Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica

Università di Salerno

Lezione n° 8

- Matrice di base.
- Soluzioni di base ammissibili.
- Relazione tra vertici di un poliedro e soluzioni basiche.
- Teorema fondamentale della PL.

R. Cerulli – F. Carrabs

Soluzione Algebrica dei problemi di PL

Consideriamo un problema di PL in Forma Standard

$$\min \quad z = \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad (1)$$

$$\underline{x} \geq \underline{0} \qquad (2)$$

$$\underline{x} \in R^n$$

Poiché m=rango(A) ed m<n, si può partizionare A come

$$A = [\, A_B \mid A_N \,]$$

dove:

- A_B è una matrice non singolare mxm ($\det(A_B) \neq 0$)
- A_N è una matrice mx(n-m)

La matrice A_B è composta da m colonne linearmente indipendenti di A. Tali colonne (viste come vettori) sono quindi una base nello spazio vettoriale ad m dimensioni delle colonne di A.

La matrice A_B è detta **Matrice di Base (Base)**

In corrispondenza di una scelta di A_B ed A_N si può partizionare anche il vettore delle $\underline{x}$:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{m componenti} \\ n - \text{m componenti} \end{array}$$

$\underline{x}_B$ è detto **Vettore delle Variabili in Base (Vettore di Base)**

$\underline{x}_N$ è detto **Vettore delle Variabili fuori Base**

Il sistema di equazioni lineari $A\underline{x}=\underline{b}$ si può riscrivere come

$$A_B \underline{x}_B + A_N \underline{x}_N = \underline{b} \rightarrow A_B \underline{x}_B = \underline{b} - A_N \underline{x}_N \rightarrow \boxed{\underline{x}_B = A^{-1}_B\underline{b} - A^{-1}_B A_N \underline{x}_N}$$

Una soluzione del sistema di equazioni (1) corrisponde a determinare il valore per m variabili ($\underline{x}_B$) avendo fissato arbitrariamente il valore per le restanti n-m variabili ($\underline{x}_N$)

Un esempio:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 5x_5 &= 5 \\
-x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 &= 3 \\
6x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 21
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
A_B = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & -3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\quad \underline{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}
\qquad
A_N = \begin{array}{c}
\begin{array}{cc} x_2 & x_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}
\end{array}
\quad \underline{x}_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}
\qquad
\underline{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 21 \end{bmatrix}
$$

$$
A_B \underline{x}_B + A_N \underline{x}_N = \underline{b} \quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
x_1 + x_3 - 5x_5 + x_2 + 2x_4 &= 5 \\
-x_1 - 3x_3 + 2x_5 + x_2 + x_4 &= 3 \\
6x_1 + x_3 + x_5 + 2x_2 - x_4 &= 21
\end{aligned}
$$

Una scelta particolarmente importante è porre $\underline{x}_N=\underline{0}$

da cui si ottiene

$$\boxed{\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1}\underline{b} \\ \underline{0} \end{bmatrix}}$$ **Soluzione di Base**

Se $\underline{x}_B = A_B^{-1}\underline{b} \geq \underline{0}$

si ottiene una **Soluzione di Base Ammissibile**.

Le soluzioni di base sono importanti poichè vale il seguente teorema:

3. Teorema (no dim.)

Dato $X=\{\underline{x}: A\underline{x}=\underline{b},\ \underline{x}\geq\underline{0}\}$ insieme convesso, dove A è una matrice m*x*n di rango m con m<n,

$\underline{x}_e$ è un punto estremo di X se e solo se $\underline{x}_e$ è una soluzione di base ammissibile.

Un esempio:

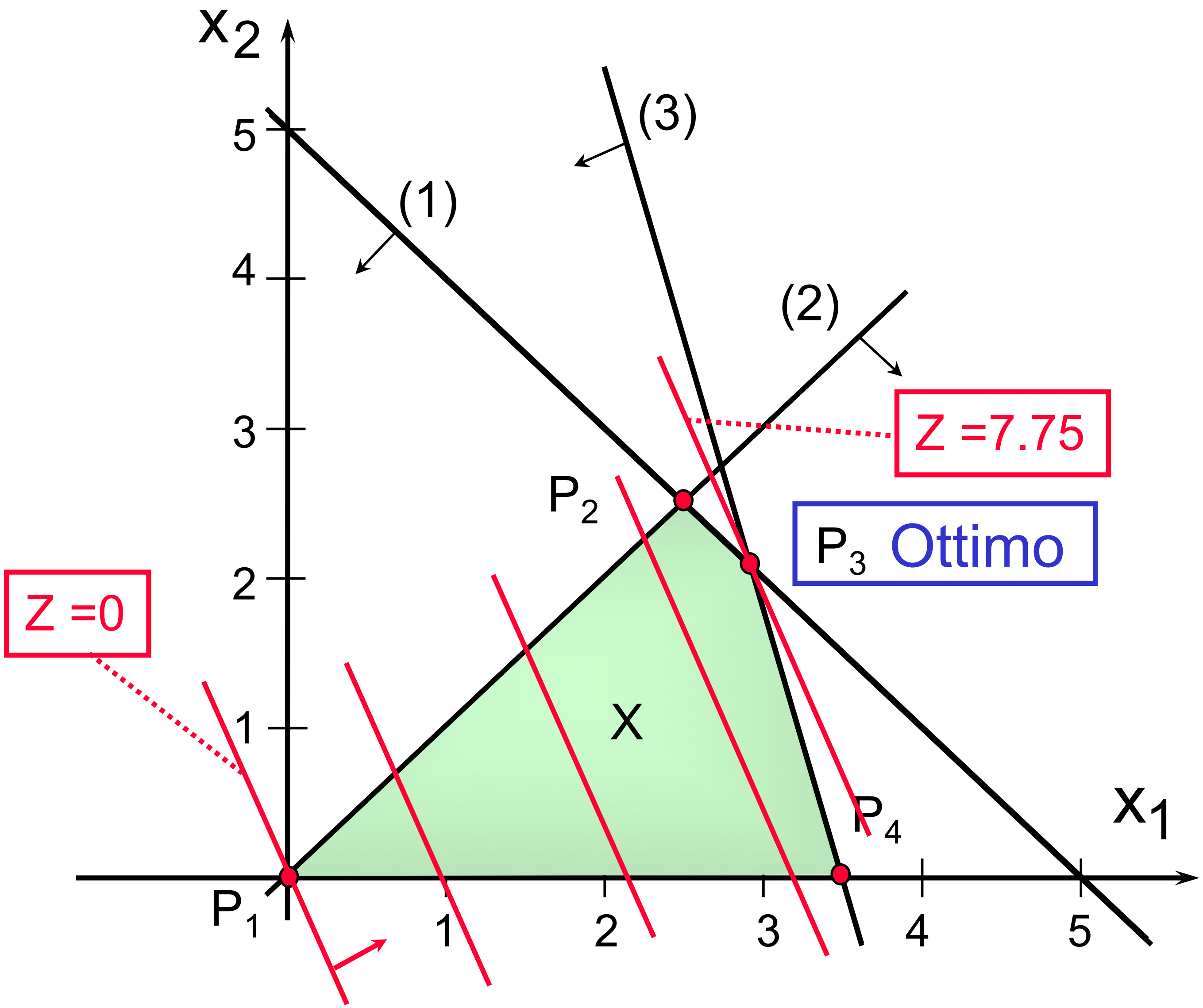
$$\max \quad z = 2x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5 \qquad (1)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 0 \qquad (2)$$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 21 \qquad (3)$$

$$x_1 \geq 0 \; x_2 \geq 0$$



$$\max \quad z = 2x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \le 5 \qquad (1)$$

$$-x_1 + x_2 \le 0 \qquad (2)$$

$$6x_1 + 2x_2 \le 21 \qquad (3)$$

$$x_1 \ge 0 \; x_2 \ge 0$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 11/4 \\ 9/4 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Trasformazione dei problemi in forma standard.

- Vincoli $\leq$

Si introducono variabili ausiliarie positive dette **Variabili di Slack** (scarto):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \;\rightarrow\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i \qquad s_i \geq 0$$

- Vincoli $\geq$

Si introducono variabili ausiliarie positive dette **Variabili di Surplus** (eccedenza):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \;\rightarrow\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i \qquad s_i \geq 0$$

➪ Variabili non vincolate in segno (variabili libere)

Si sostituisce la variabile libera con due variabili ausiliarie positive (il problema diventa ad n+1 variabili):

$$x_j \text{ libera } \rightarrow x_j = u_j - v_j \quad \text{con } u_j \geq 0 \; v_j \geq 0$$

➪ Termini noti dei vincoli negativi

Si moltiplicano entrambe i membri per -1 e si cambia il verso della disuguaglianza

➪ Problema di massimo

Si trasforma il problema in minimo moltiplicando per -1 la funzione obiettivo.

Il problema trasformato
in forma standard

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \le 5 \\ & -x_1 + x_2 \le 0 \\ & 6x_1 + 2x_2 \le 21 \\ & x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -\min \quad & z = -2x_1 - x_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ & 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

- Il massimo numero di possibili basi corrisponde al numero di possibili estrazioni di m colonne su n colonne di A:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Nell' esempio $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$

- In generale, non tutte le possibili sottomatrici mxm sono non-singolari (quindi invertibili). Inoltre, non tutte le matrici di base danno luogo a soluzioni ammissibili (ossia, con tutte le componenti positive).

