Quicksort
(vs Mergesort)
Relazioni di ricorrenza

18 marzo 2022

Algoritmi basati sulla tecnica Divide et Impera

In questo corso:

- Ricerca binaria
- Mergesort (ordinamento)
- Quicksort (ordinamento)
- Moltiplicazione di interi
- Moltiplicazione di matrici (non in programma)

NOTA: nonostante la tecnica *Divide et impera* sembri così «semplice» ben due «top ten algorithms of the 20° century» sono basati su di essa:
Fast Fourier Transform (FFT)
Quicksort

Ordinamento

INPUT: un insieme di n oggetti $a_1, a_2, \ldots, a_n$
presi da un dominio totalmente ordinato secondo ≤

OUTPUT: una permutazione degli oggetti $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ tale che
$a'_1 \leq a'_2 \leq \ldots \leq a'_n$

Applicazioni:

- Ordinare alfabeticamente lista di nomi, o insieme di numeri, o insieme di compiti d'esame in base a cognome studente

- Velocizzare altre operazioni (per es. è possibile effettuare ricerche in array ordinati in tempo O(log n))

- Subroutine di molti algoritmi (per es. *greedy*)

- ….

Algoritmi per l'ordinamento

Data l'importanza, esistono svariati algoritmi di ordinamento,
basati su tecniche diverse:

Insertionsort
Selectionsort
Heapsort
Mergesort
Quicksort
Bubblesort
Countingsort
…..

Figure 2.1: Sorting a hand of cards using insertion sort.

Ognuno con i suoi aspetti positivi e negativi.

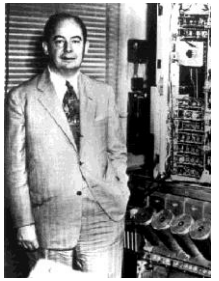
Il Mergesort e il Quicksort sono entrambi basati sulla tecnica Divide et Impera, ma risultano avere differenti prestazioni

Ricordate che di ogni algoritmo che studieremo dovrete sapere:

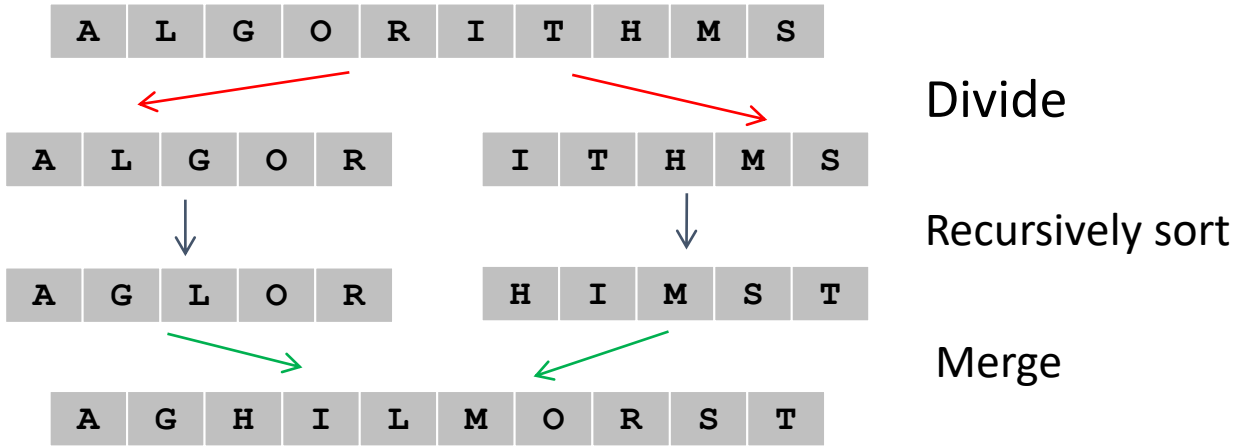
- Quale problema computazionale risolve
- Spiegarne il funzionamento tramite pseudo-codice (o verbalmente, ma in maniera precisa) facendo riferimento alla
- Tecnica di progettazione su cui si basa
- Saperlo eseguire su un dato input
- Spiegare perché funziona (correttezza)
- Analizzarne il tempo di esecuzione, ed eventualmente lo spazio di memoria ausiliaria utilizzato

Mergesort

- Divide array into two halves.
- Recursively sort each half.
- Merge two halves to make sorted whole.



John von Neumann (1945)



Quicksort

Nota: sul libro di testo trovate solo una versione randomizzata (cap. 13).
Potete fare riferimento al libro di Cormen, Leiserson, Rivest, (Stein)
Introduzione agli algoritmi, o ad altri testi consigliati.

