ELEMENTI DI TEORIA DELLA COMPUTAZIONE

Nozioni matematiche e terminologia

- Insiemi, operazioni sugli insiemi e rappresentazioni.

- Insiemi, operazioni sugli insiemi e rappresentazioni.
- Prodotto cartesiano e sequenze.

- Insiemi, operazioni sugli insiemi e rappresentazioni.
- Prodotto cartesiano e sequenze.
- Funzioni.

Nozioni di base

- Insiemi, operazioni sugli insiemi e rappresentazioni.
- Prodotto cartesiano e sequenze.
- Funzioni.
- Insieme potenza.

Nozioni di base

- Insiemi, operazioni sugli insiemi e rappresentazioni.
- Prodotto cartesiano e sequenze.
- Funzioni.
- Insieme potenza.
- Grafi e alberi.

Nozioni di base

- Insiemi, operazioni sugli insiemi e rappresentazioni.
- Prodotto cartesiano e sequenze.
- Funzioni.
- Insieme potenza.
- Grafi e alberi.
- Logica Booleana.

Un insieme è una collezione non ordinata di oggetti o elementi distinti.

Un insieme è una collezione non ordinata di oggetti o elementi distinti.

- **Ordine e ridondanza non contano**
  $\{a, b, c\}$ ha elementi a, b, c.
  $\{a, b, c\}$, $\{c, b, a\}$ e $\{b, a, b, c, c\}$ sono lo stesso insieme.

Un insieme è una collezione non ordinata di oggetti o elementi distinti.

- **Ordine e ridondanza non contano**
  $\{a, b, c\}$ ha elementi a, b, c.
  $\{a, b, c\}$, $\{c, b, a\}$ e $\{b, a, b, c, c\}$ sono lo stesso insieme.

- $\{a\}$ ed a **sono oggetti diversi**
  $\{a\}$ insieme che contiene solo elemento a.

Un insieme finito può essere descritto dalla lista dei suoi elementi (separati da virgole e) tra $\{ \quad \}$.

Un insieme finito può essere descritto dalla lista dei suoi elementi (separati da virgole e) tra $\{\quad\}$.

A volte per gli insiemi infiniti si usa la notazione "...".
Esempio: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

Un insieme finito può essere descritto dalla lista dei suoi elementi (separati da virgole e) tra $\{ \quad \}$.

A volte per gli insiemi infiniti si usa la notazione "$\ldots$".
Esempio: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

Un altro modo per definire un insieme è di specificare la proprietà caratteristica dei suoi elementi. La notazione

$$A = \{w \mid w \text{ ha la proprietà } P\}$$

si legge: "A è l'insieme di tutti gli elementi w che hanno la proprietà P".

Un insieme finito può essere descritto dalla lista dei suoi elementi (separati da virgole e) tra $\{\quad\}$.

A volte per gli insiemi infiniti si usa la notazione "$\ldots$".
Esempio: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

Un altro modo per definire un insieme è di specificare la proprietà caratteristica dei suoi elementi. La notazione

$$A = \{w \mid w \text{ ha la proprietà } P\}$$

si legge: "A è l'insieme di tutti gli elementi w che hanno la proprietà P".

Per ogni insieme S, $w \in S$ indica che w è un elemento di S.

Un insieme finito può essere descritto dalla lista dei suoi elementi (separati da virgole e) tra $\{\quad\}$.

A volte per gli insiemi infiniti si usa la notazione "...". Esempio: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$.

Un altro modo per definire un insieme è di specificare la proprietà caratteristica dei suoi elementi. La notazione

$$A = \{w \mid w \text{ ha la proprietà } P\}$$

si legge: "A è l'insieme di tutti gli elementi w che hanno la proprietà P".

Per ogni insieme S, $w \in S$ indica che w è un elemento di S.

Esempi: $A = \{1, 5, 7, 9\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x = 2k\}$
$\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali, B è l'insieme dei numeri reali pari.

- **Es:** L' insieme dei numeri pari è

$$\{0, 2, 4, \ldots, 2n, ...\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$$

- **Es:** L' insieme dei numeri pari è

$$\{0, 2, 4, \ldots, 2n, ...\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$$

L' insieme dei pari positivi è

$$\{2, 4, \ldots, 2n, ...\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$$

- **Es:** L' insieme dei numeri pari è

$$\{0, 2, 4, \ldots, 2n, ...\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$$

L' insieme dei pari positivi è

$$\{2, 4, \ldots, 2n, ...\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$$

L' insieme dei numeri dispari è

$$\{1, 3, 5, 7, \ldots, 2n + 1...\} = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$$

- **Es:** L' insieme dei numeri pari è

$$\{0, 2, 4, \ldots, 2n, ...\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$$

L' insieme dei pari positivi è

$$\{2, 4, \ldots, 2n, ...\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$$

L' insieme dei numeri dispari è

$$\{1, 3, 5, 7, \ldots, 2n + 1 ...\} = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$$

- **Es:** Se $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$,
allora $4 \in A$, ma $5 \notin A$.

- **Es:** L' insieme dei numeri pari è

$$\{0,2,4,\ldots,2n,...\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$$

L' insieme dei pari positivi è

$$\{2,4,\ldots,2n,...\} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$$

L' insieme dei numeri dispari è

$$\{1,3,5,7,\ldots,2n+1...\} = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$$

- **Es:** Se $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$, allora $4 \in A$, ma $5 \notin A$.
- Esercizio: dare una descrizione formale dell'insieme dei numeri non negativi che verificano la seguente proprietà: "Se $n \geq 5$ allora n è dispari".

Nei seguenti esempi l'insieme universale U è l'insieme di tutte le sequenze di bit.

Nei seguenti esempi l'insieme universale U è l'insieme di tutte le sequenze di bit.

Esempio 1

Nei seguenti esempi l'insieme universale U è l'insieme di tutte le sequenze di bit.

Esempio 1

$A = \{x \in U \mid x \text{ ha il carattere 0 solo nelle posizioni dispari}\}$

Nei seguenti esempi l'insieme universale U è l'insieme di tutte le sequenze di bit.

Esempio 1

$A = \{x \in U \mid x$ ha il carattere 0 solo nelle posizioni dispari$\}$

La sequenza 11 appartiene ad A?

Nei seguenti esempi l'insieme universale U è l'insieme di tutte le sequenze di bit.

Esempio 1

$A = \{x \in U \mid x \text{ ha il carattere 0 solo nelle posizioni dispari}\}$

La sequenza 11 appartiene ad A?

Esempio 2

Nei seguenti esempi l'insieme universale U è l'insieme di tutte le sequenze di bit.

Esempio 1

$A = \{x \in U \mid x \text{ ha il carattere 0 solo nelle posizioni dispari}\}$

La sequenza 11 appartiene ad A?

Esempio 2

$B = \{x \in U \mid \text{ogni terna di bit consecutivi in } x$
$\text{contiene al più uno } 0\}$

Nei seguenti esempi l'insieme universale U è l'insieme di tutte le sequenze di bit.

Esempio 1

$A = \{x \in U \mid x \text{ ha il carattere 0 solo nelle posizioni dispari}\}$

La sequenza 11 appartiene ad A?

Esempio 2

$B = \{x \in U \mid \text{ogni terna di bit consecutivi in } x$
$\text{contiene al più uno 0}\}$

Le sequenze $1, 10$ appartengono a B?

Una definizione ricorsiva (o induttiva) di un insieme consiste di un passo base e di un passo ricorsivo.

Una definizione ricorsiva (o induttiva) di un insieme consiste di un passo base e di un passo ricorsivo.

Il passo base definisce uno o più elementi (elementari) dell'insieme.

Una definizione ricorsiva (o induttiva) di un insieme consiste di un passo base e di un passo ricorsivo.

Il passo base definisce uno o più elementi (elementari) dell'insieme.

Il passo ricorsivo definisce regole per formare nuovi elementi dell'insieme da elementi dell'insieme già definiti (specificati nel passo base o generati da precedenti applicazioni del passo ricorsivo).

Una definizione ricorsiva (o induttiva) di un insieme consiste di un passo base e di un passo ricorsivo.

Il passo base definisce uno o più elementi (elementari) dell'insieme.

Il passo ricorsivo definisce regole per formare nuovi elementi dell'insieme da elementi dell'insieme già definiti (specificati nel passo base o generati da precedenti applicazioni del passo ricorsivo).

- **Esempio**: Sia A l'insieme definito ricorsivamente nel modo seguente.

