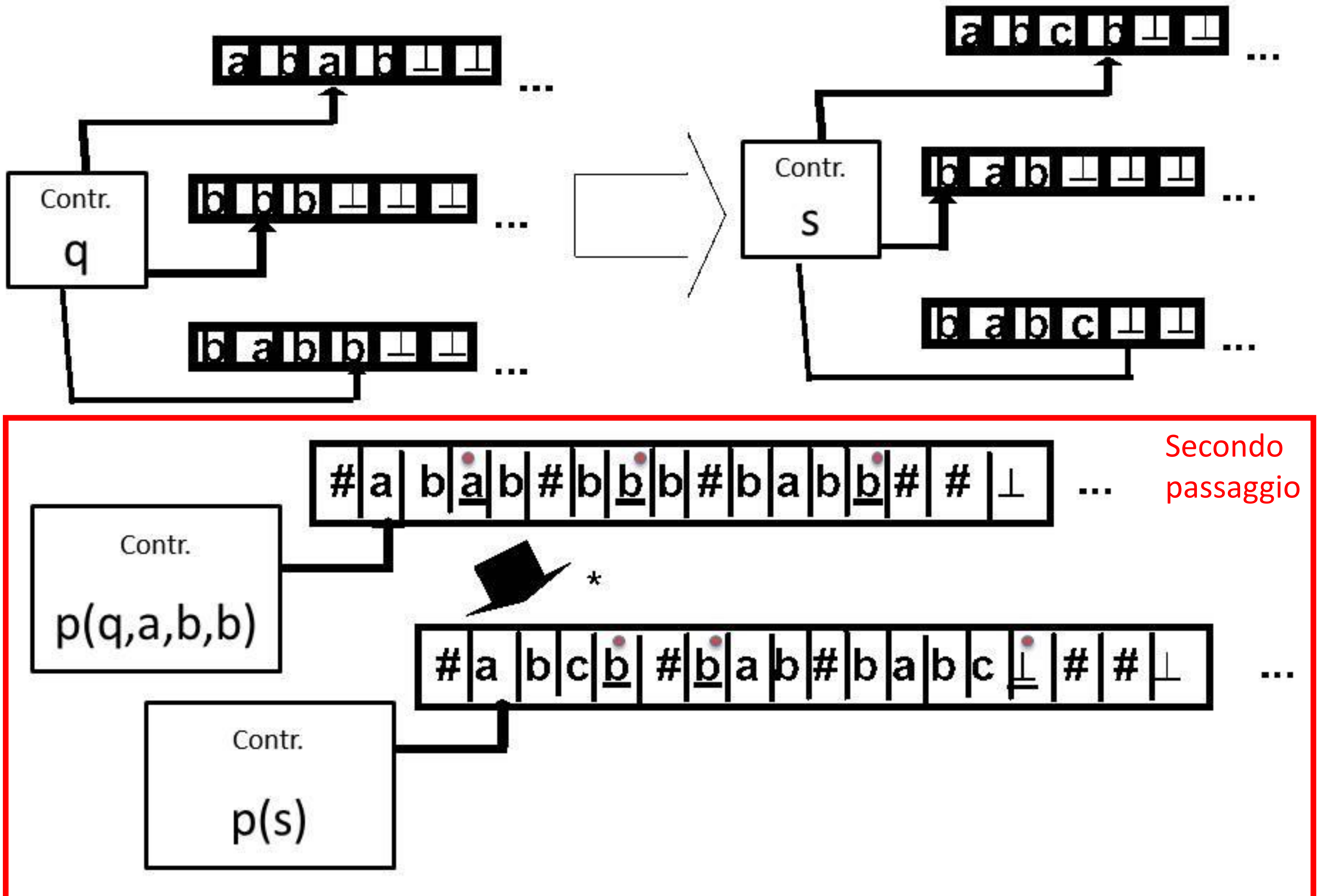
$\delta(q, a, b, b) = (s, c, a, c, R, L, R)$



Memorizza nello stato i simboli marcati

Primo passaggio

$\delta(q, a, b, b) = (s, c, a, c, R, L, R)$



Equivalenza fra MdT e MdTM

- Nota. Nel corso della simulazione S potrebbe spostare una delle testine virtuali (puntino) su un delimitatore $\#$. Questo significa che M ha spostato la testina del nastro (corrispondente al segmento del nastro di S) sulla parte di nastro contenente solo $\sqcup$ (sulla cella a destra del carattere diverso da $\sqcup$ più a destra del suo nastro). In questo caso, S cambia $\dot{\#}$ con $\dot{\sqcup}$ e deve spostare di una posizione tutto il suffisso del nastro a partire da $\dot{\#}$ (cambiato con $\#$) fino all'ultimo $\#$ a destra.
- Poi la MdT entra nello stato che ricorda il nuovo stato di M e riposiziona la testina all'inizio del nastro.
- Infine, se M si ferma, anche S si ferma

La MdT S avrà molti più stati di M e la computazione su uno stesso input necessiterà di molti più passi, ma … S simula M, cioè L(S) = L(M) !

Teorema

Per ogni MdT multinastro M esiste una MdT (a singolo nastro) S equivalente ad M, cioè L(S) = L(M).

Teorema

Un linguaggio L è Turing riconoscibile se e solo se esiste una macchina di Turing multinastro M che lo riconosce, cioè tale che $L(M) = L$.

Equivalenza fra MdT e MdTM

- Nota. Nel corso della simulazione S potrebbe spostare una delle testine virtuali (puntino) su un delimitatore $\#$. Questo significa che M ha spostato la testina del nastro (corrispondente al segmento del nastro di S) sulla parte di nastro contenente solo $\sqcup$ (sulla cella a destra del carattere diverso da $\sqcup$ più a destra del suo nastro). In questo caso, S cambia $\dot{\#}$ con $\dot{\sqcup}$ e deve spostare di una posizione tutto il suffisso del nastro a partire da $\dot{\#}$ (cambiato con $\#$) fino all'ultimo $\#$ a destra.

1. Progettare una macchina di Turing che sposta l'input a destra di una casella. ***(discusso in aula)***

2. Progettare una macchina di Turing che calcola il successore in binario.

Questi esercizi ci mostrano cosa può fare una MdT: copiare, spostare, calcolare successore, somma, differenza (in unario o binario), …
contare, ovvero riconoscere occorrenze di ugual numero, lunghezza pari ad una potenza di 2, …..

3.8 Give implementation-level descriptions of Turing machines that decide the following languages over the alphabet $\{0,1\}$.

[A] **a.** $\{w \mid w$ contains an equal number of 0s and 1s$\}$

b. $\{w \mid w$ contains twice as many 0s as 1s$\}$

c. $\{w \mid w$ does not contain twice as many 0s as 1s$\}$

E con una MdT a 2 (o più) nastri, avremmo «vantaggi»? Provate.