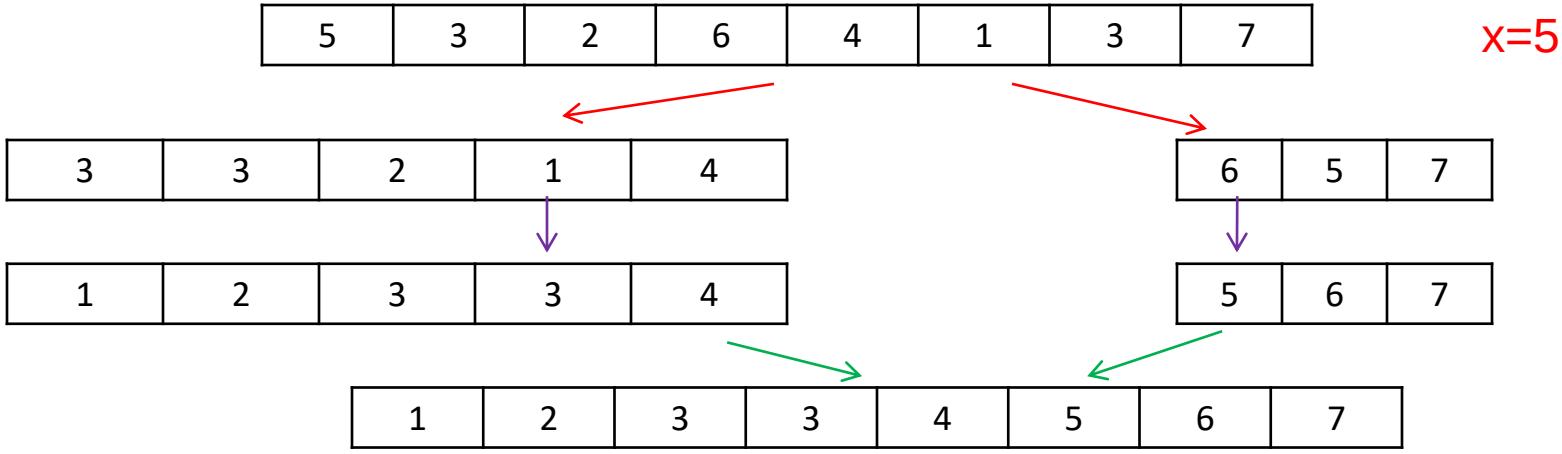
Quicksort

Dato un array di n elementi

I) Divide: scegli un elemento x dell'array (detto "pivot" o perno) e partiziona la sequenza in elementi ≤ x ed elementi ≥ x

II) Risolvi i due sottoproblemi ricorsivamente

III) Impera: restituisci la concatenazione dei due sotto-array ordinati



Scelta del pivot

L’algoritmo funziona per qualsiasi scelta (primo / ultimo / …),
ma se vogliamo algoritmo “deterministico” devo fissare la scelta;
nel seguito sceglieremo il **primo**.

Altrimenti: scelgo “random” e avrò “algoritmi randomizzati”
(vedi Kleinberg & Tardos, cap. 13)

Partizionamento

Partiziona l'array in elementi ≤ x ed elementi ≥ x

Banalmente:
scorro l'array da 1 ad n e inserisco gli elementi ≤ pivot in un nuovo array e quelli ≥ del pivot in un altro nuovo array

Però:

1) avrei bisogno di array ausiliari

2) di che dimensione? I due sotto-array avrebbero un numero variabile di elementi

Partizione “in loco”

Partition:

- pivot = A[1]

- Scorri l’array da destra verso sinistra (con un indice j) e da sinistra verso destra (con un indice i) :

  da destra verso sinistra, ci si ferma su un elemento ≤ del pivot
  da sinistra verso destra, ci si ferma su un elemento ≥ del pivot;

- Scambia gli elementi

- Riprendi la scansione finché i e j si incrociano

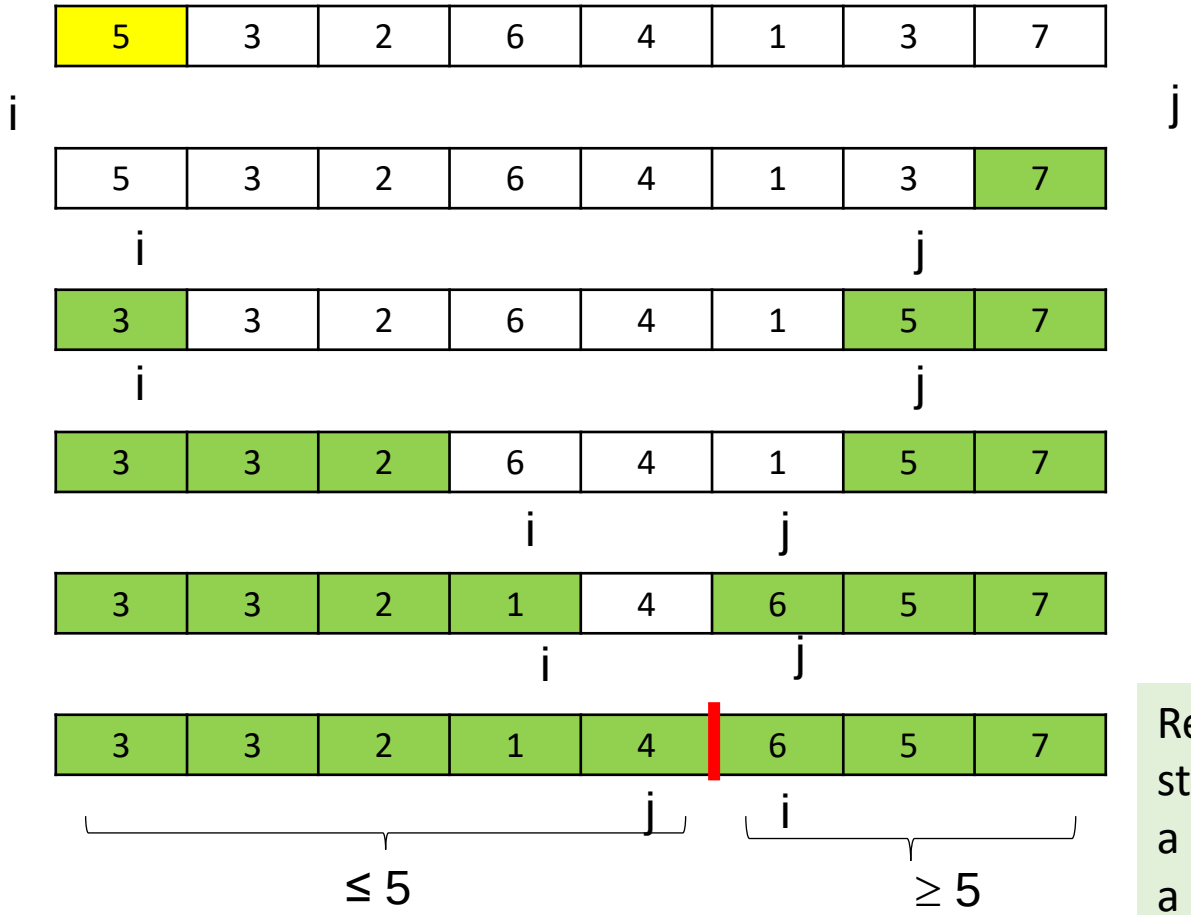
Partition (Hoare 1962)

```
Partition (A, p, r)
x = A[p]
i = p-1
j = r+1
while True
    do repeat j=j-1 until A[j]≤ x
       repeat i=i+1 until A[i]≥ x
       if i < j
         then scambia A[i] ↔ A[j]
         else return j
```

