

# **Lezioni di Ricerca Operativa**

Corso di Laurea in Informatica ed Informatica Applicata  
Università di Salerno

## **Lezione n° 22**

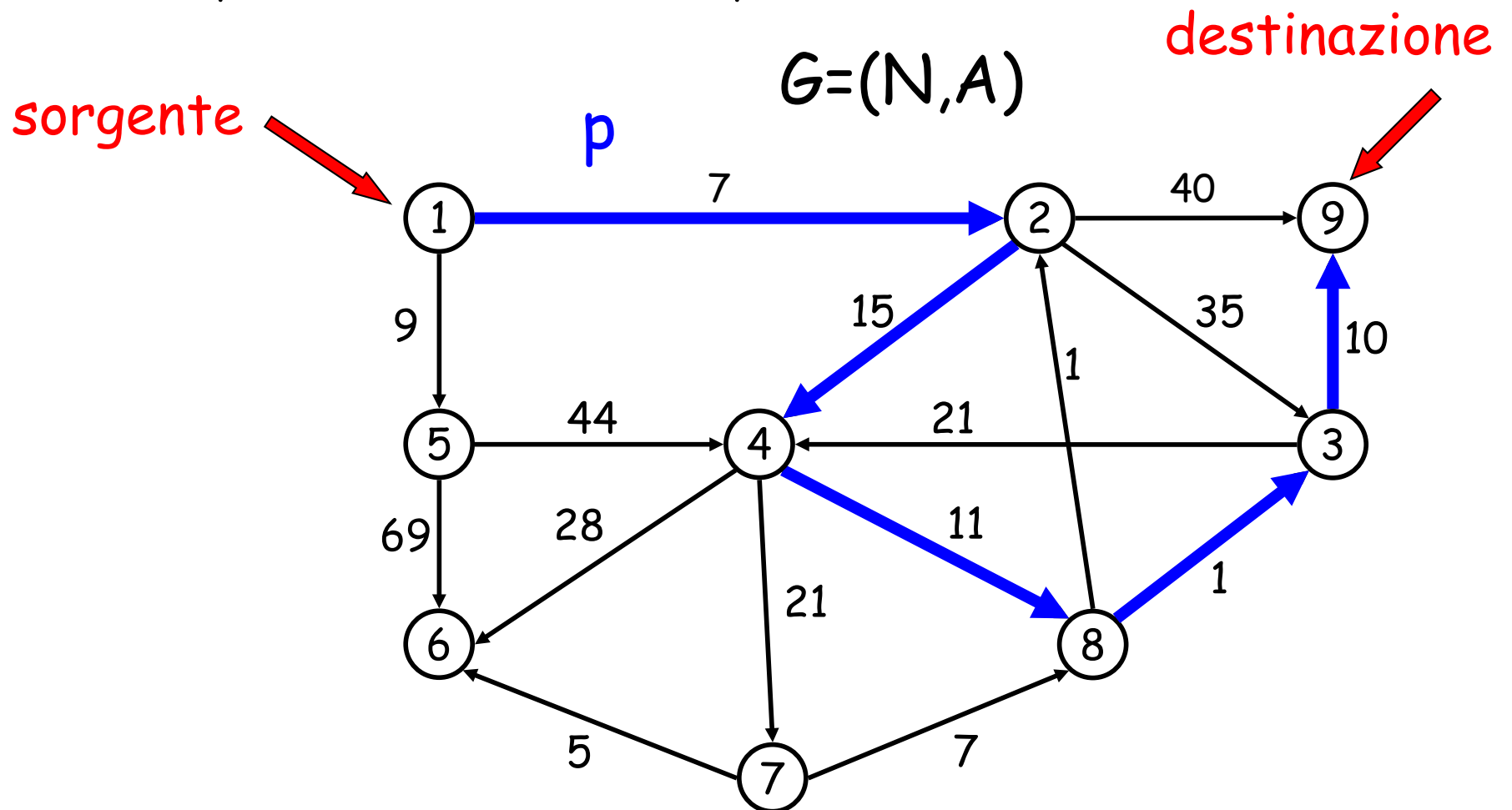
Problema dell'albero dei cammini minimi

R. Cerulli – F. Carrabs

# Il problema dei cammini minimi

[Versione uno a uno]

Sia  $G = (N, A)$  un grafo orientato su cui sia definito un vettore  $\underline{c} = [c_{ij}]$  dei costi associati agli archi del grafo; inoltre, siano  $s$  e  $t$  due nodi distinti, detti rispettivamente *origine* e *destinazione*. Il problema dei cammini minimi 1 a 1 consiste nel determinare il percorso di costo minimo (più corto) da  $s$  a  $t$  in  $G$ .



# Modello matematico (uno a uno)

$$G=(N,A)$$

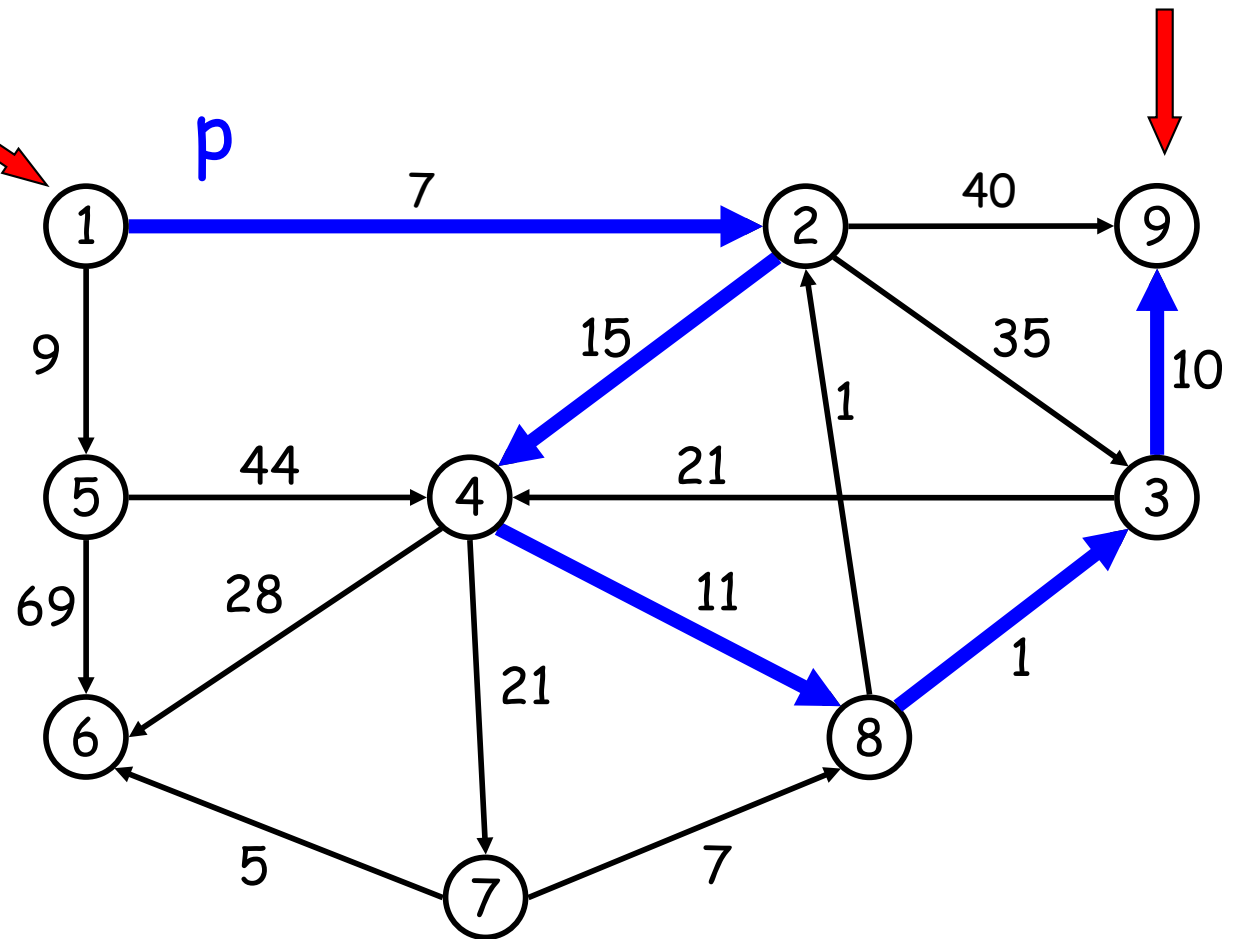
destinazione

sorgente

$C_{ij}$  = costo dell' arco (i,j)