Una definizione ricorsiva (o induttiva) di un insieme consiste di un passo base e di un passo ricorsivo.

Il passo base definisce uno o più elementi (elementari) dell'insieme.

Il passo ricorsivo definisce regole per formare nuovi elementi dell'insieme da elementi dell'insieme già definiti (specificati nel passo base o generati da precedenti applicazioni del passo ricorsivo).

- **Esempio**: Sia A l'insieme definito ricorsivamente nel modo seguente.

  PASSO BASE: $i_1 = 1 \in A$.
  PASSO RICORSIVO: Se $i_k \in A$ allora $i_{k+1} = i_k + 2 \in A$.

- Esercizio: Dare una definizione di A attraverso una proprietà caratteristica dei suoi elementi.

- Esercizio: Dare una definizione di A attraverso una proprietà caratteristica dei suoi elementi.
- Esercizio: Dare una definizione ricorsiva di $n!$

- Esercizio: Dare una definizione di A attraverso una proprietà caratteristica dei suoi elementi.
- Esercizio: Dare una definizione ricorsiva di $n!$
- Esercizio: Dare una definizione ricorsiva di una lista di elementi.

- Esercizio: Dare una definizione di A attraverso una proprietà caratteristica dei suoi elementi.
- Esercizio: Dare una definizione ricorsiva di $n!$
- Esercizio: Dare una definizione ricorsiva di una lista di elementi.

- NOTA: NON CONFONDERE le definizioni ricorsive con le dimostrazioni per induzione.

Definizione

La cardinalità $|S|$ di un insieme finito S è il numero di elementi in S.

Definizione

La cardinalità $|S|$ di un insieme finito S è il numero di elementi in S.

Es.

Se $S = \{ab, bb\}$ allora $|S| = 2$

Se $T = \emptyset$, allora $|T| = 0$

Definizione

La cardinalità $|S|$ di un insieme finito S è il numero di elementi in S.

Es.

Se $S = \{ab, bb\}$ allora $|S| = 2$

Se $T = \emptyset$, allora $|T| = 0$

E se l'insieme ha infiniti elementi?
Esempio: $\{a^n \mid n > 1\}$.
Ci ritorneremo....

Definizione

Siano S *e* T *insiemi. Diciamo che* $S \subseteq T$ *(*S *sottoinsieme di* T*) se* $w \in S$ *implica* $w \in T$*.*

Cioè ogni elemento di S *è anche un elemento di* T*.*

Definizione

Siano S e T insiemi. Diciamo che $S \subseteq T$ (S sottoinsieme di T) se $w \in S$ implica $w \in T$.
Cioè ogni elemento di S è anche un elemento di T.

Esempio

$S = \{ab, ba\}$ e $T = \{ab, ba, aaa\}$ allora $S \subseteq T$ ma $T \not\subseteq S$.

$S = \{ba, ab\}$ e $T = \{aa, ba\}$ allora $S \not\subseteq T$ e $T \not\subseteq S$.

Definizione

Due insiemi S e T sono uguali ($S = T$) se $S \subseteq T$ e $T \subseteq S$.

Definizione

Due insiemi S e T sono uguali ($S = T$) se $S \subseteq T$ e $T \subseteq S$.

Esempio

Siano $S = \{ab, ba\}$ e $T = \{ba, ab\}$
allora $S \subseteq T$ e $T \subseteq S$; quindi $S = T$.

Siano $S = \{ab, ba\}$ e $T = \{ba, ab, aaa\}$,
allora $S \subseteq T$ ma $T \not\subseteq S$; quindi $S \neq T$.

Definizione

Dati due insiemi S e T, la loro unione è l'insieme

$$S \cup T = \{w \mid w \in S \textit{ oppure } w \in T\}$$

$S \cup T$ è l'insieme degli elementi che sono in S oppure in T (o in entrambi).

Definizione

Dati due insiemi S e T, la loro unione è l'insieme

$$S \cup T = \{w \mid w \in S \textit{ oppure } w \in T\}$$

$S \cup T$ è l'insieme degli elementi che sono in S oppure in T (o in entrambi).

Es.

Definizione

Dati due insiemi S e T, la loro unione è l'insieme

$$S \cup T = \{w \mid w \in S \textit{ oppure } w \in T\}$$

$S \cup T$ è l'insieme degli elementi che sono in S oppure in T (o in entrambi).

Es.

- $S = \{ab, bb\}$ e $T = \{aa, bb, a\}$ allora $S \cup T = \{ab, bb, aa, a\}$

Definizione

Dati due insiemi S e T, la loro unione è l'insieme

$$S \cup T = \{w \mid w \in S \text{ oppure } w \in T\}$$

$S \cup T$ è l'insieme degli elementi che sono in S oppure in T (o in entrambi).

Es.

- $S = \{ab, bb\}$ e $T = \{aa, bb, a\}$ allora $S \cup T = \{ab, bb, aa, a\}$
- $S = \{a, ba\}$ e $T = \emptyset$, allora $S \cup T = S$.

Definizione

Dati due insiemi S e T, la loro unione è l'insieme

$$S \cup T = \{w \mid w \in S \text{ oppure } w \in T\}$$

$S \cup T$ è l'insieme degli elementi che sono in S oppure in T (o in entrambi).

Es.

- $S = \{ab, bb\}$ e $T = \{aa, bb, a\}$ allora $S \cup T = \{ab, bb, aa, a\}$
- $S = \{a, ba\}$ e $T = \emptyset$, allora $S \cup T = S$.
- $S = \{a, ba\}$ e $T = \{\epsilon\}$ allora $S \cup T = \{\epsilon, a, ba\}$

Definizione

Dati due insiemi S e T, la loro intersezione è l'insieme

$$S \cap T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \in T\}.$$

Definizione

Dati due insiemi S e T, la loro intersezione è l'insieme

$$S \cap T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \in T\}.$$

$S \cap T$ è l'insieme degli elementi comuni a S e T.

Definizione

Dati due insiemi S e T, la loro intersezione è l'insieme

$$S \cap T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \in T\}.$$

$S \cap T$ è l'insieme degli elementi comuni a S e T.

Definizione

Due insiemi S e T si dicono disgiunti se $S \cap T = \emptyset$.

Definizione

Dati due insiemi S e T, la loro intersezione è l'insieme

$$S \cap T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \in T\}.$$

$S \cap T$ è l'insieme degli elementi comuni a S e T.

Definizione

Due insiemi S e T si dicono disgiunti se $S \cap T = \emptyset$.

Es.

- Sia $S = \{ab, bb\}$ e $T = \{aa, bb, a\}$ allora $S \cap T = \{bb\}$

Definizione

Dati due insiemi S e T, la loro intersezione è l'insieme

$$S \cap T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \in T\}.$$

$S \cap T$ è l'insieme degli elementi comuni a S e T.

Definizione

Due insiemi S e T si dicono disgiunti se $S \cap T = \emptyset$.

Es.

- Sia $S = \{ab, bb\}$ e $T = \{aa, bb, a\}$ allora $S \cap T = \{bb\}$
- Sia $S = \{ab, bb\}$ e $T = \{aa, ba, a\}$ allora $S \cap T = \emptyset$, quindi S e T sono disgiunti.

Lemma

Se S e T sono insiemi finiti allora $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$. In particolare, se S e T sono disgiunti (cioè $S \cap T = \emptyset$), allora $|S \cup T| = |S| + |T|$.

Lemma

Se S e T sono insiemi finiti allora $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$.
In particolare, se S e T sono disgiunti (cioè $S \cap T = \emptyset$), allora $|S \cup T| = |S| + |T|$.

Il lemma si può dimostrare usando il principio di induzione.

Definizione

Dati due insiemi S e T, la loro differenza è

$$S - T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \notin T\}$$

Definizione

Dati due insiemi S e T, la loro differenza è

$$S - T = \{w \mid w \in S \ e \ w \notin T\}$$

Es.

Definizione

Dati due insiemi S e T, la loro differenza è

$$S - T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \notin T\}$$

Es.

Sia $S = \{a, b, bb, bbb\}$ e $T = \{a, bb, bab\}$ allora
$S - T = \{b, bbb\}$.

Definizione

Dati due insiemi S e T, la loro differenza è

$$S - T = \{w \mid w \in S \text{ e } w \notin T\}$$

Es.

