

Lezioni di Ricerca Operativa

R.Cerulli - F. Carrabs

Dipartimento di Matematica
(DM)

Università di Salerno

LA RICERCA OPERATIVA

Si occupa dello sviluppo e dell'applicazione di metodi matematici per la soluzione di problemi di decisione che si presentano in molteplici e diversi settori della vita reale.

Aiuta a determinare le decisioni da prendere per gestire nel modo più efficiente un sistema reale utilizzando strumenti matematici / informatici.

La Ricerca Operativa (Operations Research)

- Metodi matematici rivolti alla soluzione di problemi decisionali
- Nata durante la seconda guerra mondiale (gestione di risorse limitate e problemi logistici)
- Si è sviluppata grazie alla disponibilità di strumenti automatici di calcolo (computer)
- Scopo: determinare la decisione ottima dato un problema in presenza di risorse limitate

Esempi Applicativi

● Problemi in ambito industriale

➤ *Pianificazione della produzione*

determinare i livelli di produzione e/o l'utilizzazione di risorse; ad es. allocazione ottima di risorse = distribuzione di risorse limitate tra alternative concorrenti in modo da minimizzare il costo o massimizzare il guadagno.

➤ *Localizzazione e dimensione degli impianti*

decidere dove installare impianti di produzione per rifornire in modo ottimale aree distribuite su un territorio, ad es. dove costruire le stazioni base di una rete di telecomunicazioni (GSM/UMTS) e la potenza di trasmissione per coprire il territorio.

➤ *Controllo delle scorte*

decidere quando e quanto, durante un processo produttivo, si devono immagazzinare prodotti in modo da rispettare le consegne minimizzando i costi.

➤ *Scheduling*

Esempi Applicativi

● Problemi di progettazione ottima

➤ *Progettazione di reti e loro gestione*

definire i collegamenti e dimensionare le capacità di una rete stradale, di telecomunicazione, di trasmissione dati, di circuiti, in modo da garantire il traffico tra le varie origini e destinazioni e minimizzare il costo complessivo

➤ *Progettazione strutturale*

definire il progetto di un edificio, in modo che resista al meglio a sollecitazioni derivanti da agenti esterni (terremoti, venti forti) oppure il progetto del profilo di un'ala di un aereo in modo che, ad esempio, sia massimizzata la portanza

➤ *VLSI design (allocazione ottima di componenti elettroniche)*

disegnare una piastra madre in modo che, ad esempio, siano minimizzate le lunghezze dei percorsi dei segnali elettrici

➤ ...

Esempi Applicativi

- Problemi di organizzazione

- *Instradamento di veicoli (Routing)*
- *Manutenzione dei beni*
- *Definizione dei turni di lavoro*
- *Gestione ottima di risorse idriche*
- *Ottimizzazione di politiche di controllo*
- *Gestione ottima di aree di carico/scarico*
- *Problemi in reti di comunicazione e distribuzione*
- *...*

Esempi Applicativi

- Problemi decisionali di tipo economico
 - *Allocazione di capitali*
 - *Acquisto/Produzione di beni*
 - *Scelta di investimenti*
 - *...*

La Ricerca Operativa (Operations Research)

- I problemi reali vengono affrontati definendone una rappresentazione quantitativa (modello matematico)
- La soluzione dei problemi è cercata per mezzo di tecniche (algoritmi) di ottimizzazione

Problema Reale



Formulazione



Modello matematico

$$\text{Min } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$x_1 + 3x_2 - \dots - 4x_n \leq 4$$

$$x_2 - 4x_3 + \dots + 2x_n \geq 1$$

.....

.....

Aspetto fondamentale della Ricerca Operativa:

Identificare un modello matematico con cui studiare in modo sistematico il problema decisionale

Approccio Modellistico

La costruzione di modelli matematici per la soluzione di problemi reali avviene attraverso diverse fasi:

- Analisi del problema
- Costruzione del modello
- Analisi del modello
- Soluzione numerica
- Validazione del modello

Approccio Modellistico

- **Analisi del problema:** consiste nell'analisi della struttura del problema per individuare i legami logico funzionali e gli obiettivi.
- **Costruzione del modello:** si descrivono in termini matematici le caratteristiche principali del problema.
- **Analisi del modello:** prevede la deduzione per via analitica, in riferimento a determinate classi di problemi, di alcune importanti proprietà quali esistenza ed unicità della soluzione ottima, condizioni di ottimalità e stabilità in caso di variazioni.
- **Soluzione numerica:** si individua mediante opportuni algoritmi di calcolo la cui soluzione deve essere verificata dal punto di vista applicativo.
- **Validazione:** avviene attraverso una verifica sperimentale oppure con metodi di simulazione.

