Esercizio 1

Una targa automobilistica è formata da 3 cifre numeriche e 3 lettere (scelte tra le 26 dell'alfabeto anglosassone). (i) Quante sono le possibili targhe? (ii) Quante sono le possibili targhe che contengono sia il numero 0 che la lettera P?

(i)

$10 \cdot 10 \cdot 10 \qquad 26 \cdot 26 \cdot 26$

numero possibili targhe $= 10^3 \cdot 26^3$

(ii)

$10^3 - 9^3 \qquad 26^3 - 25^3$

numero di targhe che contengano lo zero e la P è $(10^3 - 9^3) \cdot (26^3 - 25^3)$

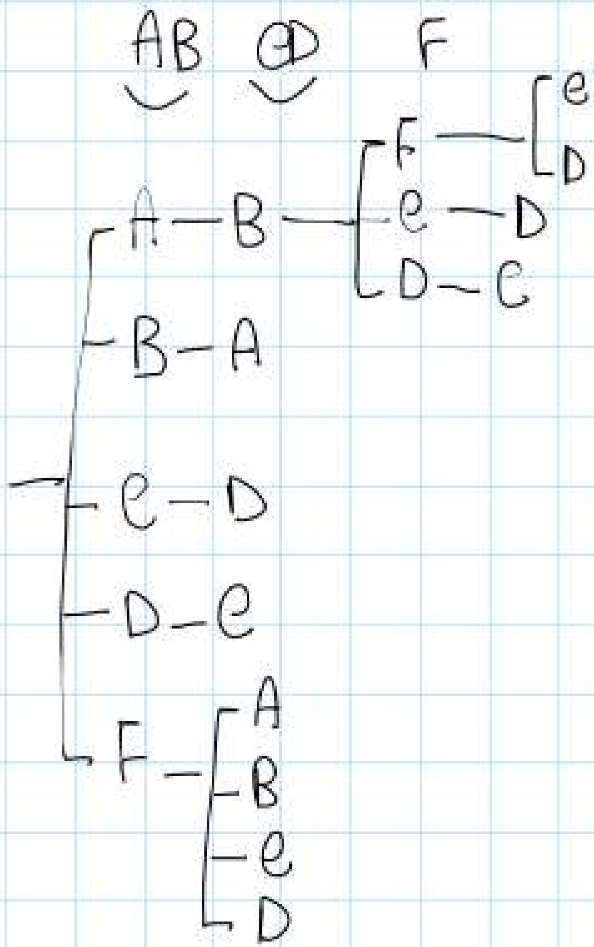
Esercizio 1 - Gruppo 3

lunedì 3 maggio 2021 13:07

Esercizio 1

In quanti modi possono disporsi in fila 5 persone A, B, C, D, F se (i) A e B sono vicini tra loro e C e D sono vicini tra loro? (ii) F non si trova all'ultimo posto? (iii) A precede B (anche non immediatamente)?

(i)



$$3! \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$$

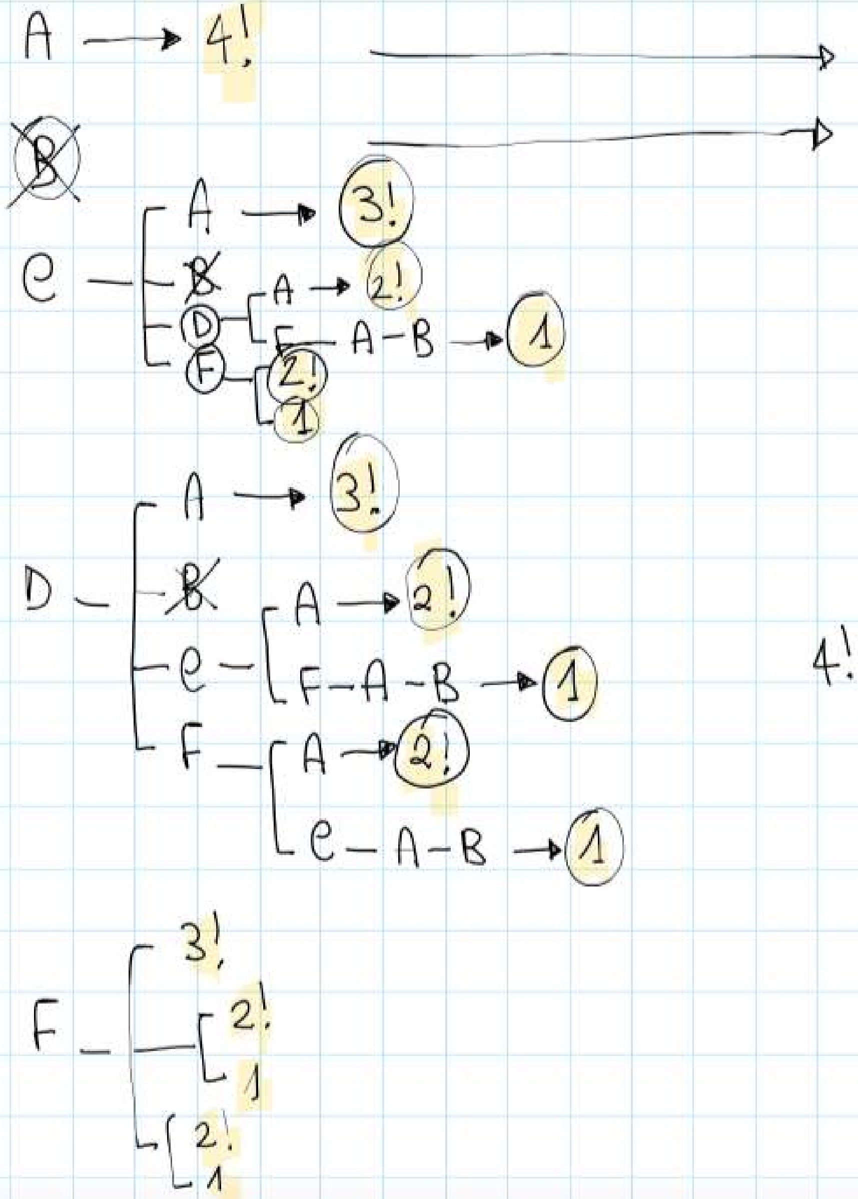
(ii) $\_\ \_\ \_\ \_\ F \longrightarrow$ 4! numero di modi in cui è possibile trovare F all'ultimo posto