Sia $S = \{a, b, bb, bbb\}$ e $T = \{a, bb, bab\}$ allora $S - T = \{b, bbb\}$.
Sia $S = \{ab, ba\}$ e $T = \{ab, ba\}$ allora $S - T = \emptyset$

Definizione

Dato un insieme universale U, il complemento di un insieme $S \subset U$ è

$$\overline{S} = \{w \mid w \in U,\ w \notin S\} = U - S$$

Complemento

Definizione

Dato un insieme universale U, il complemento di un insieme $S \subset U$ è

$$\overline{S} = \{w \mid w \in U,\ w \notin S\} = U - S$$

$\overline{S}$ è l'insieme di tutti gli elementi di U che non sono in S.

Definizione

Dato un insieme universale U, il complemento di un insieme $S \subset U$ è

$$\overline{S} = \{w \mid w \in U,\ w \notin S\} = U - S$$

$\overline{S}$ è l'insieme di tutti gli elementi di U che non sono in S.

Es.

$\mathbb{N}$: insieme dei numeri naturali

$S = \{2n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$

$\overline{S}$: ?

Definizione

Dato un insieme universale U, il complemento di un insieme $S \subset U$ è

$$\overline{S} = \{w \mid w \in U,\ w \notin S\} = U - S$$

$\overline{S}$ è l'insieme di tutti gli elementi di U che non sono in S.

Es.

$\mathbb{N}$: insieme dei numeri naturali
$S = \{2n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$
$\overline{S}$: ?
$\overline{S} = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$ = insieme dei numeri dispari.

Definizione

Una sequenza di oggetti è una lista di tali oggetti in qualche ordine.

Definizione

Una sequenza di oggetti è una lista di tali oggetti in qualche ordine.

Una sequenza è denotata scrivendo la lista tra parentesi ( ).

Definizione

Una sequenza di oggetti è una lista di tali oggetti in qualche ordine.

Una sequenza è denotata scrivendo la lista tra parentesi ( ).

Ad esempio, $(7, 21, 57)$ denota una sequenza.

Definizione

Una sequenza di oggetti è una lista di tali oggetti in qualche ordine.

Una sequenza è denotata scrivendo la lista tra parentesi ( ).

Ad esempio, $(7, 21, 57)$ denota una sequenza.

Ordine e ridondanza **sono** importanti in una sequenza.
Ad esempio $(7, 21, 57)$, $(57, 21, 7)$ e $(7, 7, 21, 57)$ sono tre sequenze diverse.

Definizione

Una sequenza di oggetti è una lista di tali oggetti in qualche ordine.

Una sequenza è denotata scrivendo la lista tra parentesi ( ).

Ad esempio, $(7, 21, 57)$ denota una sequenza.

Ordine e ridondanza **sono** importanti in una sequenza.
Ad esempio $(7, 21, 57)$, $(57, 21, 7)$ e $(7, 7, 21, 57)$ sono tre sequenze diverse.

Definizione

Una k-upla è una sequenza che ha k elementi.

Definizione

Una sequenza di oggetti è una lista di tali oggetti in qualche ordine.

Una sequenza è denotata scrivendo la lista tra parentesi ( ).

Ad esempio, $(7, 21, 57)$ denota una sequenza.

Ordine e ridondanza **sono** importanti in una sequenza.
Ad esempio $(7, 21, 57)$, $(57, 21, 7)$ e $(7, 7, 21, 57)$ sono tre sequenze diverse.

Definizione

Una k-upla è una sequenza che ha k elementi.

- **Es.**
  $(4, 2, 7)$ è una tripla
  $(9, 23)$ è una coppia

Definizione

Dati due insiemi A e B, il prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme di coppie

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

Definizione

Dati due insiemi A e B, il prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme di coppie

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

- **Es.**
  Siano $A = \{a, ba, bb\}$ e $B = \{ba\}$, allora

  $$A \times B = \{(a, ba), (ba, ba), (bb, ba)\},$$

  $$B \times A = \{(ba, a), (ba, ba), (ba, bb)\}.$$

  Nota: $(ba, a) \in B \times A$, ma $(ba, a) \notin A \times B$,
  Quindi $B \times A \neq A \times B$.

Definizione

Dati due insiemi A e B, il prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme di coppie

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

- **Es.**
  Siano $A = \{a, ba, bb\}$ e $B = \{ba\}$, allora

  $$A \times B = \{(a, ba), (ba, ba), (bb, ba)\},$$

  $$B \times A = \{(ba, a), (ba, ba), (ba, bb)\}.$$

  Nota: $(ba, a) \in B \times A$, ma $(ba, a) \notin A \times B$,
  Quindi $B \times A \neq A \times B$.
- **Nota:** $\emptyset \times B = ?$

Definizione

Dati due insiemi A e B, il prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme di coppie

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ \ y \in B\}$$

- **Es.**
  Siano $A = \{a, ba, bb\}$ e $B = \{ba\}$, allora

  $$A \times B = \{(a, ba), (ba, ba), (bb, ba)\},$$

  $$B \times A = \{(ba, a), (ba, ba), (ba, bb)\}.$$

  Nota: $(ba, a) \in B \times A$, ma $(ba, a) \notin A \times B$,
  Quindi $B \times A \neq A \times B$.
- **Nota:** $\emptyset \times B =?$
- **Nota:** Se A e B sono insiemi finiti, $|A \times B| = |A||B|$, Perchè?

Definizione

Dati due insiemi A e B, il prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme di coppie

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

- **Es.**
  Siano $A = \{a, ba, bb\}$ e $B = \{ba\}$, allora

  $$A \times B = \{(a, ba), (ba, ba), (bb, ba)\},$$

  $$B \times A = \{(ba, a), (ba, ba), (ba, bb)\}.$$

  Nota: $(ba, a) \in B \times A$, ma $(ba, a) \notin A \times B$,
  Quindi $B \times A \neq A \times B$.
- **Nota:** $\emptyset \times B =?$
- **Nota:** Se A e B sono insiemi finiti, $|A \times B| = |A||B|$, Perchè?
  Suggerimento: utilizzare il principio di induzione su $|A|$.

Proposizione

Se A e B sono insiemi finiti, allora $|A \times B| = |A||B|$.

Dimostrazione

Proposizione

Se A e B sono insiemi finiti, allora $|A \times B| = |A||B|$.

Dimostrazione

PASSO BASE: Se $A = \emptyset$ allora
$|A \times B| = |\emptyset| = 0 \cdot |B| = |A||B|$.

Proposizione

Se A e B sono insiemi finiti, allora $|A \times B| = |A||B|$.

Dimostrazione

PASSO BASE: Se $A = \emptyset$ allora
$|A \times B| = |\emptyset| = 0 \cdot |B| = |A||B|$.

Abbiamo provato il passo base.

Proposizione

Se A e B sono insiemi finiti, allora $|A \times B| = |A||B|$.

Dimostrazione

PASSO BASE: Se $A = \emptyset$ allora
$|A \times B| = |\emptyset| = 0 \cdot |B| = |A||B|$.

Abbiamo provato il passo base.

PASSO INDUTTIVO:

Proposizione

Se A e B sono insiemi finiti, allora $|A \times B| = |A||B|$.

Dimostrazione

PASSO BASE: Se $A = \emptyset$ allora
$|A \times B| = |\emptyset| = 0 \cdot |B| = |A||B|$.

Abbiamo provato il passo base.

PASSO INDUTTIVO:

Sia $A \neq \emptyset$, sia $a \in A$ e sia $A' = A \setminus \{a\}$.

Proposizione

Se A e B sono insiemi finiti, allora $|A \times B| = |A||B|$.

Dimostrazione

PASSO BASE: Se $A = \emptyset$ allora
$|A \times B| = |\emptyset| = 0 \cdot |B| = |A||B|$.

Abbiamo provato il passo base.

PASSO INDUTTIVO:

Sia $A \neq \emptyset$, sia $a \in A$ e sia $A' = A \setminus \{a\}$.

Poiché $|A'| < |A|$, per ipotesi induttiva risulta
$|A' \times B| = |A'||B|$.

Proposizione

Se A e B sono insiemi finiti, allora $|A \times B| = |A||B|$.

Dimostrazione

PASSO BASE: Se $A = \emptyset$ allora
$|A \times B| = |\emptyset| = 0 \cdot |B| = |A||B|$.

Abbiamo provato il passo base.

PASSO INDUTTIVO:

Sia $A \neq \emptyset$, sia $a \in A$ e sia $A' = A \setminus \{a\}$.