Esiste un diverso algoritmo per il partizionamento dovuto a N. Lomuto ed esistono piccole varianti di questo (che potreste incontrare cambiando libro di testo)

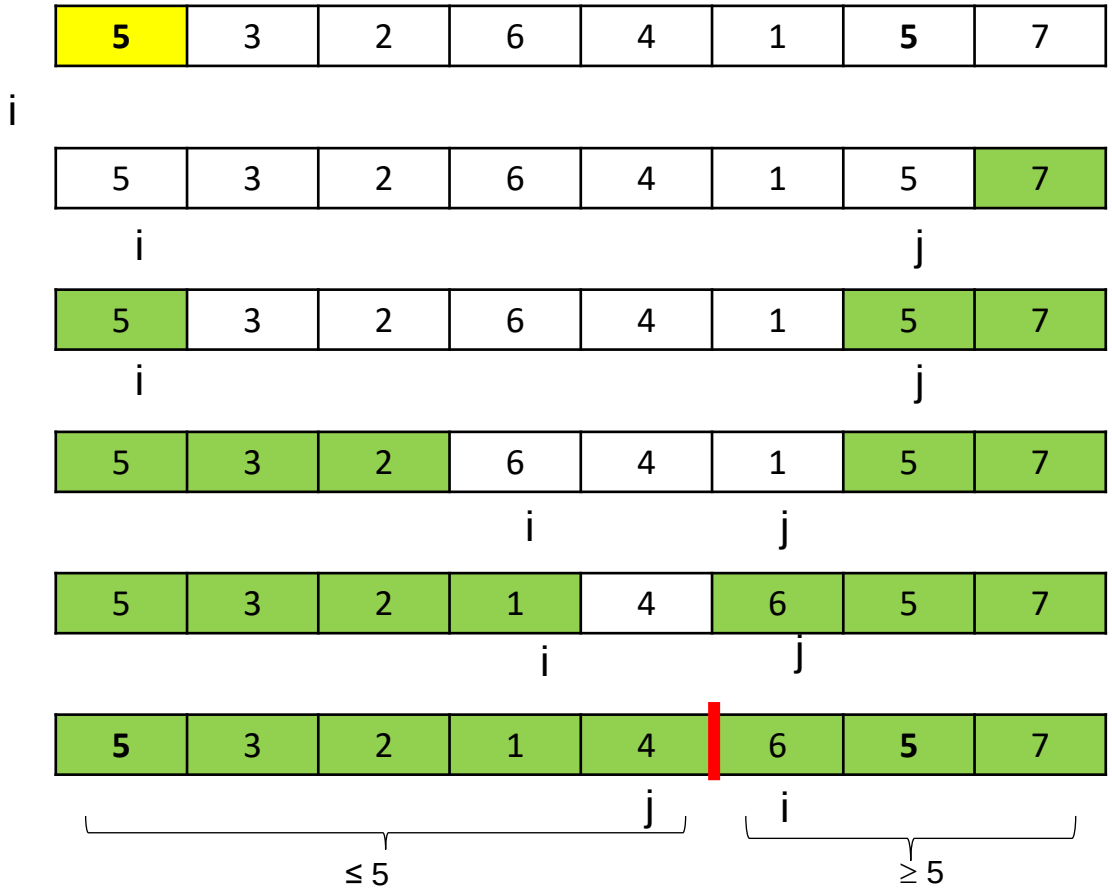
Attenzione: **repeat op until cond**
significa che: eseguo **op**; se **cond** è verificata esco, altrimenti ripeto.
j si ferma su un elemento **≤ x; i** si ferma su un elemento **≥ x.**

