Variabili aleatorie 3

martedì 29 giugno 2021 17:49

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

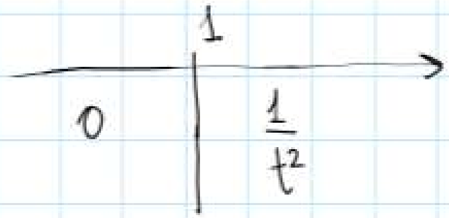
Esercizio 2

Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \geq 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la funzione di distribuzione;
(ii) Ricavare la probabilità $P(X < 4 \mid X > 2)$;
(iii) Calcolare $E(1 + \frac{1}{X})$.

(i) $$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$



Per $x \leq 1$, $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

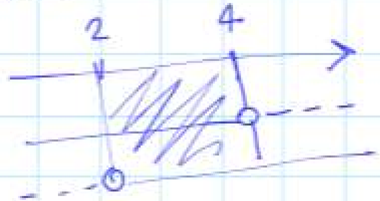
Per $x > 1$, $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \cancel{\int_{-\infty}^{1} 0\,dt} + \int_{1}^{x} \frac{1}{t^2}\,dt = \int_{1}^{x} t^{-2}\,dt$$

$$= \left[\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^x = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x} - (-1) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

$X < 4 \cap X > 2$

$\iff 2 < X < 4$



(ii) $$P(X < 4 \mid X > 2) = \frac{P(2 < X < 4)}{P(X > 2)} =$$

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$

$$= \frac{F(4) - F(2)}{1 - F(2)} = \frac{\cancel{1} - \frac{1}{4} - \cancel{1} + \frac{1}{2}}{\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2}} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

(iii) $$E\left(1 + \frac{1}{X}\right) = E(1) + E\left(\frac{1}{X}\right) = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} \, dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} \, dx$$

$$= 1 + \int_1^{+\infty} x^{-3} \, dx = 1 + \left[\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right]_1^{+\infty}$$

$$= 1 + \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^{+\infty} = 1 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Variabili aleatorie 4

mercoledì 7 luglio 2021 12:29

Esercizio 2

Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 - (1-x)^2 & 0 \leq x < 1, \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

(i) Determinare la densità di probabilità;
(ii) Calcolare $E(X)$;
(iii) Ricavare la probabilità $P(|X - E(X)| < \frac{1}{3})$;
(iv) Posto $Y = -X - 1$, calcolare il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$.

(i)

$$f(x) = \frac{dF}{dx}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -2(1-x)(-1) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 2(1-x), & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(ii)

$$E(X) = \int_0^1 2x(1-x)\,dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx =$$

$$= \left[\cancel{2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} - 2 \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(iii) $\underline{P}\left(|X-E(X)| < \frac{1}{3}\right) = \underline{P}\left(0 < X < \frac{2}{3}\right) = F\left(\frac{2}{3}\right) - F(0) = *$

$$|X - a| < b \quad \downarrow \quad \underline{-b < X - a < b}$$

$$|X - a| > b \quad \downarrow \quad X - a < -b \;\cup\; X - a > b$$

$$\left|X - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} < X - \frac{1}{3} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} < X < \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$0 < X < \frac{2}{3}$$

$$* = 1 - \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 - 1 + (1-0)^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{9} - \cancel{1} + \cancel{1} = \frac{8}{9}$$

(iv) $Y = -X - 1$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{-Var(X)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(X)}} = \frac{-Var(X)}{\cancel{\sqrt{}}Var(X)^2} = -\frac{Var(X)}{Var(X)} = -1$$

$$Cov(X,Y) = Cov(X, -X-1) = Cov(X, -X) = -Cov(X,X) = -Var(X)$$

$$Var(Y) = Var(-X-1) = Var(-X) = (-1)^2 \cdot Var(X) = Var(X)$$

Variabili aleatorie 5

mercoledì 7 luglio 2021 12:50

Esercizio 2

Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} 6(x - x^2) & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la funzione di distribuzione;
(ii) Calcolare $E(X^n)$, $n \geq 1$;
(iii) Posto $Y = X^2 + 1$, calcolare $Cov(X, Y)$.

Esercizio 3

Un'urna contiene 3 biglie rosse e 5 biglie nere. Si estraggono 2 biglie senza reinserimento. Siano

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se la prima biglia estratta è rossa,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se la seconda biglia estratta è rossa,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la densità discreta congiunta $p(x, y)$;

(ii) Stabilire se X ed Y sono indipendenti;

(iii) Calcolare $E(X + Y)$ ed $E(X \cdot Y)$.

(i)

RR $\longrightarrow \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$

R N $\longrightarrow \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$

N R $\longrightarrow \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

N N $\longrightarrow \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$

1 ✓

X \ Y	1	0	$p_X(x)$
1	6/56	15/56	$\boxed{21/56}$
0	15/56	20/56	35/56
$p_Y(y)$	$\boxed{21/56}$	35/56	1

(ii) $p(x,y) \stackrel{?}{=} p_X(x)\, p_Y(y) \quad \forall x \, \forall y$

$$p(1,1) = \frac{6}{56} \neq \frac{21}{56} \cdot \frac{21}{56} = p_X(1)\, p_Y(1)$$

$\Rightarrow$ X e Y non sono indipendenti

(iii) $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{21}{\cancel{56}_{28}} \cdot \cancel{2}^{1} = \frac{21}{28}$

$$E(X \cdot Y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{56}_{28}} = \frac{3}{28}$$

Distribuzioni congiunte 2

mercoledì 7 luglio 2021 13:04

Esercizio 3

Un esperimento consiste in 3 prove ripetute e indipendenti, con probabilità di successo costante in ogni prova $p = 1/4$. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di successi nelle 3 prove e sia Y la variabile aleatoria che rappresenta la prova in cui si ha ottenuto il primo successo. Nel caso in cui nelle 3 prove non si abbiano successi, la variabile Y assume valore zero.

(i) Determinare la densità discreta congiunta $p(x, y)$;

(ii) Stabilire se X ed Y sono indipendenti;

(iii) Calcolare $Cov(X, Y)$.

(i)

	prob.	X	Y
I I I	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$	0	0
S I I	$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$	1	1
I S I		1	2
I I S		1	3
S S I	$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$	2	1
S I S		2	1
I S S		2	2
S S S	$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$	3	1

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$p_X(x)$
0	$\frac{27}{64}$	0	0	0	$\frac{27}{64}$
1	0	$\frac{9}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$
2	0	$\frac{6}{64}$	$\frac{3}{64}$	0	$\frac{9}{64}$
3	0	$\frac{1}{64}$	0	0	$\frac{1}{64}$
$p_Y(y)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{16}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{9}{64}$	1

$$P(X=0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$$

$\vdots$

(ii) $p(0,1) = 0 \neq \frac{27}{64} \cdot \frac{16}{64} = p_X(0)\, p_Y(0) \Rightarrow$ X ed Y non sono indipendenti

(iii) $$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{81}{64} - \frac{3}{4} \cdot \frac{67}{64} = \frac{123}{256}$$

$$E(X \cdot Y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{9}{64} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{9}{64} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{9}{64} +$$

$$+ 2 \cdot 1 \cdot \frac{6}{64} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{64} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{64} = \frac{81}{64}$$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{27}{64} + 2 \cdot \frac{9}{64} + 3 \cdot \frac{1}{64} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$$

$$X \sim Bin\left(3, \frac{1}{4}\right) \qquad E(X) = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{16}{64} + 2 \cdot \frac{12}{64} + 3 \cdot \frac{9}{64} = \frac{67}{64}$$