Poiché $|A'| < |A|$, per ipotesi induttiva risulta
$|A' \times B| = |A'||B|$.

Siccome $A \times B = (A' \times B) \cup \{(a, b) \mid b \in B\}$, si ha anche
$|A \times B| = |A' \times B| + |B| = |A'||B| + |B| = |A||B|$.

Proposizione

Se A e B sono insiemi finiti, allora $|A \times B| = |A||B|$.

Dimostrazione

PASSO BASE: Se $A = \emptyset$ allora
$|A \times B| = |\emptyset| = 0 \cdot |B| = |A||B|$.

Abbiamo provato il passo base.

PASSO INDUTTIVO:

Sia $A \neq \emptyset$, sia $a \in A$ e sia $A' = A \setminus \{a\}$.

Poiché $|A'| < |A|$, per ipotesi induttiva risulta
$|A' \times B| = |A'||B|$.

Siccome $A \times B = (A' \times B) \cup \{(a, b) \mid b \in B\}$, si ha anche
$|A \times B| = |A' \times B| + |B| = |A'||B| + |B| = |A||B|$.

Abbiamo provato il passo induttivo. Per il principio di induzione, l'enunciato è vero.

Possiamo anche definire il prodotto cartesiano di più di due insiemi. $A_1 \times \ldots \times A_k$ è l'insieme di k-uple

$$A_1 \times \ldots \times A_k = \{(x_1, \ldots, x_k) \mid x_i \in A_i,\ 1 \leq i \leq k\}$$

Es. Siano
$A_1 = \{ab, ba, bbb\}$
$A_2 = \{a, bb\}$,
$A_3 = \{ab, b\}$.
allora

Es. Siano
$A_1 = \{ab, ba, bbb\}$
$A_2 = \{a, bb\}$,
$A_3 = \{ab, b\}$.
allora

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times A_3 \quad = \quad & \{(ab, a, ab), (ab, a, b), (ab, bb, ab), (ab, bb, b), \\ & (ba, a, ab), (ba, a, b), (ba, bb, ab), (ba, bb, b), \\ & (bbb, a, ab), (bbb, a, b), (bbb, bb, ab), \\ & (bbb, bb, b)\}. \end{aligned}$$

Definizione

Dati due insiemi non vuoti X *e* Y,
una funzione $f : X \to Y$ *da* X *in* Y *è una relazione che associa a ogni elemento* x *in* X *uno e un solo* $y = f(x)$ *in* Y.
X *è il* **dominio** *della funzione,*
Y *è il* **codominio** *della funzione.*

Definizione

Dati due insiemi non vuoti X e Y,
una funzione $f : X \to Y$ da X in Y è una relazione che associa a ogni elemento x in X uno e un solo $y = f(x)$ in Y.
X è il **dominio** *della funzione,*
Y è il **codominio** *della funzione.*

Quindi, per definire una specifica funzione occorre fornire:

Definizione

Dati due insiemi non vuoti X *e* Y,
una funzione $f : X \to Y$ *da* X *in* Y *è una relazione che associa a ogni elemento* x *in* X *uno e un solo* $y = f(x)$ *in* Y.
X *è il* **dominio** *della funzione,*
Y *è il* **codominio** *della funzione.*

Quindi, per definire una specifica funzione occorre fornire:

1. dominio

Definizione

Dati due insiemi non vuoti X e Y,
una funzione $f : X \to Y$ da X in Y è una relazione che associa a ogni elemento x in X uno e un solo $y = f(x)$ in Y.
X è il **dominio** *della funzione,*
Y è il **codominio** *della funzione.*

Quindi, per definire una specifica funzione occorre fornire:

1. dominio
2. codominio

Definizione

Dati due insiemi non vuoti X *e* Y*,*
una funzione $f : X \to Y$ *da* X *in* Y *è una relazione che associa a ogni elemento* x *in* X *uno e un solo* $y = f(x)$ *in* Y*.*
X *è il* **dominio** *della funzione,*
Y *è il* **codominio** *della funzione.*

Quindi, per definire una specifica funzione occorre fornire:

1. dominio
2. codominio
3. la relazione che a ogni elemento del dominio associa un elemento del codominio.

La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è definita ricorsivamente come segue:

Esempi di funzioni definite ricorsivamente

La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è definita ricorsivamente come segue:

$$\begin{aligned} f(0) &= 3, \\ f(n+1) &= 2f(n) + 3 \end{aligned}$$

Definizione

Una funzione $f : X \to Y$ *è iniettiva se*

$\forall x, x' \in X \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Definizione

Una funzione $f : X \to Y$ *è iniettiva se*
$\forall x, x' \in X \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Definizione

Una funzione $f : X \to Y$ *è suriettiva se* $\forall y \in Y \ \exists x \in X : y = f(x)$

Definizione

Una funzione $f : X \to Y$ *è iniettiva se*
$\forall x, x' \in X \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Definizione

Una funzione $f : X \to Y$ *è suriettiva se* $\forall y \in Y\ \exists x \in X : y = f(x)$

Definizione

Una funzione $f : X \to Y$ *è una funzione biettiva di* X *su* Y *(o una biezione tra* X *e* Y*) se* f *è iniettiva e suriettiva.*

Definizione

Per ogni insieme S, l'insieme potenza (o insieme delle parti) $\mathcal{P}(S)$ è

$$\mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$$

Definizione

Per ogni insieme S, l'insieme potenza (o insieme delle parti) $\mathcal{P}(S)$ è

$$\mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$$

L'insieme potenza di S è l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di S.

Definizione

Per ogni insieme S, l'insieme potenza (o insieme delle parti) $\mathcal{P}(S)$ è

$$\mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$$

L'insieme potenza di S è l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di S.

Es. Se $S = \{a, bb\}$, allora

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{bb\}, \{a, bb\}\}$$

Definizione

Per ogni insieme S, l'insieme potenza (o insieme delle parti) $\mathcal{P}(S)$ è

$$\mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$$

L'insieme potenza di S è l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di S.

Es. Se $S = \{a, bb\}$, allora

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{bb\}, \{a, bb\}\}$$

Lemma Se S è un insieme finito allora $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$.

Definizione

Per ogni insieme S, l'insieme potenza (o insieme delle parti) $\mathcal{P}(S)$ è

$$\mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$$

L'insieme potenza di S è l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di S.

Es. Se $S = \{a, bb\}$, allora

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{bb\}, \{a, bb\}\}$$

Lemma Se S è un insieme finito allora $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$.

Cioè, esistono $2^{|S|}$ differenti sottoinsiemi di S. Perchè?

Definizione

Per ogni insieme S, l'insieme potenza (o insieme delle parti) $\mathcal{P}(S)$ è

$$\mathcal{P}(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$$

L'insieme potenza di S è l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di S.

Es. Se $S = \{a, bb\}$, allora

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{bb\}, \{a, bb\}\}$$

Lemma Se S è un insieme finito allora $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$.

Cioè, esistono $2^{|S|}$ differenti sottoinsiemi di S. Perchè?
Suggerimento: utilizzare il principio di induzione su $|S|$.

Rivedere i concetti di:

Rivedere i concetti di:

- grafo (orientato e non),

Rivedere i concetti di:

- grafo (orientato e non),
- cammino (semplice) e ciclo (semplice),

Rivedere i concetti di:

- grafo (orientato e non),
- cammino (semplice) e ciclo (semplice),
- grafo connesso, grafo fortemente connesso,

Rivedere i concetti di:

- grafo (orientato e non),
- cammino (semplice) e ciclo (semplice),
- grafo connesso, grafo fortemente connesso,
- albero, altezza di un albero, nodo interno e foglia.

Rivedere i concetti di:

Rivedere i concetti di:

- Operazioni Booleane *AND* (o $\wedge$), *OR* (o $\vee$), *NOT* (o $\neg$)

Rivedere i concetti di:

- Operazioni Booleane *AND* (o $\wedge$), *OR* (o $\vee$), *NOT* (o $\neg$)
- Variabili booleane e letterali

Rivedere i concetti di:

- Operazioni Booleane *AND* (o $\wedge$), *OR* (o $\vee$), *NOT* (o $\neg$)
- Variabili booleane e letterali
- Espressioni Booleane

Rivedere i concetti di:

- Operazioni Booleane *AND* (o $\wedge$), *OR* (o $\vee$), *NOT* (o $\neg$)
- Variabili booleane e letterali
- Espressioni Booleane
- Forme normali canoniche *SOP* e *POS*

Definizione

Un'espressione booleana ϕ *sulle variabili* $x_1, \ldots, x_n$ *è soddisfacibile se esiste un'assegnamento di valori alle variabili* $x_1, \ldots, x_n$*, che renda vera* ϕ*.*

Definizione

Un'espressione booleana ϕ *sulle variabili* $x_1, \ldots, x_n$ *è soddisfacibile se esiste un'assegnamento di valori alle variabili* $x_1, \ldots, x_n$*, che renda vera* ϕ*.*

- Valutare un'espressione booleana (su un'assegnamento di valori) è un problema diverso dallo stabilire se l'espressione è soddisfacibile.