- Per questo motivo il numero delle possibili combinazioni corrisponde ad un limite superiore.

Nell'esempio solo 6 combinazioni danno luogo a basi ammissibili, vediamo quali:

$$-\min \quad z = -2x_1 - x_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

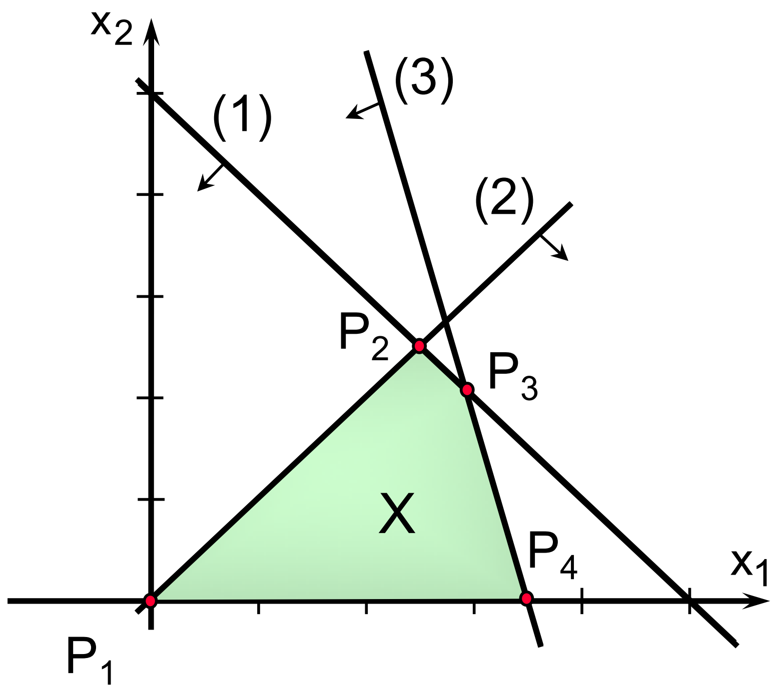
$$-x_1 + x_2 + x_4 = 0$$

$$6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21$$

$$x_1 \geq 0 x_2 \geq 0 x_3 \geq 0 x_4 \geq 0 x_5 \geq 0$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ A_{B_1} = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_4 \end{array} \\ A_{B_2} = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_5 \end{array} \\ A_{B_3} = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \ldots$$

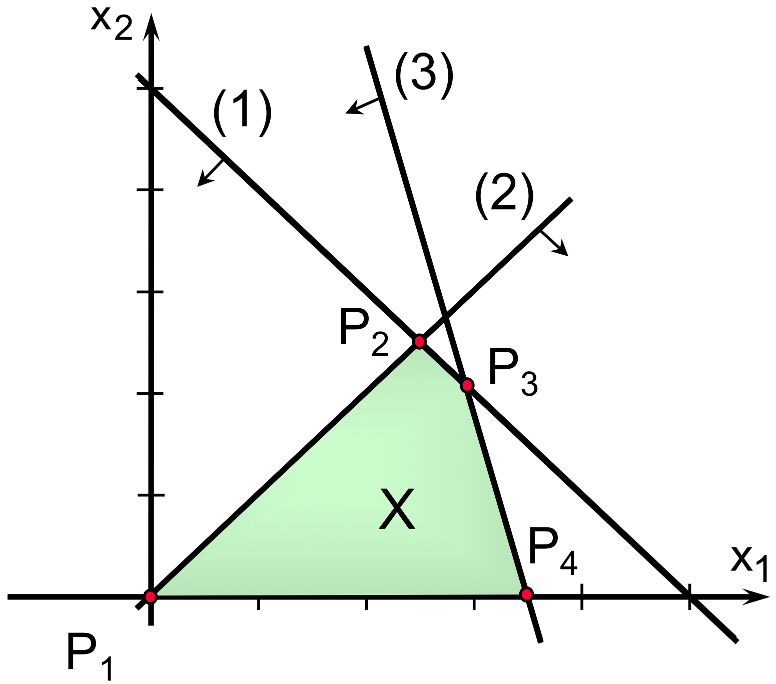


$$-\min \quad z = -2x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 + x_3 &= 5 \quad (1) \\ -x_1 + \ x_2 + x_4 &= 0 \quad (2) \\ 6x_1 + 2x_2 + x_5 &= 21 \quad (3) \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\underline{x}_{B_2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad A_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_{B_2}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/4 \\ 3/2 & 0 & -1/4 \\ -2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_{B_2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = A_{B_2}^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/4 \\ 3/2 & 0 & -1/4 \\ -2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/4 \\ 9/4 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow P_3$$

