Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica

Università di Salerno

Lezione n° 18

- Teoria dei grafi: definizioni di base
- Problema del flusso a costo minimo

R. Cerulli – F. Carrabs

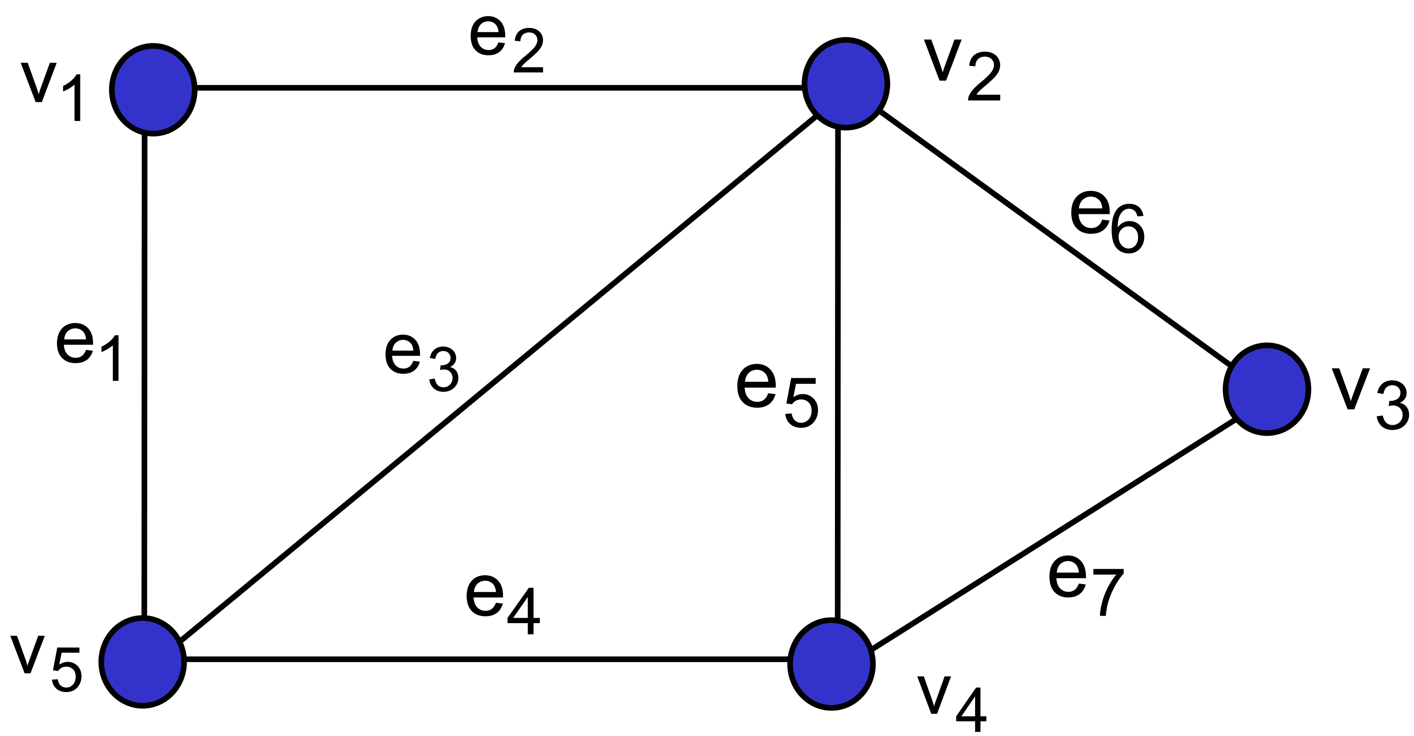
Teoria dei Grafi
Concetti fondamentali

Un grafo non orientato $G=(V,E)$ è dato da una coppia di insiemi finiti:

- $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$ l'insieme degli n **Nodi** di G
- $E=\{e_1,..,e_m\}\subseteq VxV$ l'insieme degli m **Archi non orientati** di G

Ogni arco non orientato di G corrisponde ad una coppia non ordinata di nodi di G $e_k=(v_i,v_j)$.
La presenza di un arco tra una coppia di nodi indica una relazione tra i nodi stessi.

Un esempio: G=(V,E)

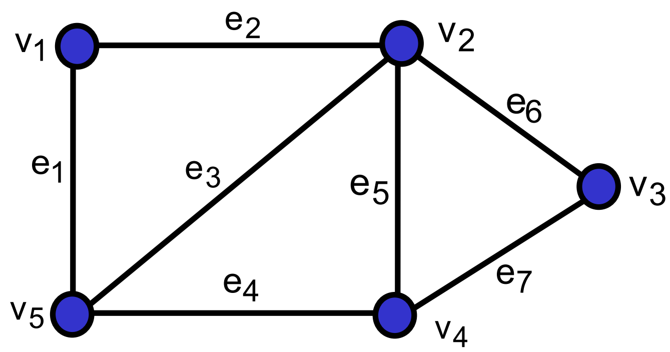


$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

$$e_1 = (v_1, v_5) \qquad e_2 = (v_1, v_2) \qquad \cdots$$

Definizioni di base:



- un arco (v,v) è detto **loop**
- un arco $e=(u,v)\in E$ si dice **incidente** su u e su v
- due nodi $u,v\in V$ sono detti **adiacenti** $\Leftrightarrow (u,v)\in E$
- due archi $e_1,e_2\in E$ sono detti **adiacenti** $\Leftrightarrow e_1=(u,v)$ ed $e_2=(v,w)$ (hanno un nodo in comune)
- l'insieme di nodi $N(u)=\{v\in V\text{: } v \text{ adiacente a } u\}$ è detto **intorno** di u in G
- l'insieme di archi $\delta(u)=\{e\in E\text{: } e \text{ incide su } u\}$ è detto **stella** di u in G
- $|\delta(u)|$ è detto **grado del nodo** u

Teoria dei Grafi
Concetti fondamentali

I grafi sono un mezzo per rappresentare relazioni binarie

Ad esempio:

- due città connesse da una strada
- due calcolatori connessi in una rete telematica
- due persone legate da una relazione di parentela (come, padre-figlio)
- due persone che condividono una stanza
- il collegamento tra due componenti elettronici
- un’operazione che deve essere eseguita da una certa macchina
- ...

I grafi possono essere usati come strumento per modellare in maniera schematica un vastissimo numero di problemi decisionali.

Ad esempio:

- determinare il percorso più breve che connette due città
- determinare come connettere nella maniera più economica (più efficiente) un insieme di calcolatori in una rete telematica
- assegnare un insieme di operazioni ad un insieme di macchine
- determinare il percorso più conveniente da far percorrere ad una flotta di veicoli commerciali per effettuare delle consegne e quindi rientrare al deposito
- ...

