Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica ed Informatica Applicata

Università di Salerno

Lezione n° 9:Esercitazione

- Variazione del gradiente
- Introduzione di vincoli nel problema
- Calcolo delle direzioni estreme

R. Cerulli – F. Carrabs

$$max\ z = -3x_1 + 2x_2$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 \le 3$$

$$(2) \quad -x_1 + x_2 \le 1$$

$$(3) \quad 2x_1 - x_2 \ge 2$$

$$(4) \quad x_1, x_2 \ge 0$$

d) Determinare una funzione obiettivo

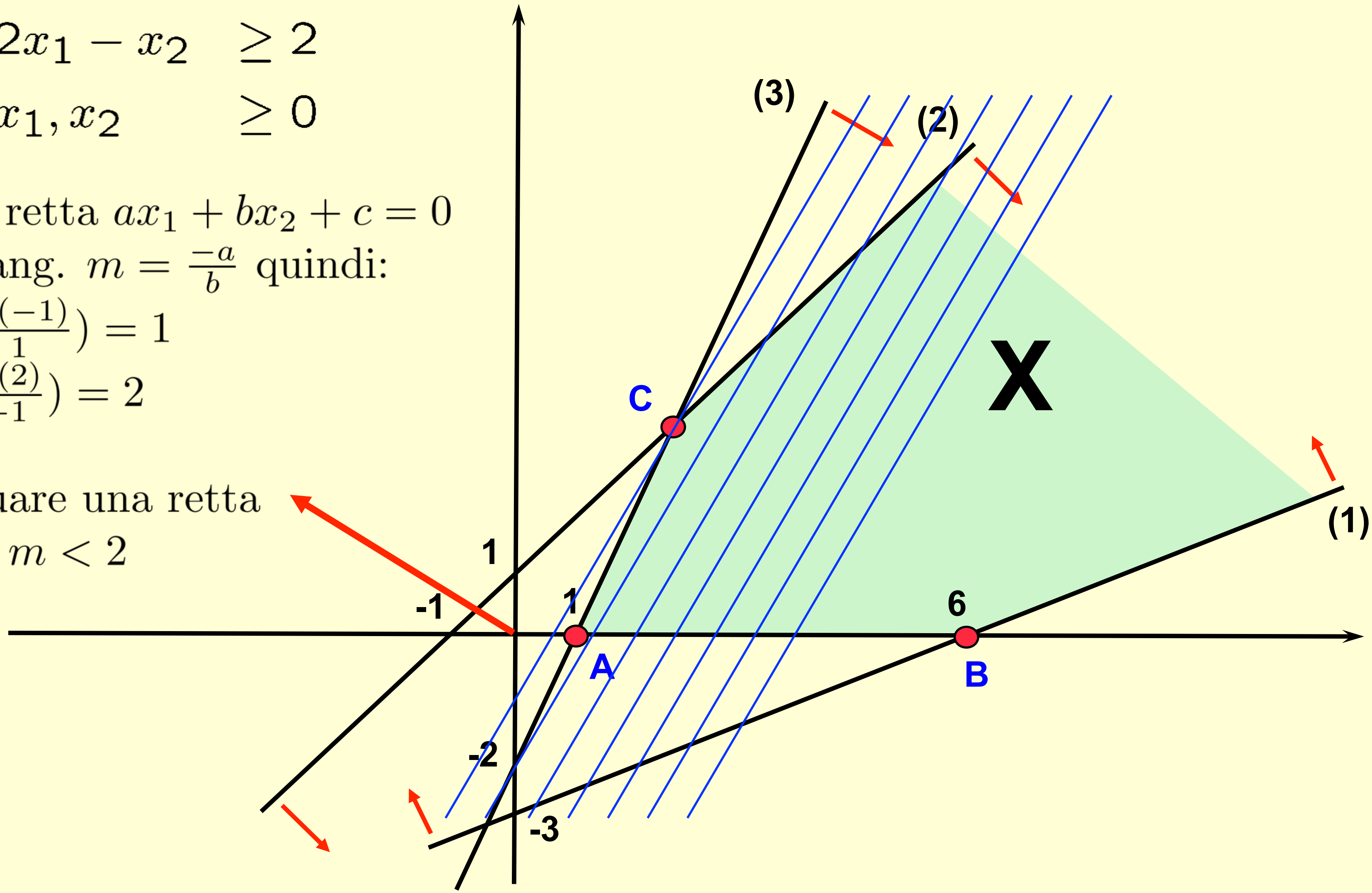
che renda C punto di ottimo unico

Data la retta $ax_1 + bx_2 + c = 0$
il coeff.ang. $m = \frac{-a}{b}$ quindi:

$m_2 = \frac{-(-1)}{1}) = 1$

$m_3 = \frac{-(2)}{-1}) = 2$

Individuare una retta
con $1 < m < 2$



$$\min \; z = 3x_1 + x_2$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 \leq 3$$

$$(2) \quad -x_1 + x_2 \leq 1$$

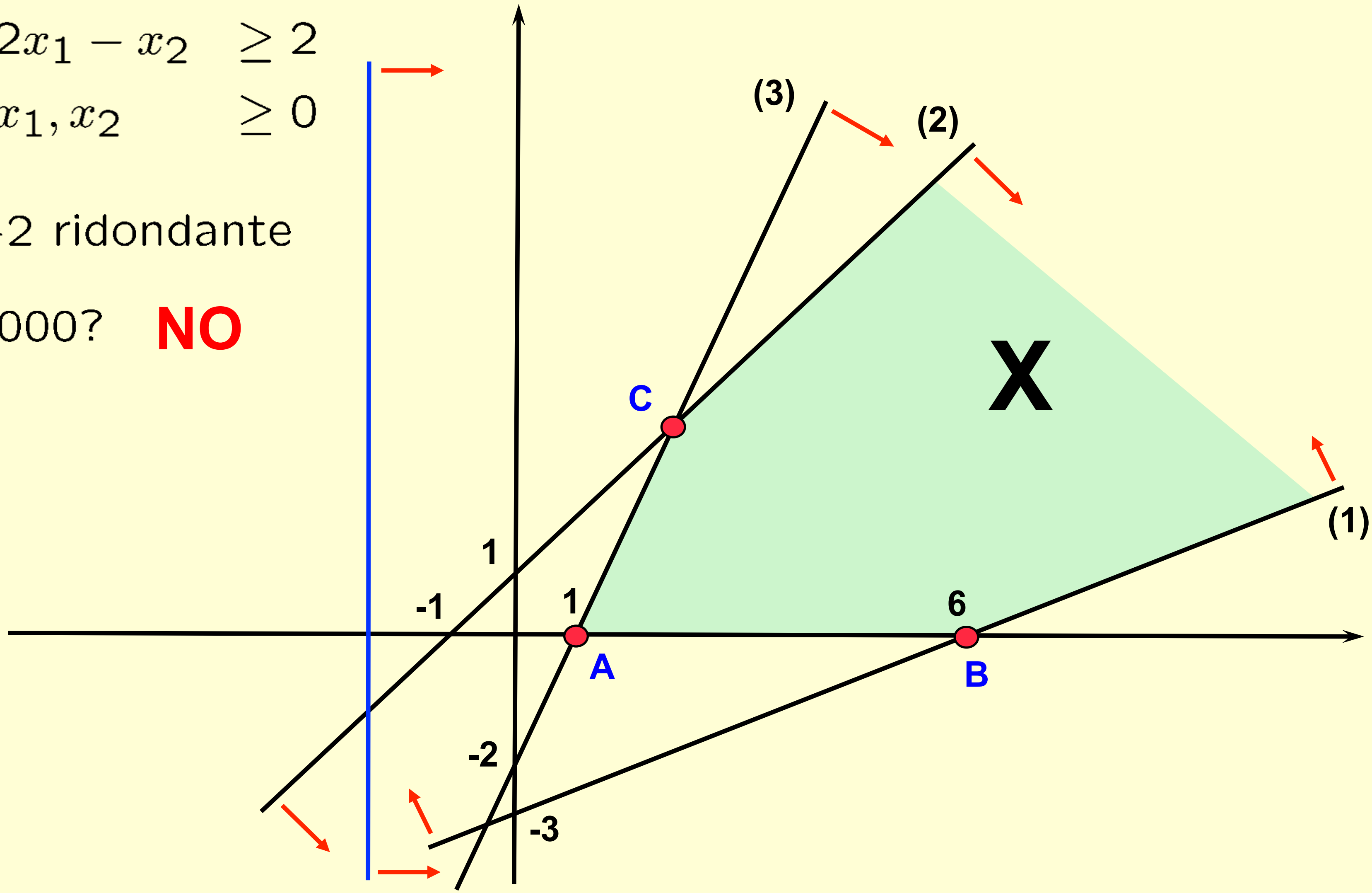
$$(3) \quad 2x_1 - x_2 \geq 2$$

$$(4) \quad x_1, x_2 \geq 0$$

e) Aggiungere un vincolo RIDONDANTE

$x_1 \geq -2$ ridondante

$x_1 \geq 1000?$ **NO**

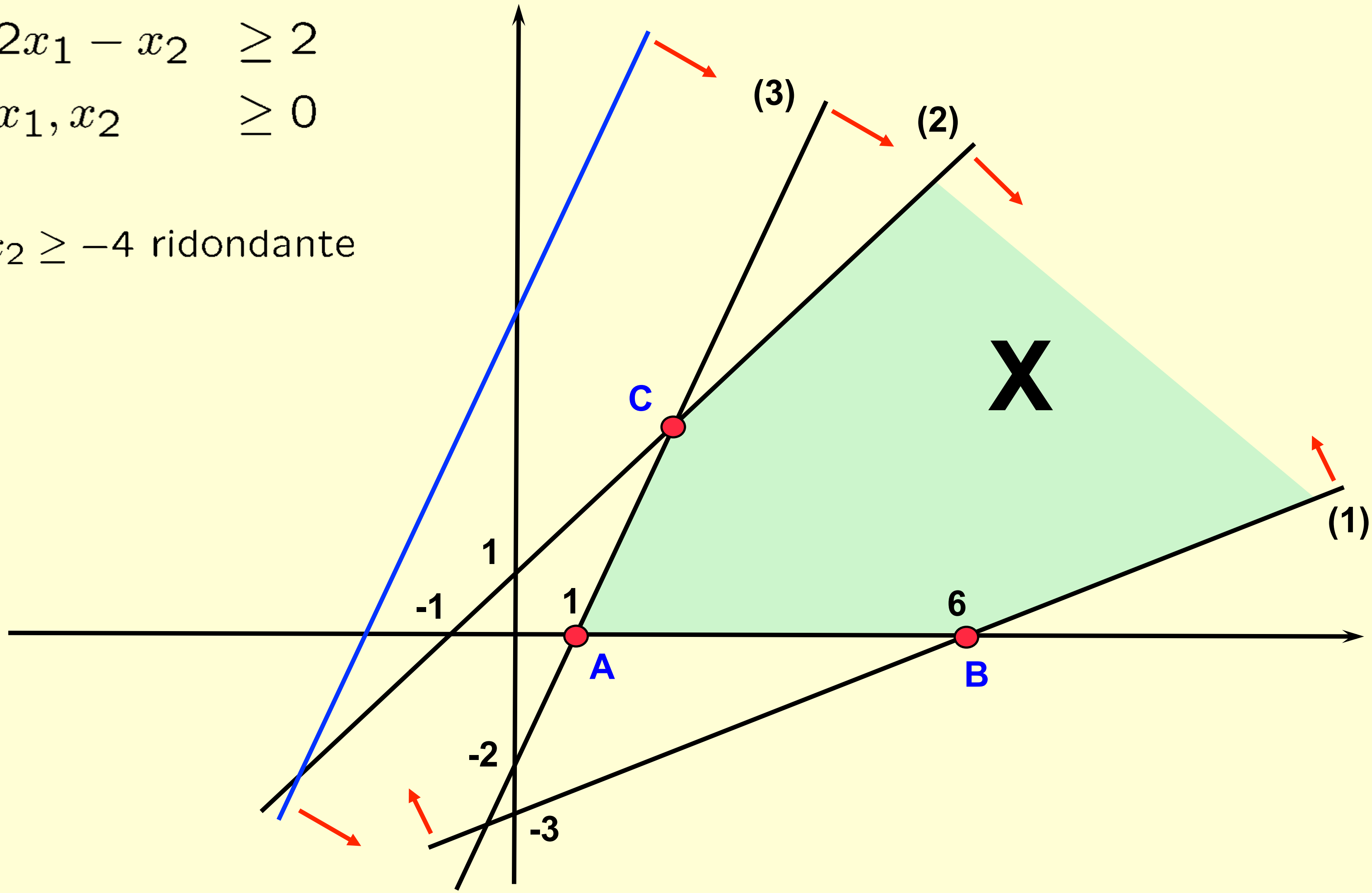


$$\min \ z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\ (4) & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