Partizione in loco: un esempio



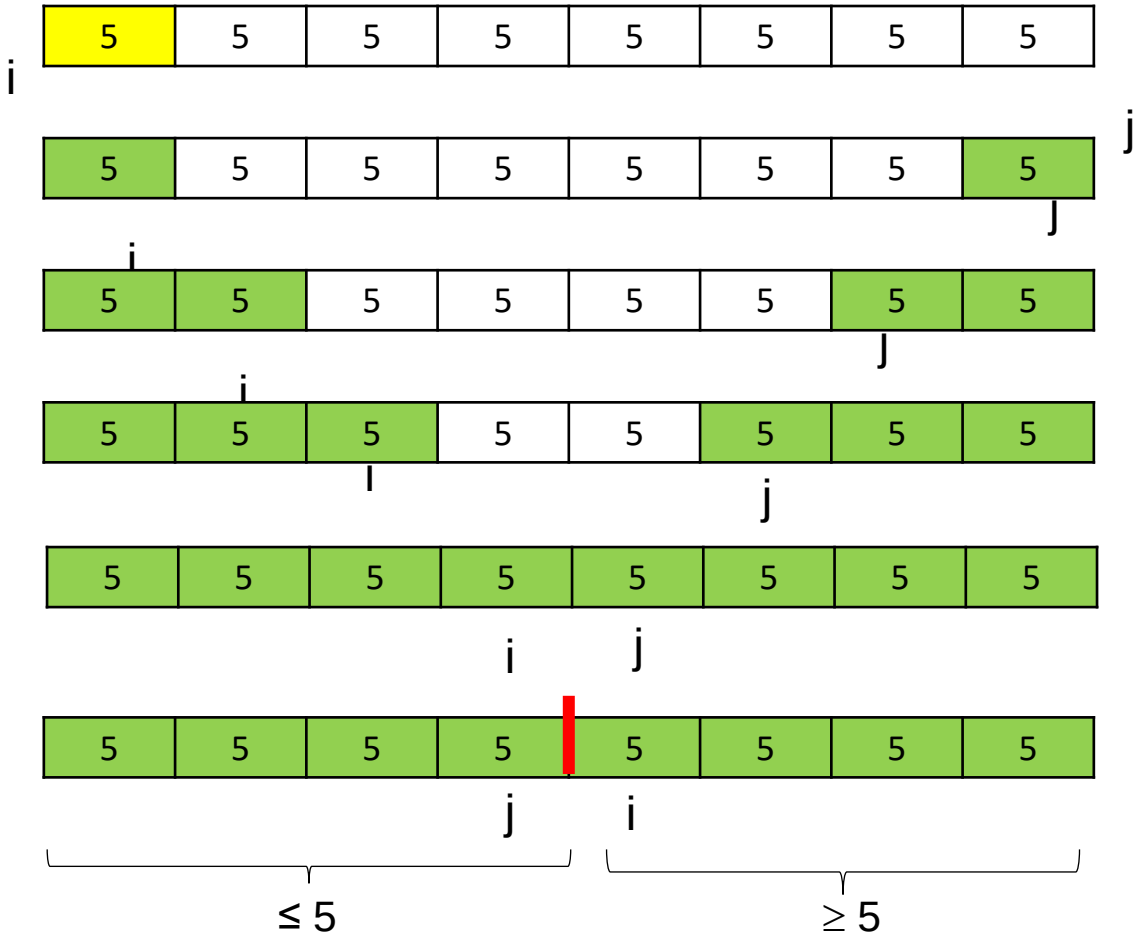
Restituisce q = j. Gli elementi < x staranno a sinistra; gli elementi > x a destra; quelli = x possono stare sia a sinistra che a destra.

Partition: un altro esempio



Restituisce q = j. Gli elementi < x staranno a sinistra; gli elementi > x a destra; quelli = x possono stare sia a sinistra che a destra.

Partition su un array di elementi tutti uguali



Correttezza di Partition

Perché funziona?

Ad ogni iterazione (quando raggiungo il while):
la “parte verde” di sinistra (da p ad i) contiene elementi ≤ 5;
la “parte verde” di destra (da j a r) contiene elementi ≥ 5.

Tale affermazione è vera all’inizio e si mantiene vera ad ogni iterazione (per induzione); alla fine implica la correttezza di Partition.

Nota: `Partition` restituisce q ≥ p: al massimo j si ferma sul primo elemento, che è ≤ pivot.

Analisi Partition

Il tempo di esecuzione è $\Theta(n)$

```
Quicksort (A, p, r)
    if p < r then
        q = Partition (A,p,r)
        Quicksort(A, p, q)
            Quicksort(A, q+1, r)
```

Correttezza: la concatenazione di due array ordinati in cui l'array di sinistra contiene elementi minori o uguali degli elementi dell'array di destra è un array ordinato

Analisi: $T(n) = \Theta(n) + T(k) + T(n-k)$

dove k sono gli elementi da p a q (e n−k i rimanenti da q+1 a r) con $1 \leq k \leq n-1$. *Ricorda*: `Partition` restituisce $q \geq p$.

Analisi Quicksort (caso peggiore)

Un primo caso: ad ogni passo il pivot scelto è il minimo o il massimo degli elementi nell'array (la partizione è 1 | n-1):