Grafo semplice:

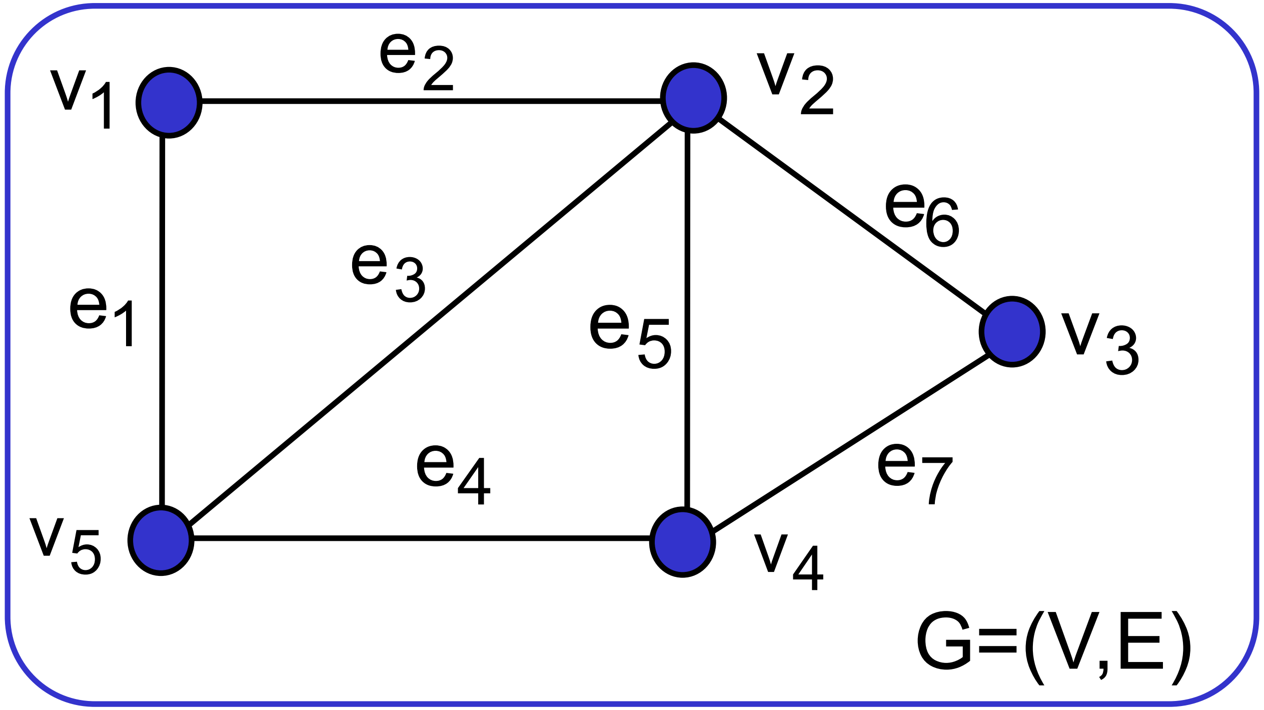
Non esistono archi paralleli (al più un arco per ogni coppia di nodi) o “loop” .

Grafi e Sottografi

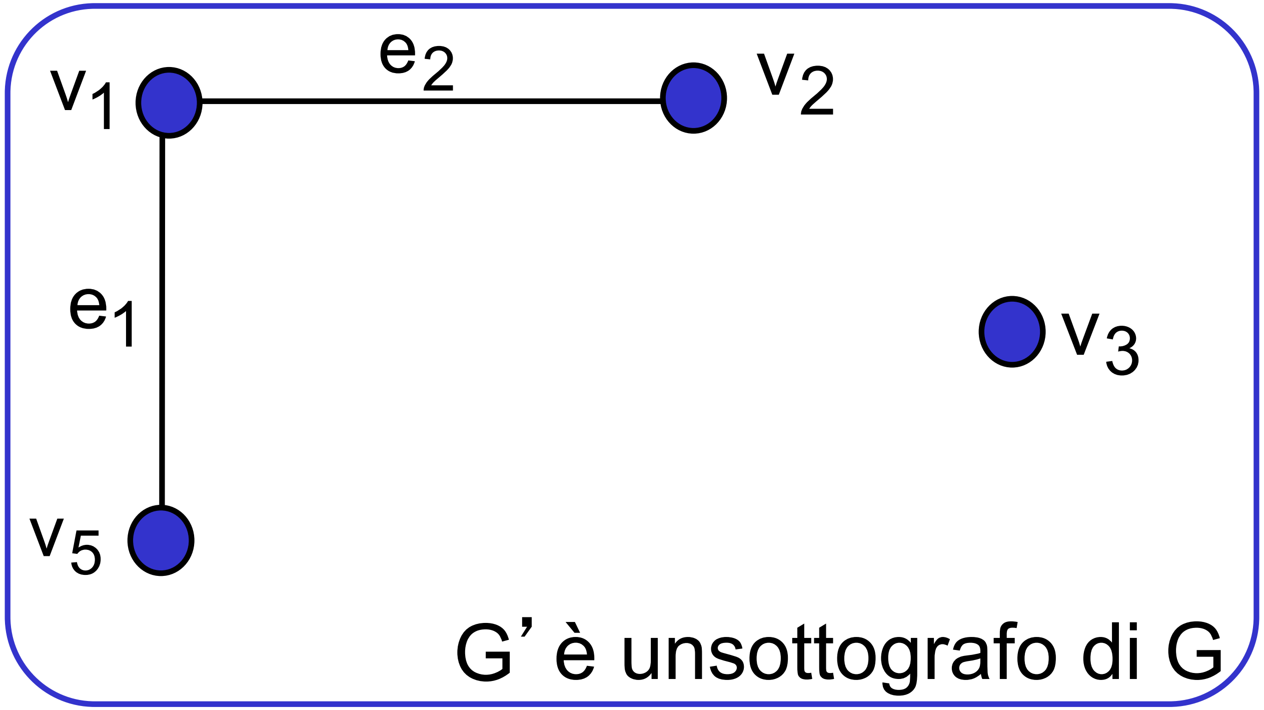
- $G'=(V',E')$ è detto **sottografo** di $G=(V,E)$ $\Leftrightarrow$ $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$

- $G'=(V',E')$ è detto **sottografo indotto** da V' in $G=(V,E)$ $\Leftrightarrow$ $V' \subseteq V$ e $\forall u,v \in V'$ se $(u,v) \in E$ allora $(u,v) \in E'$.