e) Aggiungere un vincolo RIDONDANTE

$2x_1 - x_2 \geq -4$ ridondante

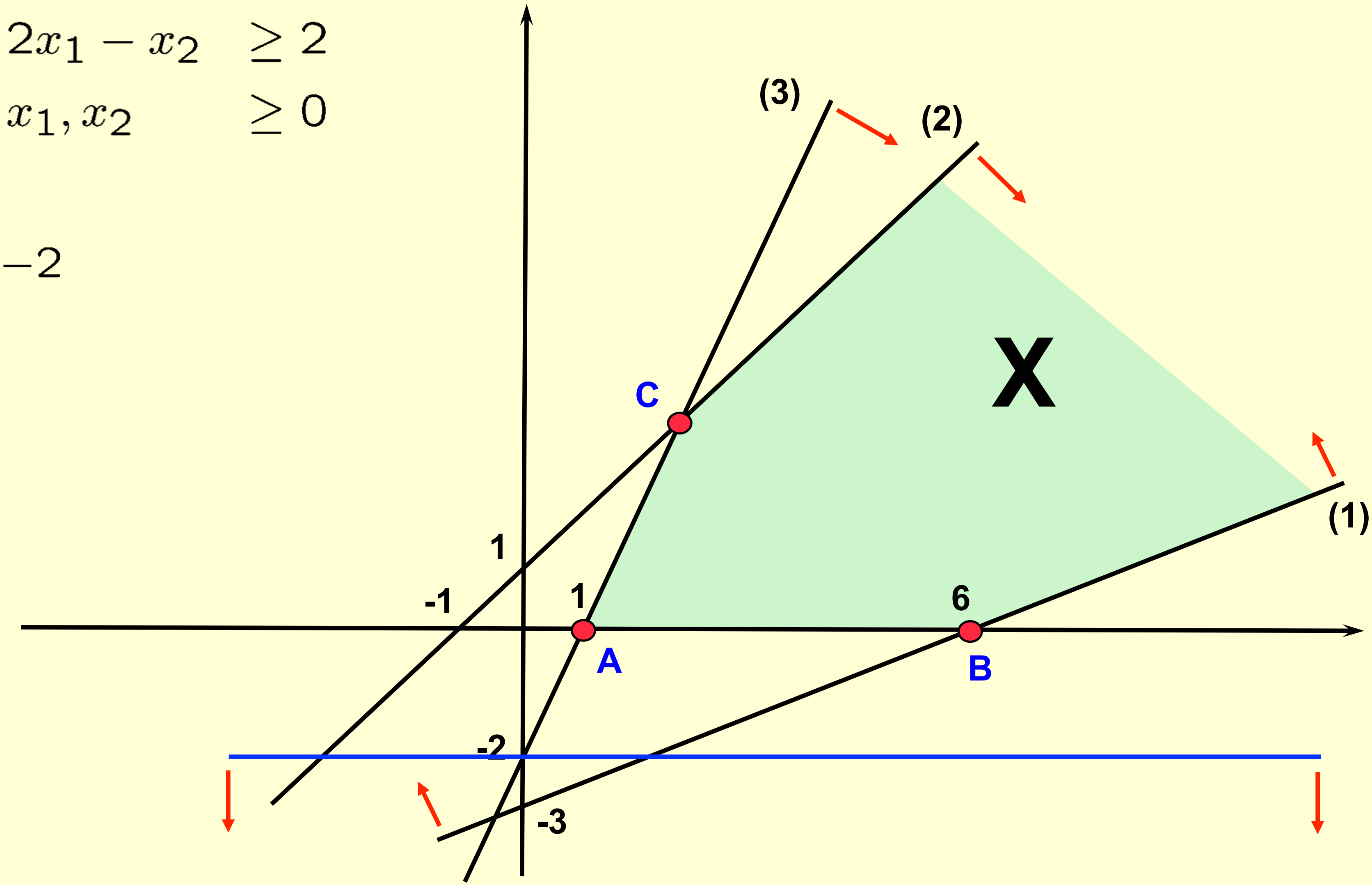


$$\min \; z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\ (4) & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