Struttura dei problemi decisionali

Modello Matematico

```
graph TD; A([Modello Matematico]) --- B([Variabili decisionali]); A --- C([Obiettivi]); A --- D([Vincoli]);
```

Variabili
decisionali

(x_1, x_2, \dots, x_n)

Obiettivi

(\min, \max)

Vincoli

$(x_1 + 3x_2 - \dots - 4x_n \leq 4$
 $x_2 - 4x_3 + \dots + 2x_n \geq 1)$

Formulazione dei problemi decisionali

- Decisione: processo di selezione tra più alternative
- Alternative finite o infinite
- Alternative definite esplicitamente o implicitamente
- Scelta sulla base di uno o più criteri (obiettivi)
- Condizioni di certezza e incertezza

Caratteristiche dei problemi che saranno considerati:

- ❑ *Condizioni di certezza (problemi deterministici)*
- ❑ *Presenza di un solo criterio (singolo obiettivo)*

Esempio

Supponiamo che ci siano tre lavori da svolgere: **stuccare, imbiancare e levigare**. Abbiamo a disposizione tre persone **Mario, Luca ed Andrea** che sanno svolgere questi tre lavori ma con differenti tempistiche come indicato nella seguente tabella (i valori rappresentano le ore necessarie ad ogni persona per portare a termine il rispettivo lavoro).

	STUCCA	IMBIANCA	LEVIGA
MARIO	3	1	2
LUCA	2	1.5	1.5
ANDREA	3	1.5	3

Il nostro obiettivo è quello di assegnare ad ogni persona un lavoro e ad ogni lavoro una persona al fine di minimizzare le ore totali necessarie per svolgere i tre lavori.

Consideriamo tutte le possibili soluzioni

MARIO - STUCCA: 3
LUCA – IMBIANCA: 1.5
ANDREA – LEVIGA: 3

7.5

MARIO - STUCCA: 3
LUCA – LEVIGA: 1.5
ANDREA–IMBIANCA: 1.5

6

MARIO - IMBIANCA: 1
LUCA – STUCCA: 2
ANDREA – LEVIGA: 3

6

MARIO - LEVIGA: 2
LUCA – STUCCA: 2
ANDREA–IMBIANCA: 1.5

5.5

MARIO - LEVIGA: 2
LUCA – IMBIANCA: 1.5
ANDREA – STUCCA: 3

6.5

MARIO - IMBIANCA: 1
LUCA – LEVIGA: 1.5
ANDREA – STUCCA: 3

5.5

Algoritmi

- Per risolvere i problemi decisionali sono usati **algoritmi**
- Un algoritmo è una procedura iterativa costituita da un numero finito di passi
- Esistono problemi facili (pochi) e difficili
- La facilità di un problema è legata all'esistenza di un algoritmo di soluzione efficiente

Un esempio: Assegnare 70 lavori a 70 persone

- Si indichino con $i=1,\dots,70$ i lavori e con $j=1,\dots,70$ le persone.
- Se la i -esima persona esegue il j -esimo lavoro si paga un costo c_{ij} .
- Una persona può eseguire solo un lavoro (vincolo)
- Ogni lavoro deve essere eseguito (vincolo)
- Lo scopo (decisione) è stabilire chi fa che cosa in modo che il costo pagato sia minimo (obiettivo).

Un possibile algoritmo di soluzione (**Brute Force**):

- 1) costruire tutte le possibili assegnazioni persone-lavori e calcolarne il costo
- 2) scegliere l'assegnazione con il costo più piccolo

Le assegnazioni alternative sono **70!** (le permutazioni di 70 numeri)

1^a

Persone	1	2	...	70
Lavori	1	2	...	70

2^a

Persone	1	2	...	70
Lavori	2	1	...	70

...

Il numero delle assegnazioni alternative è molto grande

$$70! > 10^{100}$$

Si supponga di disporre di un calcolatore che è in grado di calcolare 10^6 assegnazioni alternative (soluzioni) al secondo.

Quanto impiega l' algoritmo a risolvere il problema?

Supponendo di dover “esplorare” 10^{100} assegnazioni sono necessari 10^{94} secondi.

In un anno ci sono:

$$365(\text{gg}) \times 24(\text{h}) \times 60(\text{min}) \times 60(\text{sec}) \approx 31 \times 10^6 \approx 10^7 \text{ sec}$$

Per risolvere il problema sono necessari 10^{87} anni !

Il Big Bang (data di inizio dell' universo)
è avvenuto circa 15×10^9 anni fa!

...ma se si disponesse di un **calcolatore 1000 volte più veloce?**

...si impiegherebbero 10^{84} anni.