Esempio

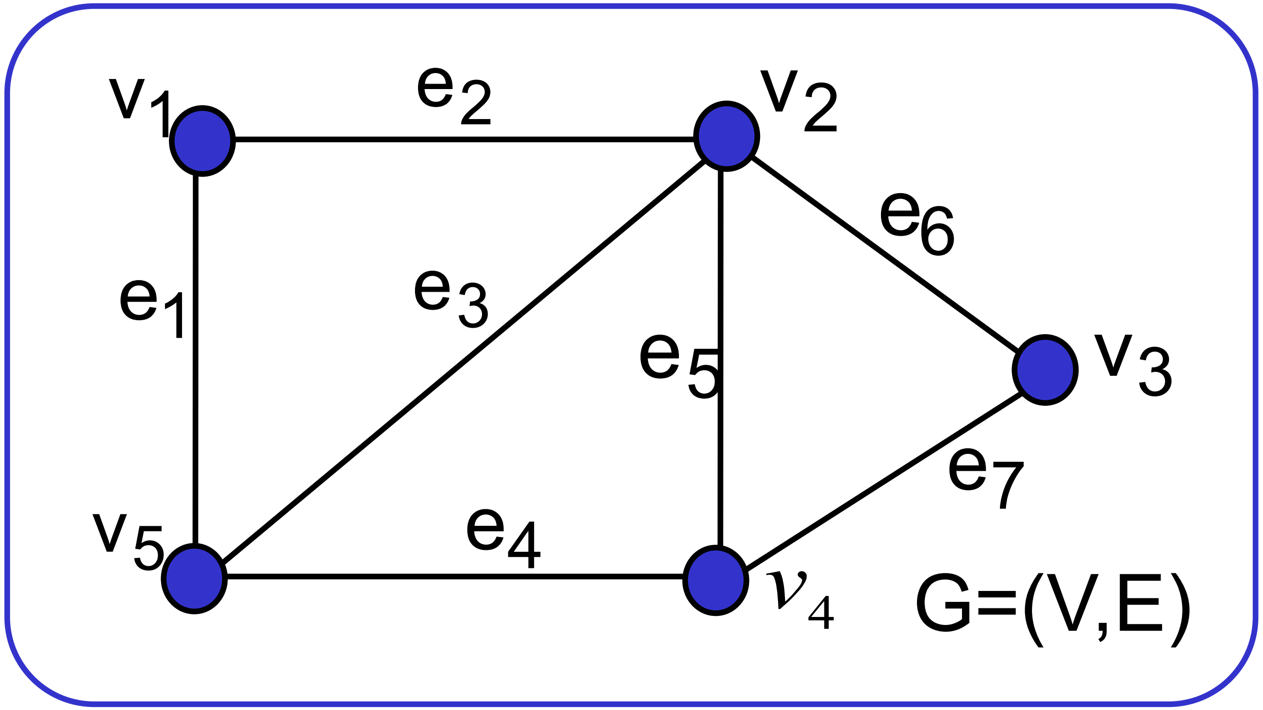


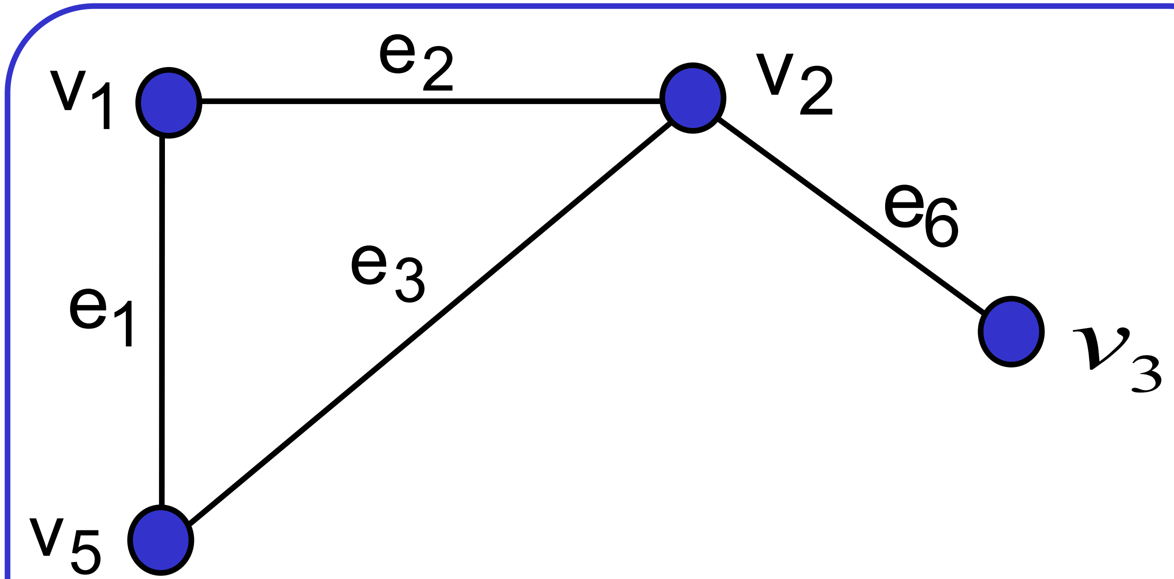
v_1
e_2
v_2
e_6
e_3
e_1
e_5
v_3
e_4
e_7
v_5
v_4
G=(V,E)



v_1
e_2
v_2
e_1
v_3
v_5
G’ è unsottografo di G

Esempio





$V' = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$

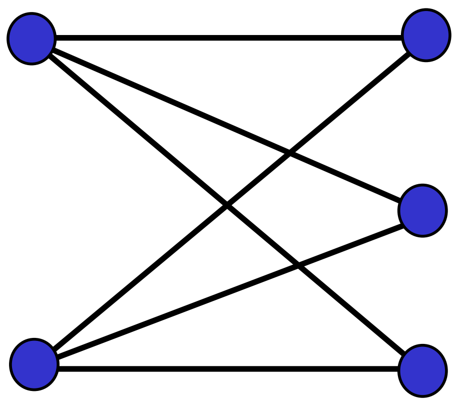
G’ è un sottografo indotto di G

Grafi bipartiti e grafi completi

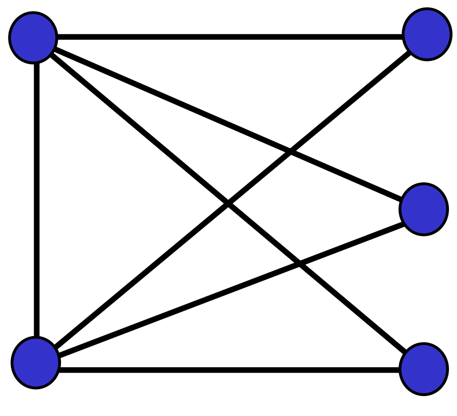
G è detto **grafo bipartito** se esiste una partizione di $V=V_1 \cup V_2$ tale che:

- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- $\forall e=(u,v) \in E$ se $u \in V_1$ allora $v \in V_2$ oppure se $u \in V_2$ allora $v \in V_1$