f) Aggiungere un vincolo che renda in sistema INAMMISSIBILE

$$x_2 \leq -2$$

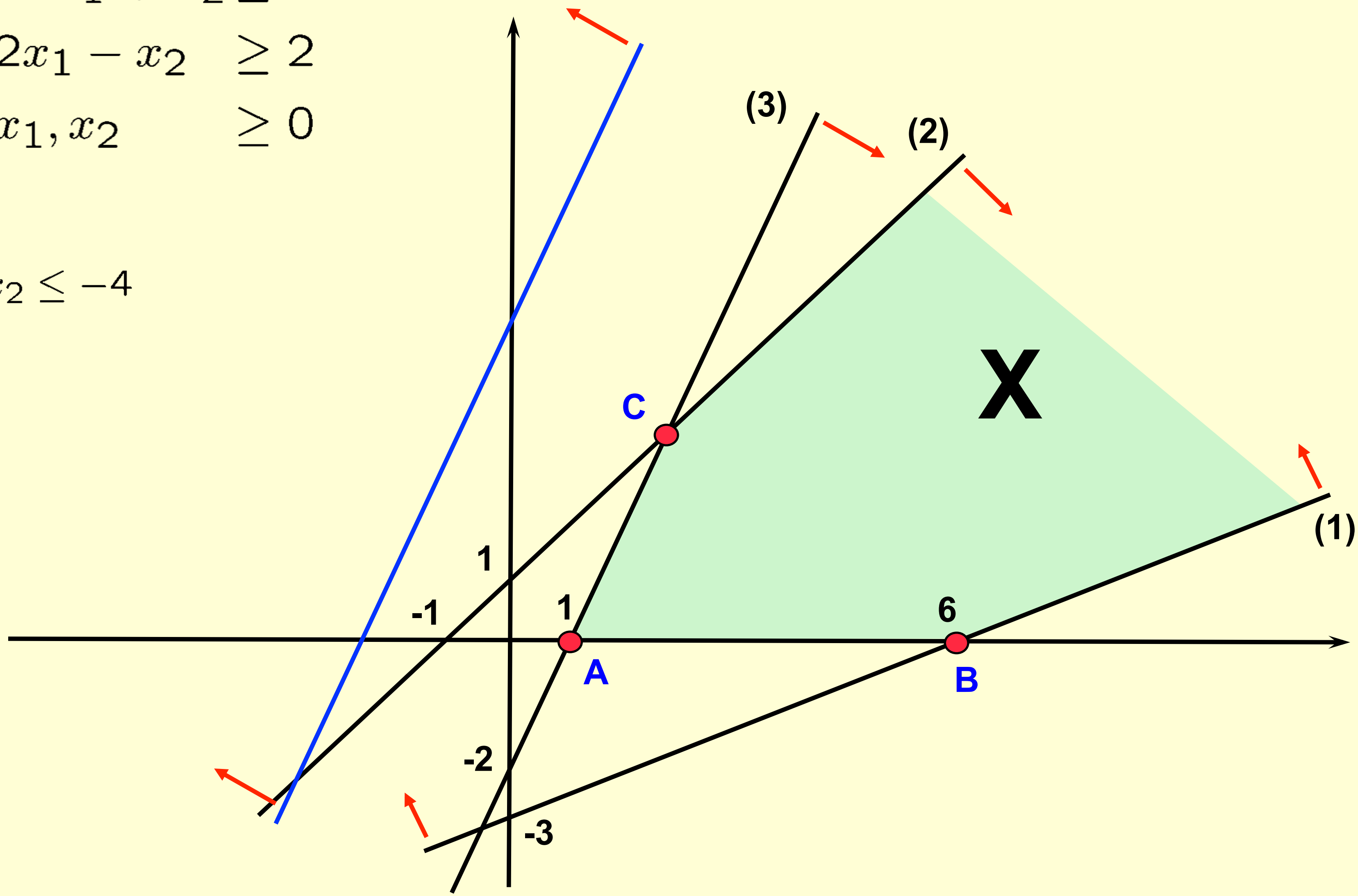


$$\min \; z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$

f) Aggiungere un vincolo che renda in sistema INAMMISSIBILE

$$2x_1 - x_2 \leq -4$$

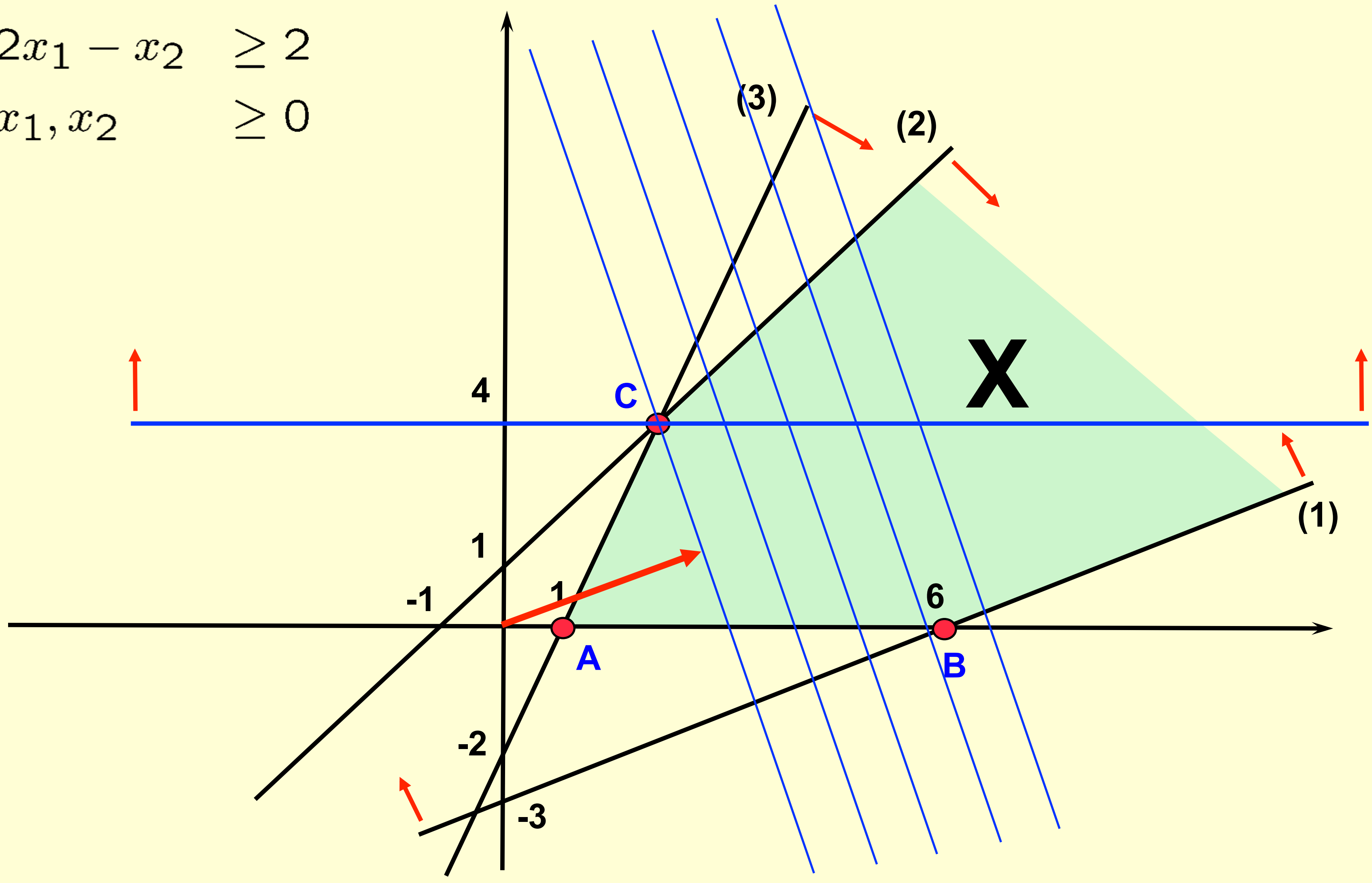


$$\min \; z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\ (4) & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

g) Aggiungere un vincolo affinchè il punto C diventi punto di ottimo

$x_2 \geq 4$

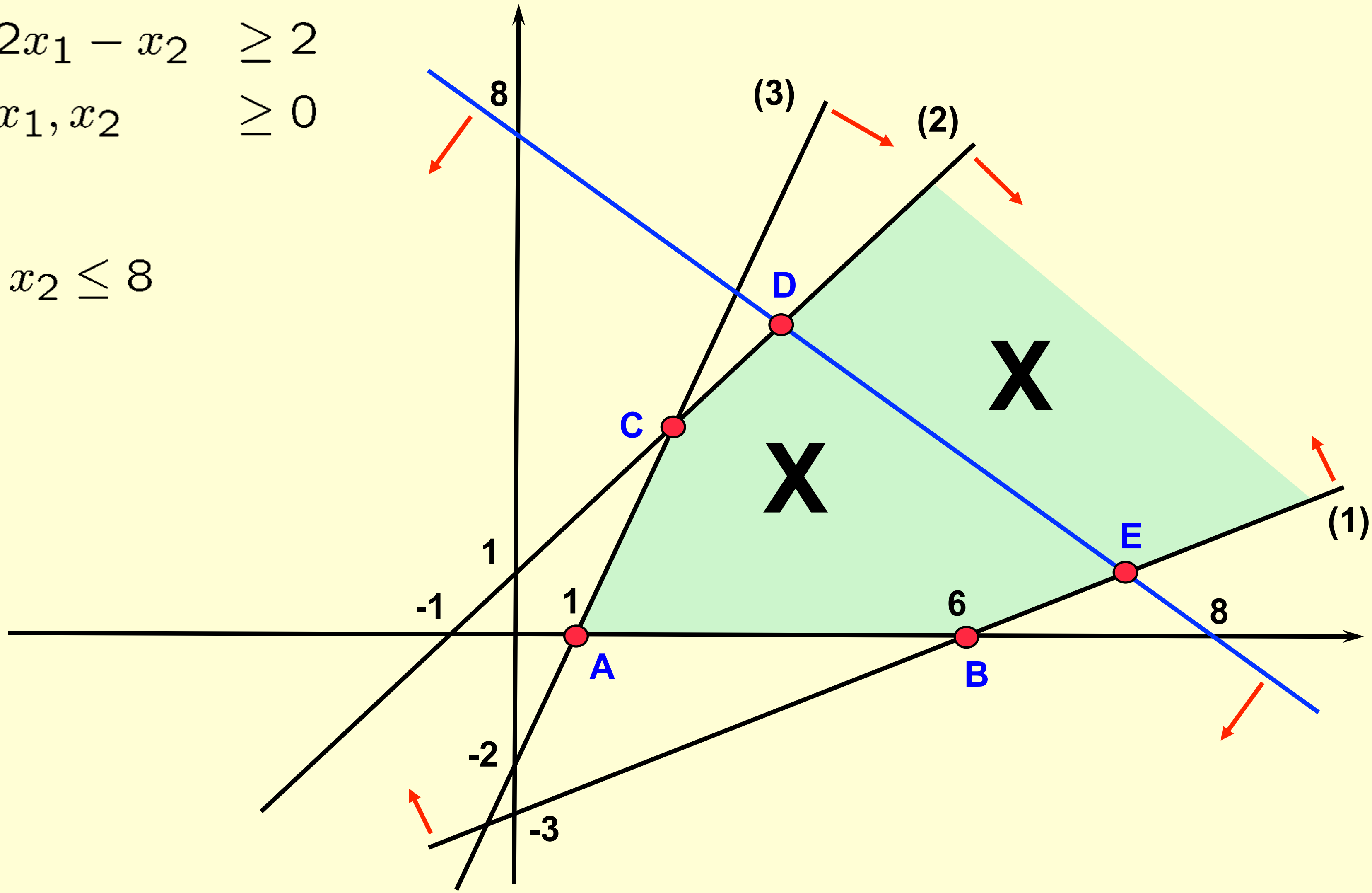


$$\min \; z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\ (4) & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

f) Aggiungere un vincolo che renda la regione ammissibile un politopo.

$$x_1 + x_2 \leq 8$$



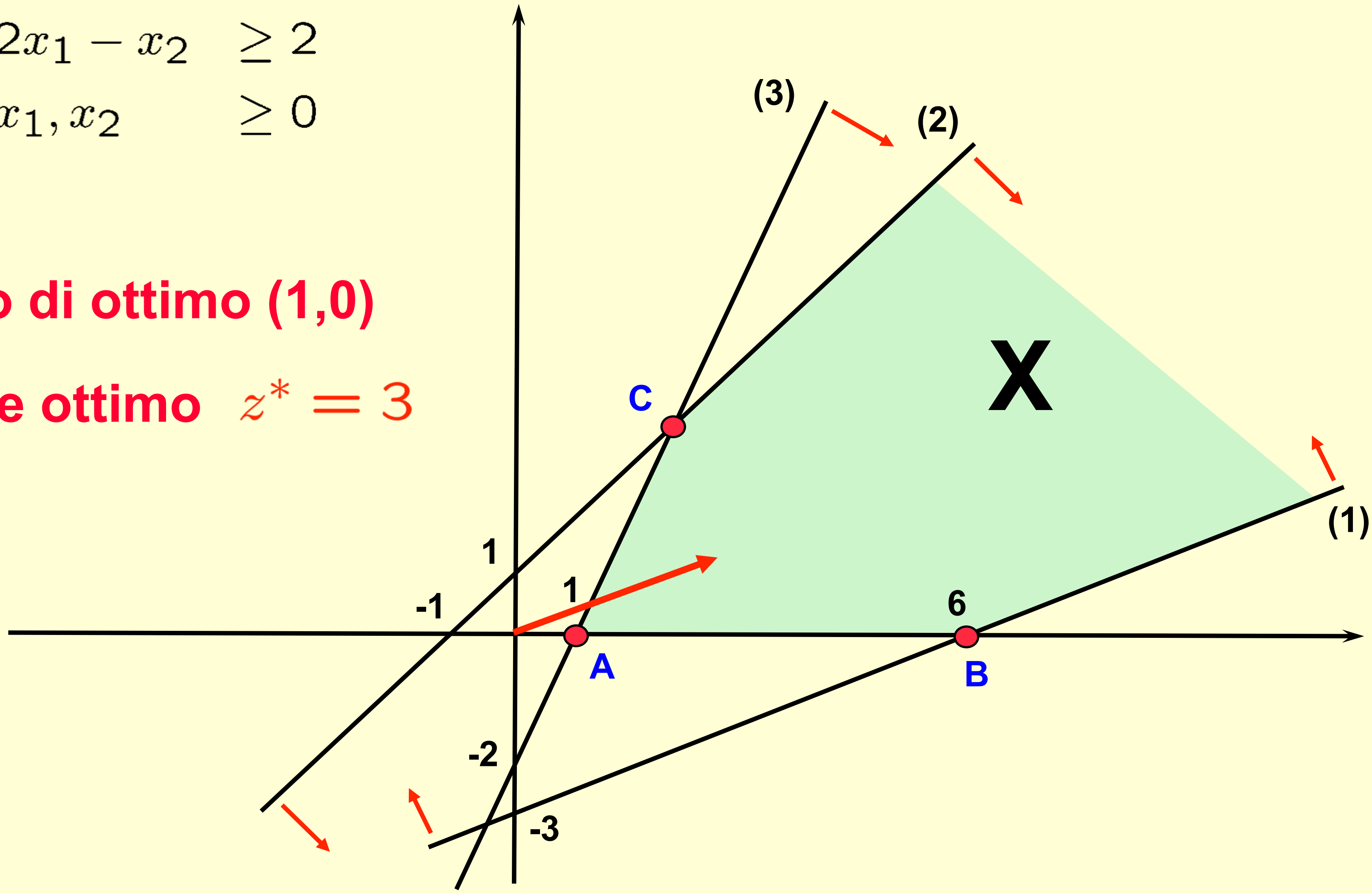
$$\min \; z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\ (4) & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

g) Riscrivere il problema applicando il teorema della rappresentazione e risolverlo

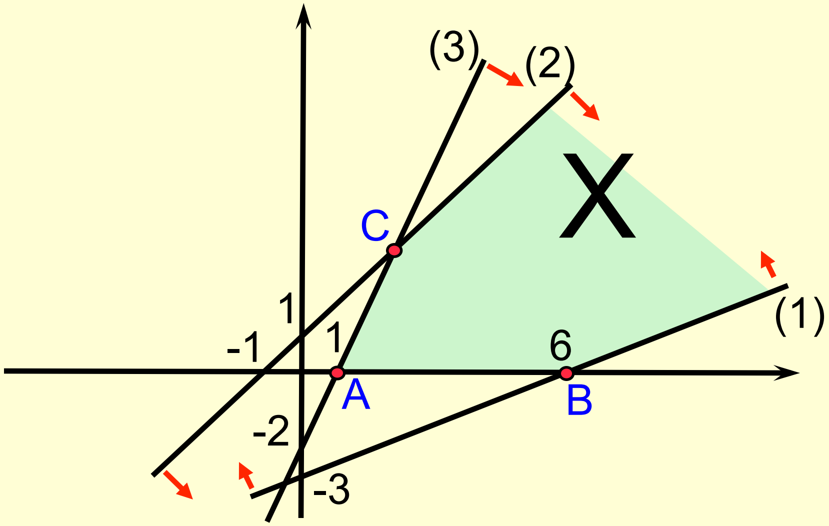
Punto di ottimo (1,0)

Valore ottimo $z^* = 3$



$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$



Calcoliamo punti estremi e le direzioni estreme

A= (1,0)

B= (6,0)

C= ?

