Esercizio 5.d

lunedì 24 maggio 2021 13:25

5.d) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione normale tale che $E(X+2) = 1$ e $Var(2X+2) = 4$.
(i) Calcolare $P(X \geq 0)$ e $P(-1{,}55 \leq X \leq 1{,}55 \,|\, X \geq 0)$.
(ii) Determinare il valore di c tale che $P(X > c) = 0{,}30$.

$$\mathbb{E}(X+2) = 1 \qquad Var(2X+2) = 4 \qquad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \quad \text{STANDARDIZZ.}$$

$$\mathbb{E}(X) + 2 = 1 \qquad 4 \cdot Var(X) = 4$$

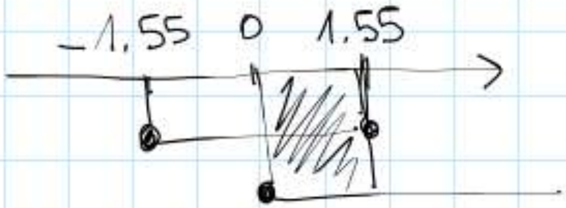
$$\mu = \mathbb{E}(X) = -1 \qquad \sigma^2 = Var(X) = 1$$

(i) $P(X \geqslant 0) = 1 - P(X < 0) = 1 - P\left(X - (-1) < 0 - (-1) \right)$

$= 1 - P(Z < 1) = 1 - \phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

Z è una normale standard

$$P\left(-1{,}55 \leq X \leq 1.55 \mid X \geq 0\right) = \frac{P(-1{,}55 \leq X \leq 1.55 \cap X \geq 0)}{P(X \geq 0)}$$



$$= \frac{P(0 \leq X \leq 1.55)}{0{,}1587}$$

$$= \frac{P\left(0-(-1) \leq X-(-1) \leq 1.55-(-1)\right)}{0{,}1587}$$

$$= \frac{P(1 \leq Z \leq 2.55)}{0{,}1587}$$

$$= \frac{\phi(2.55) - \phi(1)}{0{,}1587}$$

$$= \frac{0{,}9946 - 0{,}8413}{0{,}1587} = \frac{0{,}1533}{0{,}1587} \cong 0{,}966$$

(ii) $\underline{P}(X > c) = 0,30$

$\underline{P}(X-(-1) > c-(-1)) = 0,30$

$\underline{P}(Z > c+1) = 0,30$

$1 - \underline{P}(Z \leq c+1) = 0,30$

$\underline{P}(Z \leq c+1) = 0,70$

$\phi(c+1) = 0,70$

$c+1 = 0,52 \Rightarrow c = 0,52 - 1 = -0,48$

Esercizio 2 - prova intercorso (email)

lunedì 24 maggio 2021 13:26

SecondaProvaAA19_20_3.pdf

Start conversation

Esercizio 2 (10 punti)
Sia X una variabile aleatoria continua con distribuzione uniforme nell'intervallo (a, b), con $E(X) = 1$ e $Var(X) = 3$.
(i) Determinare i valori di a e b e scrivere l'espressione della funzione di distribuzione di X;
(ii) posto $Y = 2X + 1$, calcolare $P(Y \leq y)$; **(iii)** valutare $P(Y \leq 2 | Y > 0)$.

(i) $X \sim \text{Unif}(a, b)$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} = 1$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = 3$$

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 1 \\ \frac{(b-a)^2}{12} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 - b \\ \frac{(b-2+b)^2}{12} = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2 - b \\ (2b-2)^2 = 36 \end{cases} \rightarrow$$

$2b - 2 = +6$ opp. $2b - 2 = -6$

$2b = 8$ opp. $2b = -4$

$b = 4$ opp. $b = -2$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \end{cases} \rightarrow \text{non accettabile perché } a > b$$

$X \sim \text{Unif}(a, b)$

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$x \in [a, b)$

$$X \sim \text{Unif}(-2,4) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x \in [-2,4] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{x+2}{6} & -2 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases} \qquad F(x) = \int_{-2}^{x} \frac{1}{6}\, dt = \frac{1}{6}\left[t\right]_{-2}^{x} = \frac{1}{6}\cdot(x+2) = \frac{x+2}{6}$$

(ii) $Y = 2X + 1 \qquad Y \in (-3, 9)$

$$P(Y \leq y) = P(2X+1 \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-1}{2}\right) = \begin{cases} 0, & y < -3 \\ \dfrac{\frac{y-1}{2}+2}{6} & -3 \leq y < 9 \\ 1, & y \geq 9 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y < -3 \\ \frac{y+3}{12}, & -3 \leq y < 9 \\ 1, & y \geq 9 \end{cases}$$

