Tipici tempi di esecuzione
Esercizi

Venerdì 10 marzo 2023

Per stabilire la crescita di una funzione

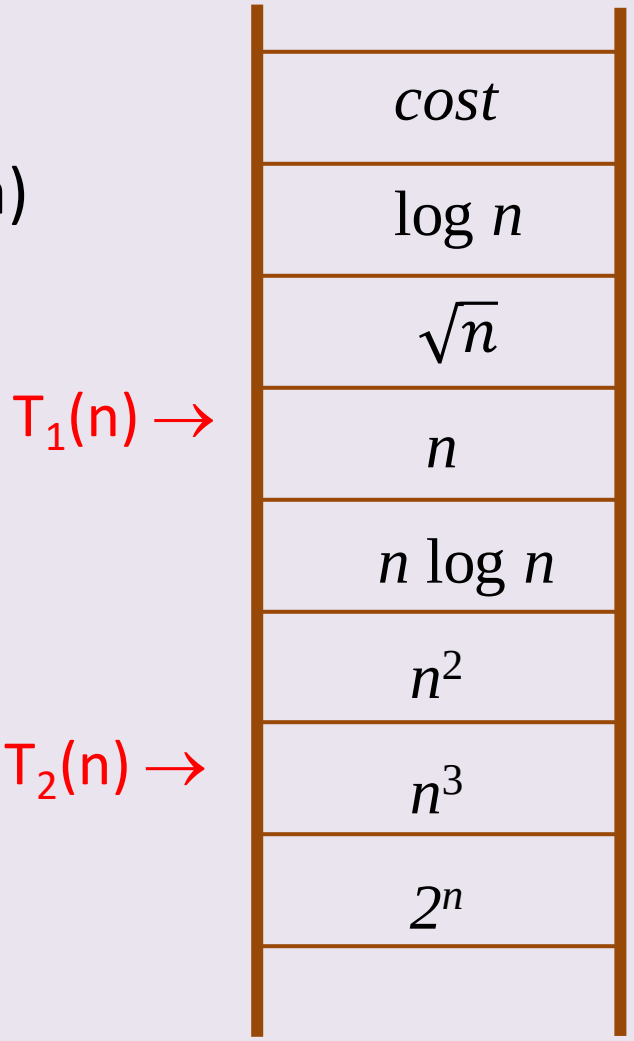
Basterà usare:

- La «scaletta»
- Le proprietà di additività e transitività
- Le due regole fondamentali:
  1. Possiamo trascurare i termini additivi di ordine inferiore
  2. Possiamo trascurare le costanti moltiplicative

Per confrontare la crescita di due funzioni

$T_1(n)$ vs $T_2(n)$

- $T_1(n) = \Theta(f(n))$
- $T_2(n) = \Theta(g(n))$
- Con f(n) e g(n) standard (della scaletta)
  e f(n)=o(g(n)) allora:



$T_1(n) = o(T_2(n))$

Verifica per esercizio

A survey on common running times

[KT] par. 2.4

Linear Time: O(n)

Linear time. Running time is at most a constant factor times the size of the input.

```
max ← a1
for i = 2 to n {
    if (ai > max)
        max ← ai
}
```

Computing the maximum. Compute maximum of n numbers $a_1, \ldots, a_n$.

Esistono anche casi più complessi in cui il tempo di esecuzione è O(n), ma non si tratta di un singolo for. Per esempio, vedremo procedura Merge

Quadratic Time: $O(n^2)$

Quadratic time. Enumerate all pairs of elements.

Closest pair of points. Given a list of n points in the plane $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, find the pair that is closest (here **`min`** is the square of the minimum distance)

$O(n^2)$ solution. Try all pairs of points.

```
min ← (x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2
for i = 1 to n {
   for j = i+1 to n {
      d ← (xi - xj)^2 + (yi - yj)^2
      if (d < min)
         min ← d
   }
}
```

← don't need to take square roots

Remark. $\Omega(n^2)$ seems inevitable, but this is just an illusion.