$$T_{worst}(n) = T_{worst}(n-1) + T_{worst}(1) + \Theta(n)$$

essendo $T_{worst}(1) = \Theta(1)$

$$T_{worst}(n) = T_{worst}(n-1) + \Theta(n)$$

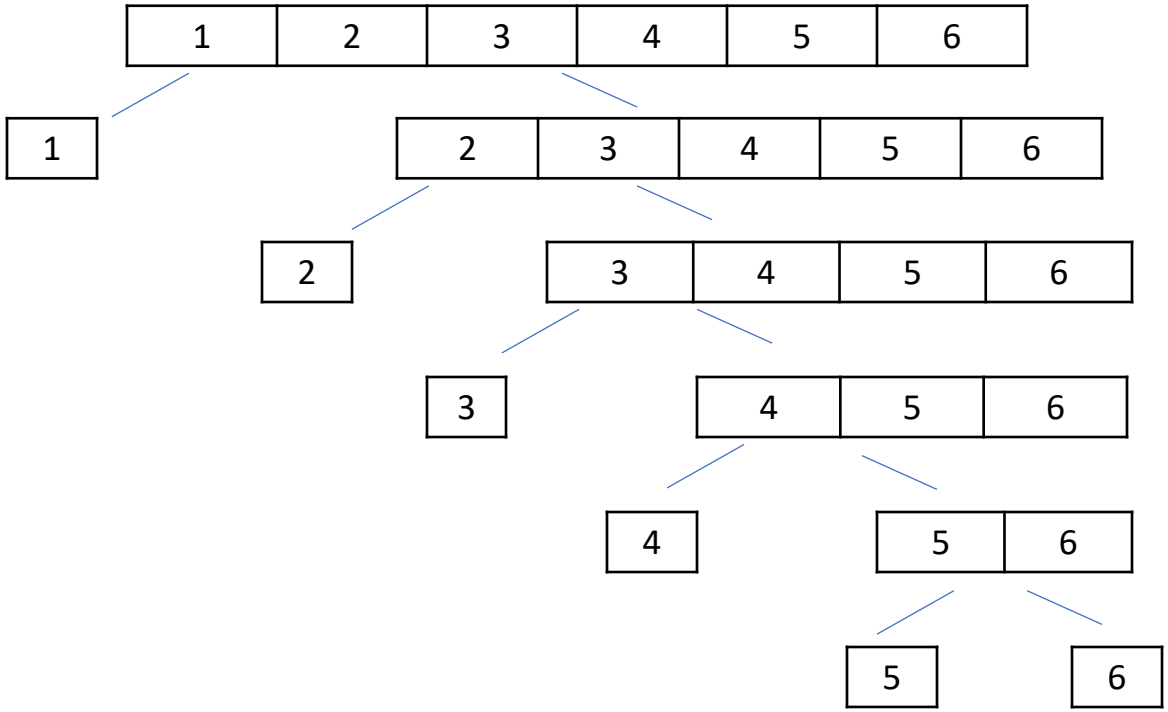
La cui soluzione è $T_{worst}(n) = \Theta(n^2)$

Si può dimostrare che questo è il **caso peggiore**; quindi per il Quicksort:

$$\mathbf{T(n) = O(n^2)}$$

Un esempio del caso peggiore del Quicksort

Un array ordinato



x = 1

x = 2

x = 3

x = 4

x = 5

Analisi Quicksort (caso migliore)

Un altro caso: ad ogni passo il pivot scelto è la "mediana" degli elementi nell'array (la partizione è n/2 | n/2):

$$T_{best}(n) = 2\,T_{best}(n/2) + \Theta(n)$$

La cui soluzione è $T_{best}(n) = \Theta(n \log n)$

(è la stessa relazione di ricorrenza del Mergesort)

Si può dimostrare che questo è il **caso migliore**; quindi: **$T(n) = \Omega(n \log n)$**

Riassumendo, per il Quicksort: $T(n) = O(n^2)$ e $T(n) = \Omega(n \log n)$

Il caso migliore è diverso dal caso peggiore quindi
T(n) **non** è Θ di nessuna funzione

Is Quicksort … quick?

Il Quicksort non ha un «buon» caso peggiore. A dispetto di ciò, è spesso la migliore scelta nella pratica, perché è molto efficiente nel **caso medio**: il suo tempo è $\Theta(n \log n)$ e le costanti nascoste sono piccole.
Per questo si può considerare una sua versione «randomizzata»

Algoritmo randomizzato:

- Introduce una chiamata a **`random(a,b)`** (che restituisce un numero a caso fra a e b (a<b))
- Forza l'algoritmo a comportarsi come nel caso medio
- Non esiste una distribuzione d'input «peggiore» a priori

Nota: sul libro di testo trovate solo una versione randomizzata.
Per il resto potete fare riferimento al libro di Cormen, Leiserson, Rivest, (Stein) *Introduzione agli algoritmi,* o ad altri testi consigliati nel programma.

QuickSort randomizzato

```
Random-Partition (A, p, r)

i← random(p,r)
scambia A[i] <-> A[p]
return Partition(A, p, r)
```

```
Random-Quicksort (A, p, r)

   if p < r then
        q ← Random-Partition (A,p,r)
        Random-Quicksort(A, p, q)
        Random-Quicksort(A, q+1, r)
```

Quicksort vs Mergesort

(entrambi Divide et Impera)

Fase		MergeSort	Tempi	QuickSort	Tempi
I	Divide	$q = \lfloor (p+r)/2 \rfloor$	$\Theta(1)$	PARTITION	$\Theta(n)$
II	Ricorsione	$\lfloor n/2 \rfloor \mid\mid \lceil n/2 \rceil$	$2T(n/2)$	$k \mid n-k$	T(k) + T(n-k)
III	Combina	MERGE	$\Theta(n)$	niente	$\Theta(1)$
			$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$		$T(n) = T(k) + T(n-k) + \Theta(n)$
			$T(n) = \Theta(n \log n)$		$T(n) = O(n^2)$, $T(n) = \Omega(n \log n)$

Da ricordare sulla complessità dell'ordinamento

Esistono algoritmi di ordinamento con tempo nel caso peggiore $\Theta(n^2)$ e $\Theta(n \log n)$

Esistono anche algoritmi di ordinamento con tempo nel caso peggiore $\Theta(n)$, ma …
non sono basati sui confronti e funzionano **solo** sotto certe ipotesi.