Esempio



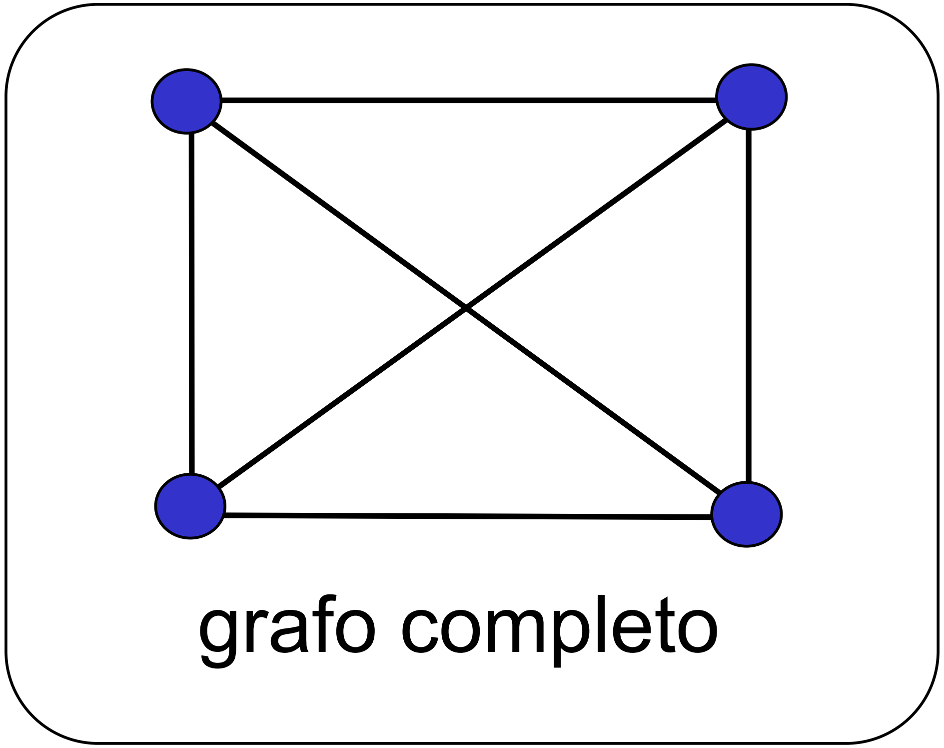
grafo bipartito



grafo non bipartito

- G è detto **completo** $\Leftrightarrow$ contiene tutti i possibili archi, ovvero $|\delta(v)| = n-1 \;\forall v \in V$
- il massimo numero di archi di un grafo completo è dato da $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Esempio



Grafi connessi e componenti connesse

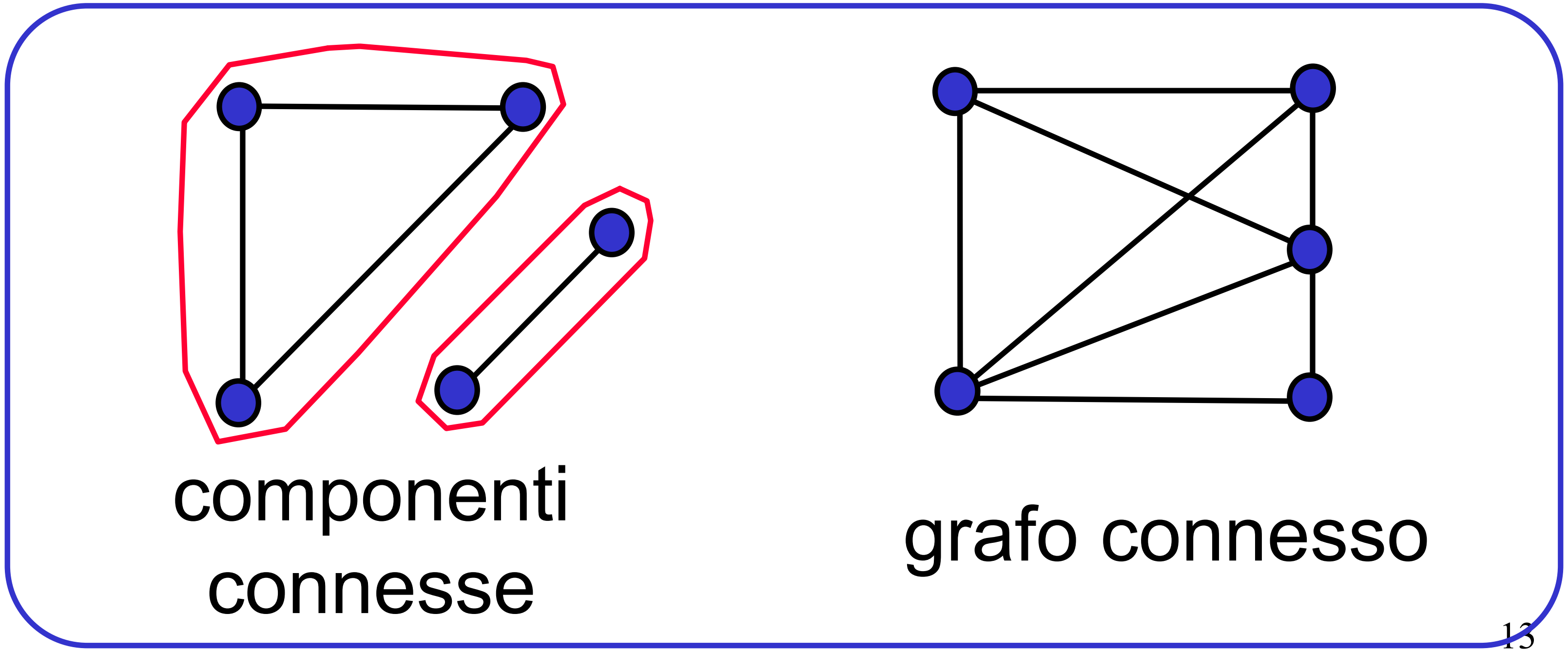
- Dato $G=(V,E)$, un nodo $v \in V$ si dice **connesso** ad un nodo $u \in V$ se esiste un cammino tra u e v in G
- $v \in V$ è connesso a v (riflessività)
- $v \in V$ è connesso a $u \in V \Rightarrow u \in V$ è connesso a $v \in V$ (simmetria)
- se $v \in V$ è connesso a $u \in V$ e $u \in V$ è connesso a $w \in V \Rightarrow v \in V$ è connesso a $w \in V$ (transitività)
- Un grafo $G=(V,E)$ è connesso $\Leftrightarrow$ tutti i suoi nodi sono connessi tra loro.

- L’insieme V può essere partizionato in sottoinsiemi

$$C_i=\{v\in V : v \text{ è connesso a } u,\ \forall u\in C_i\}$$

- Il sottografo indotto da C_i in G è detto **componente connessa** di G
- G è connesso $\Leftrightarrow$ possiede una sola componente connessa (v è connesso a u , $\forall v,u\in V$)