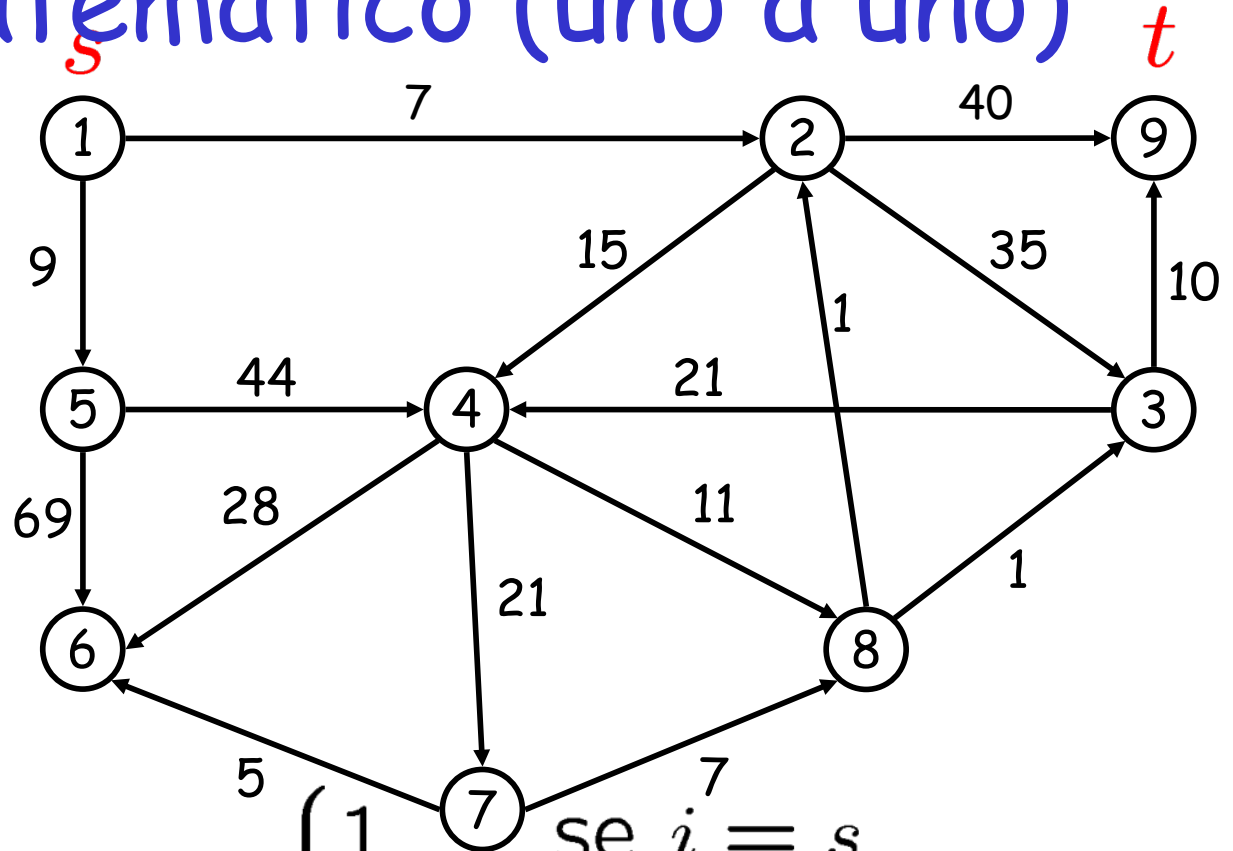
$x_{ij}$  = variabili decisionali

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{ij} \in p \\ 0 & \text{se } x_{ij} \notin p \end{cases}$$



# Modello matematico (uno a uno)

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$



$$\sum_{j \in FS(i)} x_{ij} - \sum_{j \in BS(i)} x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = s \\ 0 & \text{se } i \in N \setminus \{s, t\} \\ -1 & \text{se } i = t \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

# Modello matematico (uno a uno)

$$\begin{aligned} \min \quad & 7x_{12} + 9x_{15} + 40x_{29} + 35x_{23} + 15x_{24} + 10x_{39} + \\ & + 21x_{34} + 28x_{46} + 21x_{47} + 11x_{48} + 44x_{54} + 69x_{56} + \\ & + 5x_{76} + 7x_{78} + x_{82} + x_{83} \end{aligned}$$

$$x_{12} + x_{15} - 0 = 1$$

$$0 - x_{29} - x_{39} = -1$$

$$x_{23} + x_{24} + x_{29} - x_{12} - x_{82} = 0$$

$$x_{39} + x_{34} - x_{23} - x_{83} = 0$$

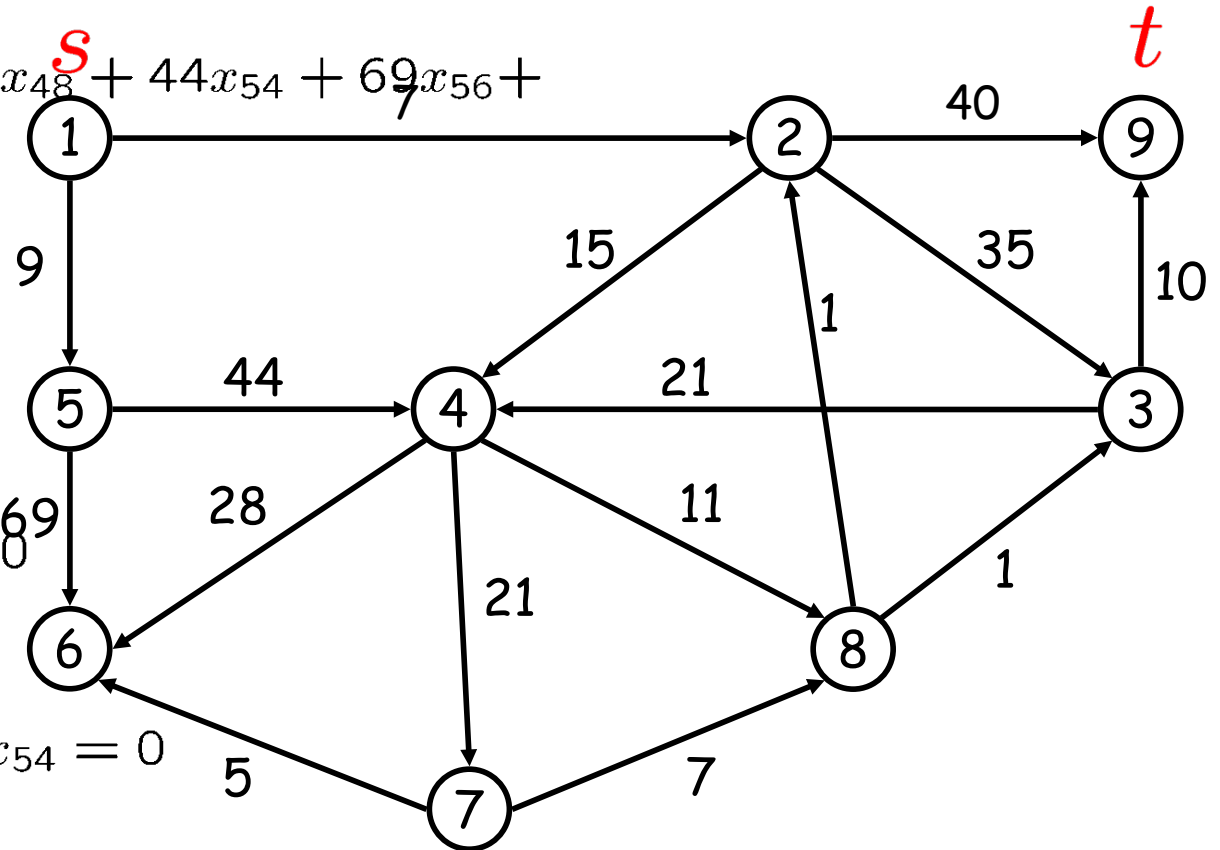
$$x_{46} + x_{47} + x_{48} - x_{24} - x_{34} - x_{54} = 0$$

$$x_{54} + x_{56} - x_{15} = 0$$

$$0 - x_{46} - x_{56} - x_{76} = 0$$

$$x_{76} + x_{78} - x_{47} = 0$$

$$x_{82} + x_{83} - x_{48} - x_{78} = 0$$



# Modello matematico (uno a uno)

$$\begin{aligned} \min \quad & 7x_{12} + 9x_{15} + 40x_{29} + 35x_{23} + 15x_{24} + 10x_{39} + \\ & + 21x_{34} + 28x_{46} + 21x_{47} + 11x_{48} + 44x_{54} + 69x_{56} + 7 \\ & + 5x_{76} + 7x_{78} + x_{82} + x_{83} \end{aligned}$$