(iii) $\mathbb{P}(Y \leq 2 \mid Y > 0) = \dfrac{\mathbb{P}(Y \leq 2 \cap Y > 0)}{\mathbb{P}(Y > 0)} = \dfrac{\mathbb{P}(0 < Y \leq 2)}{\mathbb{P}(Y > 0)} = \dfrac{F_Y(2) - F_Y(0)}{1 - F_Y(0)}$

$$= \frac{\frac{5}{12} - \frac{3}{12}}{1 - \frac{3}{12}} = \frac{\frac{2}{\cancel{12}}}{\frac{9}{\cancel{12}}} = \frac{2}{9}$$

Esercizio congiunte num1

lunedì 24 maggio 2021 13:27

Esercizio 1 Da uno studio sulle abitudini delle famiglie americane è stata ottenuta la seguente distribuzione congiunta per la variabile X=numero di bambini nella famiglia e la variabile Y=numero di televisioni in casa

$x \backslash y$	1	2	3
1	0.06	0.05	0.04
2	0.2	0.15	0.05
3	0.1	0.1	0.1
4 o più	0.07	0.05	0.03

(i) Qual è la probabilità che una famiglia con 2 bambini abbia 3 televisori?
(ii) Calcolare la probabilità che una famiglia abbia almeno tre bambini ed un solo televisore;
(iii) Determinare la distribuzione marginale di X e quella di Y.

(i) $\underline{P}(X=2, Y=3) = p(2,3) = 0{,}05$

(ii) $\underline{P}(X \geq 3, Y=1) = p(3,1) + p(4,1) = 0{,}1 + 0{,}07 = 0{,}17$

(iii) $p_X(x) = \sum_y p(x,y)$ $\qquad p_Y(y) = \sum_x p(x,y)$

$x \backslash y$	1	2	3	$p_X(x)$
1	0,06	0,05	0,04	0,15
2	0,2	0,15	0,05	0,4
3	0,1	0,1	0,1	0,3
4 o più	0.07	0.05	0.03	0,15
$p_Y(y)$	0,43	0,35	0,22	1

Esercizio congiunte num2

lunedì 24 maggio 2021 13:28

Esercizio 2 Si consideri l'esperimento che consiste nel lanciare a caso 4 monete truccate, nel senso che ciascuna moneta mostra testa con probabilità 1/4. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di ripetizioni (si ha una ripetizione quando l'esito di un lancio è uguale a quello del lancio precedente) e sia

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se il numero di teste è maggiore o uguale al numero di croci,} \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la densità di probabilità congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ e le densità marginali.
(ii) Calcolare $E(X \cdot Y)$.
(iii) Calcolare $Cov(X, Y)$.

	X	Y	
T T T T	3	1	$\left(\frac{1}{4}\right)^4$
T T T C	2	1	$\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)$
T T C T	1	1	$\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)$
T C T T	1	1	$\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)$
C T T T	2	1	$\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)$

	X	Y	
T T C C	2	1	$\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2$
T C T C	0	1	
C T T C	1	1	
T C C T	1	1	
C T C T	0	1	
C C T T	2	1	

	X	Y	
C C C T	2	0	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4}$
C C T C	1	0	
C T C C	1	0	
T C C C	2	0	
C C C C	3	0	$\left(\frac{3}{4}\right)^4$

$x \backslash y$	0	1	$p_X(x)$
0	0	$9/128$	$9/128$
1	$\frac{27}{128}$	$3/32$	$\frac{39}{128}$
2	$\frac{27}{128}$	$3/32$	$\frac{39}{128}$
3	$\frac{81}{256}$	$1/256$	$\frac{41}{128}$
$p_Y(y)$	$\frac{189}{256}$	$\frac{67}{256}$	1

(ii) $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \sum_x \sum_y x \cdot y \cdot p(x,y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{32} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{32} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{256} = \frac{75}{256}$

(iii) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = \frac{75}{256} - \frac{15}{8} \cdot \frac{67}{256} = -\frac{405}{2048}$

(ii) $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \sum_{x} \sum_{y} x \cdot y \cdot p(x,y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{32} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{32} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{256} = \frac{75}{256}$

(iii) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = \frac{75}{256} - \frac{15}{8} \cdot \frac{67}{256} = -\frac{405}{2048}$

$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{39}{128} + 2 \cdot \frac{39}{128} + 3 \cdot \frac{41}{128} = \frac{15}{8}$

$\mathbb{E}(Y) = \frac{67}{256}$