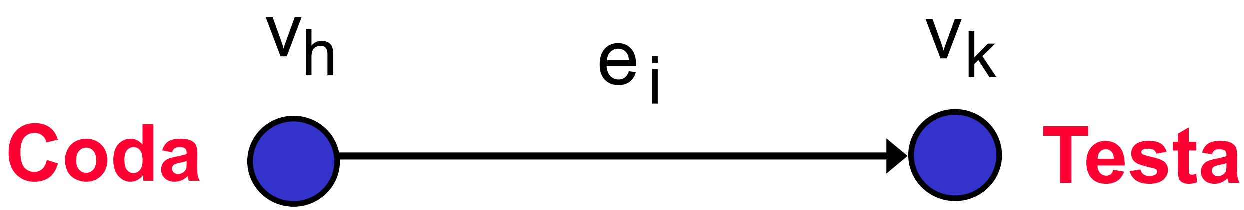
Esempio



Grafi orientati

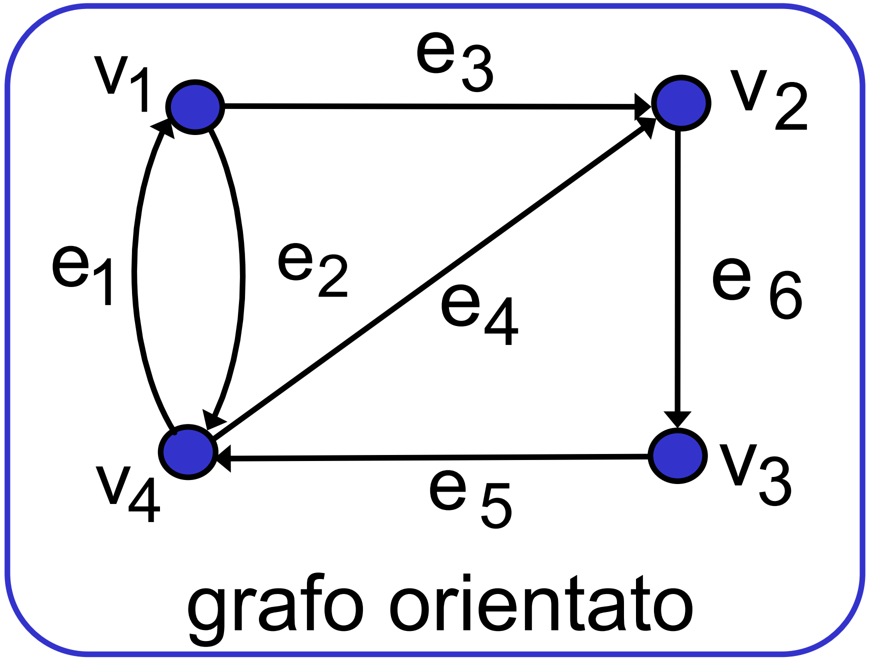
- $G=(V,E)$ è detto **orientato** se, dato $V=\{v_1,...,v_n\}$, l'insieme degli archi $E=\{e_1,..,e_m\}$ è formato da coppie ordinate di nodi.

  Per un grafo orientato si ha che $e_i=(v_k,v_h)\neq e_j=(v_h,v_k)$ $e_i,e_j\in E$



L'arco e_i si dice **uscente** da v_h ed **entrante** in v_k

Esempio



- $Fs(v)=\{u \in V: (v,u) \in E\}$ è detto **stella uscente** di v
- $Bs(v)=\{u \in V: (u,v) \in E\}$ è detto **stella entrante** di v
- $S(v)= Fs(v) \cup Bs(v)$ è detto **stella** di v
- le definizioni di sottografo, sottografo indotto e componente connessa di un grafo orientato sono analoghe a quelle date per i grafi non orientati

Grafi orientati e componenti fortemente connesse

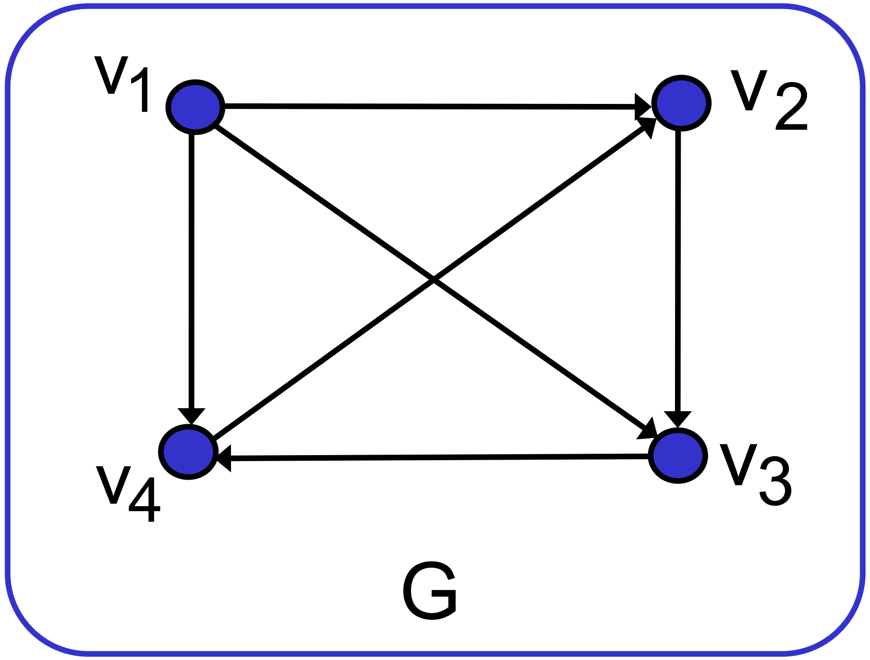
- Dato $G=(V,E)$, un nodo $v \in V$ si dice **fortemente connesso** ad un nodo $u \in V$ se esiste una path (cammino orientato) tra v e u in G.

- $v \in V$ è connesso a v (riflessività)

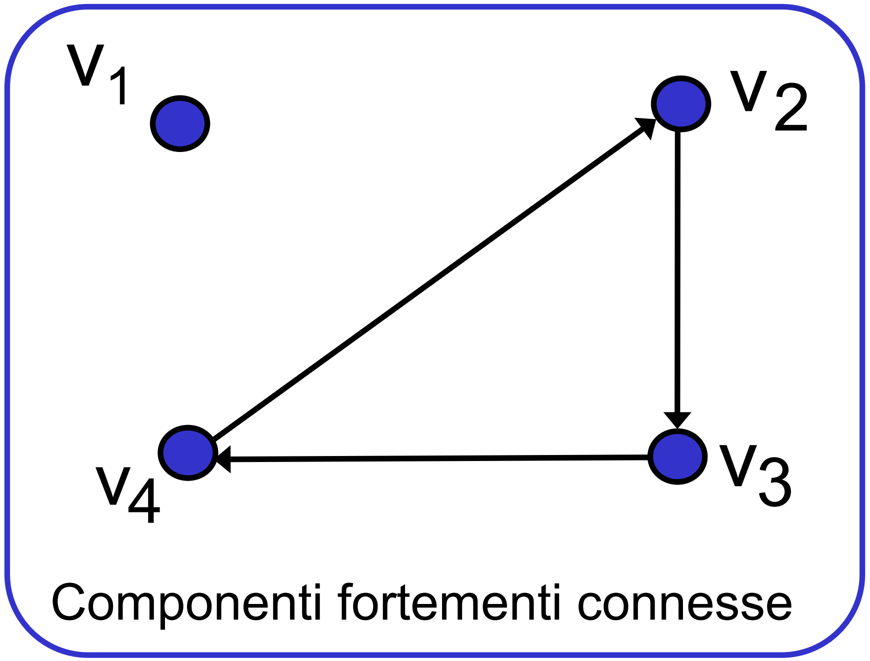
- se $v \in V$ è fortemente connesso a $u \in V$ e $u \in V$ è fortemente connesso a $w \in V \Rightarrow v \in V$ è fortemente connesso a $w \in V$ (transitività)

- Un grafo $G=(V,E)$ è fortemente connesso $\Leftrightarrow$ tutti i suoi nodi sono fortemente connessi tra loro.

Esempio



Ci sono in G componenti fortemente connesse?



Rappresentazioni di un Grafo

- **Liste di adiacenza**:

ad ogni vertice è associata la lista dei vertici adiacenti (può essere una tabella o una lista concatenata).