$$x_{12} + x_{15} - 0 = 1$$

$$0 - x_{29} - x_{39} = -1$$

$$x_{23} + x_{24} + x_{29} - x_{12} - x_{82} = 0$$

$$x_{39} + x_{34} - x_{23} - x_{83} = 0$$

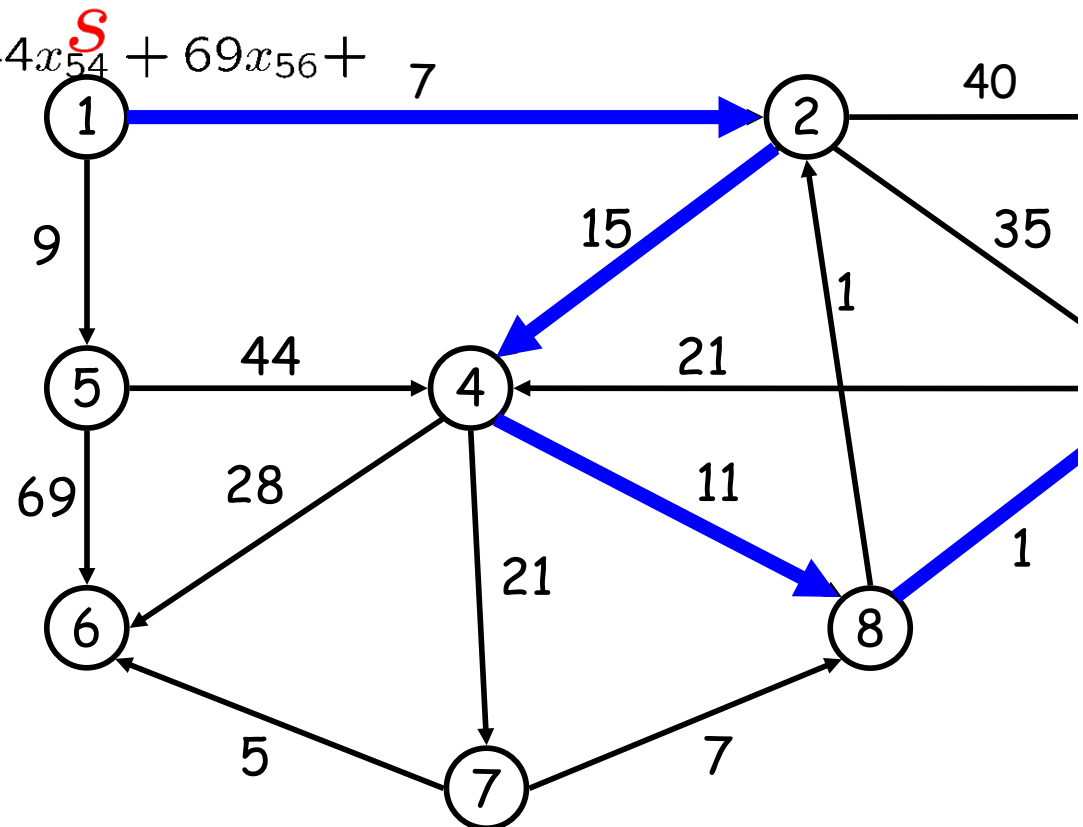
$$x_{46} + x_{47} + x_{48} - x_{24} - x_{34} - x_{54} = 0$$

$$x_{54} + x_{56} - x_{15} = 0$$

$$0 - x_{46} - x_{56} - x_{76} = 0$$

$$x_{76} + x_{78} - x_{47} = 0$$

$$x_{82} + x_{83} - x_{48} - x_{78} = 0$$



$$x_{12} = 1, x_{24} = 1, x_{48} = 1, x_{83} = 1, x_{39} = 1$$

$$z = 44$$

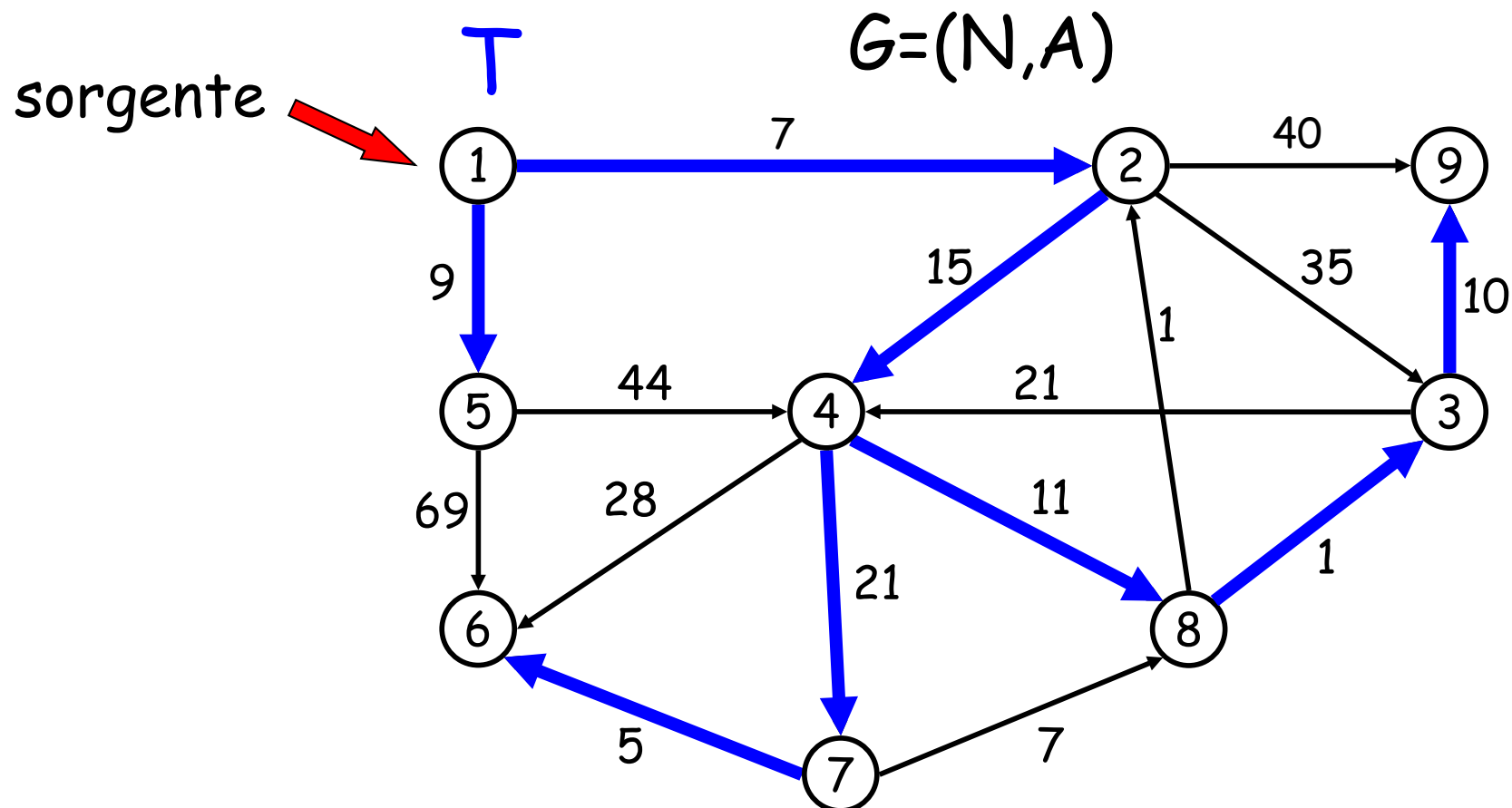
# Il problema dei cammini minimi (varianti)

- Uno ad uno
- Uno a tutti
- Tutti a tutti

# Il problema dei cammini minimi (uno a tutti)

## [Versione uno a tutti]

Sia  $G = (N, A)$  un grafo orientato su cui sia definito un vettore  $\underline{c} = [c_{ij}]$  dei costi associati agli archi del grafo; inoltre, siano  $s$  il nodo *origine*. Il problema dei cammini minimi 1 a tutti consiste nel determinare l'albero dei cammini minimi da  $s$  a tutti gli altri nodi di  $G$ .



Qual' è il modello matematico per la versione uno a tutti?