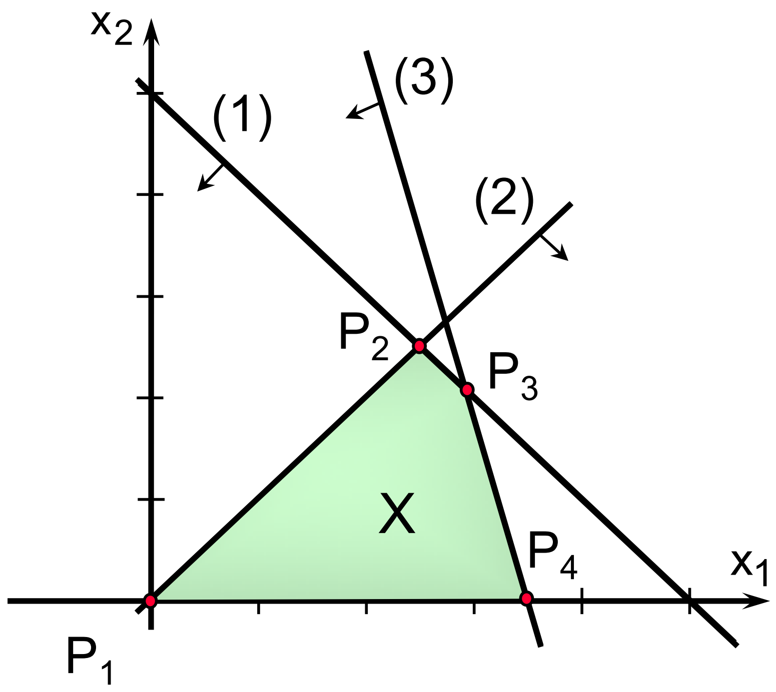


$$-\min \quad z = -2x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + x_3 \quad &= 5 \qquad (1) \\ -x_1 + \quad x_2 + x_4 \quad &= 0 \qquad (2) \\ 6x_1 + 2x_2 + x_5 &= 21 \qquad (3) \\ x_i \geq 0 & \end{aligned}$$

$$\underline{x}_{B_3} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P_2$$

$$\underline{x}_{B_4} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 3/2 \\ 7/2 \end{bmatrix} \Rightarrow P_4$$



$$-\min \quad z = -2x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 + x_3 \ &= 5 \qquad (1) \\ -x_1 + \ x_2 + x_4 \ &= 0 \qquad (2) \\ 6x_1 + 2x_2 + x_5 &= 21 \qquad (3) \\ x_i \geq 0 & \end{aligned}$$

$$\underline{x}_{B_5} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \underline{x}_{\mathrm{B}_6} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \underline{x}_{B_7} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 21 \end{bmatrix} \Rightarrow P_1$$

(soluzioni degeneri)

- La ricerca delle soluzioni di un problema di PL si può effettuare esaminando solamente un numero finito di soluzioni corrispondenti alle soluzioni di base associate al poliedro dei vincoli.

- A ciascuna matrice di base B (ammissibile) corrisponde una sola soluzione di base (ammissibile).

- Viceversa, ad una soluzione di base (ammissibile) possono corrispondere più matrici di base. Questi casi sono associati a soluzioni dette **degeneri**, ovvero soluzioni per cui qualche componente del vettore di base $\underline{x}_B$ risulta nullo.

Dalla corrispondenza delle soluzioni di base ammissibili con i punti estremi del poliedro X deriva il seguente teorema.

4. Teorema Fondamentale della PL

Dato un problema di PL in forma standard:

$$\min \quad z = \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

dove A è una matrice m*x*n con rango(A)=m ed m<n, allora:

1. esiste una soluzione ammissibile $\Leftrightarrow$ esiste una soluzione ammissibile di base
2. esiste una soluzione ottima finita $\Leftrightarrow$ esiste una soluzione ottima finita che è anche di base

- Poiché il massimo numero di possibili basi di un problema di PL è finito, tali problemi hanno una <u>struttura discreta</u>.

- I problemi di ottimizzazione corrispondenti alla selezione tra un numero finito di alternative si dicono <u>problemi combinatorici</u>.

- La PL è quindi un problema combinatorico.

- Un possibile algoritmo per determinare la soluzione ottima potrebbe consistere nella generazione esplicita di tutte le soluzioni ammissibili di base, quindi nella scelta di quella soluzione che rende massimo l’obiettivo.

- Tale strategia non è conveniente poiché il numero massimo delle possibili basi cresce in maniera esponenziale col crescere delle dimensioni del problema (numero di variabili e vincoli).

- Algoritmi che richiedono in generale un numero di passi che cresce in maniera esponenziale con le dimensioni del problema non sono efficienti.