- **Matrice di adiacenza**: (n x n)

  $a_{ih} = 1$ se $(v_i, v_h) \in E$, $a_{ih} = 0$ altrimenti

- **Matrice di incidenza**: (n x m)

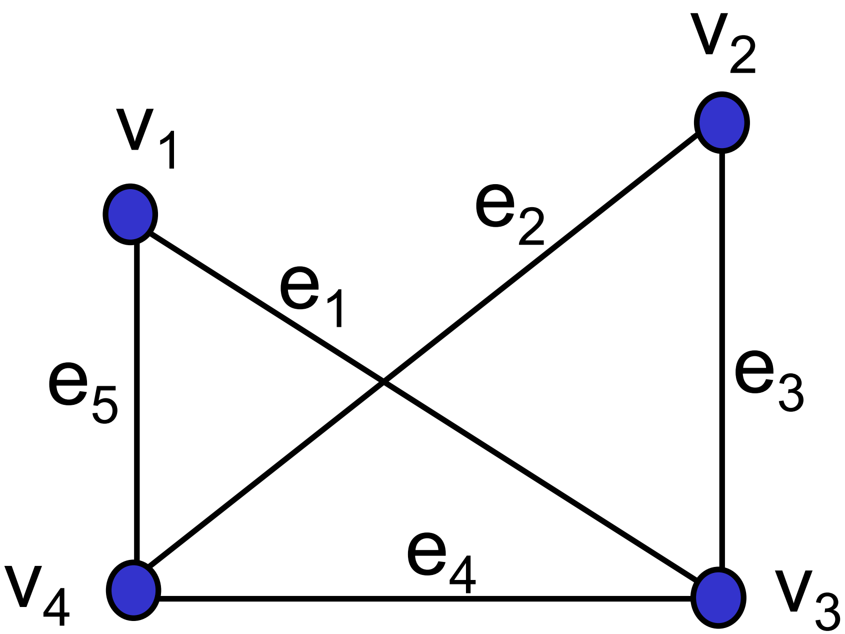
  $a_{ih} = 1$ se $v_i \in e_h$, $a_{ih} = 0$ altrimenti

Matrici di Incidenza dei Grafi

- Dato $G=(V,E)$ **grafo non orientato**, $A_G=[a_{ij}]$, con $i=1,...,n$ e $j=1,...,m$ è la **matrice di incidenza** di G, dove $n=|V|$ ed $m=|E|$, e tale che

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \text{ è testa o coda di } e_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **Esempio**



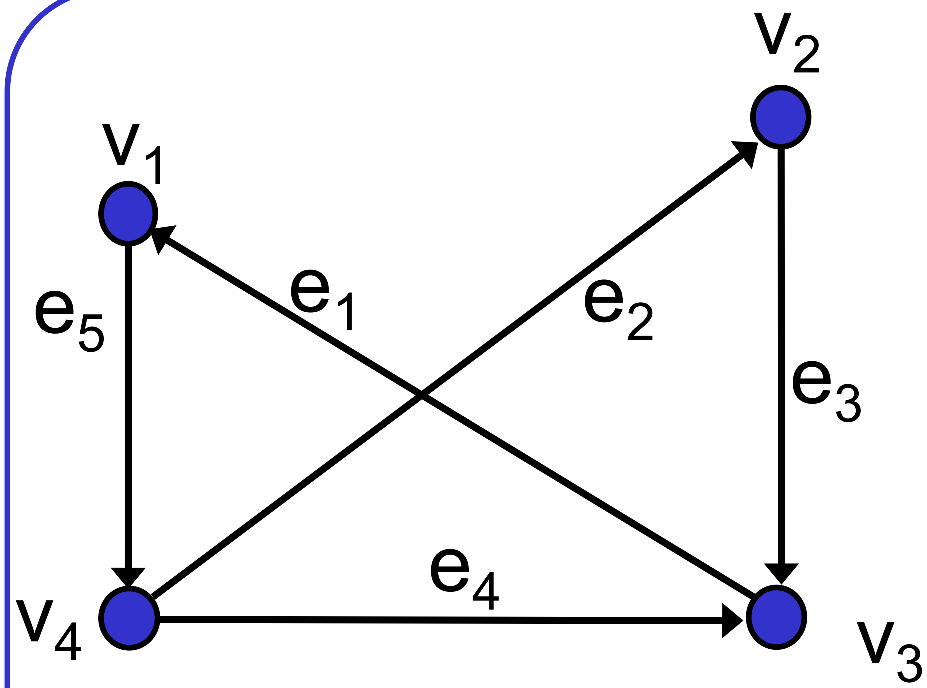
$$A_G = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}$$

matrice di incidenza di un grafo non orientato

- Dato G=(V,E) **grafo orientato**, $A_G=[a_{ij}]$, con i=1,...,n e j=1,...,m è la **matrice di incidenza** di G, dove n= $|V|$ ed m= $|E|$, e tale che

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \text{ è coda di } e_j \text{ (arco uscente da } v_i\text{)} \\ -1 & \text{se } v_i \text{ è testa di } e_j \text{ (arco entrante in } v_i\text{)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esempio



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\
A_G = & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}
\end{array}
$$

matrice di incidenza di un grafo orientato

Rappresentazioni di un Grafo: Vantaggi e Svantaggi

- **Lista di adiacenza**: memoria O(m)

  Vantaggi: permette di scorrere i nodi adiacenti a v in O(grado(v))

  Svantaggi: inserimenti e cancellazioni su liste concatenate in O(grado(v))

- **Matrice di adiacenza**: memoria $O(n^2)$

  Vantaggi: Inserimenti e cancellazioni in O(1)

  Svantaggi: permette di scorrere i nodi adiacenti a v in O(n)

- D.: **matrice di incidenza ?**

Problema del flusso a costo minimo

Sia G=(V,E) un **grafo connesso e orientato** in cui:

- Ad ogni arco (i,j) è associato un costo c_{ij} che rappresenta il costo da pagare per ogni unità di flusso che transita sull'arco (i,j).
- Ad ogni vertice $v \in V$ è associato un valore intero b_v dove:
  - $b_v > 0$ indica che il nodo v è un nodo di offerta
  - $b_v < 0$ indica che il nodo v è un nodo di domanda
  - $b_v = 0$ indica che il nodo v è un nodo di passaggio
- La somma di tutti i b_v deve essere uguale a zero (condizione di bilanciamento). Ciò che viene prodotto dalle sorgenti viene consumato dalle destinazioni.

Nel problema del flusso a costo minimo bisogna far giungere la merce prodotta (dai nodi di offerta) alle destinazioni (nodi di domanda) minimizzando i costi di trasporto.