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & = 1 \\ 2x_1 - x_2 & = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 & = 1 \\ x_2 & = 2x_1 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_1 - 2 & = 1 \\ x_2 & = 2x_1 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = 3 \\ x_2 & = 4 \end{cases}$$

C= (3,4)

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\ (4) & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

A= (1,0) , B= (6,0) , C= (3,4)

$X = \left\{ \underline{x} : A\underline{x} \leq \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0} \right\}$ (poliedro)

Abbiamo visto che $\underline{d}$ è una a direzione di X se:

$$A\underline{d} \leq 0$$

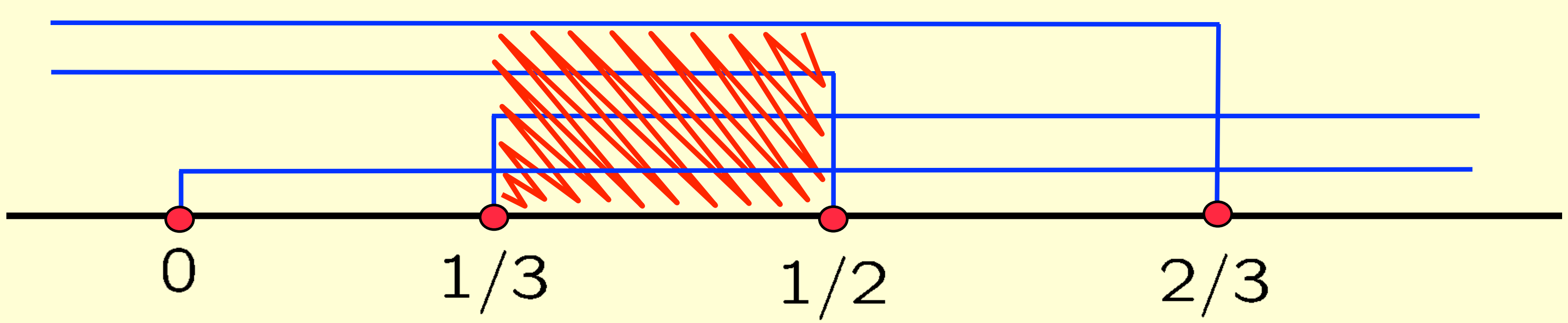
$$\underline{d} \geq 0$$

$$\underline{d} \neq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}d_1 - d_2 & \leq 0 \\ -d_1 + d_2 & \leq 0 \\ 2d_1 - d_2 & \geq 0 \\ d_1 + d_2 & = 1 \\ d_1 \geq 0, d_2 & \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}d_1 - d_2 & \leq 0 \\ -d_1 + d_2 & \leq 0 \\ 2d_1 - d_2 & \geq 0 \\ d_1 & = 1 - d_2 \\ d_1 \geq 0, d_2 & \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}d_1 - d_2 & \leq 0 \\ -d_1 + d_2 & \leq 0 \\ 2d_1 - d_2 & \geq 0 \\ d_1 & = 1 - d_2 \\ d_1 \geq 0, d_2 & \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}d_2 - d_2 & \leq 0 \\ -1 + d_2 + d_2 & \leq 0 \\ 2 - 2d_2 - d_2 & \geq 0 \\ d_1 & = 1 - d_2 \\ d_1 \geq 0, d_2 & \geq 0 \end{cases}$$

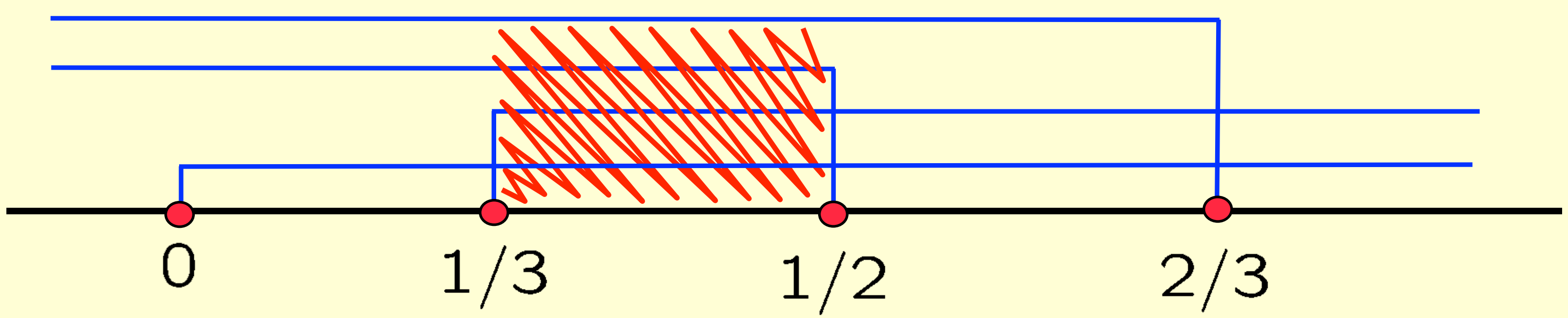
$$\begin{cases} -\frac{3}{2}d_2 & \leq -\frac{1}{2} \\ d_2 & \leq \frac{1}{2} \\ -3d_2 & \geq -2 \\ d_1 & = 1 - d_2 \\ d_1 \geq 0, d_2 & \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2 & \geq 1/3 \\ d_2 & \leq 1/2 \\ d_2 & \leq 2/3 \\ d_1 & = 1 - d_2 \\ d_1 \geq 0, d_2 & \geq 0 \end{cases}$$



$$
\begin{cases}
d_2 & \geq 1/3 \\
d_2 & \leq 1/2 \\
d_2 & \leq 2/3 \\
d_1 & = 1 - d_2 \\
d_1 \geq 0, d_2 & \geq 0
\end{cases}
$$

$$d^1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$d^2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$



$$min\ z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\ (4) & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{k} (\underline{c}^T \underline{x}_i)\,\lambda_i + \sum_{j=1}^{t} (\underline{c}^T \underline{d}_j)\mu_j$$

$$\sum_{1=1}^{k} \lambda_i = 1, \qquad \lambda_i \geq 0 \quad \mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{k}$$

$$\mu_j \geq 0 \quad \mathrm{j} = 1,2,\ldots,\mathrm{t}$$

A= (1,0)

B= (6,0)

C= (3,4)

$$\min \quad z = \lambda_1 (3\ \ 1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 (3\ \ 1)\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 (3\ \ 1)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} +$$

$$+ \mu_1 (3\ \ 1)\begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix} + \mu_2 (3\ \ 1)\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$d^1 = \begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix}$$

$$d^2 = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$\min \quad z = 3\lambda_1 + 18\lambda_2 + 13\lambda_3 + \frac{7}{3}\mu_1 + 2\mu_2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

$$\mu_1, \mu_2 \geq 0$$

$$min\ z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll}(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\ (4) & x_1, x_2 & \geq 0\end{array}$$

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{k} (\underline{c}^T \underline{x}_i)\,\lambda_i + \sum_{j=1}^{t} (\underline{c}^T \underline{d}_j)\mu_j$$

$$\sum_{1=1}^{k} \lambda_i = 1, \qquad \lambda_i \geq 0 \qquad \mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{k}$$

$$\mu_j \geq 0 \qquad \mathrm{j} = 1,2,\ldots,\mathrm{t}$$

A= (1,0)

B= (6,0)

C= (3,4)

Valore ottimo $z^* = 3$

$$d^1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$d^2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

minimo

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$

$$\underline{c}^T \underline{d}^1 > 0 \quad \underline{c}^T \underline{d}^2 > 0$$

$$\min \quad z = 3\lambda_1 + 18\lambda_2 + 13\lambda_3 + \cancel{\frac{7}{3}\mu_1} + \cancel{2\mu_2}$$

$u_1 = 0 \quad u_2 = 0$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

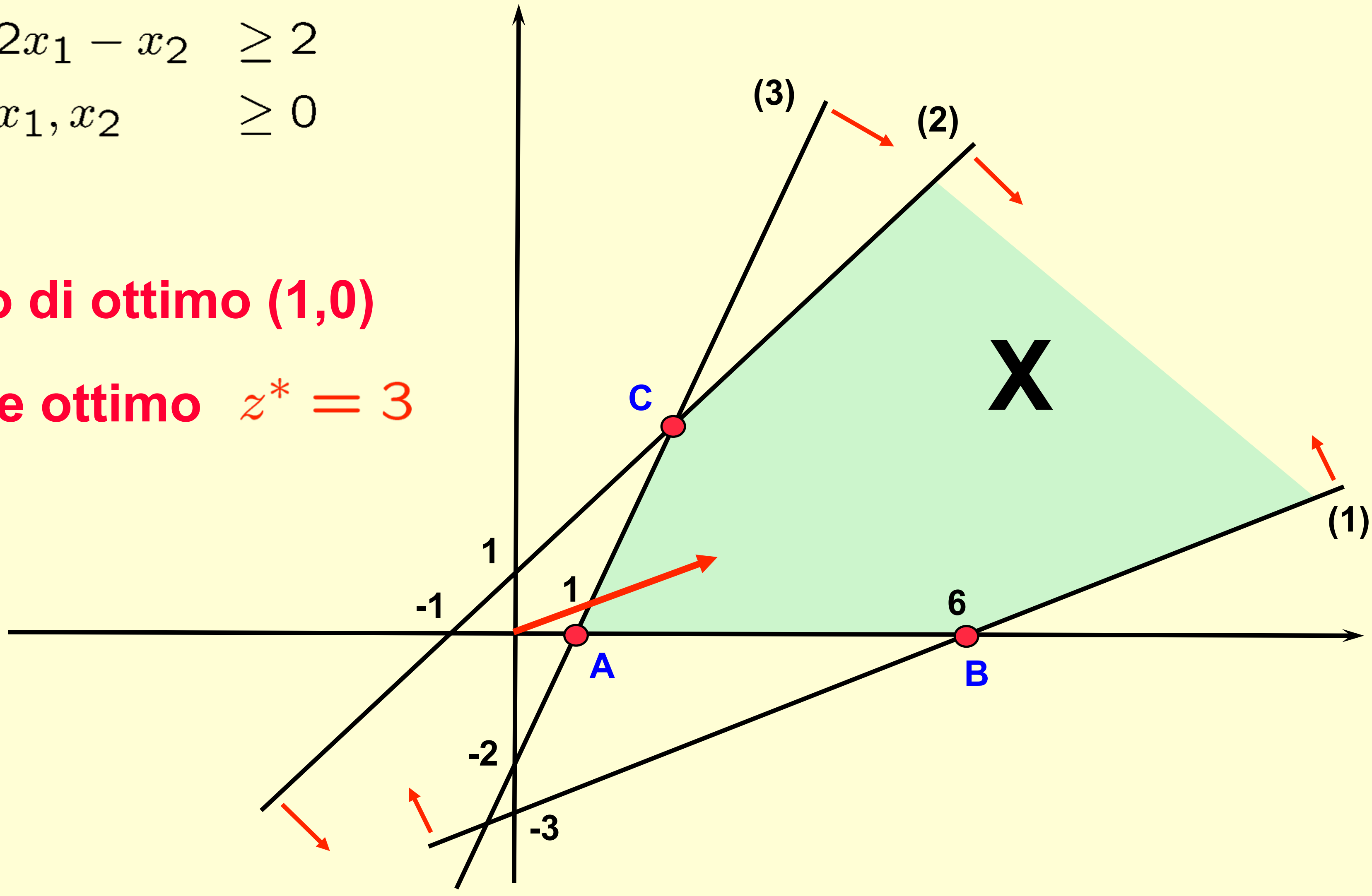
$$\mu_1, \mu_2 \geq 0$$

$$\min \quad z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\ (4) & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