Cubic Time: $O(n^3)$

Cubic time. Enumerate all triples of elements.

Set disjointness. Given n sets S_1, …, S_n each of which is a subset of 1, 2, …, n, is there some pair of these which are disjoint?

```
foreach set Si {
   foreach other set Sj {
      foreach element p of Si {
         determine whether p also belongs to Sj
      }
      if (no element of Si belongs to Sj)
         report that Si and Sj are disjoint
   }
}
```

$O(n^3)$ solution. For each pairs of sets, determine if they are disjoint.

Polynomial Time: $O(n^k)$ Time

Independent set of size k. Given a graph, are there k nodes such that no two are joined by an edge?

k is a constant

$O(n^k)$ solution. Enumerate all subsets of k nodes.

```
foreach subset S of k nodes {
   check whether S in an independent set
   if (S is an independent set)
      report S is an independent set
   }
}
```

Check whether S is an independent set = $O(k^2)$.

Number of k element subsets = $\binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-k+1)}{k\,(k-1)\,(k-2)\cdots(2)\,(1)} \le \frac{n^k}{k!}$

$O(k^2\, n^k / k!) = O(n^k)$.

Exponential Time

Independent set. Given a graph, what is maximum size of an independent set?

$O(n^2 2^n)$ solution. Enumerate all subsets.

```
S* ← ϕ
foreach subset S of nodes {
   check whether S in an independent set
   if (S is largest independent set seen so far)
      update S* ← S
   }
}
```

Note the differences with Independent set of size k.

Sub-linear Time: O(log n)

Tempo lineare: esamina tutto l'input eseguendo operazioni di tempo costante ad ogni passo

Tempo sub-lineare: Non è necessario esaminare tutto l'input!

Esempio. Ricerca binaria: ricerca di un elemento in un array **ordinato** (per esempio un vocabolario)

Tempo Logaritmico: $O(\log n)$

Esempio: Ricerca Binaria. Data una lista ordinata $A = a_1, \ldots a_n$ ed un valore `key`, determina l'indice i per cui $a_i =$ `key`, se esso esiste.

```
first ← 1, last ← n
while (first ≤ last)
    mid ← (first + last)/2; (calcola punto mediano)
    if (key > a_mid)
        first = mid + 1; (ripete la ricerca nella metà di destra)
        else if (key < a_mid)
            last = mid − 1; (ripete la ricerca nella metà di sinistra)
    else
        return(mid)
return(non c'è)
```

Analisi

```
first ← 1, last ← n
while (first ≤ last)
    mid ← (first + last)/2; (calcola punto mediano)
    if (key > a_mid)
      first = mid + 1; (ripete la ricerca nella metà di destra)
        else if (key < a_mid)
          last = mid − 1; (ripete la ricerca nella metà di sinistra)
    else
        return(mid)
return(non c'è)
```

Dopo la prima iterazione, al più l'algoritmo rieffettua la ricerca su $n/2$ elementi dopo la seconda iterazione, al più l'algoritmo rieffettua la ricerca su $n/4 = n/2^2$ elementi, . . . dopo la k-esima iterazione, al più l'algoritmo rieffettua la ricerca su $= n/2^k$ elementi. L'algoritmo si fermerà sicuramente al **primo** k per cui $= n/2^k \leq 1$ (se non prima)
$\Rightarrow k = O(\log n)$ $\Rightarrow$ poichè il numero di operazioni in ciascuna delle $O(\log n)$ iterazioni è costante, il tempo di esecuzione totale è $O(\log n)$

O(n log n) Time

Molto comune perché

- E' il running time di algoritmi divide-and-conquer che dividono l'input in due parti, le risolvono ricorsivamente e poi combinano le soluzioni in tempo lineare.

- Running time di algoritmi di ordinamento.