Inoltre si può dimostrare che **tutti** gli algoritmi di ordinamento basati sui confronti richiedono **$\Omega(n \log n)$** confronti nel caso peggiore!

Si dice che $\Omega(n \log n)$ è una delimitazione inferiore (*lower bound*) al problema dell'ordinamento, cioè al numero di confronti richiesti per ordinare n oggetti.

Delimitazione inferiore *(lower bound)* =
quantità di risorsa **necessaria** per risolvere un determinato problema.
Indica la difficoltà intrinseca del problema.

QuickSort ungherese

Altre relazioni di ricorrenza

Consideriamo la sotto-famiglia

- $T(n) = qT(n/2) + cn$ con $T(2)=c$

  per q=1 allora T(n)= ?

  q=2 allora T(n)= $\Theta(n \log_2 n)$ (MergeSort)

  q>2 allora T(n)= ?

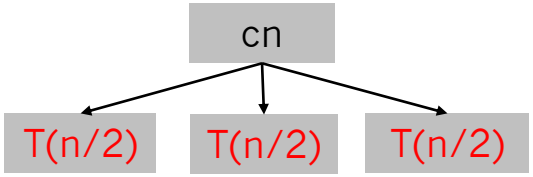
- $T(n)=2T(n/2) +cn^2$

  T(n)= ?

Albero di ricorsione per il caso q=3

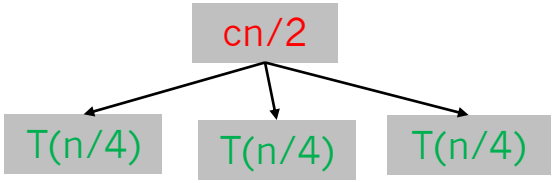
$T(n) = 3\,T(n/2)+cn$
$T(2) = c$

Albero per T(n):

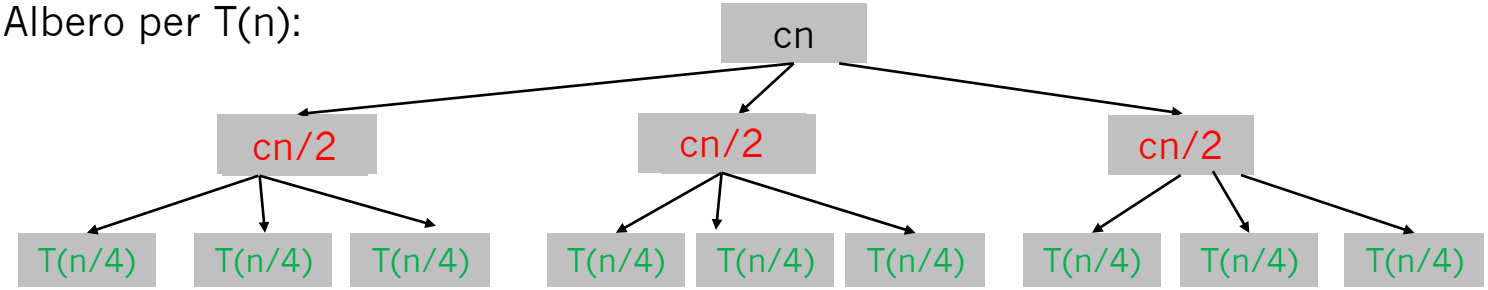


Albero per T(n/2):

$T(n/2) = 3\,T(n/4) + cn/2$



Albero per T(n):



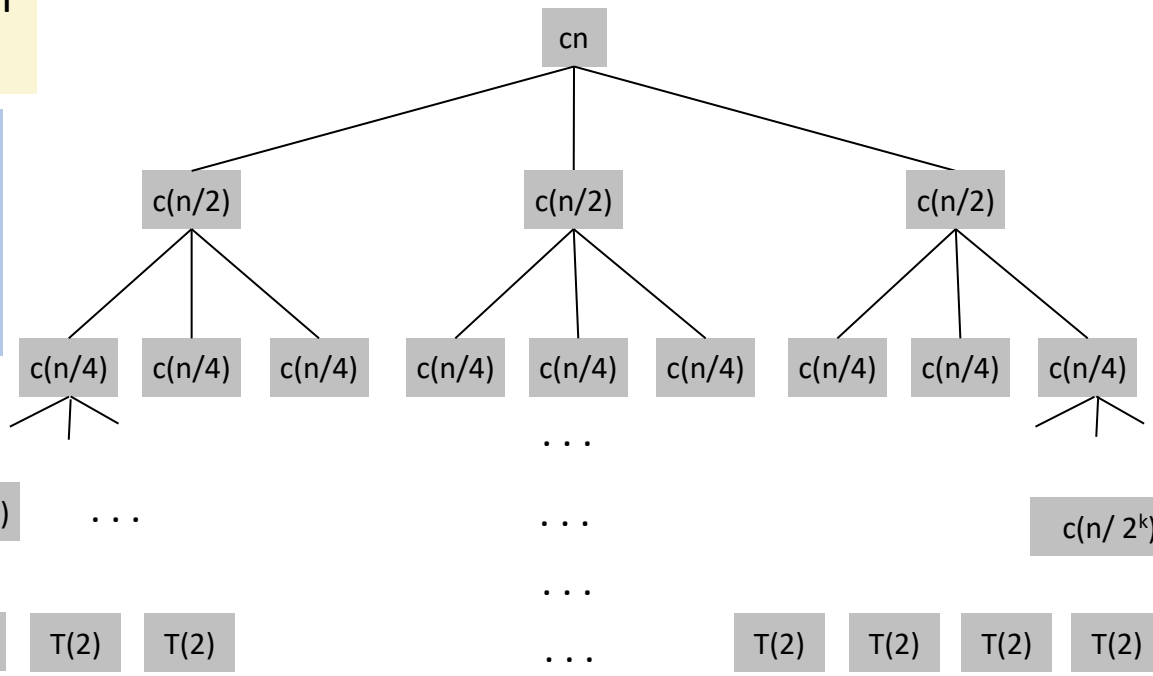
Albero di ricorsione per il caso q=3

$T(n)=3T(n/2)+cn$
$T(2)=c$

$n/2^i = 2$ sse $n = 2^{i+1}$

sse $i+1 = \log_2 n$ sse

$i = \log_2 n - 1$ sse $2^i = n/2$



cn — i = 0

3c(n/2) — i = 1

9c(n/4) — i = 2

. . .