$\_\ \_\ \_\ \_\ \_ \longrightarrow$ 5! numero di modi in cui si possono trovare le 5 persone in fila

$$5! - 4! = 120 - 24 = 96$$

Alternativa: $4! \cdot 4 = 96$

(iii)



$$
\begin{aligned}
&4! \; + \\
&0 \; + \\
&\left.\begin{aligned} &3! \; + \\ &2! \; + \\ &1 \; + \\ &2! \; + \\ &1 \end{aligned}\right\} \times 3 \text{ volte}
\end{aligned}
$$

$$4! + 0 + 3 \cdot (3! + 2! + 1 + 2! + 1) = 60$$

Esercizio 2 - Gruppo 2

lunedì 3 maggio 2021 13:08

Esercizio 2
Un'urna contiene 6 biglie numerate da 1 a 6. Un esperimento consiste nello scegliere a caso due biglie dall'urna e registrare il numero ottenuto moltiplicando i numeri delle due biglie estratte. Calcolare (i) la probabilità che il numero ottenuto sia divisibile per 3 o per 4 (ii) la probabilità che il numero ottenuto sia divisibile per 4 ma non per 3.

$$|S| = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

$$S = \{12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56\}$$

(i) A = "il numero ottenuto è divisibile per 3"
B = "il numero ottenuto è divisibile per 4"

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

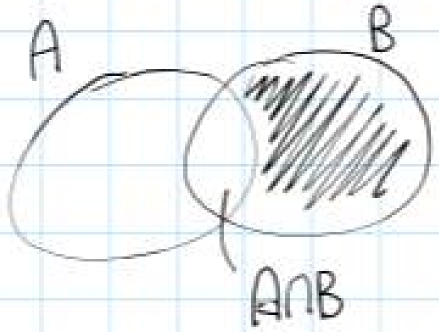
$$A = \{13, 16, 23, 26, 34, 35, 36, 46, 56\} \longrightarrow |A| = 9$$

$$B = \{14, 24, 26, 34, 45, 46\} \longrightarrow |B| = 6$$

$$A \cap B = \{26, 34, 46\} \longrightarrow |A \cap B| = 3$$

$$P(A \cup B) = \frac{|A|}{|S|} + \frac{|B|}{|S|} - \frac{|A \cap B|}{|S|} = \frac{9}{15} + \frac{6}{15} - \frac{3}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

(ii) $\underline{P}(B \cap \bar{A}) = \underline{P}(B) - \underline{P}(A \cap B) = \frac{6}{15} - \frac{3}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$



Esercizio 2 - Gruppo 4

lunedì 3 maggio 2021 13:09

Esercizio 2
La roulette americana è suddivisa in 38 caselle uguali. Tra queste, ci sono 2 caselle con il numero 0 e le rimanenti sono numerate da 1 a 36. Le caselle con i numeri dispari sono colorate di rosso, quelle con i numeri pari sono colorate di nero mentre le due caselle con gli zeri sono colorate di verde. Il banchiere gira la ruota e lancia una pallina nella roulette. Supponendo che la pallina possa cadere con uguale probabilità in una qualsiasi delle 38 caselle, calcolare (i) la probabilità che la pallina cada in una casella recante un numero multiplo di 3 oppure in una casella rossa (ii) la probabilità che la pallina cada in una casella recante un numero pari ma non multiplo di 3.