...e se si usassero **10^9 calcolatori in parallelo?**

...si impiegherebbero 10^{75} anni.

Conclusioni:

- L' algoritmo Brute Force non è efficiente!
- Se questo fosse l'unico algoritmo utilizzabile per il problema dell'assegnazione persone-lavori, il problema sarebbe difficile
- La soluzione ottima dei problemi difficili può essere trovata solo per casi di ridotte dimensioni

- I problemi in cui la scelta è tra un numero finito di alternative (le variabili decisionali possono assumere solo un numero discreto di valori) si dicono combinatorici.
- La teoria della complessità è una parte della Ricerca Operativa che studia la difficoltà della risoluzione dei problemi.
- Conoscere se un problema è difficile permette la scelta di un appropriato algoritmo:
 - Algoritmi esatti basati sull'enumerazione esplicita delle soluzioni
 - Algoritmi esatti basati sull'enumerazione implicita delle soluzioni
 - Algoritmi approssimati
 - Algoritmi euristici

Risolvere i seguenti problemi

Il signor Rossi possiede un'azienda che produce due versioni di una bevanda energetica: normale e super. Per ogni quintale di bevanda venduta, l'azienda ha un profitto pari ad 1000 euro per il tipo normale e 1200 euro per il tipo super. Nella produzione è necessario utilizzare in sequenza tre tipi di macchinari, A, B, C, che ogni giorno possono lavorare un numero di ore massimo come riportato nella tabella seguente:

	ORE	NORMALE	SUPER
A	4	1	0.4
B	6	0.75	1
C	3.5	1	0

Per produrre un quintale di bevanda (normale o super) è richiesto l'utilizzo delle macchine per il tempo indicato nella stessa tabella. L'obiettivo del signor Rossi è quello di pianificare la produzione giornaliera dei due tipi di bevande al fine di massimizzare il profitto.

PROBLEMA 2:

Il cuoco del ristorante dove lavoriamo ci ha assegnato il compito di andare a comprare le mele e le arance con 20 euro in tasca. Il costo di ogni kg di mele è pari a 5 euro mentre ogni kg di arance costa 2 euro. Inoltre il cuoco non vuole che acquistiamo più di 3.5 kg di mele. Infine il fruttivendolo questa settimana offre un buono sconto da 1 euro su ogni kg di mele e di 1.2 euro su ogni kg di arance acquistato. Questi buoni sconto sono però offerti a condizione che il numero di kg di mele, moltiplicato per 3, più il numero di kg di arance, moltiplicato per 4, non superi i 24 kg. L'obiettivo da raggiungere è quello di massimizzare lo sconto totale, ottenibile in base alla spesa fatta, rispettando però le indicazioni sia del cuoco che del fruttivendolo.

Argomenti del corso

● Programmazione Lineare

- *Richiami di Algebra vettoriale*
- *Problemi di Programmazione Matematica*
- *Definizione di Iperpiani, insiemi convessi, soluzioni di base*
- *Th. Rappresentazione*
- *L' algoritmo del simplesso*
- *Teoria della dualità*
- *L' analisi di sensitività della soluzione*

● Teoria dei Grafi

- *Definizioni fondamentali*
- *Problemi di ottimizzazione sui grafi (Flusso a Costo Minimo, Massimo Flusso, Trasporto, Cammini minimi, Albero di Copertura Minimo)*

● Teoria della Complessità

- *Definizioni fondamentali*

Libro di testo

Libro di riferimento:

Linear Programming and Network Flows

di: Mokhtar S. Bazaraa - John Jeff Jarvis - Hanif D. Sherali

Ricevimento:

Martedì 11:00 - 13:00

Mercoledì 14:00 - 16:00

Email: raffaele@unisa.it

Ulteriori informazioni sull' esame

- L'esame consiste di una prova scritta ed una prova orale. Per superare l'esame è necessario superare entrambe le prove con una votazione di almeno 18/30.
- Le slide **NON** sono sufficienti per poter sostenere la prova orale. Bisogna studiare dagli appunti presi durante il corso e dal libro.
- **Il preappello è fissato per il 13 giugno. Per gli studenti che seguono il corso, il voto finale, se superiore o uguale a 18, su richiesta dello studente, può essere confermato senza sostenere la prova orale.**
- Per poter partecipare ad un appello è **INDISPENDABILE** la prenotazione sulla piattaforma esse3. **Gli appelli straordinari di Aprile e Novembre non hanno vincoli di iscrizione.**
- Ulteriori informazioni sul corso, il materiale didattico e le tracce degli anni precedenti sono disponibili sul sito:

<http://docenti.unisa.it/001227/home>

Controllare sempre questo sito anche per eventuali news.