Definizione

Un'espressione booleana ϕ sulle variabili $x_1, \ldots, x_n$ è soddisfacibile se esiste un'assegnamento di valori alle variabili $x_1, \ldots, x_n$, che renda vera ϕ.

- Valutare un'espressione booleana (su un'assegnamento di valori) è un problema diverso dallo stabilire se l'espressione è soddisfacibile.
- Entrambi i problemi sono poi diversi dal problema di cercare un'assegnamento di valori alle variabili che renda vera un'espressione booleana soddisfacibile.

- Esempio. Valutare l'espressione $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2})$ per $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.

- Esempio. Valutare l'espressione $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2})$ per $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.
- Esempio. Indicare quali delle seguenti espressioni sono soddisfacibili, giustificando la risposta.

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}),$$

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}),$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

ELEMENTI DI TEORIA DELLA COMPUTAZIONE

Definizioni, teoremi e prove

Dimostrazioni per assurdo.

Dimostrazioni per assurdo.

Teorema

$\sqrt{2}$ è irrazionale.

Dimostrazioni per assurdo.

Teorema
$\sqrt{2}$ *è irrazionale.*

Dimostrazioni costruttive.

Dimostrazioni per assurdo.

Teorema
$\sqrt{2}$ *è irrazionale.*

Dimostrazioni costruttive.

Teorema
Per ogni numero pari n*,* $n > 2$*, esiste un grafo non orientato con* n *nodi, in cui ogni nodo ha grado 3.*

Dimostrazioni per assurdo.

Teorema
$\sqrt{2}$ è irrazionale.

Dimostrazioni costruttive.

Teorema
Per ogni numero pari n, $n > 2$, esiste un grafo non orientato con n nodi, in cui ogni nodo ha grado 3.

Dimostrazioni per induzione.

Dimostrazioni per assurdo.

Teorema

$\sqrt{2}$ è irrazionale.

Dimostrazioni costruttive.

Teorema

Per ogni numero pari n, $n > 2$, esiste un grafo non orientato con n nodi, in cui ogni nodo ha grado 3.

Dimostrazioni per induzione.

$$S(n) : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazioni per assurdo.

Teorema

$\sqrt{2}$ è irrazionale.

Dimostrazioni costruttive.

Teorema

Per ogni numero pari n, $n > 2$, esiste un grafo non orientato con n nodi, in cui ogni nodo ha grado 3.

Dimostrazioni per induzione.

$$S(n) : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Errori nelle prove:

Problemi 0.10 e 0.11 in [M. Sipser]

ELEMENTI DI TEORIA DELLA COMPUTAZIONE

Alfabeti, Stringhe e Linguaggi

Un alfabeto è un insieme finito di elementi (chiamati lettere o simboli)

Un alfabeto è un insieme finito di elementi (chiamati lettere o simboli)

Es: L'alfabeto delle lettere romane minuscole è

$$\Sigma = \{a, b, c, ..., z\}$$

Un alfabeto è un insieme finito di elementi (chiamati lettere o simboli)

Es: L'alfabeto delle lettere romane minuscole è

$$\Sigma = \{a, b, c, ..., z\}$$

Es: L'alfabeto delle cifre arabe è

$$\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$$

Alfabeto

Un alfabeto è un insieme finito di elementi (chiamati lettere o simboli)

Es: L'alfabeto delle lettere romane minuscole è

$$\Sigma = \{a, b, c, ..., z\}$$

Es: L'alfabeto delle cifre arabe è

$$\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$$

Es: L'alfabeto binario è

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

Una stringa (o parola) su un alfabeto è una sequenza finita di simboli dell'alfabeto.
La **stringa vuota** ϵ è la stringa che non contiene nessun simbolo.

Una stringa (o parola) su un alfabeto è una sequenza finita di simboli dell'alfabeto.
La **stringa vuota** ϵ è la stringa che non contiene nessun simbolo.

- **Es:** cat, food, c, babbz sono stringhe sull'alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, ..., z\}$.

Una stringa (o parola) su un alfabeto è una sequenza finita di simboli dell'alfabeto.
La **stringa vuota** ϵ è la stringa che non contiene nessun simbolo.

- **Es:** cat, food, c, babbz sono stringhe sull'alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, ..., z\}$.
- **Es:** 0131 è una stringa sull'alfabeto $\Sigma = \{0, 1, 2, ..., 9\}$.

Una stringa (o parola) su un alfabeto è una sequenza finita di simboli dell'alfabeto.
La **stringa vuota** ϵ è la stringa che non contiene nessun simbolo.

- **Es:** cat, food, c, babbz sono stringhe sull'alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, ..., z\}$.
- **Es:** 0131 è una stringa sull'alfabeto $\Sigma = \{0, 1, 2, ..., 9\}$.
- **Es:** 0101 è una stringa sull'alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$.

Definizione

PASSO BASE: *la stringa vuota* ϵ *è una stringa.*

Definizione

PASSO BASE: *la stringa vuota* ϵ *è una stringa.*

PASSO RICORSIVO: *Se* w *è una stringa e* $x \in \Sigma$ *è un simbolo dell'alfabeto, allora* wx *è una stringa.*

Definizione

PASSO BASE: *la stringa vuota* ϵ *è una stringa.*

PASSO RICORSIVO: *Se* w *è una stringa e* $x \in \Sigma$ *è un simbolo dell'alfabeto, allora* wx *è una stringa.*

- **Nota.** *Se nel passo ricorsivo* $w = \epsilon$, *porremo* $\epsilon x = x$.

Per ogni stringa s, la lunghezza di s è il numero di simboli in s.

Per ogni stringa s, la lunghezza di s è il numero di simboli in s.

La lunghezza di s è denotata con $|s|$.

Per ogni stringa s, la lunghezza di s è il numero di simboli in s.

La lunghezza di s è denotata con $|s|$.

Es: $|mom| = 3$.

Per ogni stringa s, la lunghezza di s è il numero di simboli in s.

La lunghezza di s è denotata con $|s|$.

Es: $|mom| = 3$.

La lunghezza della parola vuota è zero
$|\epsilon| = 0$.

Definizione ricorsiva di lunghezza di una stringa

Definizione

La lunghezza di una stringa w sull'alfabeto Σ, denotata $|w|$, è definita ricorsivamente come segue:

Definizione ricorsiva di lunghezza di una stringa

Definizione

La lunghezza di una stringa w sull'alfabeto Σ, denotata $|w|$, è definita ricorsivamente come segue:

PASSO BASE: $|\epsilon| = 0$.

Definizione ricorsiva di lunghezza di una stringa

Definizione

La lunghezza di una stringa w sull'alfabeto Σ, denotata $|w|$, è definita ricorsivamente come segue:

PASSO BASE: $|\epsilon| = 0$.

PASSO RICORSIVO: *Se w è una stringa e $x \in \Sigma$ è un simbolo dell'alfabeto, allora $|wx| = |w| + 1$.*

Def. Dato un alfabeto Σ, denotiamo con Σ^* l'insieme di tutte le possibili stringhe su Σ.

Def. Dato un alfabeto Σ, denotiamo con Σ^* l'insieme di tutte le possibili stringhe su Σ.

Es: Se $\Sigma = \{a, b\}$ allora
$\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, ...\}$

Def. Dato un alfabeto Σ, denotiamo con Σ^* l'insieme di tutte le possibili stringhe su Σ.

Es: Se $\Sigma = \{a, b\}$ allora
$\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, ...\}$

Σ e Σ^* sono due insiemi diversi che non vanno confusi.