Problema del Flusso a costo Minimo

FORMULAZIONE

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

con vincoli :

$$\sum_{j\in FS(i)} x_{ij} - \sum_{k\in BS(i)} x_{ki} = b_i \qquad i = 1,\ldots n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad\qquad \mathrm{i} \in \mathrm{A}$$

x_{ij} = quantità di flusso sull'arco (i, j)

c_{ij} = costo di trasporto di un'unità di flusso sull'arco (i, j)

b_i = valore associato al nodo i :

se $b_i > 0$: nodo offerta

se $b_i < 0$: nodo domanda

se $b_i = 0$: nodo di passaggio

- Problema del Flusso a costo Minimo
- FORMULAZIONE

- In forma matriciale:

$$\min c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

- NOTA:
- 1. La matrice A(m,n) è la matrice di incidenza nodo-arco, ogni colonna a_{ij} è associata all'arco (i,j), ed in particolare abbiamo che:

$$\underline{a}_{ij} = \underline{e}_i - \underline{e}_j$$

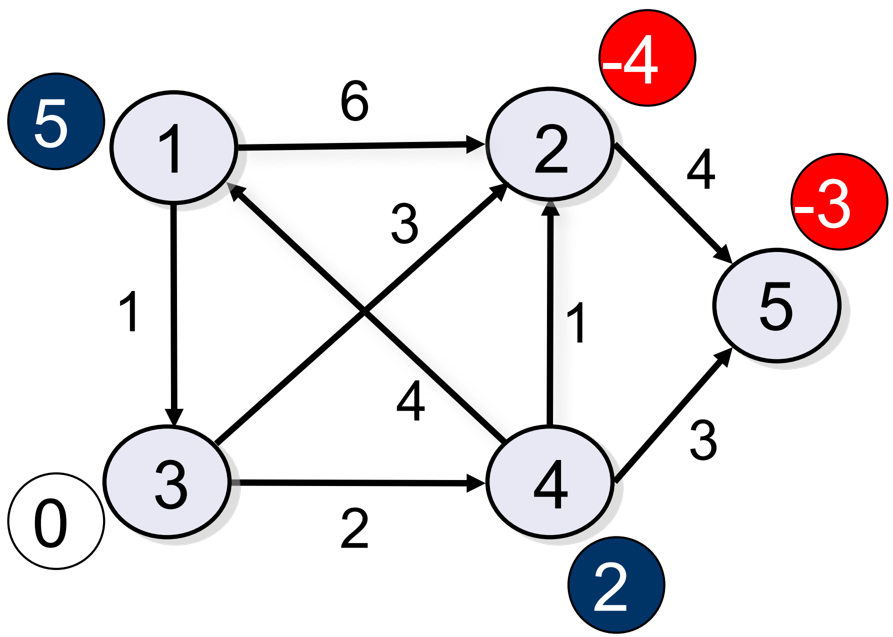
($\underline{e}_i$ vettore colonna con tutti 0 eccetto un 1 in posizione i-ma.)

2. Il rango di questa matrice è: r(A)=m-1

Problema del Flusso a costo Minimo: Esempio

Consideriamo un grafo orientato **G=(V,E)** rappresentante una rete di trasporto.

L'obiettivo è quello di far viaggiare ("fluire"), al minimo costo, determinate quantità di merce (unità di flusso) dai nodi di **offerta** a quelli di **domanda** (eventualmente passando per dei nodi di **passaggio**).

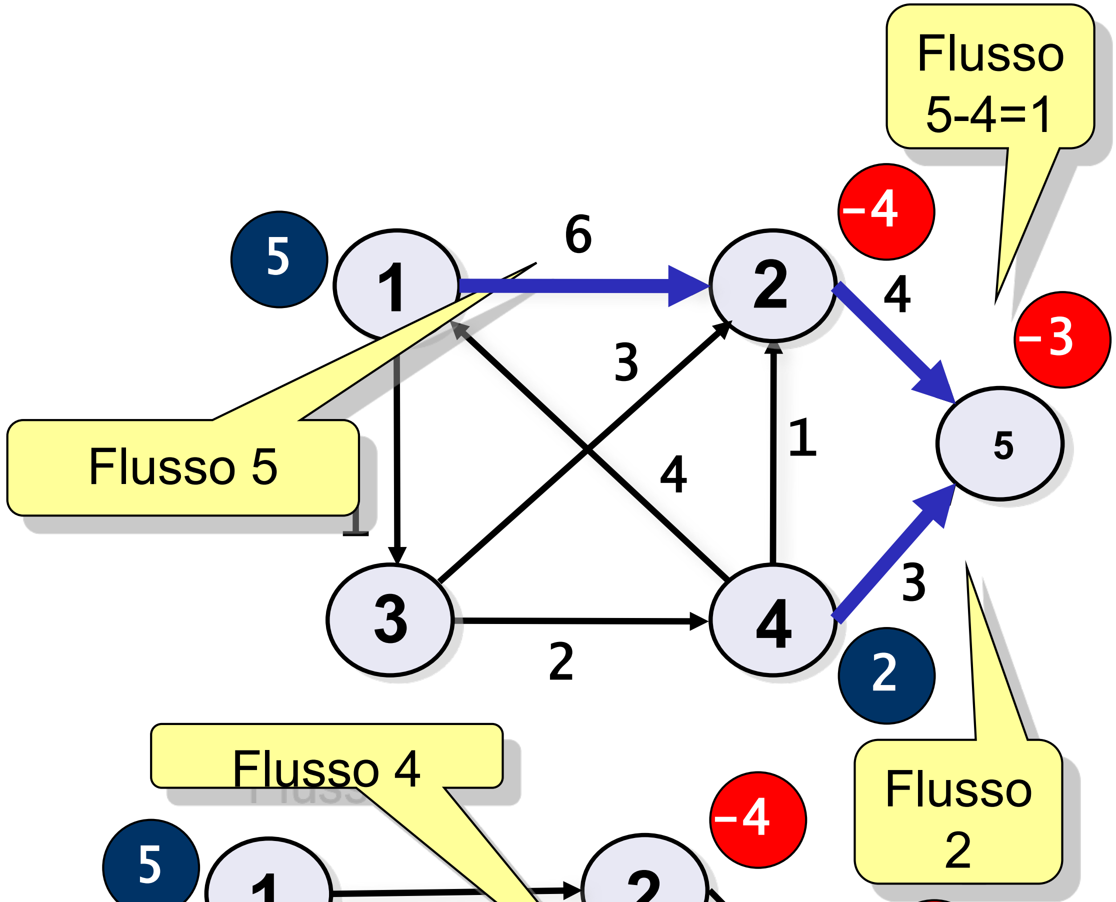


Abbiamo:

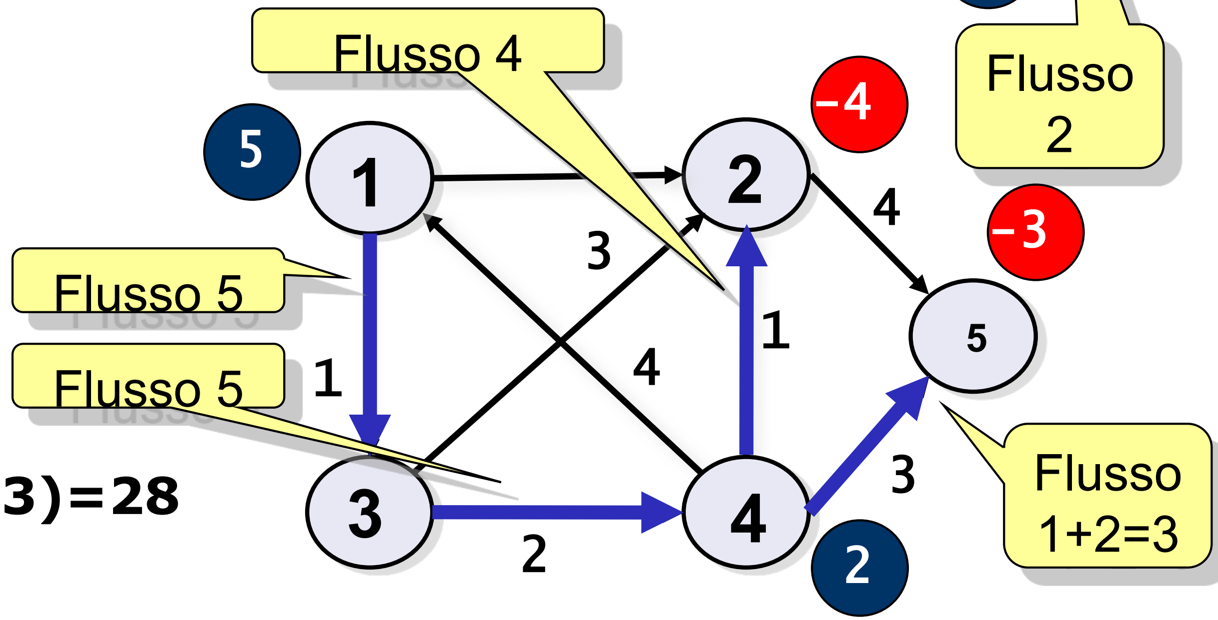
- Una quantità $\mathbf{b_i > 0}$ per i nodi offerta, $\mathbf{<0}$ per i nodi domanda, $\mathbf{=0}$ per i nodi di passaggio (quantità di offerta/domanda)
- Un costo $\mathbf{c_{ij} \geq 0}$ per ogni arco (costo per il trasporto di una unità di merce)

Problema del Flusso a costo Minimo: Esempio

Soluzione 1
Costo:
(6*5)+(4*1)+(3*2)=40



Soluzione 2
Costo:
(1*5)+(2*5)+(1*4)+(3*3)=28



Problema del Flusso a costo Minimo: Esempio

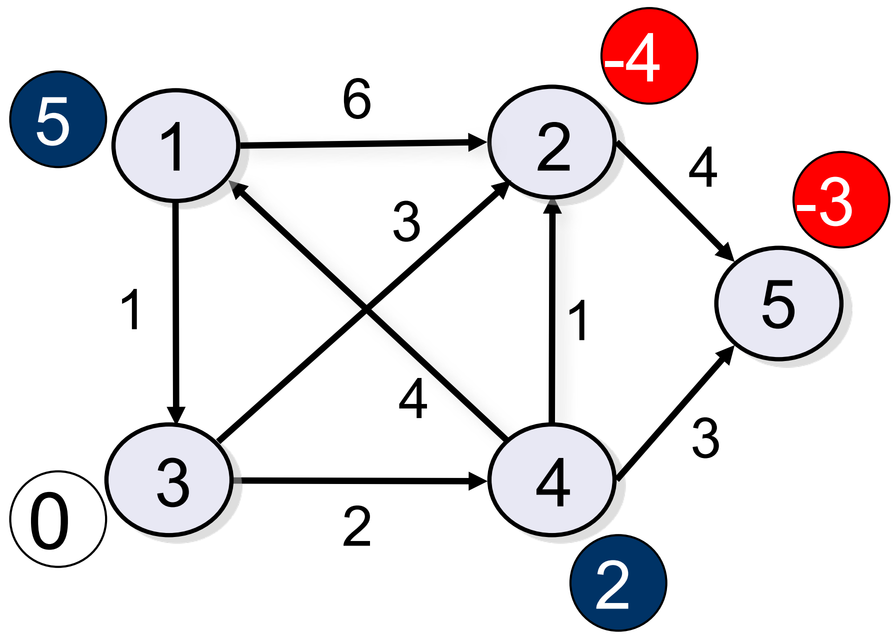
Modelliamo il problema

- Consideriamo una variabile $\mathbf{x_{ij}} \geq \mathbf{0}$ per ogni arco **(i,j)**, rappresentante la quantità di flusso che attraverserà l'arco nella soluzione

$$\min 6x_{12} + x_{13} + 4x_{25} + 3x_{32} + 2x_{34} + 4x_{41} + x_{42} + 3x_{45}$$

$$\text{soggetto ai vincoli}$$

$$\begin{aligned} x_{12} + x_{13} - x_{41} &= 5 \\ x_{25} - x_{12} - x_{32} - x_{42} &= -4 \\ x_{32} + x_{34} - x_{13} &= 0 \\ x_{41} + x_{42} + x_{45} - x_{34} &= 2 \\ -x_{25} - x_{45} &= -3 \end{aligned}$$



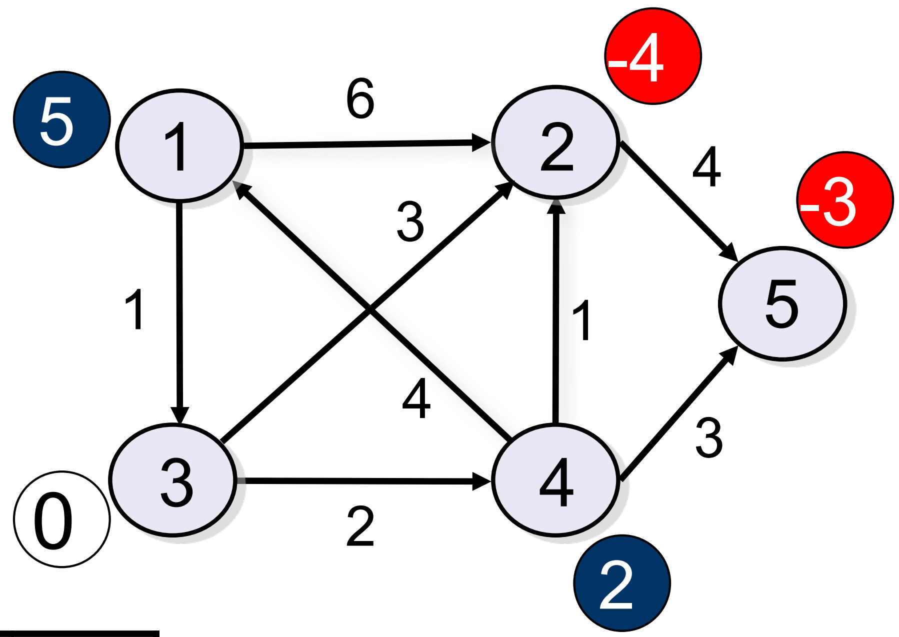
Problema del Flusso a costo Minimo: Esempio

Rappresentiamo il grafo mediante una **matrice di incidenza nodo-arco A**; per ogni nodo v ed arco e, la corrispondente entrata A_{ve} varrà:

1 se e esce da v (v è la coda di e)

-1 se e entra in v (v è la testa di e)

0 altrimenti



A	(1,2)	(1,3)	(2,5)	(3,2)	(3,4)	(4,1)	(4,2)	(4,5)
1	1	1	0	0	0	-1	0	0
2	-1	0	1	-1	0	0	-1	0
3	0	-1	0	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	-1	1	1	1
5	0	0	-1	0	0	0	0	-1