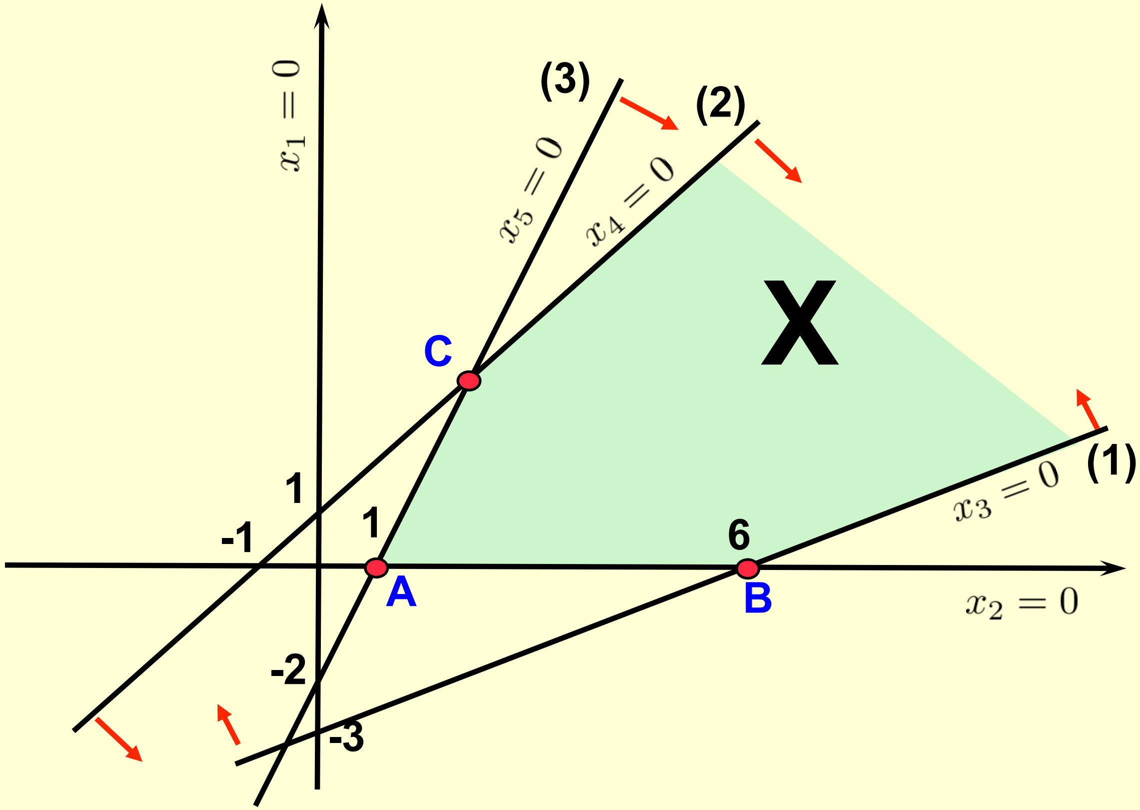
Punto di ottimo (1,0)

Valore ottimo $z^* = 3$



$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\ (4) & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$



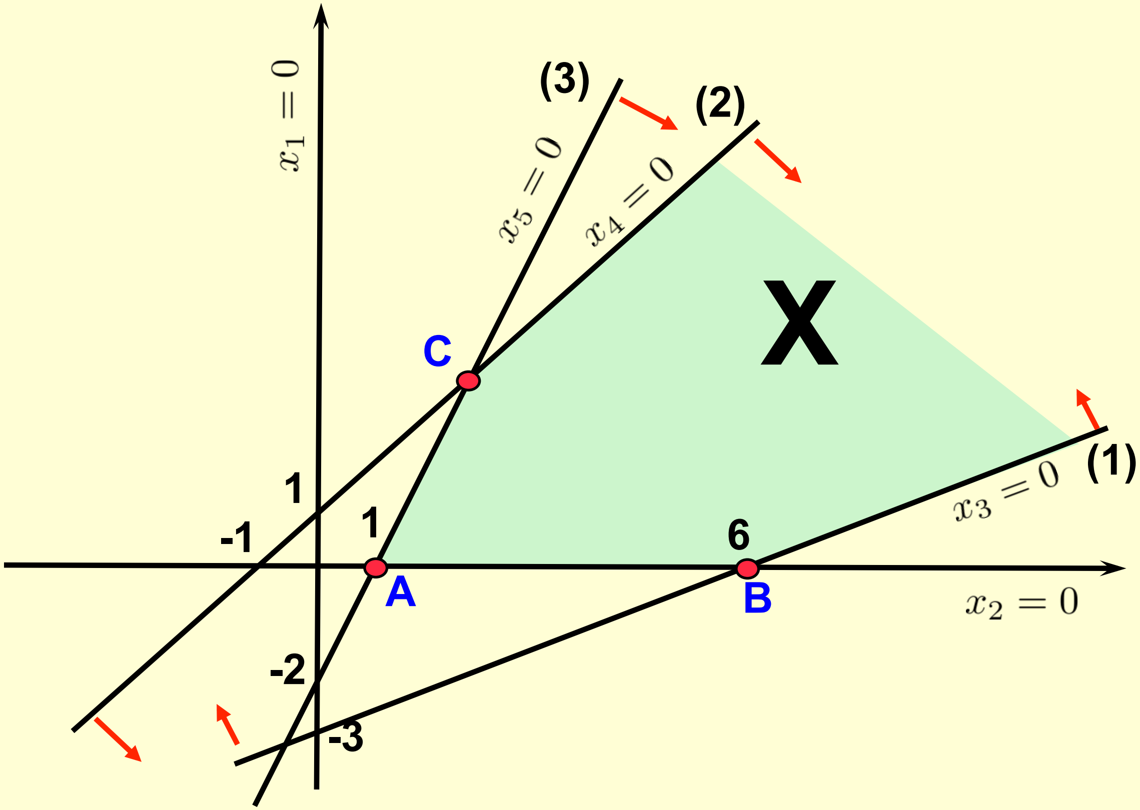
Forma Standard

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 & = 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 + x_4 & = 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 - x_5 & = 2 \\ (4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{array}$$

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 = 2 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$



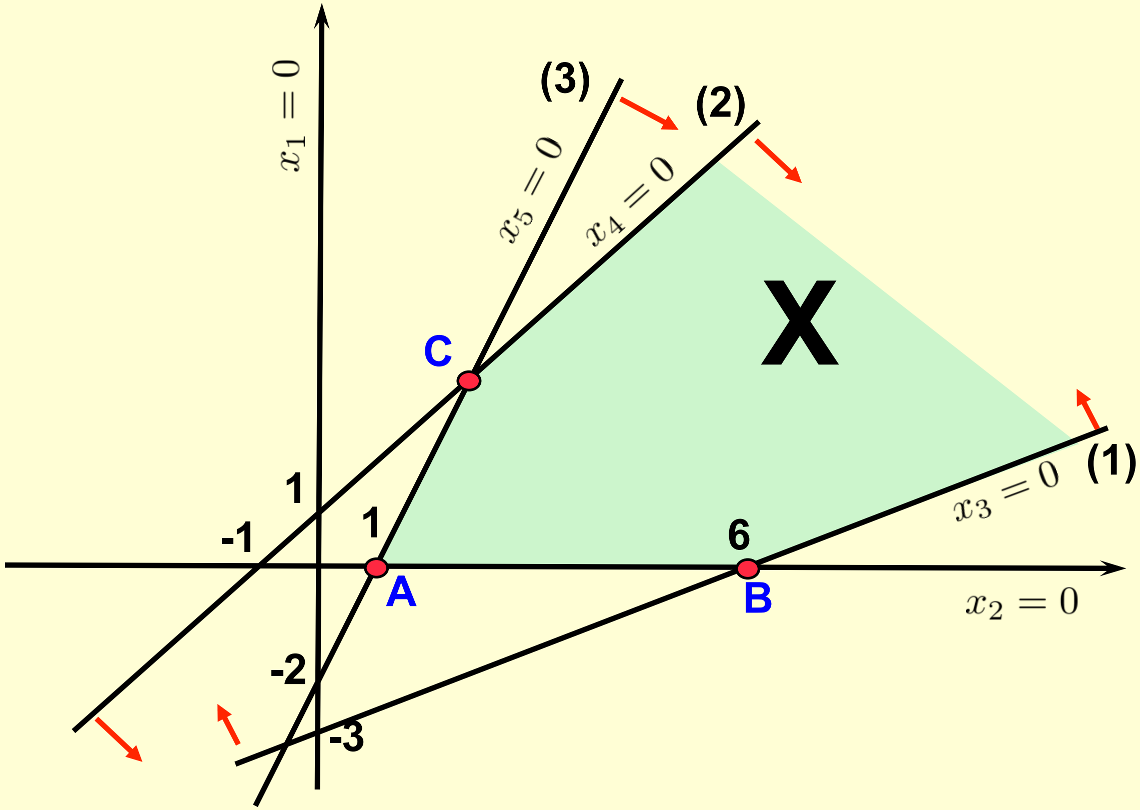
Si determinino le basi associate ad ogni vertice della regione ammissibile

3. Teorema (no dim.)

Dato X={A$\underline{x}$=$\underline{b}$, $\underline{x}$≥$\underline{0}$} insieme convesso, dove A è una matrice mxn di rango m con m<n, $\underline{x}$ è un punto estremo di X se e solo se $\underline{x}$ è una soluzione di base ammissibile.

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{ll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 - x_5 = 2 \\ (4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$



Si determinino le **basi associate ad ogni vertice** **della regione ammissibile**

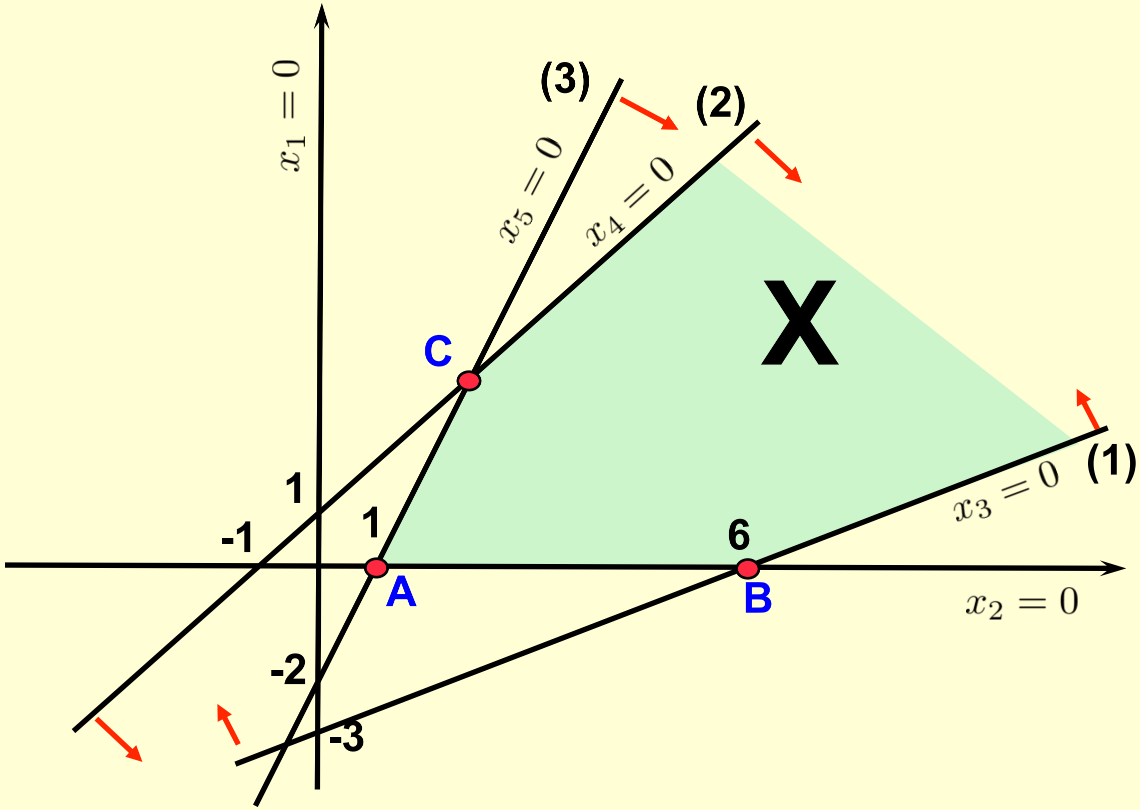
Dal teorema precedente sappiamo che ad ogni vertice della regione ammissibile sono associate una o più basi ammissibili.