  Mergesort e Heapsort usano O(n log n) confronti.

- Molti algoritmi usano l'ordinamento come passo più costoso. Per esempio molti algoritmi basati sulla tecnica greedy

ESERCIZI

Attiverò sulla pagina del corso nella piattaforma dipartimentale

http://elearning.informatica.unisa.it/

alcuni Compiti da svolgere e Domande a risposta multipla sugli argomenti finora trattati.

Vi invito caldamente a svolgerli così che possiamo discuterne le soluzioni in aula.

Tempo di esecuzione 1

Qual è il tempo di esecuzione del seguente frammento di pseudocodice?

```
for i=1 to n/2
    if i>10 then
        x=2x
return x
```

A. O(log n)

B. Θ (n log n)

C. $\Theta(n^2)$

D. Nessuna delle risposte precedenti

Tempo di esecuzione 2

Qual è il tempo di esecuzione del seguente frammento di pseudocodice?

```
for i=1 to n/2
   for j=1 to logn
      x=i*j
 return x
```

A. O(log n)

B. o(n log n)

C. $\Theta(n^2)$

D. Nessuna delle precedenti

Multiple Prima prova 2021 (Moodle)

Confronto2

Siano $\mathbf{f(n) = 4n + 2^{\log_2 n}}$ e $\mathbf{g(n) = n + \log_2 n + 1000}$. Allora

A. f(n) = o (g(n))

B. f(n) = ω (g(n))

C. f(n) = Θ (g(n))

D. nessuna

Prima prova intercorso 2020

3) (18 punti)
Indicare la corretta successione delle funzioni seguenti affinché compaiano da sinistra a destra in **ordine crescente** di crescita asintotica, **motivando** adeguatamente la successione proposta:

$$F_1(n) = 2^{(2 \log_2 n)}$$

$$F_2(n) = n^2 \sqrt{n}$$

$$F_3(n) = 2^{n+1}$$

$$F_4(n) = n^2 \log n$$

TEMPO ESECUZIONE

1) 1 ☐

Un algoritmo ha tempo di esecuzione T(n) polinomiale se:

A. $T(n) = \Theta(n^c)$ per una costante $c>0$
B. $T(n) = \Omega(n^c)$ per una costante $c>0$
C. $T(n) = O(n^c)$ per una costante $c>0$
D. Nessuna delle precedenti

2) 2 ☐

Qual è il tempo di esecuzione del seguente frammento di pseudocodice?

```
for i=1 to n/2
        if i>10 then
                x=2x
return x
```

A. O(log n)
B. Θ (n)
C. $\Theta(n^2)$
D. Nessuna delle risposte precedenti

3) 3 ☐

Qual è il tempo di esecuzione del seguente frammento di pseudocodice?

```
        for i=1 to logn
                for j=1 to logn
                        x=i*j
        return x
```

A. O(log n)
B. O(n log n), ma non Θ (n log n)
C. Θ (n^2)
D. Nessuna delle risposte precedenti

Dal file in Materiale del corso

1. Dimostrare che
   a) $3n + 5 = O(n)$
   b) $n = O(3n + 5)$
2. Dimostrare che
   a) $3n - 5 = O(n)$
   b) $n = O(3n - 5)$
3. Sapreste dimostrare che, comunque scelgo due costanti a e b positive, valgono le due affermazioni seguenti?
   i) $an + b = O(n)$
   ii) $n = O(an + b)$
4. i) E' vero che $7n = O(n^2)$?
   ii) E' vero che $n^2 = O(7n)$?
   In entrambi i casi e' necessario giustificare la risposta.