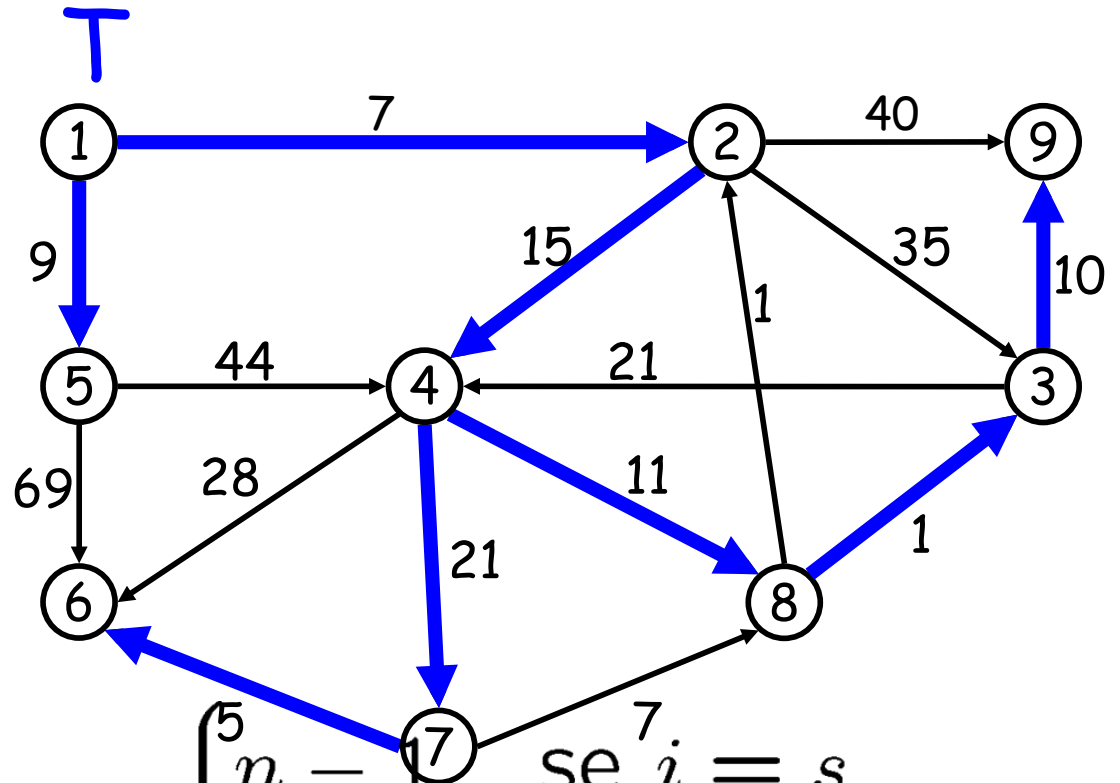


# Il problema dei cammini minimi (uno a tutti)

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

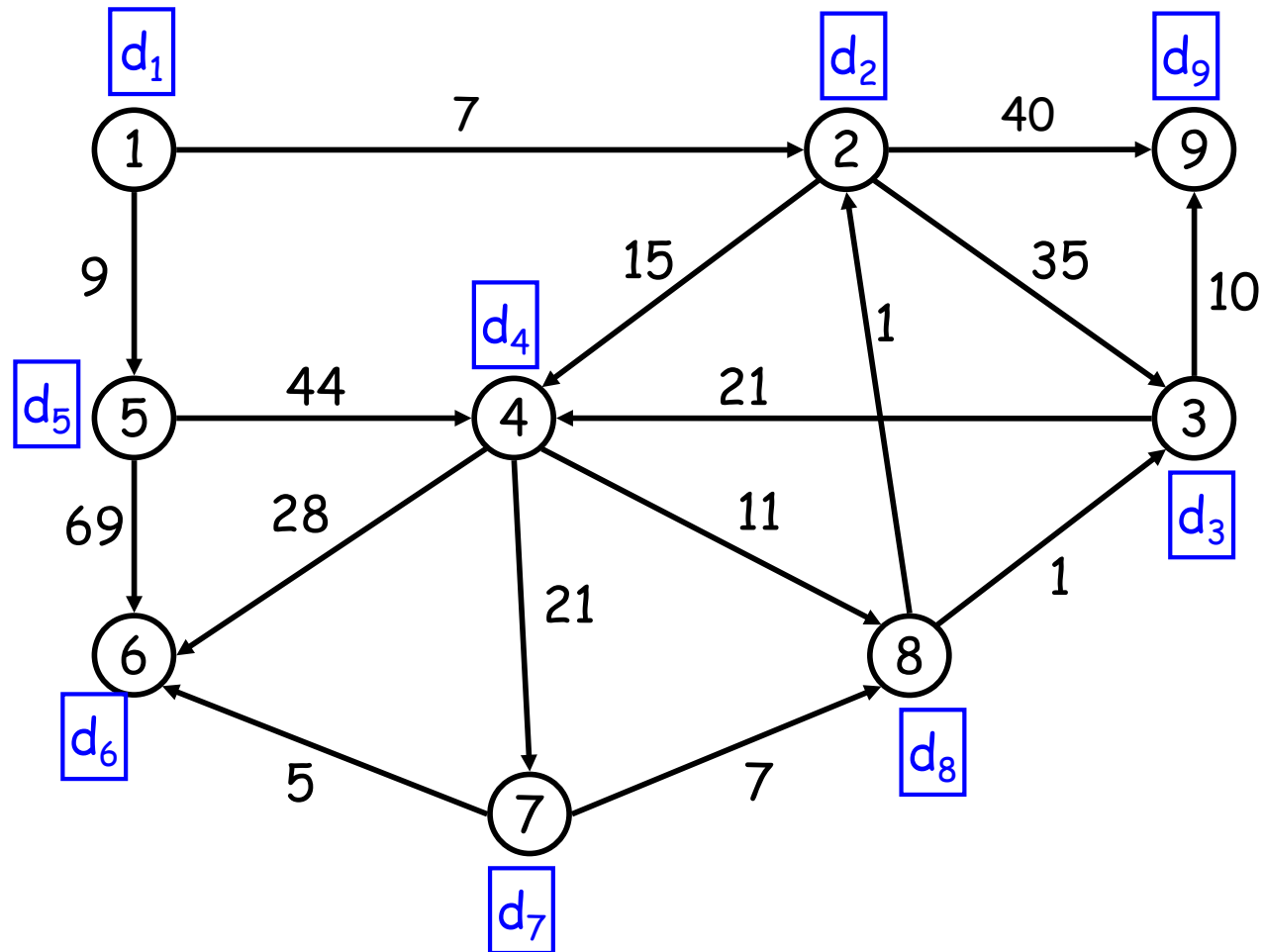
$$\sum_{j \in FS(i)} x_{ij} - \sum_{j \in BS(i)} x_{ji} = \begin{cases} n-1 & \text{se } i = s \\ -1 & \text{se } i \neq s \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$



## Etichette dei nodi

$G=(N,A)$



# Algoritmo prototipo

**Passo 1:** *Inizializzazione.*

$$d_s=0, P_s=NULL, \quad d_k=\infty, P_k=s \quad \forall k \in N \setminus \{s\}, \\ Q=\{s\};$$

**Passo 2:** *Estrai un vertice  $x$  da  $Q$  ( $Q = Q \setminus \{x\}$ ) ed aggiorna quando possibile le etichette dei vertici in  $FS(x)$ :*

$\forall y \in FS(x)$  se  $d_x + c_{xy} < d_y$  allora

$d_y = d_x + c_{xy}$ ,  $P_y = x$  e se  $y \notin Q$  inseriscilo in  $Q$  ( $Q = Q \cup \{y\}$ ) (**test di ottimalità**)

# Aggiornamento delle etichette

$\forall y \in FS(x)$  se  $d_x + c_{xy} < d_y$  allora  $d_y = d_x + c_{xy}$  e  $P_y = x$

➤  $x=4, y=5$

$$d_4 + c_{45} < d_5 ?$$

$$d_5 = d_4 + c_{45} \text{ e } P_5 = 4$$

➤  $x=4, y=2$

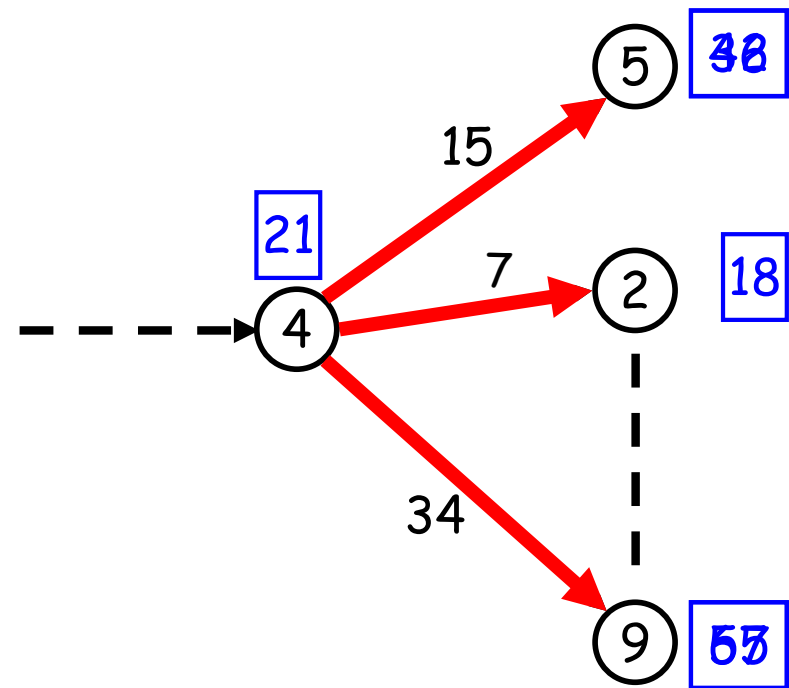
$$d_4 + c_{42} < d_2 ?$$

.....

