PART THREE

COMPLEXITY THEORY

TEORIA DELLA COMPLESSITA’

Linguaggi NP-completi: *UHAMPATH*

24 maggio 2022

UHAMPATH

È possibile definire una "versione non orientata" del problema del cammino Hamiltoniano.

- Un cammino Hamiltoniano in un grafo non orientato è un cammino che passa per ogni vertice del grafo una e una sola volta.

$$UHAMPATH = \{\langle G, s, t\rangle \mid G \text{ è un grafo non orientato e ha un cammino Hamiltoniano da } s \text{ a } t\}$$

Per mostrare che *UHAMPATH* è *NP*-completo, definiamo una riduzione di tempo polinomiale da *HAMPATH* a *UHAMPATH*.

Teorema

$UHAMPATH \in NP$

Dimostrazione.

Un algoritmo N che verifica $UHAMPATH$ in tempo polinomiale:
$N =$ "Sull'input $\langle\langle G, s, t\rangle, c\rangle$, dove $G = (V, E)$ è un grafo non orientato:

1. Verifica se $c = (u_1, \dots, u_{|V|})$ è una sequenza di $|V|$ vertici di G, altrimenti rifiuta.
2. Verifica se i nodi della sequenza sono distinti, $u_1 = s$, $u_{|V|} = t$ e, per ogni i con $2 \leq i \leq n$, se $(u_{i-1}, u_i) \in E$, accetta in caso affermativo; altrimenti rifiuta."

$\exists c : \langle\langle G, s, t\rangle, c\rangle \in L(N)$ se e solo se $\langle G, s, t\rangle \in UHAMPATH$. $\square$

UHAMPATH è *NP*-completo

Teorema

UHAMPATH è NP-completo.

Dimostrazione

Abbiamo provato che *UHAMPATH* è in *NP*.

Per concludere la prova, dimostriamo che $HAMPATH \leq_P UHAMPATH$.

HAMPATH si riduce in tempo polinomiale a *UHAMPATH*

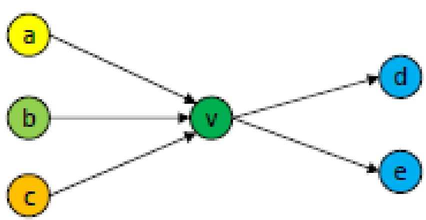
- La riduzione di tempo polinomiale associa a un grafo orientato $G = (V, E)$ con vertici s e t un grafo non orientato $G' = (V', E')$ con vertici s' e t'.
- Il grafo G ha un cammino Hamiltoniano da s a t se e solo se G' ha un cammino Hamiltoniano da s' a t'.
- Inoltre G' può essere costruito a partire da G in tempo polinomiale.

cammino Hamiltoniano in un grafo non orientato

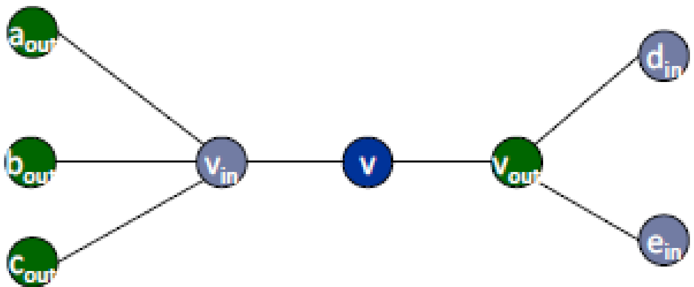
Dato grafo non orientato G' = (V', E') e due vertici s', t', esiste un cammino Hamiltoniano in G' da s' a t'?

Fatto. HAMPATH $\leq_P$ UHAMPATH.

Dim. Dato un grafo orientato G = (V, E) con n vertici, costruiamo un grafo non orientato G' con $3(n-2) + 2$ vertici.



G



G'

(autore slide: Kevin Wayne)

$HAMPATH \leq_p UHAMPATH$

Costruzione di G':

- Ogni vertice u di G, diverso da s e t è rimpiazzato da tre vertici u^{in}, u^{mid} e u^{out} in G'.
- I vertici s e t sono sostituiti con i vertici s^{out} e t^{in} in G'.
- Per ogni $u \in V \setminus \{s, t\}$, (u^{in}, u^{mid}) e (u^{mid}, u^{out}) sono in E'.
- Se $(u, v) \in E$ allora $(u^{out}, v^{in}) \in E'$.