Dal file in Materiale del corso

5. Dimostrare che

   i) $n^2 - 3n + 5 = O(n^2)$

   ii) $n^2 = O(n^2 - 3n + 5)$

6. Dimostrare che

   i) $n^2 + 3n + 5 = O(n^2)$

   ii) $n^2 = O(n^2 + 3n + 5)$

7. Si dimostri che

   a) $4\sqrt{n}\log n + 7n = \Theta(n)$

   b) $n^{\log n} = O(n^n + 2^n)$

Dal file in Materiale del corso

8. Si considerino le seguenti funzioni: $4\sqrt{n} + \log n$, $\log\log n$, 2^n, $n^{\log n}$, $13n^3$, $n + 15$.

   a) Si ordinino le funzioni scrivendole da sinistra a destra, in modo tale che la funzione $f(n)$ sia posta a sinistra di $g(n)$ se $f(n) = O(g(n))$.

   b) Si dimostri formalmente (cioe' fornendo le costanti) almeno due (a scelta) dei confronti affermati al punto a). In altre parole se l'ordine proposto e': $f_1(n)$, $f_2(n)$, $f_3(n)$, $f_4(n)$, $f_5(n)$, $f_6(n)$, allora occorre dimostrare che $f_i(n) = O(f_{i+1}(n))$ per almeno due diversi indici i.

Esercizio 3

Date le seguenti funzioni

$$\log n^5, n^{\log n}, \log^2 n, 10\sqrt{n}, (\log n)^n, n^n, n \log \sqrt{n},$$
$$n \log^3 n, n^2 \log n, \sqrt{n \log n}, 10 \log \log n, 3 \log n,$$

ordinarle scrivendole da sinistra a destra in modo tale che la funzione $f(n)$ venga posta a sinistra della funzione $g(n)$ se $f(n) = O(g(n))$.

Appello 29 gennaio 2015

Quesito 2 (24 punti)
Dopo la Laurea in Informatica avete aperto un campo di calcetto che ha tantissime richieste e siete diventati ricchissimi. Ciò nonostante volete guadagnare sempre di più, per cui avete organizzato una sorta di asta: chiunque volesse affittare il vostro campo (purtroppo è uno solo), oltre ad indicare da che ora a che ora lo vorrebbe utilizzare, deve dire anche quanto sia disposto a pagare. Il vostro problema è quindi scegliere le richieste compatibili per orario, che vi diano il guadagno totale maggiore.
Formalizzate il problema reale in un problema computazionale.

DEFINIRE PROBLEMA COMPUTAZIONALE

Quesito (22 punti) (*Campi di calcetto*)
Dopo il successo del vostro primo campo di calcetto, avete aperto molti altri campi di calcetto, all'interno di un unico complesso. Ogni giorno raccogliete le richieste per utilizzare i vostri campi, ognuna specificata da un orario di inizio e un orario di fine. Oramai avete un numero di campi sufficiente ad accontentare sempre tutte le richieste. Volete però organizzare le partite nei campi in modo da accontentare tutti, senza che vi siano sovrapposizioni di orari, ma con il minimo numero possibile di campi (la manutenzione costa!). Formalizzate il problema reale in un problema computazionale.

Appello 14 febbraio 2017

Quesito 2 (23 punti) (*San Valentino*)

Oggi è San Valentino e volete comprare un regalo per il vostro partner. Andate nel suo negozio preferito e selezionate un insieme S di n oggetti che sicuramente sarebbero graditi. Ma, guardando nel vostro portafoglio, vi accorgete che con la somma che avete, di certo non potete comprarli tutti! Decidete allora di assegnare ad ogni oggetto il presunto valore di gradimento e di selezionare quindi un insieme di oggetti di S che abbiano un valore di gradimento massimo, ma che non superi la somma che avete a disposizione. Il problema non è però di facile soluzione, anche perché non avete molto tempo a disposizione, in quanto il negozio sta per chiudere.

Formalizzate il problema reale in un problema computazionale e risolvetelo nel modo più efficiente possibile con la tecnica che ritenete più opportuna. E' necessario descrivere l'algoritmo soluzione e valutarne l'efficienza.