➤  $x=4, y=9$

$$d_4 + c_{49} < d_9 ?$$

$$d_9 = d_4 + c_{49} \text{ e } P_9 = 4$$



# Algoritmo prototipo

**Passo 1:** *Inizializzazione.*

$$d_s=0, P_s=NULL, \quad d_k=\infty, P_k=s \quad \forall k \in N \setminus \{s\}, \\ Q=\{s\};$$

**Passo 2:** *Estrai un vertice  $x$  da  $Q$  ( $Q= Q \setminus \{x\}$ ) ed aggiorna quando possibile le etichette dei vertici in  $FS(x)$ :*

$\forall y \in FS(x)$  se  $d_x + c_{xy} < d_y$  allora

$d_y = d_x + c_{xy}$ ,  $P_y = x$  e se  $y \notin Q$  inseriscilo in  $Q$  ( $Q= Q \cup \{y\}$ ) (**test di ottimalità**)

**Passo 3:** *Fino a quando  $Q \neq \emptyset$  ripeti il passo 2 ;*

# Differenti implementazioni

Gli algoritmi per l' SPT si distinguono per:

- La politica di estrazione del nodo da  $Q$   
(label setting e label correcting)
- La struttura dati utilizzata per implementare  $Q$

# Label Correcting

Algoritmi label correcting [Bellman-Ford]:

- I nodi vengono estratti dalla coda Q in ordine FIFO (è una delle possibili implementazioni dell'algoritmo)
- Le etichette dei nodi sono temporanee per tutta la durata della computazione. Solo al termine dell'algoritmo tali etichette rappresenteranno le distanze minime.
- L'algoritmo è in grado di risolvere il problema dei cammini minimi su un qualsiasi grafo che non presenta cicli di peso negativo.

# Label Setting

Algoritmi label setting [Dijkstra]:

- Ad ogni iterazione viene estratto dalla coda Q il nodo con x etichetta minima.
- L'etichetta del nodo x estratto rappresenta la distanza minima dall sorgente al nodo stesso. Tale etichetta viene fissata in modo permanente e non viene più aggiornata (quindi una volta estratto un nodo non può essere reinserito in Q).
- Gli algoritmi label setting sono più efficienti dei label correcting, ma possono essere applicati solo su grafi dove  $c_{ij} \geq 0$ .



# Algoritmo di Dijkstra (label setting)

Dijkstra ( $G, s$ )

Inizializzazione; ( $d_s=0, P_s=NULL, d_k=\infty, P_k=s \ \forall k \in N \setminus \{s\}, Q=\{s\}$ )

while ( $Q \neq \emptyset$ ) {

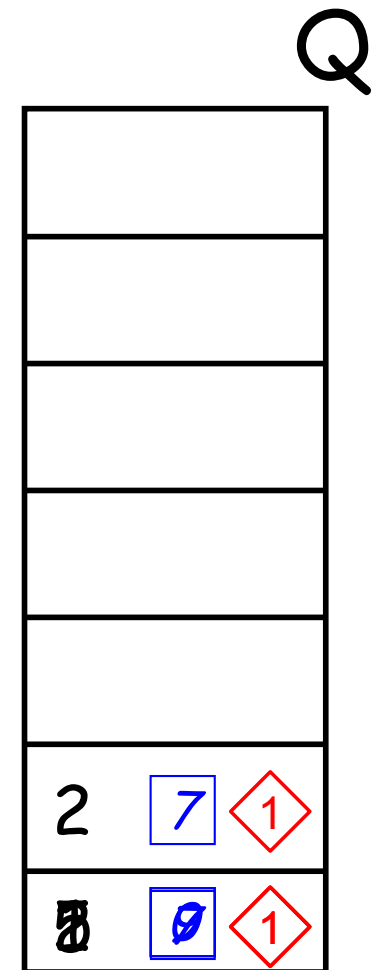
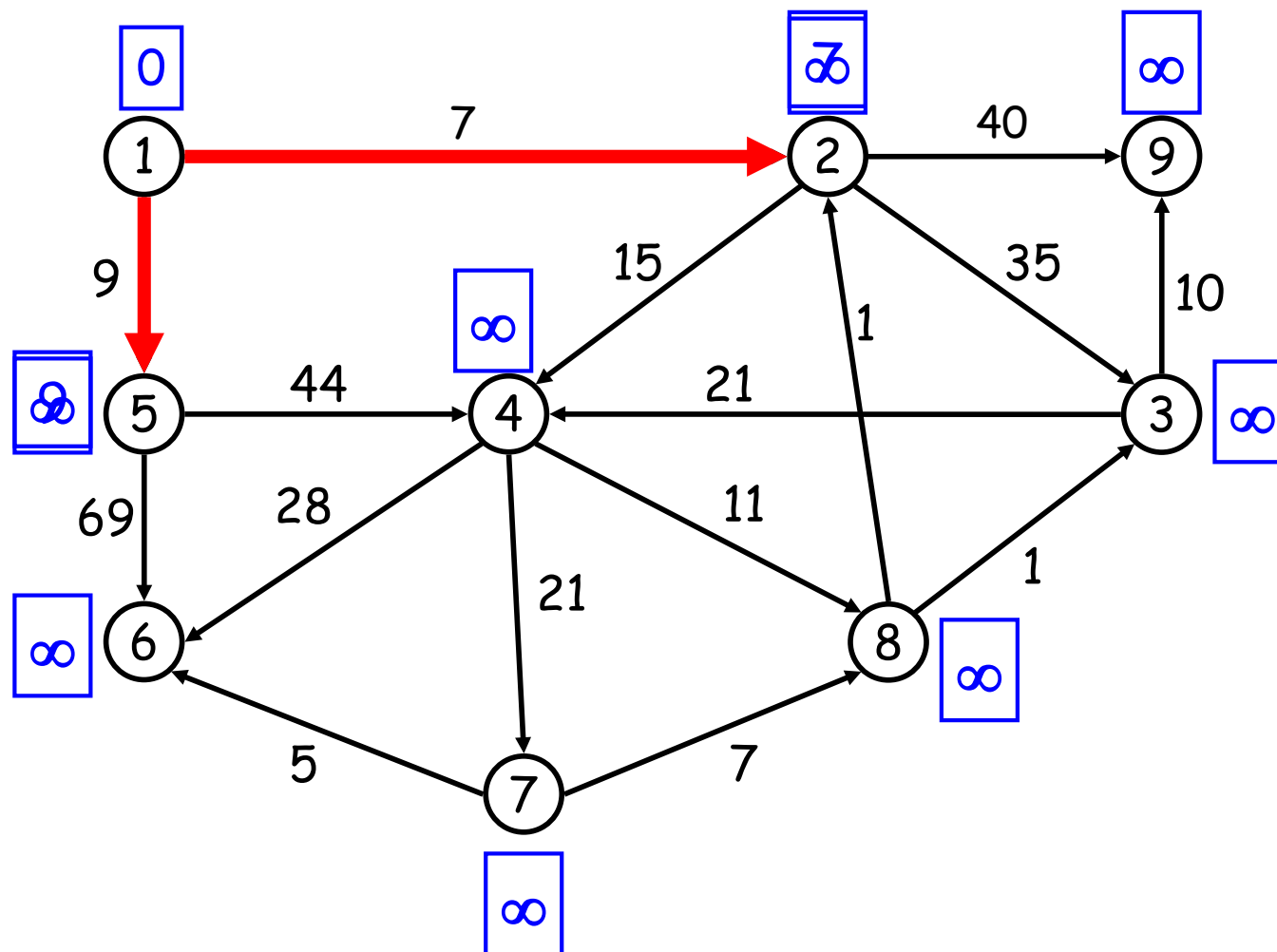
$x = \text{Extract\_min}(Q);$