Il numero di componenti di queste basi è dato dal numero m di righe della matrice dei vincoli A.

Per individuare la base associata ad un vertice x è sufficiente trovare le variabili che assumono il valore zero sui vincoli la cui intersezione individua x sul piano.

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 & = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 & = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 & = 2 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 &
\end{array}$$



Si determinino le **basi associate ad ogni vertice** **della regione ammissibile**

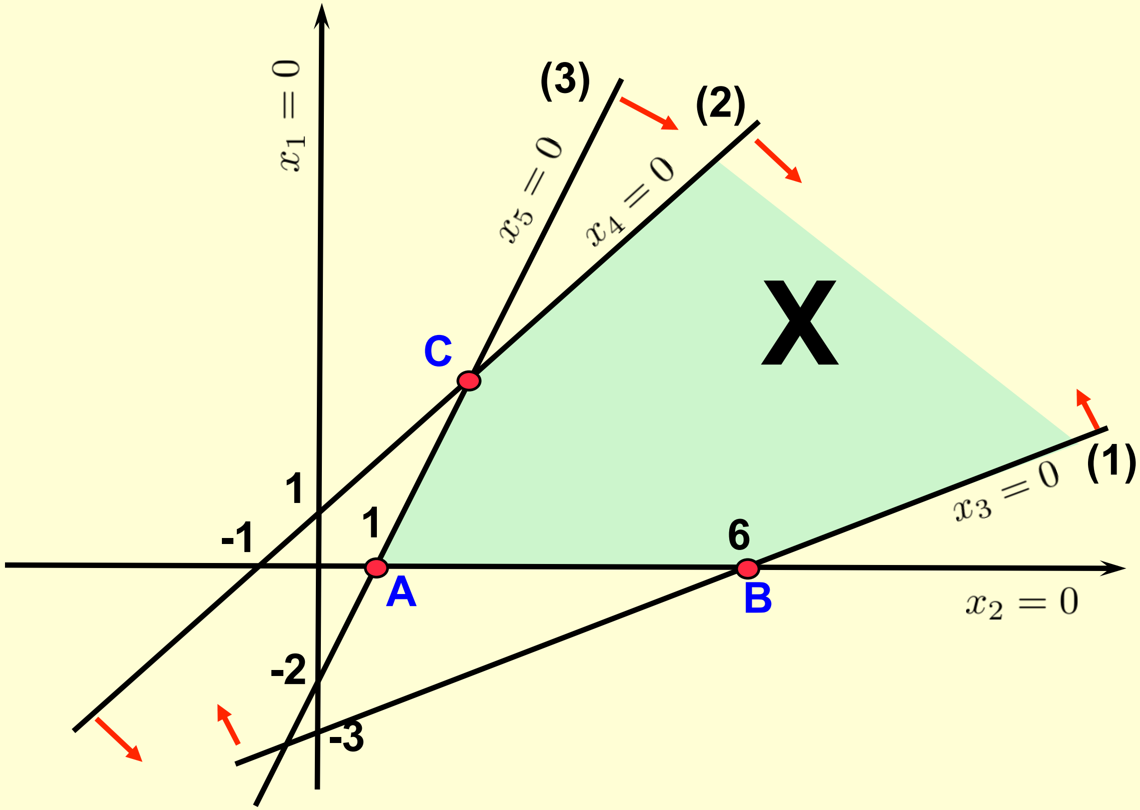
Nell'esempio in figura:

Il punto A=(1,0) è individuato dal vincolo 3, su cui x_5 vale zero e l'asse delle ascisse dove x_2 vale zero.

Quindi la base associata al vertice A=(1,0) è B_A={1,3,4}

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{ll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 = 2 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}$$



Si determinino le **basi associate ad ogni vertice** **della regione ammissibile**

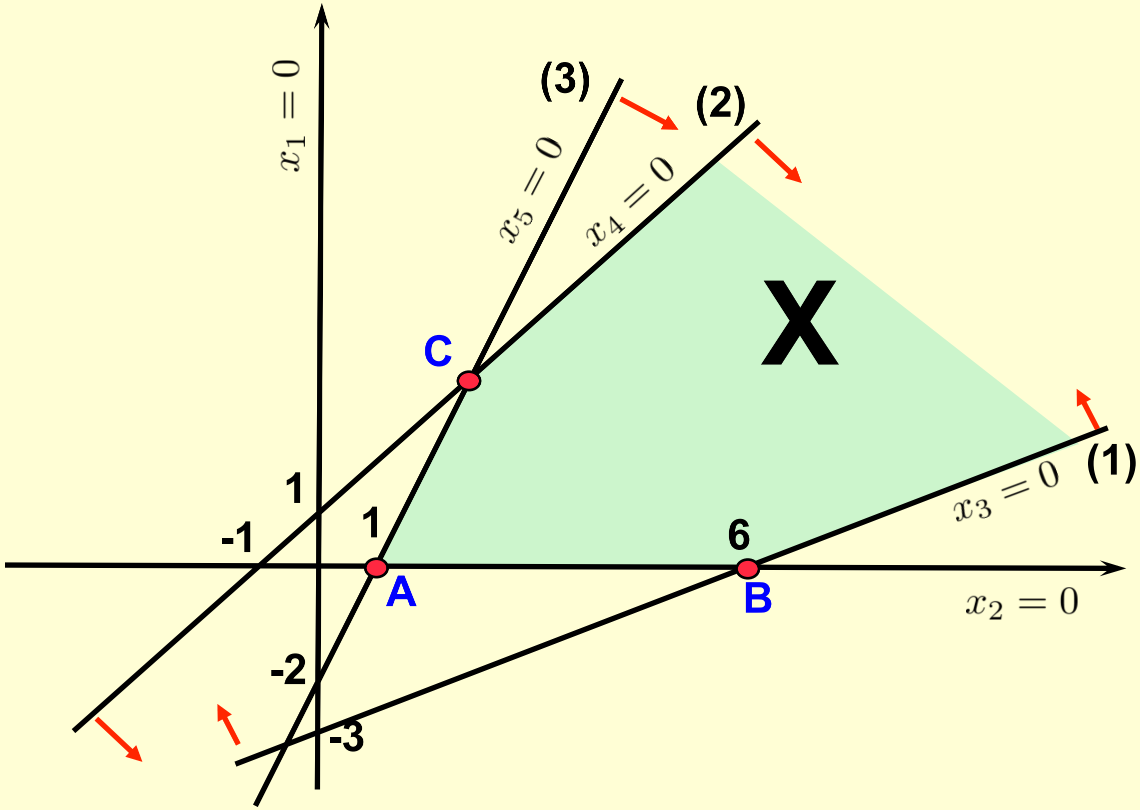
Nell'esempio in figura:

Il punto B=(6,0) è individuato dal vincolo 1, su cui x_3 vale zero e l'asse delle ascisse dove x_2 vale zero.

Quindi la base associata al vertice B=(6,0) è {1,4,5}

$\min z = 3x_1 + x_2$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 = 2 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$



Si determinino le basi associate ad ogni vertice della regione ammissibile

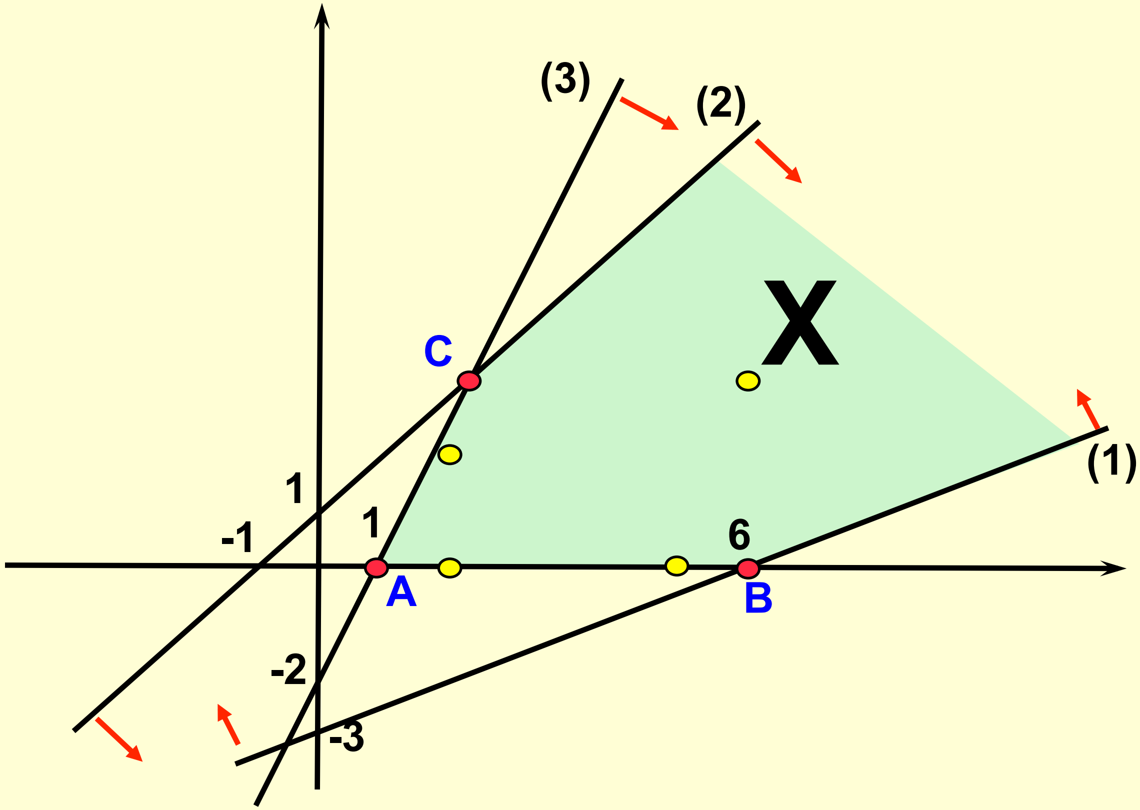
Nell'esempio in figura:

Il punto C=(3,4) è individuato dal vincolo 2, su cui x_4 vale zero ed il vincolo 3, su cui x_5 vale zero.