$|\Omega| = 38$

A = " la pallina cade in una casella con un multiplo di 3"
B = " la pallina cade in una casella rossa"

(i) $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36\} \rightarrow |A| = 12$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35\} \rightarrow |B| = 18$

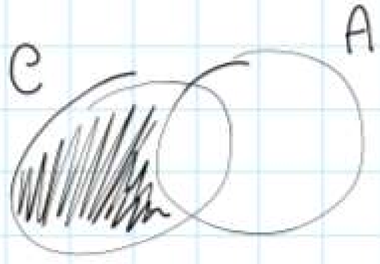
$A \cap B = \{3, 9, 15, 21, 27, 33\} \rightarrow |A \cap B| = 6$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{12}{38} + \frac{18}{38} - \frac{6}{38} = \frac{24}{38} = \frac{12}{19}$$

(ii) C = "la pallina cade in una casella pari"

$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36\} \rightarrow |C| = 18$

$P(C \cap \bar{A}) = P(C) - P(A \cap C) = \frac{18}{38} - \frac{6}{38} = \frac{12}{38} = \frac{6}{19}$



$A \cap C = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\} \rightarrow |A \cap C| = 6$

Esercizio 2
Un algoritmo genera a caso una sequenza di lunghezza 5, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, dove ogni elemento x_i può assumere un valore da 1 a 9. Calcolare (i) la probabilità che la sequenza contenga almeno una cifra pari ad 1 (ii) la probabilità che la sequenza contenga almeno una cifra pari ad 1 e nessun 9 (iii) la probabilità che la sequenza contenga esattamente una cifra pari ad 1 oppure esattamente una cifra pari a 9.

SPAZIO CAMPIONARIO

$$\underset{9}{\underset{\downarrow}{\_}}\ \underset{9}{\underset{\downarrow}{\_}}\ \underset{9}{\underset{\downarrow}{\_}}\ \_\ \_ \ \dots$$

$$|S| = 9^5$$

EVENTO $\bar{A}$

$$\underset{8}{\underset{\downarrow}{\_}}\ \underset{8}{\underset{\downarrow}{\_}}\ \_\ \_\ \_ \ \dots$$

(i) $A =$ "almeno una cifra è pari ad 1"

$$\underline{P}(A) = 1 - \underline{P}(\bar{A}) = 1 - \frac{8^5}{9^5} \cong 0,4451$$

(ii) $B =$ "nessun 9"

$$\underline{P}(A \cap B) = ?$$

numero di modi in cui posso selezionare la casella da riempire con 1

$$5 \qquad 1\ \underset{7}{\_}\ \underset{7}{\_}\ \underset{7}{\_}\ \underset{7}{\_} \longrightarrow 5 \cdot 7^4$$

$$\binom{5}{2} \qquad 1\ 1\ \underset{7}{\_}\ \underset{7}{\_}\ \underset{7}{\_} \longrightarrow \binom{5}{2} \cdot 7^3$$

$$\binom{5}{3} \qquad 1\ 1\ 1\ \underset{7}{\_}\ \underset{7}{\_} \longrightarrow \binom{5}{3} 7^2$$

$$\binom{5}{4} \qquad 1\ 1\ 1\ 1\ \underset{7}{\_} \longrightarrow \binom{5}{4} \cdot 7$$

$$1\ 1\ 1\ 1\ 1 \longrightarrow 1$$

casi favorevoli $= 5 \cdot 7^4 + \binom{5}{2} 7^3 + \binom{5}{3} 7^2 + \binom{5}{4} 7 + 1$

$= 15961$

$\Downarrow$

$$P(A \cap B) = \frac{15961}{9^5} \cong 0{,}270301$$

(iii) C = " esca 1 esattamente 1 volta"
D = " esce 9 esattamente 1 volta"

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = \frac{5 \cdot 8^4}{9^5} + \frac{5 \cdot 8^4}{9^5} - \frac{2 \cdot \binom{5}{2} \cdot 7^3}{9^5}$$

$$\binom{5}{2} \qquad \underline{1}\ \underline{9}\ \underset{7}{\underline{\ }}\ \underset{7}{\underline{\ }}\ \underset{7}{\underline{\ }}$$

per $C \cap D$

questo è il numero di
modi in cui è possibile
selezionare 2 posti su 5 disponibili
N.B. questo numero va moltiplicato per 2
perché nelle 2 sequenze selezionate
posso inserire 1-9 oppure 9-1