    Test\_ottimalità( $x, y$ );     con  $y \in FS(x);$

}

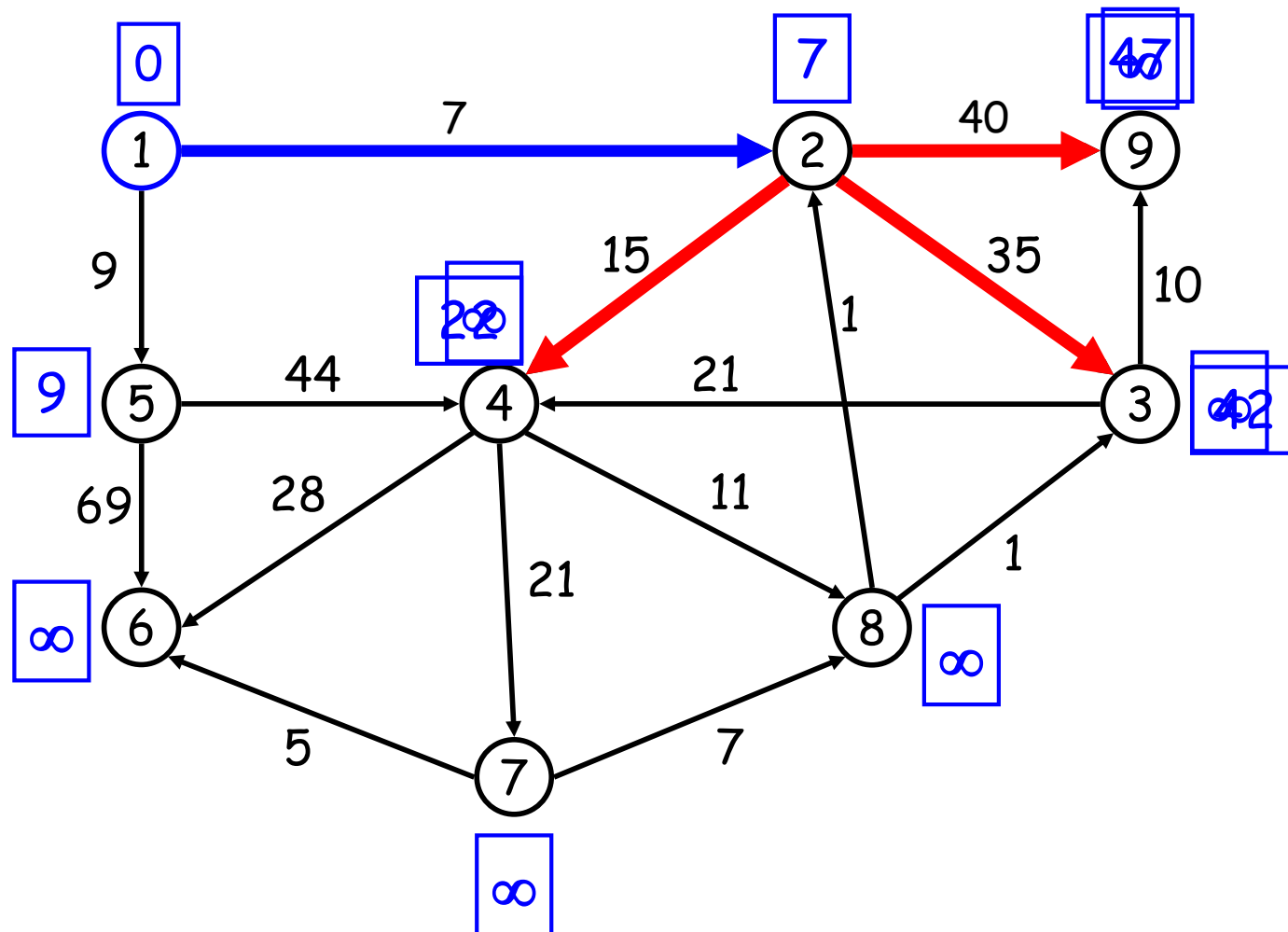
# L'algoritmo di Dijkstra (label setting)