$HAMPATH \leq_p UHAMPATH$

- Dimostriamo che G ha un cammino Hamiltoniano da s a t se e solo se G' ha un cammino Hamiltoniano da s^{out} a t^{in}.
- Se G ha un cammino Hamiltoniano P da s a t:

$$P = s, u_1, u_2, \ldots, u_k, t$$

allora P':

$$P' = s^{out}, u_1^{in}, u_1^{mid}, u_1^{out}, u_2^{in}, u_2^{mid}, u_2^{out}, \ldots, u_k^{in}, u_k^{mid}, u_k^{out}, t^{in}$$

è un cammino Hamiltoniano in G' da s^{out} a t^{in}.

HAMPATH si riduce in tempo polinomiale a *UHAMPATH*

- Viceversa se G' ha un cammino Hamiltoniano P' da s^{out} a t^{in}, è facile vedere che P' deve essere della forma

$$P' = s^{out}, u_1^{in}, u_1^{mid}, u_1^{out}, u_2^{in}, u_2^{mid}, u_2^{out}, \dots, u_k^{in}, u_k^{mid}, u_k^{out}, t^{in}$$

- La prova è per induzione su k. Infatti P' ha come primo vertice s^{out} il quale è connesso solo a vertici della forma u_i^{in}. Quindi il secondo vertice è u_i^{in} per qualche i. I vertici successivi devono essere u_i^{mid}, u_i^{out} perché u_i^{mid} è connesso solo a u_i^{in} e u_i^{out}.
- Ma se P' ha la forma suddetta allora

$$P = s, u_1, u_2, \dots, u_k, t$$

è un cammino Hamiltoniano da s a t.