Definizione

L'insieme Σ^* delle stringhe sull'alfabeto Σ è definito ricorsivamente come segue:

Definizione

L'insieme Σ^* delle stringhe sull'alfabeto Σ è definito ricorsivamente come segue:

PASSO BASE: $\epsilon \in \Sigma^*$ *(dove ϵ è la stringa vuota).*

Definizione

L'insieme Σ^* delle stringhe sull'alfabeto Σ è definito ricorsivamente come segue:

PASSO BASE: $\epsilon \in \Sigma^*$ *(dove ϵ è la stringa vuota).*

PASSO RICORSIVO: *Se $w \in \Sigma^*$ e $x \in \Sigma$, allora $wx \in \Sigma^*$.*

Definizione

L'insieme Σ^* delle stringhe sull'alfabeto Σ è definito ricorsivamente come segue:

PASSO BASE: $\epsilon \in \Sigma^*$ *(dove ϵ è la stringa vuota).*

PASSO RICORSIVO: *Se $w \in \Sigma^*$ e $x \in \Sigma$, allora $wx \in \Sigma^*$.*

- **Nota.** *Se nel passo ricorsivo $w = \epsilon$, porremo $\epsilon x = x$.*

Def. Date due stringhe **u** e **v**, la concatenazione di **u** e **v** è la stringa **uv**.

Def. Date due stringhe $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, la concatenazione di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è la stringa $\mathbf{uv}$.

Es: $\mathbf{u} = abb$ e $\mathbf{v} = ab$, allora $\mathbf{uv} = abbab$ e $\mathbf{vu} = ababb$

Def. Date due stringhe $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, la concatenazione di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è la stringa $\mathbf{uv}$.

Es: $\mathbf{u} = abb$ e $\mathbf{v} = ab$, allora $\mathbf{uv} = abbab$ e $\mathbf{vu} = ababb$

Es: $\mathbf{u} = \epsilon$ e $\mathbf{v} = ab$, allora $\mathbf{uv} = ab$

Def. Date due stringhe $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, la concatenazione di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è la stringa $\mathbf{uv}$.

Es: $\mathbf{u} = abb$ e $\mathbf{v} = ab$, allora $\mathbf{uv} = abbab$ e $\mathbf{vu} = ababb$

Es: $\mathbf{u} = \epsilon$ e $\mathbf{v} = ab$, allora $\mathbf{uv} = ab$

Es: $\mathbf{u} = bb$ e $\mathbf{v} = \epsilon$, allora $\mathbf{uv} = bb$

Def. Date due stringhe $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, la concatenazione di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è la stringa $\mathbf{uv}$.

Es: $\mathbf{u} = abb$ e $\mathbf{v} = ab$, allora $\mathbf{uv} = abbab$ e $\mathbf{vu} = ababb$

Es: $\mathbf{u} = \epsilon$ e $\mathbf{v} = ab$, allora $\mathbf{uv} = ab$

Es: $\mathbf{u} = bb$ e $\mathbf{v} = \epsilon$, allora $\mathbf{uv} = bb$

Es: $\mathbf{u} = \epsilon$ e $\mathbf{v} = \epsilon$, allora $\mathbf{uv} = \epsilon$; cioè $\epsilon\epsilon = \epsilon$

Definizione

Sia Σ^* l'insieme delle stringhe sull'alfabeto Σ. La concatenazione di due stringhe, denotata con $\cdot$, è definita ricorsivamente come segue:

Definizione ricorsiva di concatenazione

Definizione

Sia Σ^* l'insieme delle stringhe sull'alfabeto Σ. La concatenazione di due stringhe, denotata con $\cdot$, è definita ricorsivamente come segue:

PASSO BASE: *Se $w \in \Sigma^*$, allora $w \cdot \epsilon = w$.*

Definizione

Sia Σ^* l'insieme delle stringhe sull'alfabeto Σ. La concatenazione di due stringhe, denotata con $\cdot$, è definita ricorsivamente come segue:

PASSO BASE: *Se $w \in \Sigma^*$, allora $w \cdot \epsilon = w$.*

PASSO RICORSIVO: *Se $w_1 \in \Sigma^*$, $w_2 \in \Sigma^*$ e $x \in \Sigma$, allora $w_1 \cdot (w_2 x) = (w_1 \cdot w_2)x \in \Sigma^*$.*

La concatenazione di due stringhe w_1 e w_2 è spesso denotata $w_1 w_2$ (invece che $w_1 \cdot w_2$).

Def. Per una stringa $\mathbf{w}$, definiamo $\mathbf{w}^n$ per $n \geq 0$ ricorsivamente:
PASSO BASE: $\mathbf{w}^0 = \epsilon$
PASSO RICORSIVO: $\mathbf{w}^{n+1} = \mathbf{w}^n\mathbf{w}$, per ogni $n \geq 0$.

Def. Per una stringa $\mathbf{w}$, definiamo $\mathbf{w}^n$ per $n \geq 0$ ricorsivamente:
PASSO BASE: $\mathbf{w}^0 = \epsilon$
PASSO RICORSIVO: $\mathbf{w}^{n+1} = \mathbf{w}^n\mathbf{w}$, per ogni $n \geq 0$.

Es: Se $\mathbf{w} = cat$, allora
$\mathbf{w}^0 = \epsilon$,
$\mathbf{w}^1 = cat$,
$\mathbf{w}^2 = catcat$,
$\mathbf{w}^3 = catcatcat$,
$\ldots$

Def. Per una stringa $\mathbf{w}$, definiamo $\mathbf{w}^n$ per $n \geq 0$ ricorsivamente:
PASSO BASE: $\mathbf{w}^0 = \epsilon$
PASSO RICORSIVO: $\mathbf{w}^{n+1} = \mathbf{w}^n\mathbf{w}$, per ogni $n \geq 0$.

Es: Se $\mathbf{w} = cat$, allora
$\mathbf{w}^0 = \epsilon$,
$\mathbf{w}^1 = cat$,
$\mathbf{w}^2 = catcat$,
$\mathbf{w}^3 = catcatcat$,
...

Es: Data una lettera a
$a^3 = aaa$
$a^0 = \epsilon$

Def. Data una stringa $\mathbf{s}$, una *sottostringa* di $\mathbf{s}$ è una qualsiasi sequenza di simboli consecutivi della stringa $\mathbf{s}$ cioè,
$\mathbf{w}$ è una sottostringa di $\mathbf{s}$ se esistono stringhe $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ (eventualmente vuote) tali che

$$\mathbf{s} = \mathbf{xwy}$$

Def. Data una stringa **s**, una *sottostringa* di **s** è una qualsiasi sequenza di simboli consecutivi della stringa **s** cioè,
w è una sottostringa di **s** se esistono stringhe **x** e **y** (eventualmente vuote) tali che

$$\mathbf{s} = \mathbf{xwy}$$

Es:
567 è sottostringa di 56789
567 è sottostringa di 45678
567 è sottostringa di 34567

Def. Data una stringa **s**, una *sottostringa* di **s** è una qualsiasi sequenza di simboli consecutivi della stringa **s** cioè,
w è una sottostringa di **s** se esistono stringhe **x** e **y** (eventualmente vuote) tali che

$$\mathbf{s} = \mathbf{xwy}$$

Es:
567 è sottostringa di 56789
567 è sottostringa di 45678
567 è sottostringa di 34567

Es: La stringa 472 ha sottostringhe

$$\epsilon, 4, 7, 2, 47, 72, 472$$

Ma 42 non è sottostringa di 472.

Inversa di una stringa

Definizione

L'inversa (o reverse) $\mathbf{w}^R$ *di una stringa* w *è la stringa ottenuta scrivendo i caratteri di* w *da destra verso sinistra.*

Definizione

L'inversa (o reverse) $\mathbf{w}^R$ *di una stringa* w *è la stringa ottenuta scrivendo i caratteri di* w *da destra verso sinistra.*

$\epsilon^R = \epsilon$ e se $w = a_1 \cdots a_n$, con a_j lettere, allora

$$\mathbf{w}^R = a_n a_{n-1} \cdots a_1.$$

Definizione

L'inversa (o reverse) $\mathbf{w}^R$ *di una stringa* w *è la stringa ottenuta scrivendo i caratteri di* w *da destra verso sinistra.*

$\epsilon^R = \epsilon$ e se $w = a_1 \cdots a_n$, con a_j lettere, allora

$$\mathbf{w}^R = a_n a_{n-1} \cdots a_1.$$

Es. $(cat)^R = tac$.

Definizione ricorsiva dell'inversa di una stringa

PASSO BASE: $\epsilon^R = \epsilon$.

Definizione ricorsiva dell'inversa di una stringa

PASSO BASE: $\epsilon^R = \epsilon$.