$G=(N,A)$



# L'algoritmo di Dijkstra (label setting)

$G=(N,A)$

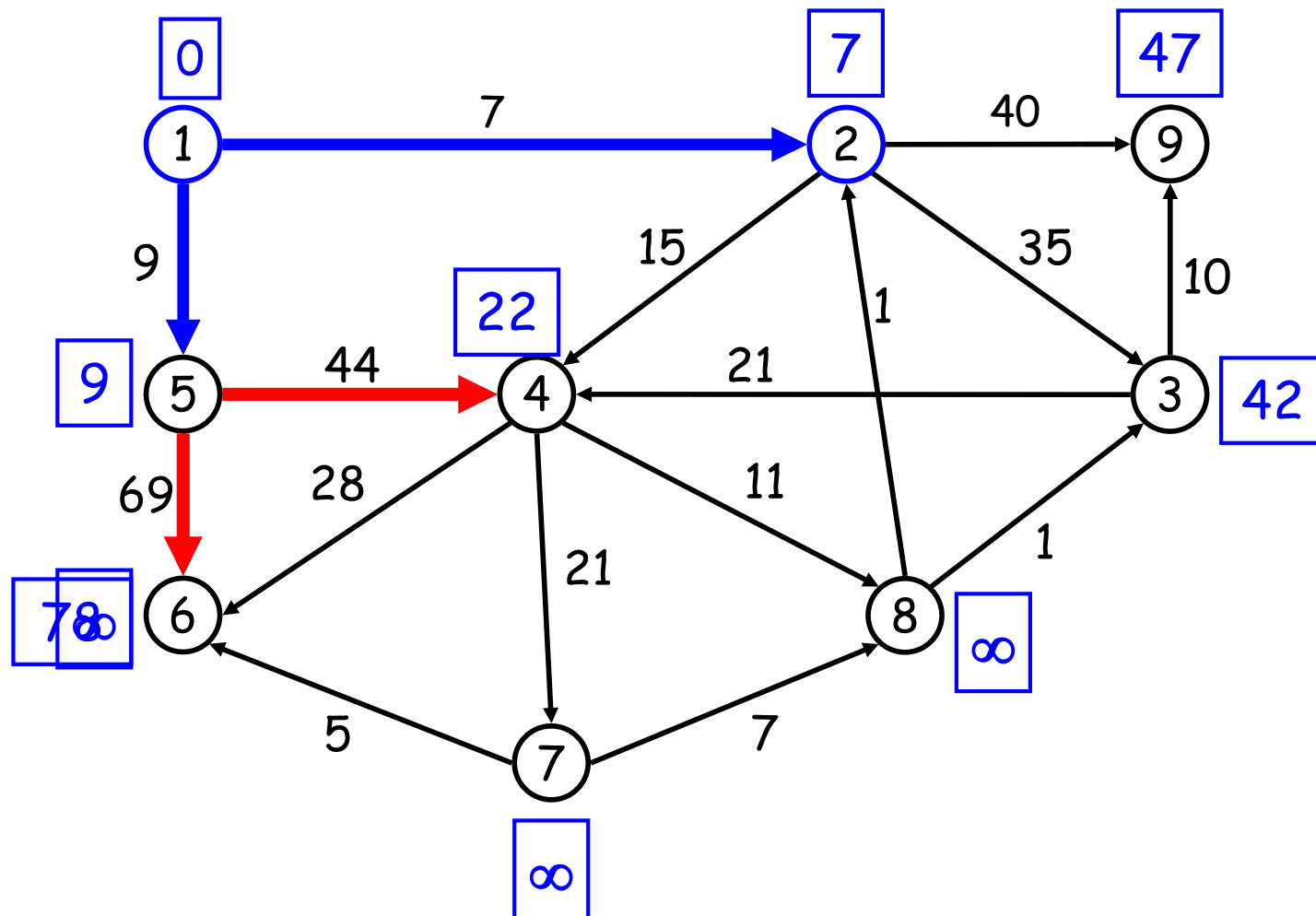


Q

5	22	2
4	42	2
8	47	2
5	49	2

# L'algoritmo di Dijkstra (label setting)

$G=(N,A)$

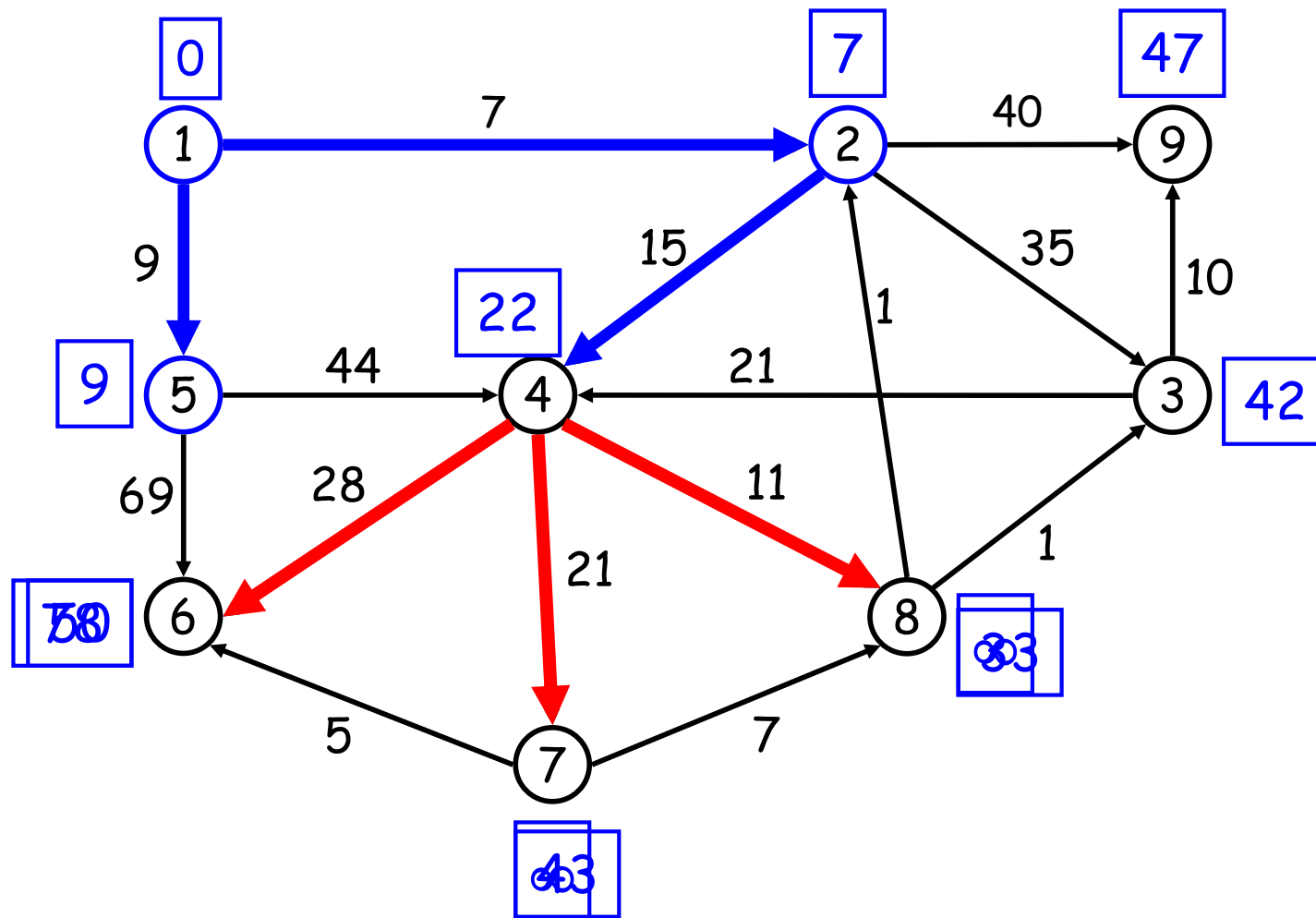


Q

5	28	3
4	42	2
9	47	2
6	78	3

# L'algoritmo di Dijkstra (label setting)

$G=(N,A)$

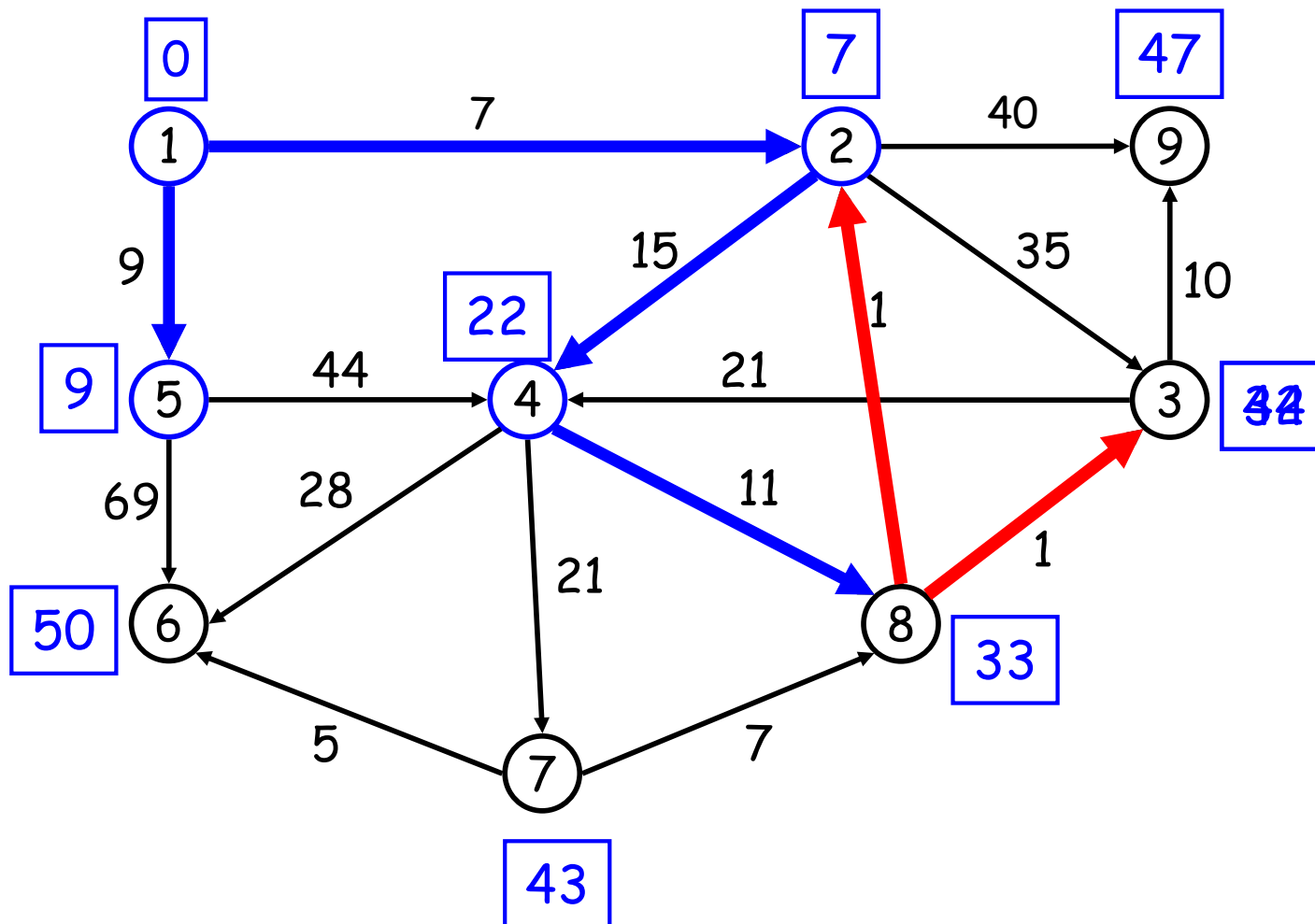


$Q$

8 <span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">33</span> <span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">4</span>
8 <span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">22</span> <span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">2</span>
3 <span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">42</span> <span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">2</span>
9 <span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">47</span> <span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">2</span>
6 <span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">58</span> <span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">5</span>