□

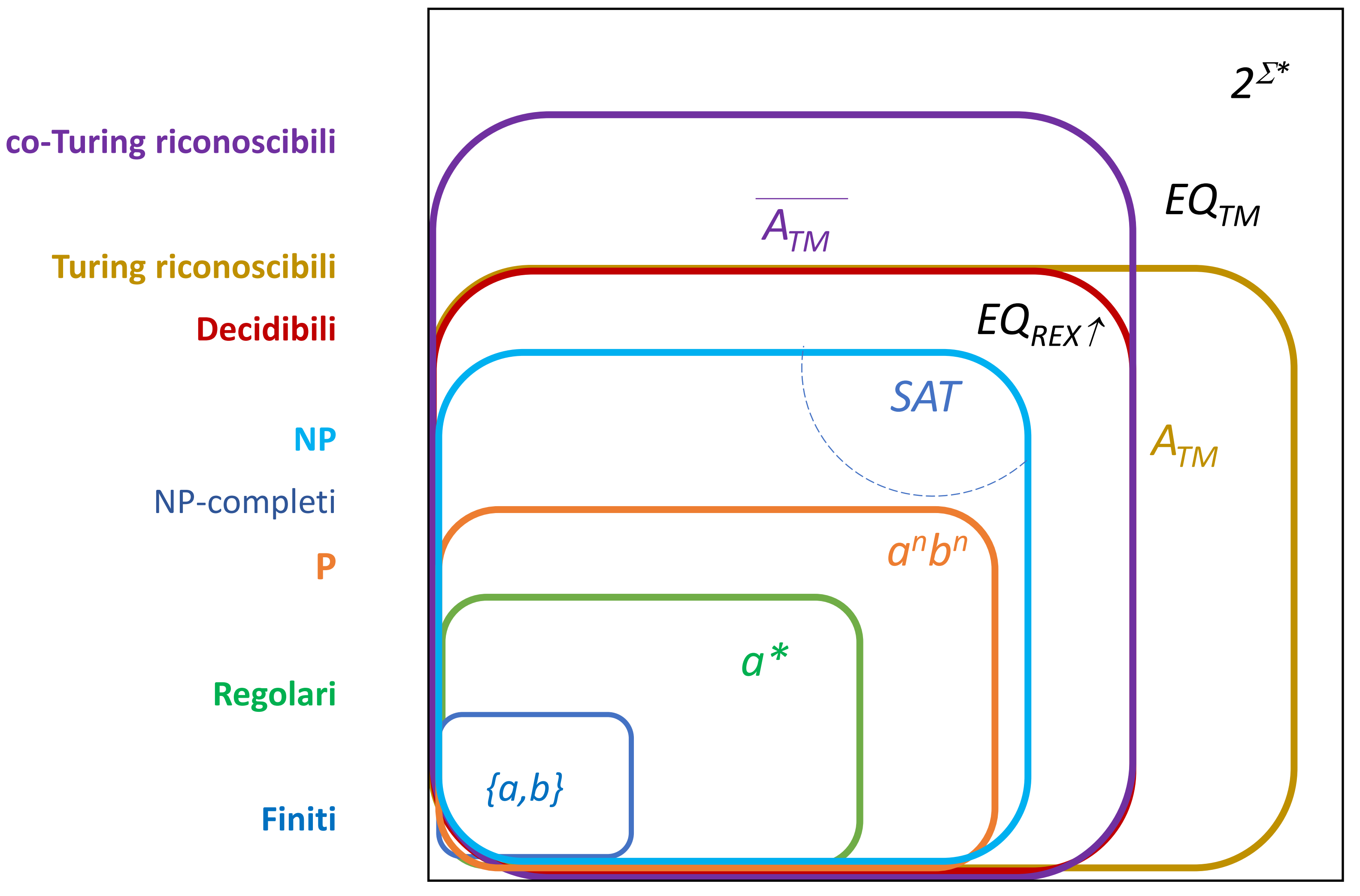
Problemi *NP* – completi

- SAT (Cook-Levin)
- SAT_{CNF}
- 3SAT (il libro adatta la dim del teorema di CK)
- CLIQUE (da 3SAT coi gadget)
- VERTEX-COVER (da 3SAT coi gadget)
- SUBSET-SUM (da 3SAT coi gadget)
- HAMPATH (da 3SAT coi gadget)
- UHAMPATH (da HAMPATH)

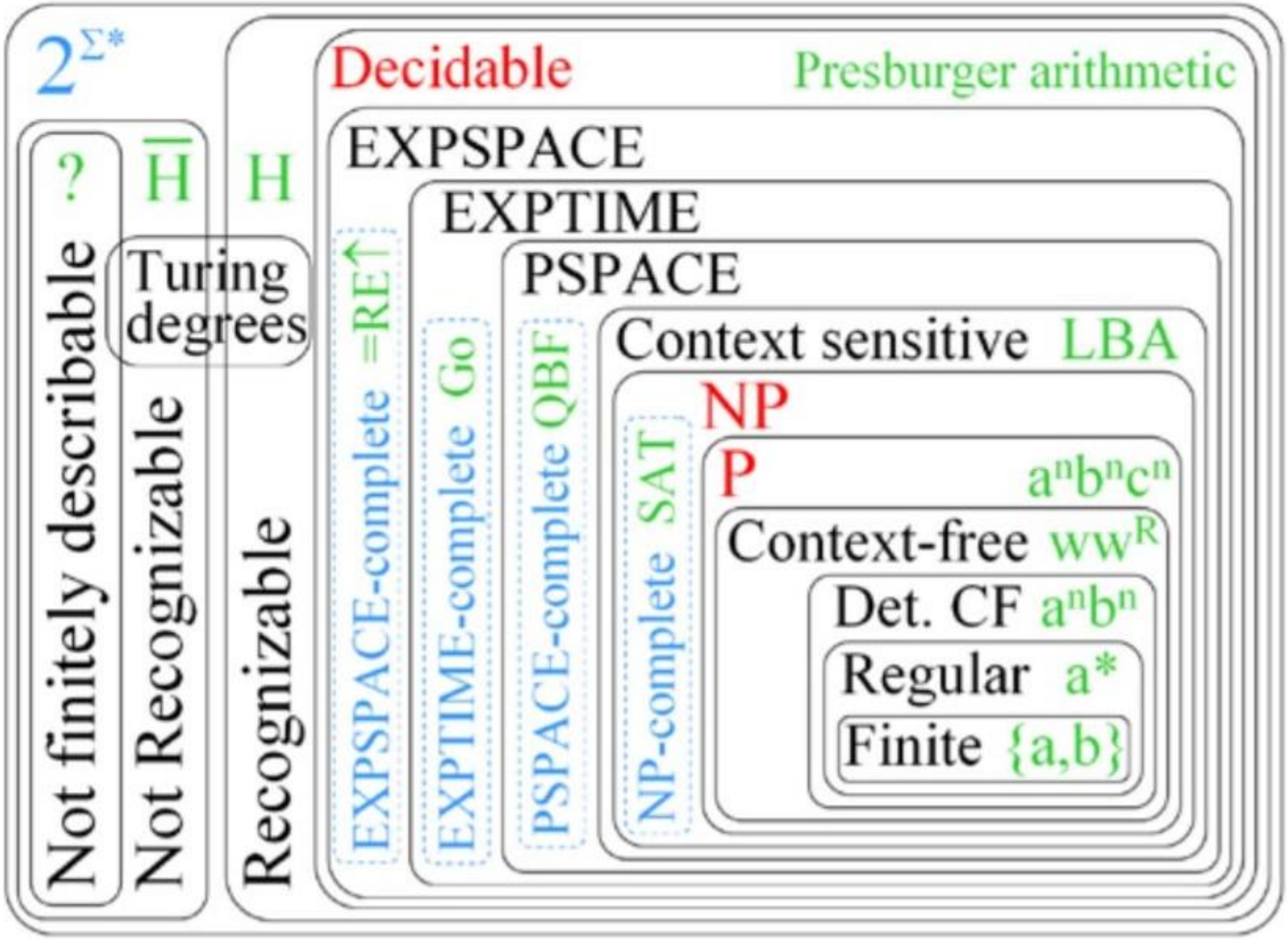
Teoria della complessità: argomenti trattati