PASSO RICORSIVO: Per ogni $x \in \Sigma^*$ e $\sigma \in \Sigma$, $(x\sigma)^R = \sigma x^R$.

Definizione

Un linguaggio (formale) è un insieme di stringhe su un alfabeto.
L è un linguaggio sull'alfabeto Σ se $L \subseteq \Sigma^*$.

Definizione

Un linguaggio (formale) è un insieme di stringhe su un alfabeto.
L è un linguaggio sull'alfabeto Σ se $L \subseteq \Sigma^*$.

Esempi: Linguaggi per computer, quali C, C^{++} o Java, sono linguaggi formali con alfabeto

$$\{a, b, ..., z, A, B, ..., Z, , 0, 1, 2, ..., 9, >, <, =, +, -, *, /, (,), \cdots\}.$$

Le regole della sintassi definiscono le regole del linguaggio. L'insieme dei nomi validi di variabili in C (o in C^{++} o Java) è un linguaggio formale.

- Nota: non solo insiemi finiti.

  Infatti gli insiemi finiti non sono di solito linguaggi interessanti.

  Tutti i nostri alfabeti sono finiti, ma la maggior parte dei linguaggi che incontreremo sono infiniti.

- **Es.** Alfabeto $\Sigma = \{a\}$.
  Linguaggio $L = \{\epsilon, a, aa, aaa, aaaa, ...\} = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$
  Nota: $a^0 = \epsilon \in L$

- **Es.** Alfabeto $\Sigma = \{a\}$.
  Linguaggio $L = \{\epsilon, a, aa, aaa, aaaa, ...\} = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$
  Nota: $a^0 = \epsilon \in L$
- **Es.** Alfabeto $\Sigma = \{a\}$.
  Linguaggio $L = \{a, aaa, aaaaa, ...\} = \{a^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$

- **Es.** Alfabeto $\Sigma = \{a\}$.
  Linguaggio $L = \{\epsilon, a, aa, aaa, aaaa, ...\} = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$
  Nota: $a^0 = \epsilon \in L$
- **Es.** Alfabeto $\Sigma = \{a\}$.
  Linguaggio $L = \{a, aaa, aaaaa, ...\} = \{a^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$
- **Es.** Alfabeto $\Sigma = \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Linguaggio
  $L = \{\text{qualsiasi stringa che non inizia con } 0\} =$
  $\{\epsilon, 1, 2, 3, ..., 9, 10, 11, ...\}$

- **Es.** Alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.
  Linguaggio
  $L = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb, ...\} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$

- **Es.** Alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.
  Linguaggio
  $L = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb, ...\} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$
- **Es.** Alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.
  Linguaggio
  $X = \{w \in \Sigma^* \mid$ numero di occorrenze di a in $w =$ numero di occorrenze di b in $w\}$

- **Es.** Alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.
  Linguaggio
  $L = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb, ...\} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$
- **Es.** Alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.
  Linguaggio
  $X = \{w \in \Sigma^* \mid \text{ numero di occorrenze di } a \text{ in } w = \text{ numero di occorrenze di } b \text{ in } w\}$
- $L = X$?

Es. Sia $A = \{a, b\}$, definiamo il linguaggio L delle stringhe che iniziano con a seguita da 0 o più b;
$L = \{a, ab, abb, abbb, ...\} = \{ab^n | n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$

Es. Sia $A = \{a, b\}$, definiamo il linguaggio L delle stringhe che iniziano con a seguita da 0 o più b;
$L = \{a, ab, abb, abbb, ...\} = \{ab^n | n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$

Nota. L'insieme vuoto $\emptyset$ è il linguaggio che non contiene nessuna stringa.

Es. Sia $A = \{a, b\}$, definiamo il linguaggio L delle stringhe che iniziano con a seguita da 0 o più b;
$L = \{a, ab, abb, abbb, ...\} = \{ab^n | n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$

Nota. L'insieme vuoto $\emptyset$ è il linguaggio che non contiene nessuna stringa.

- $\epsilon \notin \emptyset$

Es. Sia $A = \{a, b\}$, definiamo il linguaggio L delle stringhe che iniziano con a seguita da 0 o più b;
$L = \{a, ab, abb, abbb, ...\} = \{ab^n | n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$

Nota. L'insieme vuoto $\emptyset$ è il linguaggio che non contiene nessuna stringa.

- $\epsilon \notin \emptyset$
- $\emptyset \neq \{\epsilon\}$

Es. Sia $A = \{a, b\}$, definiamo il linguaggio L delle stringhe che iniziano con a seguita da 0 o più b;
$L = \{a, ab, abb, abbb, ...\} = \{ab^n | n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$

Nota. L'insieme vuoto $\emptyset$ è il linguaggio che non contiene nessuna stringa.

- $\epsilon \notin \emptyset$
- $\emptyset \neq \{\epsilon\}$

poiché $\emptyset$ non ha elementi.

I linguaggi sono insiemi. Quindi possiamo applicare a essi le operazioni di unione, intersezione, differenza, complemento.

I linguaggi sono insiemi. Quindi possiamo applicare a essi le operazioni di unione, intersezione, differenza, complemento.

Se $L \subseteq \Sigma^*$,
$\overline{L} = \Sigma^* - L = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$.

I linguaggi sono insiemi. Quindi possiamo applicare a essi le operazioni di unione, intersezione, differenza, complemento.

Se $L \subseteq \Sigma^*$,
$\overline{L} = \Sigma^* - L = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$.

Es. Alfabeto $\{a, b\}$
Linguaggio $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{ la prima lettera di } w \text{ è } b\}$
$\overline{L}$: ?

I linguaggi sono insiemi. Quindi possiamo applicare a essi le operazioni di unione, intersezione, differenza, complemento.

Se $L \subseteq \Sigma^*$,
$\overline{L} = \Sigma^* - L = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$.

Es. Alfabeto $\{a, b\}$
Linguaggio $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid$ la prima lettera di w è $b\}$
$\overline{L}$: ?

$\overline{L}$: insieme delle stringhe su $\{a, b\}$ che non iniziano con b.
N.B.:<u>NON</u> insieme stringhe che iniziano con a (es. stringa vuota $\epsilon \in \overline{L}$)

I linguaggi sono insiemi. Quindi possiamo applicare a essi le operazioni di unione, intersezione, differenza, complemento.

Se $L \subseteq \Sigma^*$,
$\overline{L} = \Sigma^* - L = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$.

Es. Alfabeto $\{a, b\}$
Linguaggio $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid$ la prima lettera di w è $b\}$
$\overline{L}$: ?

$\overline{L}$: insieme delle stringhe su $\{a, b\}$ che non iniziano con b.
N.B.:<u>NON</u> insieme stringhe che iniziano con a (es. stringa vuota $\epsilon \in \overline{L}$)

Es. Alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$
Linguaggio
$L = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb, ...\} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$.
Chi è il complemento $\overline{L}$ di L?

Prodotto di linguaggi

Prodotto di linguaggi

Definizione

Dati due linguaggi S e T sull'alfabeto Σ, il prodotto (o concatenazione) di S e T è

$$ST = S \circ T = \{uv \in \Sigma^* \mid u \in S, \quad v \in T\}$$

Prodotto di linguaggi

Definizione

Dati due linguaggi S e T sull'alfabeto Σ, il prodotto (o concatenazione) di S e T è

$$ST = S \circ T = \{uv \in \Sigma^* \mid u \in S, \quad v \in T\}$$

ST è l'insieme di tutte le stringhe che sono concatenazione di una stringa in S e di una stringa in T.

Prodotto di linguaggi

Definizione

Dati due linguaggi S e T sull'alfabeto Σ, il prodotto (o concatenazione) di S e T è

$$ST = S \circ T = \{uv \in \Sigma^* \mid u \in S, \quad v \in T\}$$

ST è l'insieme di tutte le stringhe che sono concatenazione di una stringa in S e di una stringa in T.

Es. Se $S = \{a, aa\}$ e $T = \{\epsilon, a, ba\}$, allora

$$ST = \{a, aa, aba, aaa, aaba\}, \quad TS = \{a, aa, aaa, baa, baaa\}$$

Prodotto di linguaggi

Definizione

Dati due linguaggi S e T sull'alfabeto Σ, il prodotto (o concatenazione) di S e T è

$$ST = S \circ T = \{uv \in \Sigma^* \mid u \in S, \quad v \in T\}$$

ST è l'insieme di tutte le stringhe che sono concatenazione di una stringa in S e di una stringa in T.