$3^k c(n / 2^k)$ — i = k

. . .

$c\ 3^{\log_2 n - 1}$ — $i = \log_2 n - 1$

$$T(n) = c\,(3^{\log_2 n - 1}) + c\,n\,(1+3/2+ (3/2)^2 + \ldots + (3/2)^{\log_2 n - 2})$$

Da ricordare: serie geometrica

Somme finite: Se $\alpha \neq 1$ allora

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha^i = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1} \qquad (1)$$

Somme infinite: Se $0 < \alpha < 1$. Allora

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{1}{1 - \alpha} \qquad (2)$$

$T(n)=3T(n/2)+cn$
$T(2)=c$

$$T(n) = c\,(3^{\log_2 n - 1}) + c\,n\,(1+3/2+ (3/2)^2 + \ldots + (3/2)^{\log_2 n - 2})$$

Poiché $c\,(3^{\log_2 n - 1}) \leq c\,n\,(3/2)^{\log_2 n - 1}$ (*verifica per esercizio*)

$$T(n) \leq c\,n \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} \left(\frac{3}{2}\right)^i$$

Pongo $r = \frac{3}{2}$

$$T(n) \leq c\,n \left(\frac{r^{\log_2 n}-1}{r-1}\right) \leq c\,n \left(\frac{r^{\log_2 n}}{r-1}\right) = \left(\frac{c}{r-1}\right) n r^{\log_2 n}$$

$$r^{\log_2 n} = n^{\log_2 r} = n^{\log_2 \frac{3}{2}} = n^{(\log_2 3 - 1)}$$

$$T(n) \leq \left(\frac{c}{r-1}\right) n\, n^{(\log_2 3 - 1)} = \left(\frac{c}{r-1}\right) n^{\log_2 3}$$

$$\boldsymbol{T(n) = O(n^{\log_2 3})}$$

Albero di ricorsione per il caso q>2

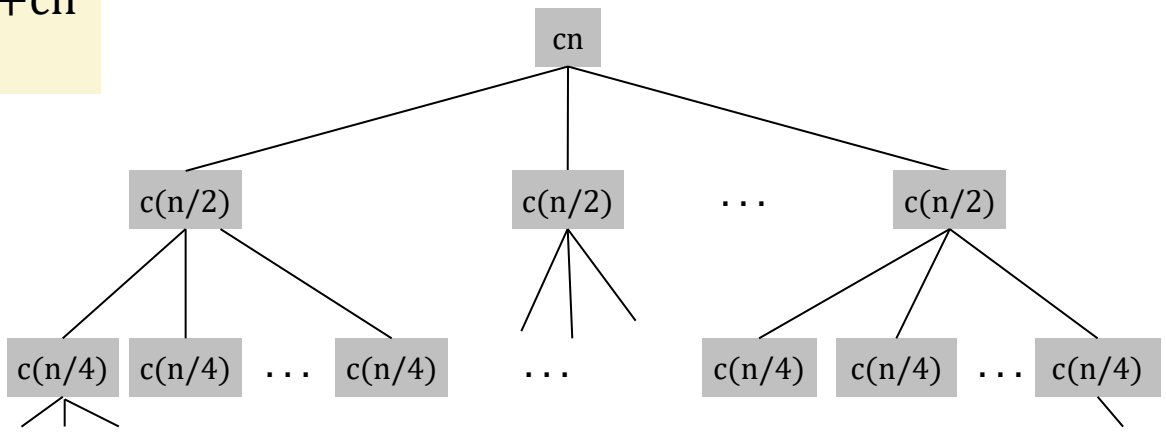
$T(n)=qT(n/2)+cn$
$T(2)=c$

$n/2^i = 2$ sse $n = 2^{i+1}$

sse $i+1 = \log_2 n$

sse $i = \log_2 n - 1$ sse

$2^i = n/2$



cn $\quad i = 0$

$qc(n/2)$ $\quad i = 1$

$q^2c(n/4)$ $\quad i = 2$

. . .

$q^k c(n / 2^k)$ $\quad i = k$

. . .