Quindi la base associata al vertice C=(3,4) è {1,2,3}

$$\min \; z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\ (4) & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$



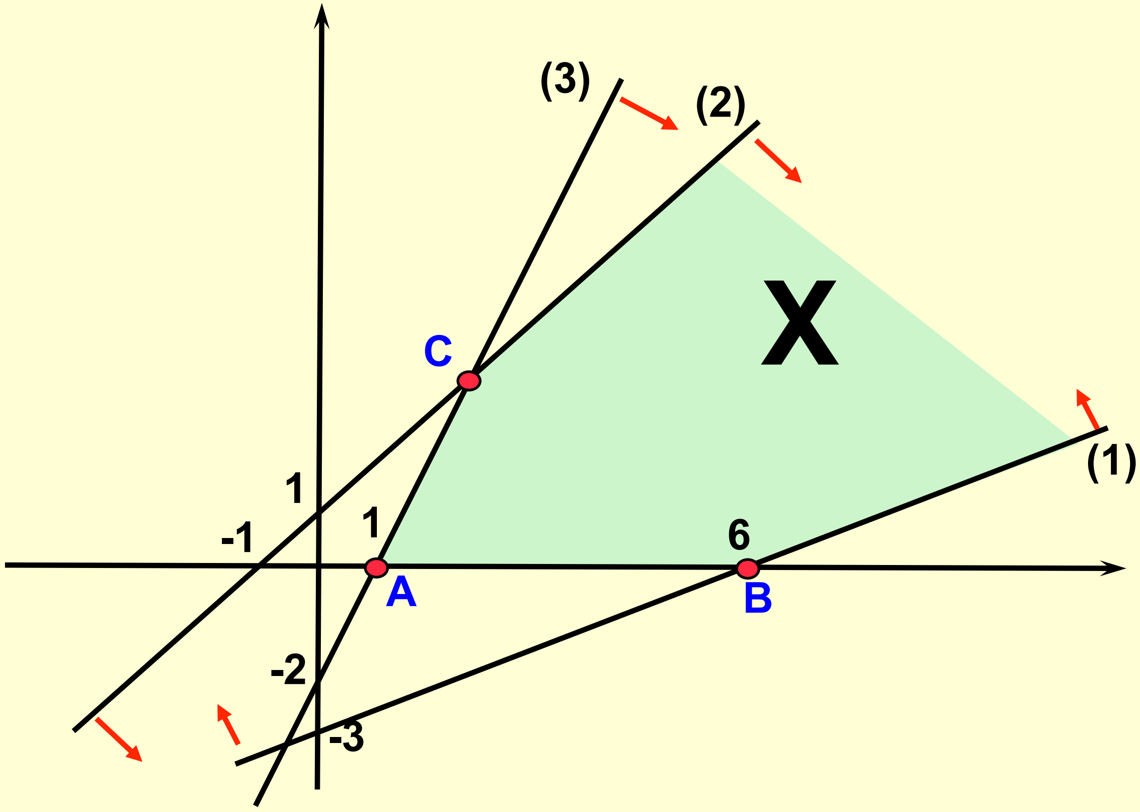
Si individui (geometricamente) una soluzione ammissibile non basica

RISP: Qualsiasi punto della regione ammissibile ad eccezione dei punti estremi A, B, C.

Esempio: (2,0), (5,0), (2,2), (6,3) ……..

$$\min\ z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$



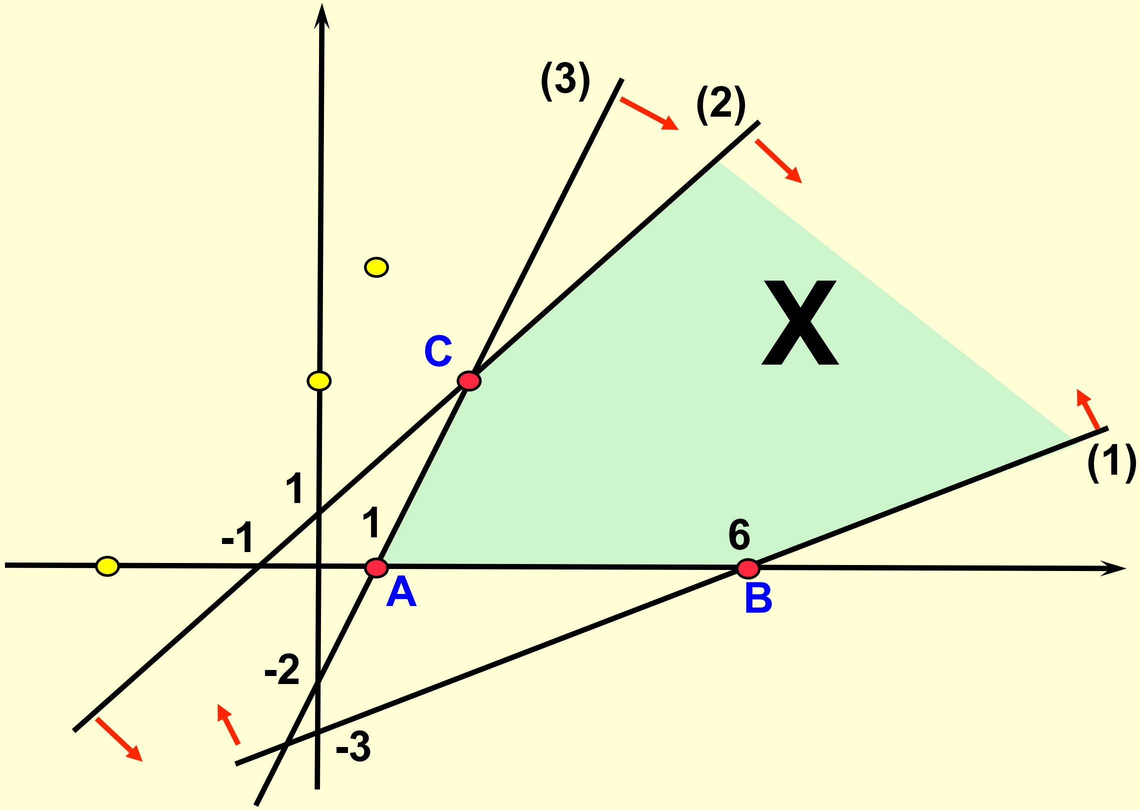
Si individui (geometricamente) una soluzione ammissibile basica

RISP: Uno qualsiasi dei punti estremi della regione ammissibile.

Nell'esempio in figura sono: A=(1,0), B=(6,0) e C=(3,4)

$$\min \; z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$



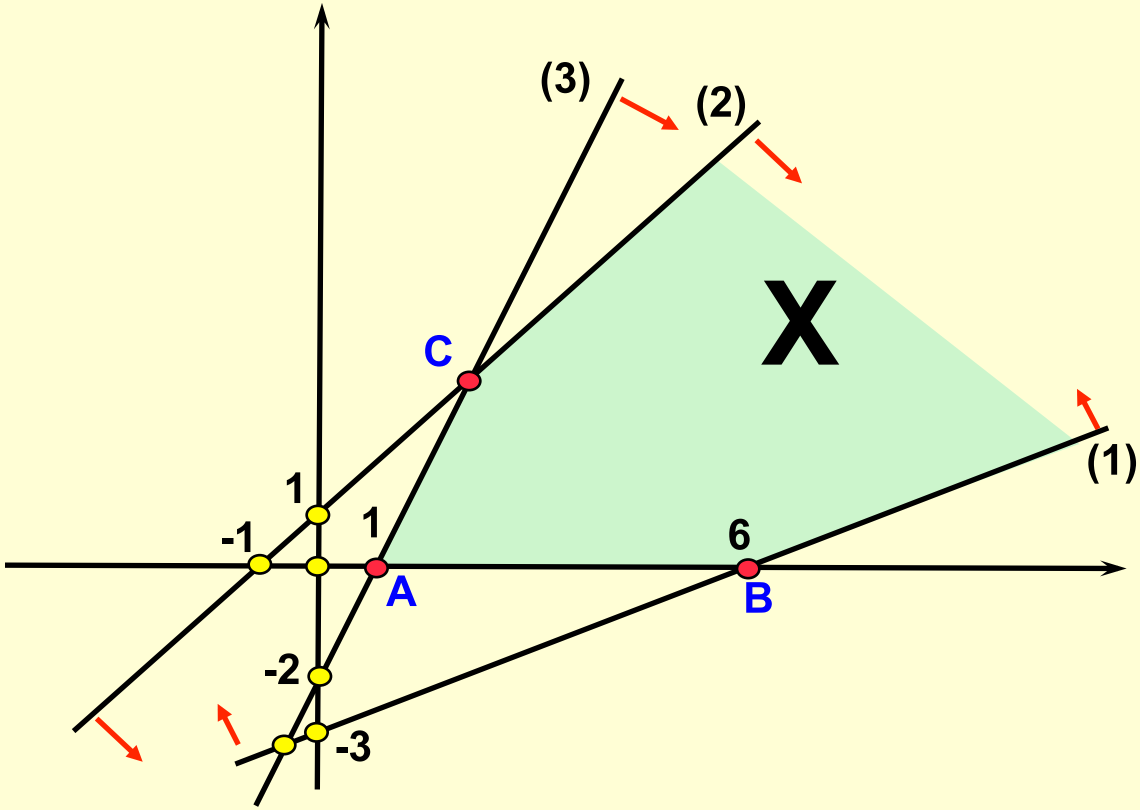
Si individui (geometricamente) una soluzione non ammissibile non basica

RISP: Un qualsiasi punto al di fuori della regione ammissibile diverso da quelli ottenuti dall'intersezione di due o più vincoli del problema.

Nell'esempio in figura: (0,3), (1,5), (-3,0), ……..

$$\min \ z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\ (4) & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$



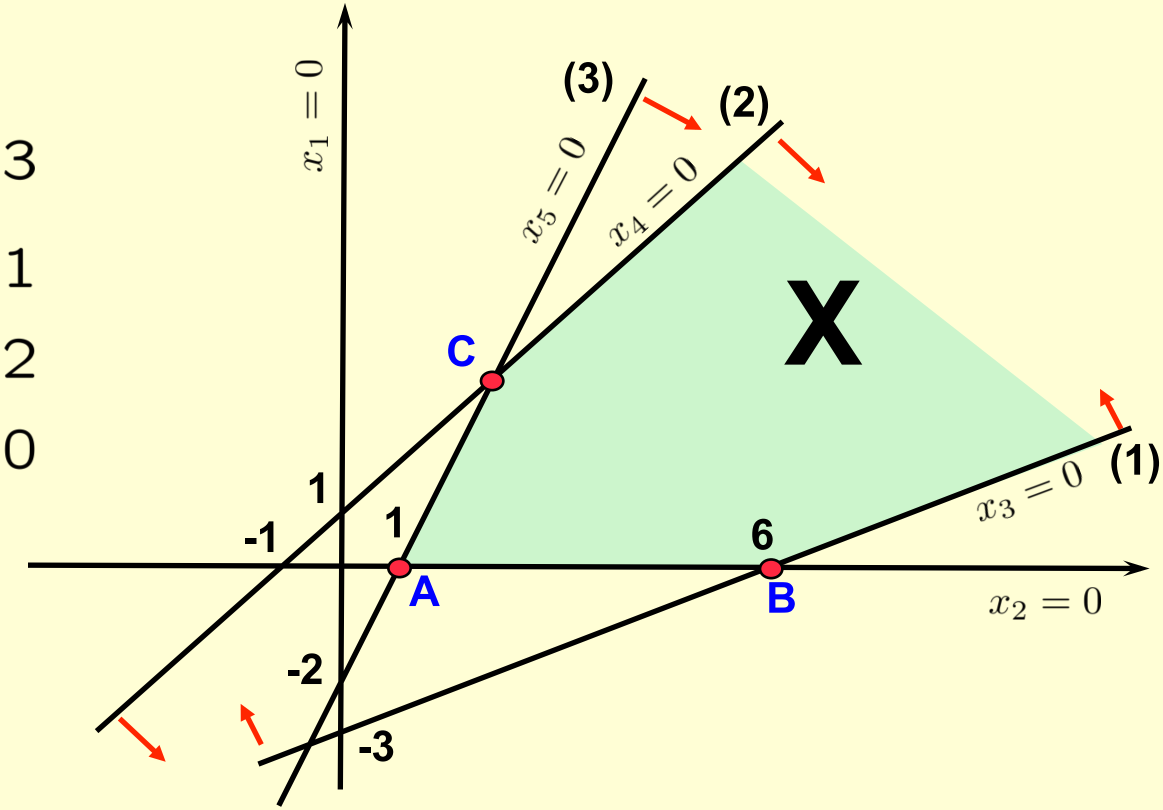
Si individui (geometricamente) una soluzione non ammissibile basica

RISP: Un qualsiasi punto al di fuori della regione ammissibile ottenuto dall'intersezione di due o più vincoli del problema.