- Definizione di complessità di tempo
- La complessità di tempo dipende dal modello di calcolo; useremo decisori e modelli polinomialmente equivalenti
- La complessità di tempo dipende dalla codifica utilizzata: useremo codifica in binario o polinomialmente correlata
- TIME (f(n)) = insieme dei linguaggi decisi in tempo O(f(n))
- La classe $P = \bigcup_{k \geq 0} \mathrm{TIME}(n^k)$ e sua robustezza
- La classe EXPTIME
- Algoritmi di verifica e la classe NP
- Il concetto di riduzione polinomiale
- Il concetto di NP-completezza
- Linguaggi NP-completi

Classi di complessità



The Extended Chomsky Hierarchy



Contenuto del corso

- MODELLI DI COMPUTAZIONE:

  AUTOMI FINITI DETERMINISTICI E NON DETERMINISTICI.
  ESPRESSIONI REGOLARI. PROPRIETÀ DI CHIUSURA DEI LINGUAGGI REGOLARI. TEOREMA DI KLEENE. PUMPING LEMMA PER I LINGUAGGI REGOLARI.

  MACCHINA DI TURING DETERMINISTICA A NASTRO SINGOLO. IL LINGUAGGIO RICONOSCIUTO DA UNA MACCHINA DI TURING. VARIANTI DI MACCHINE DI TURING E LORO EQUIVALENZA.

- IL CONCETTO DI COMPUTABILITÀ: FUNZIONI CALCOLABILI, LINGUAGGI DECIDIBILI E LINGUAGGI TURING RICONOSCIBILI. LINGUAGGI DECIDIBILI E LINGUAGGI INDECIDIBILI. IL PROBLEMA DELLA FERMATA. RIDUZIONI. TEOREMA DI RICE.

- IL CONCETTO DI COMPLESSITÀ: MISURE DI COMPLESSITÀ: COMPLESSITÀ IN TEMPO DETERMINISTICO E NON DETERMINISTICO. RELAZIONI DI COMPLESSITÀ TRA VARIANTI DI MACCHINE DI TURING. LA CLASSE P. LA CLASSE NP. RIDUCIBILITÀ IN TEMPO POLINOMIALE. DEFINIZIONE DI NP-COMPLETEZZA. RIDUZIONI POLINOMIALI. ESEMPI DI LINGUAGGI NP-COMPLETI.

Fine del corso….