# L'algoritmo di Dijkstra (label setting)

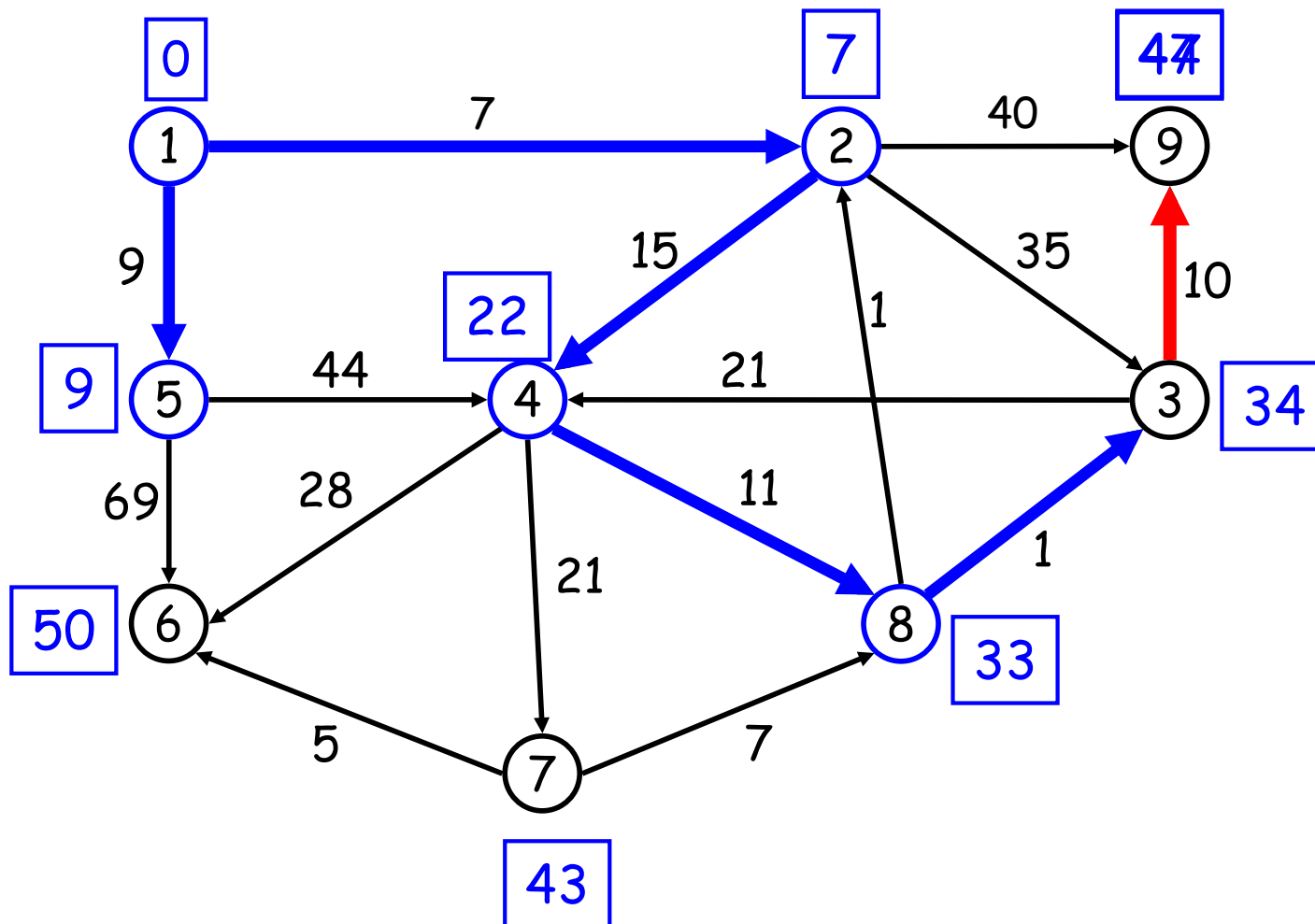
$G=(N,A)$



Q		
8	33	4
3	32	8
7	43	4
9	47	2
6	50	4

# L'algoritmo di Dijkstra (label setting)

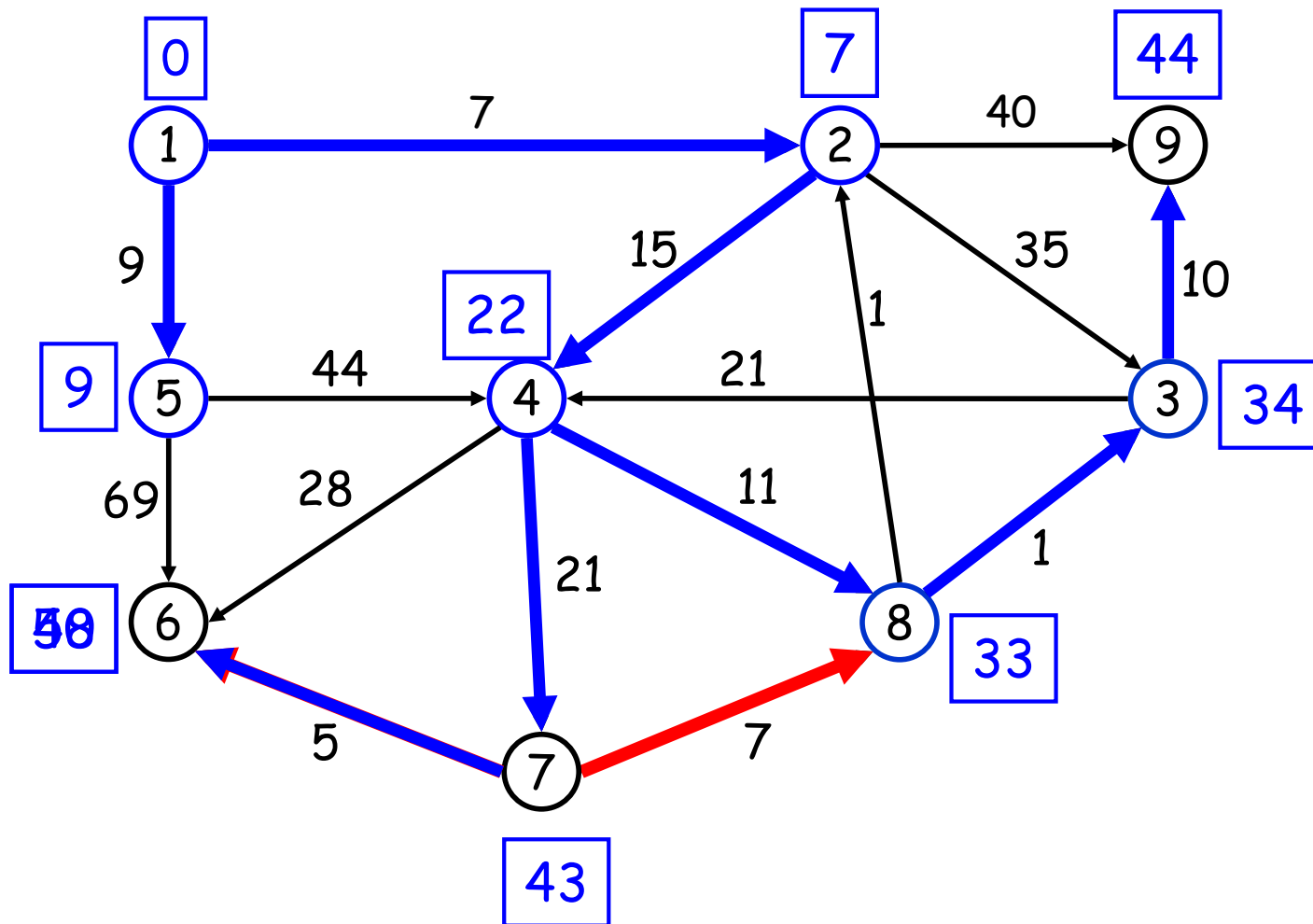
$G=(N,A)$



Q		
3	34	8
7	43	4
9	47	2
6	50	4

# L'algoritmo di Dijkstra (label setting)

$G=(N,A)$



Q		
7	43	4
9	44	3
6	<del>58</del>	<del>4</del>

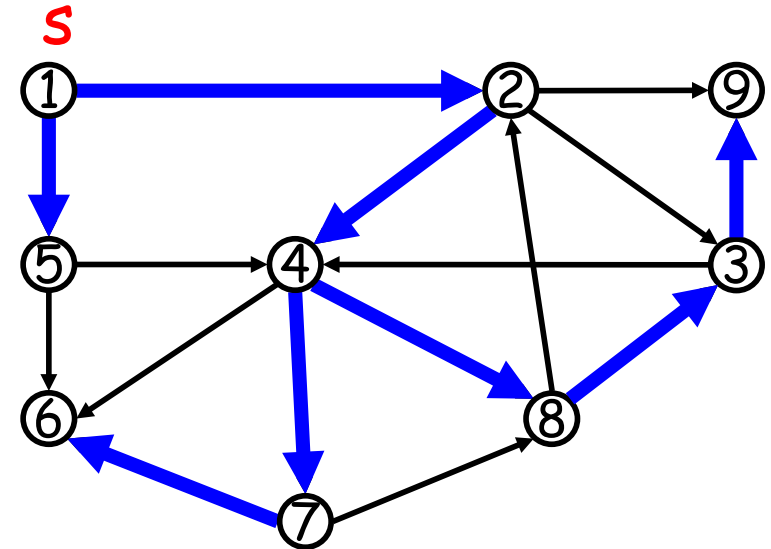


# Il problema dei cammini minimi

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j \in FS(i)} x_{ij} - \sum_{j \in BS(i)} x_{ji} = \begin{cases} n-1 & \text{se } i = s \\ -1 & \text{se } i \neq s \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$



Quali sono i valori delle variabili  $x_{ij}$  nella soluzione ottima?

$$x_{76} = 1, x_{39} = 1, x_{15} = 1$$

$$x_{47} = 2, x_{83} = 2$$

.....