Nell'esempio in figura sono: (0,0), (-1,0), (0,1), (0,-2), (0,-3), (-2/3,-10/3)

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 \quad = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 \quad = 2 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$



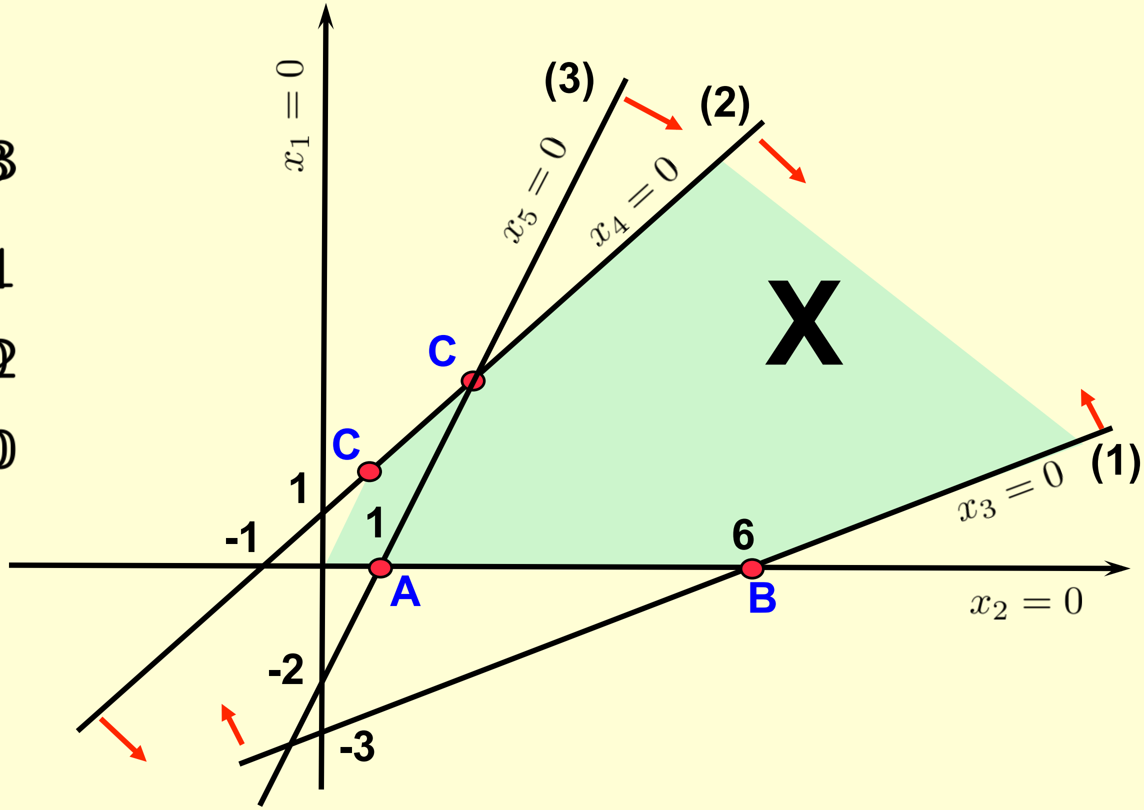
Individuare una soluzione di base ammissibile degenere, se esiste.

RISP: Un punto estremo su cui passano almeno n-m+1 vincoli. Questa condizione garantisce che almeno una variabile in base sia nulla.

Nell'esempio in figura non ci sono soluzioni di base degeneri.

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 = 2 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$



Modificare il vincolo 3 al fine di generare una soluzione di base ammissibile degenere.

Quali sono le basi associate al punto A?

B_1={3,4,5}, B_2={3,4,2}, B_3={3,4,1}

Verificare algebricamente che x_{B_1} è una soluzione di base ammissibile degenere.

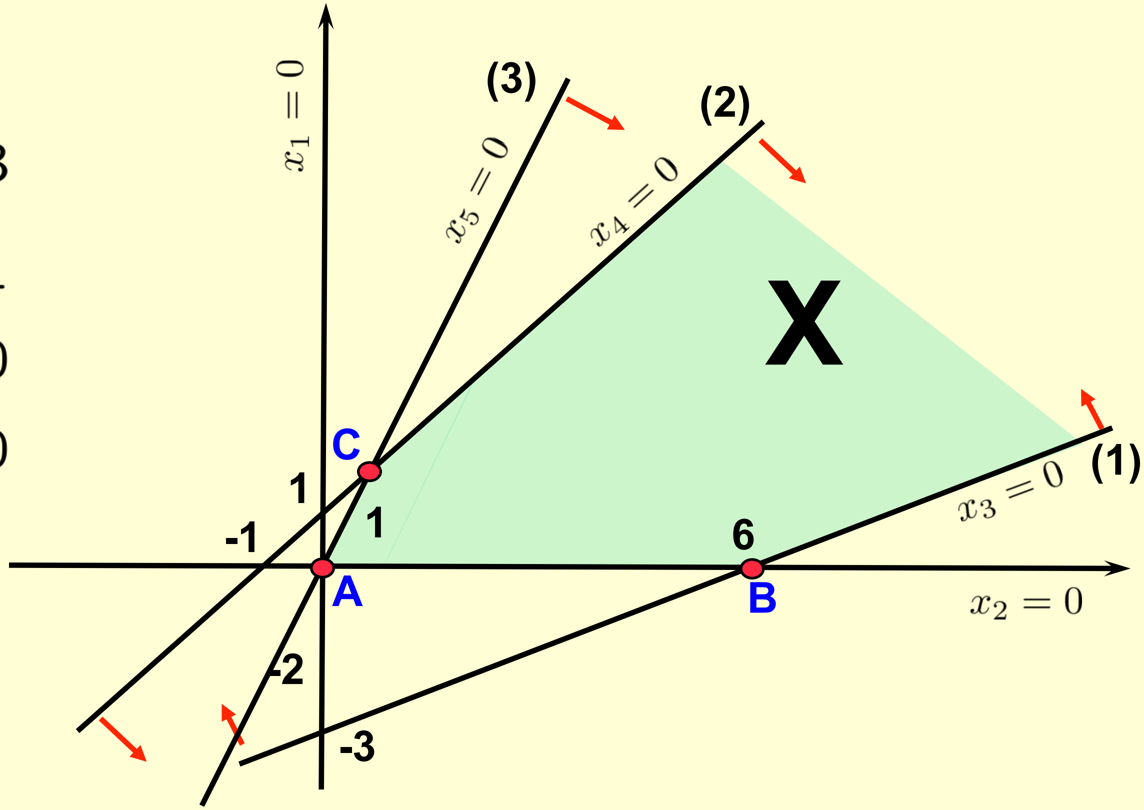
$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$(2) \quad -x_1 + x_2 + x_4 = 1$$

$$(3) \quad 2x_1 - x_2 - x_5 = 0$$

$$(4) \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$



B_1={3,4,5}

$$A_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad x_{N_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{B_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad x_{B_1} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = A_{B_1}^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

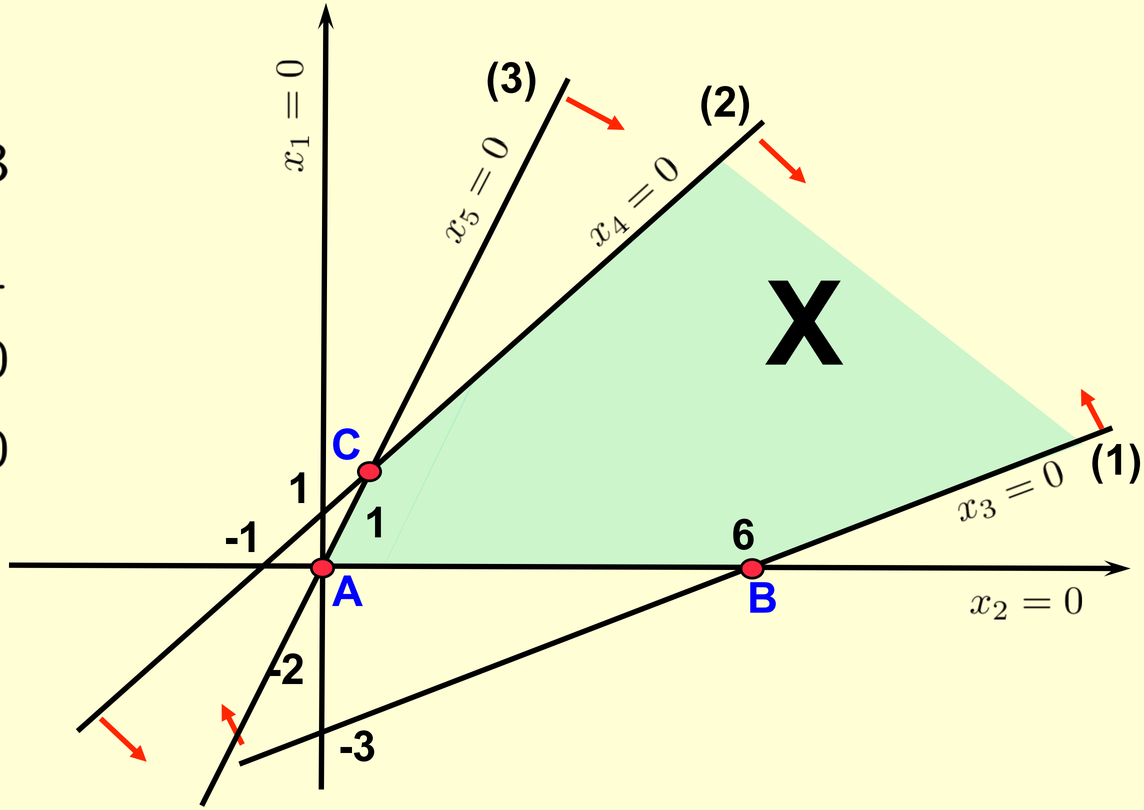
$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$(2) \quad -x_1 + x_2 + x_4 = 1$$

$$(3) \quad 2x_1 - x_2 - x_5 = 0$$

$$(4) \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$



B_2={2,3,4}, B_3={1,3,4}

Verificare algebricamente che x_{B_2} e x_{B_3} sono soluzioni di base ammissibile degeneri.

I seguenti vettori sono soluzioni di base ammissibili per il problema dato?

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{ll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 - x_5 = 0 \\ (4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad \underline{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{x}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$