$c\, q^{\log_2 n - 1}$ $\quad i = \log_2 n - 1$

$$T(n) = c\,(q^{\log_2 n - 1}) + c\,n\,(1+q/2+ (q/2)^2 + \ldots + (q/2)^{\log_2 n - 2})$$

$T(n)=qT(n/2)+cn$
$T(2)=c$

$$T(n) = c\,(q^{\log_2 n - 1}) + c\,n\,(1+q/2+ (q/2)^2 + \dots + (q/2)^{\log_2 n - 2})$$

Poiché $c\,(q^{\log_2 n - 1}) \leq c\,n\,(q/2)^{\log_2 n - 1}$ (*verifica per esercizio*)

$$T(n) \leq c\,n \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} \left(\frac{q}{2}\right)^i$$

Pongo $r = \frac{q}{2}$

$$T(n) \leq c\,n \left(\frac{r^{\log_2 n}-1}{r-1}\right) \leq c\,n \left(\frac{r^{\log_2 n}}{r-1}\right) = \left(\frac{c}{r-1}\right) n r^{\log_2 n}$$

$$r^{\log_2 n} = n^{\log_2 r} = n^{\log_2 \frac{q}{2}} = n^{(\log_2 q - 1)}$$

$$T(n) \leq \left(\frac{c}{r-1}\right) n\, n^{(\log_2 q - 1)} = \left(\frac{c}{r-1}\right) n^{\log_2 q}$$

$$\boldsymbol{T(n) = O(n^{\log_2 q})}$$

Altre relazioni di ricorrenza

Consideriamo la sotto-famiglia

- T(n) = qT(n/2) + cn con T(2)=c

  per q=1 allora T(n)= ?

  q=2 allora T(n)= $\Theta(n \log_2 n)$ (MergeSort)

  q>2 allora T(n)= $O(n^{\log_2 q})$

- $T(n)=2T(n/2)+cn^2$

  T(n)= ?

Metodo di sostituzione per q=1

Esempio: $T(n) = T(n/2) + cn$

$T(2) = c$

- ipotizziamo che la soluzione sia $T(n) \leq a\, n$ per una costante a opportuna,
- verifichiamolo con l'induzione

Base: $T(2) = c \leq a \bullet 2$ per ogni $a \geq c/2$

Ipotesi induttiva: supponiamo che $T(n/2) \leq a\,(n/2)$

Passo induttivo: $T(n) = T(n/2) + c\, n \leq a\,(n/2) + c\, n = (a/2+c)\, n$

ma $(a/2+c)\, n \leq a\, n$ per $a/2 \geq c$, $a \geq 2c$

quindi $T(n) \leq a\, n$ per $a \geq 2c$. Inoltre dalla definizione $T(n) \geq cn$.

Quindi $T(n) = \Theta(n)$.

Esempi

```
procedure bugs(n)
    if n = 1 then do  qualcosa
        else
            bugs(n − 1);
            bugs(n − 2);
            for i = 1 to n do qualcosa
```

Esempi

```
procedure daffy(n)
  if n = 1 or n = 2 then do  qualcosa
    else
      daffy(n − 1);
      for i = 1 to n do
        qualcosa di nuovo
      daffy(n − 1)
```

Esempi

```
procedure elmer(n)
    if n = 1 then do  qualcosa
        else if n = 2 then do  qualcos'altro
        else
            for i = 1 to n do
                elmer(n − 1)
                fa qualcosa di differente
```

Altri esempi

Sia $T(1) = 1$. Valutate

- $T(n) = 2T(n/2) + n^3$
- $T(n) = T(9n/10) + n$
- $T(n) = 16T(n/4) + n^2$
- $T(n) = 7T(n/3) + n^2$
- $T(n) = 7T(n/2) + n^2$
- $T(n) = 2T(n/3) + \sqrt{n}$
- $T(n) = T(n-1) + n$
- $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$

Esercizio: ricerca ternaria

- Progettare un algoritmo per la ricerca di un elemento key in un array ordinato A[1..n], basato sulla tecnica Divide-et-impera che nella prima fase divide l'array in 3 parti «uguali» (le 3 parti differiranno di al più 1 elemento).
- Scrivere la relazione di ricorrenza per il tempo di esecuzione dell'algoritmo proposto.
- *Risolvere la relazione di ricorrenza.*
- *Confrontare il tempo di esecuzione con quello della ricerca binaria.*

Alcuni esercizi sulla tecnica del Divide et Impera.

1. a) Descrivere gli aspetti essenziali della tecnica Divide et Impera, utilizzando lo spazio designato.

   b) Descrivere ed analizzare un algoritmo **basato sulla tecnica Divide et Impera** che dato un array $A[1, ..., n]$ di interi ne restituisca il massimo.

2. Sia $V[1..n]$ un vettore ordinato di 0 e 1.

   Descrivere ed analizzare un algoritmo per determinare il numero di 0 presenti in $V[1..n]$ in tempo $O(\log n)$.

5. a) Fornire lo pseudocodice di un algoritmo ricorsivo che ordini un array $A[1..n]$ nel seguente modo: prima ordina ricorsivamente $A[1..n-1]$ e poi inserisce $A[n]$ nell'array ordinato $A[1..n-1]$.

   b) Analizzare la complessita' di tempo dell'algoritmo proposto al punto b).

6. Sia dato un vettore binario ordinato $A[1..n]$.

   (a) Progettare un algoritmo di complessita' $\Theta(n)$ nel caso peggiore, che conti il numero di occorrenze di 1 nel vettore A.

   (b) Progettare un algoritmo di complessita' $O(\log n)$, che conti il numero di occorrenze di 1 nel vettore A.

7. Sia dato un vettore ordinato $A[1..n]$ di interi distinti. Progettare un algoritmo che determini, in tempo $O(\log n)$, se esiste o meno un intero i tale che $A[i] = i$.

8. Descrivere ed analizzare un algoritmo basato sul paradigma *divide et impera* che dato un vettore *ordinato* $A[1..n]$ di interi strettamente positivi (cioe' per ogni $1 \leq i \leq n$, $A[i] \geq 1$), restituisca il numero di occorrenze di 1 nel vettore A. L'algoritmo deve avere complessita' di tempo $O(\log n)$.