Es. Se $S = \{a, aa\}$ e $T = \{\epsilon, a, ba\}$, allora

$$ST = \{a, aa, aba, aaa, aaba\}, \quad TS = \{a, aa, aaa, baa, baaa\}$$

Nota: $aba \in ST$, ma $aba \notin TS$. Quindi $ST \neq TS$

Prodotto di linguaggi

Definizione

Dati due linguaggi S e T sull'alfabeto Σ, il prodotto (o concatenazione) di S e T è

$$ST = S \circ T = \{uv \in \Sigma^* \mid u \in S, \quad v \in T\}$$

ST è l'insieme di tutte le stringhe che sono concatenazione di una stringa in S e di una stringa in T.

Es. Se $S = \{a, aa\}$ e $T = \{\epsilon, a, ba\}$, allora

$$ST = \{a, aa, aba, aaa, aaba\}, \quad TS = \{a, aa, aaa, baa, baaa\}$$

Nota: $aba \in ST$, ma $aba \notin TS$. Quindi $ST \neq TS$

$\emptyset \circ T =?$

Prodotto di linguaggi

Prodotto di linguaggi

Nota Il prodotto di linguaggi è un'operazione diversa dal prodotto cartesiano:
se $S = \{a, ba, bb\}$ e $T = \{\epsilon, ba\}$ allora

$$ST = \{a, aba, ba, baba, bb, bbba\},$$

$$S \times T = \{(a, \epsilon), (a, ba), (ba, \epsilon), (ba, ba), (bb, \epsilon), (bb, ba)\},$$

$$ST \neq S \times T$$

Prodotto di linguaggi

Nota Il prodotto di linguaggi è un'operazione diversa dal prodotto cartesiano:
se $S = \{a, ba, bb\}$ e $T = \{\epsilon, ba\}$ allora

$$ST = \{a, aba, ba, baba, bb, bbba\},$$

$$S \times T = \{(a, \epsilon), (a, ba), (ba, \epsilon), (ba, ba), (bb, \epsilon), (bb, ba)\},$$

$$ST \neq S \times T$$

- **Nota:** Se S e T sono linguaggi finiti, $|ST| = |S||T|$?

Prodotto di linguaggi

Nota Il prodotto di linguaggi è un'operazione diversa dal prodotto cartesiano:
se $S = \{a, ba, bb\}$ e $T = \{\epsilon, ba\}$ allora

$$ST = \{a, aba, ba, baba, bb, bbba\},$$

$$S \times T = \{(a, \epsilon), (a, ba), (ba, \epsilon), (ba, ba), (bb, \epsilon), (bb, ba)\},$$

$$ST \neq S \times T$$

- **Nota:** Se S e T sono linguaggi finiti, $|ST| = |S||T|$?

  Suggerimento: Considerare $S = \{ab, a\}$, $T = \{a, ba\}$.

Potenza di un linguaggio

Potenza di un linguaggio

Definizione

Sia L un linguaggio sull'alfabeto Σ. Definiamo:

$$\begin{aligned} L^0 &= \{\epsilon\}, \\ L^k &= L^{k-1}L, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

Potenza di un linguaggio

Definizione

Sia L un linguaggio sull'alfabeto Σ. Definiamo:

$$\begin{aligned} L^0 &= \{\epsilon\}, \\ L^k &= L^{k-1}L, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

Nota. $L^1 = L$,
$L^k = \{w_1 w_2 \dots w_k \mid w_i \in L,\ 1 \leq i \leq k\},\ k \geq 0.$

Potenza di un linguaggio

Definizione

Sia L un linguaggio sull'alfabeto Σ. Definiamo:

$$\begin{aligned} L^0 &= \{\epsilon\}, \\ L^k &= L^{k-1}L, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

Nota. $L^1 = L$,
$L^k = \{w_1 w_2 \dots w_k \mid w_i \in L,\ 1 \leq i \leq k\},\ k \geq 0.$
Es. Se $L = \{a, bb\}$, allora

$$\begin{aligned} L^0 &= \{\epsilon\}, \\ L^1 &= \{a, bb\}, \\ L^2 &= \{aa, abb, bba, bbbb\}, \\ L^3 &= \{aaa, aabb, abba, abbbb, bbaa, bbabb, bbbba, bbbbbb\}. \end{aligned}$$

Chiusura di Kleene (o Kleene star o star)

Chiusura di Kleene (o Kleene star o star)

Definizione

La chiusura di Kleene (o Kleene star o star) di un linguaggio L è

$$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$$

Chiusura di Kleene (o Kleene star o star)

Definizione

La chiusura di Kleene (o Kleene star o star) di un linguaggio L è

$$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$$

Nota. L^* è il linguaggio delle stringhe ottenute concatenando un numero qualsiasi di stringhe di L:

Chiusura di Kleene (o Kleene star o star)

Definizione

La chiusura di Kleene (o Kleene star o star) di un linguaggio L è

$$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$$

Nota. L^* è il linguaggio delle stringhe ottenute concatenando un numero qualsiasi di stringhe di L:

$$L^* = \{w_1 w_2 \dots w_k \mid k \geq 0,\ w_i \in L,\ 0 \leq i \leq k\}$$

Chiusura di Kleene (o Kleene star o star)

Definizione

La chiusura di Kleene (o Kleene star o star) di un linguaggio L è

$$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$$

Nota. L^* è il linguaggio delle stringhe ottenute concatenando un numero qualsiasi di stringhe di L:

$$L^* = \{w_1 w_2 \dots w_k \mid k \geq 0,\ w_i \in L,\ 0 \leq i \leq k\}$$

Nota. Se $k = 0$, $w_1 w_2 \dots w_k = \epsilon$ è la stringa vuota.

Chiusura di Kleene

Chiusura di Kleene

Es. Se $L = \{ba, a\}$, allora

$$L^* = \{\epsilon, a, aa, ba, aaa, aba, baa, aaaa, aaba, ...\}$$

Chiusura di Kleene

Es. Se $L = \{ba, a\}$, allora

$$L^* = \{\epsilon, a, aa, ba, aaa, aba, baa, aaaa, aaba, ...\}$$

Può *bb* essere una sottostringa di $w \in L^*$?

Chiusura di Kleene

Es. Se $L = \{ba, a\}$, allora

$$L^* = \{\epsilon, a, aa, ba, aaa, aba, baa, aaaa, aaba, ...\}$$

Può *bb* essere una sottostringa di $w \in L^*$?

Es. Se $L = \{a, b\}$, allora

$$L^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, ...\},$$

tutte le possibili stringhe su alfabeto L.

Chiusura di Kleene

Es. Se $L = \{ba, a\}$, allora

$$L^* = \{\epsilon, a, aa, ba, aaa, aba, baa, aaaa, aaba, ...\}$$

Può *bb* essere una sottostringa di $w \in L^*$?

Es. Se $L = \{a, b\}$, allora

$$L^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, ...\},$$

tutte le possibili stringhe su alfabeto L.

Es. Se $L = \emptyset$, allora $L^* = \{\epsilon\}$.

Chiusura di Kleene

Es. Se $L = \{ba, a\}$, allora

$$L^* = \{\epsilon, a, aa, ba, aaa, aba, baa, aaaa, aaba, ...\}$$

Può *bb* essere una sottostringa di $w \in L^*$?

Es. Se $L = \{a, b\}$, allora

$$L^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, ...\},$$

tutte le possibili stringhe su alfabeto L.

Es. Se $L = \emptyset$, allora $L^* = \{\epsilon\}$.

Es. Se $L = \{\epsilon\}$, allora $L^* = \{\epsilon\}$

Chiusura di Kleene

Chiusura di Kleene

Es. Se $L = \{a^n \mid n \geq 0, n \in \mathbb{N}\} = \{a\}^*$, allora
$L^* = \{a^n \mid n \geq 0, n \in \mathbb{N}\} = L$

Chiusura di Kleene

Es. Se $L = \{a^n \mid n \geq 0, n \in \mathbb{N}\} = \{a\}^*$, allora
$L^* = \{a^n \mid n \geq 0, n \in \mathbb{N}\} = L$

Nota. Per ogni linguaggio L risulta $(L^*)^* = L^*$.

Chiusura di Kleene

Es. Se $L = \{a^n \mid n \geq 0, n \in \mathbb{N}\} = \{a\}^*$, allora
$L^* = \{a^n \mid n \geq 0, n \in \mathbb{N}\} = L$

Nota. Per ogni linguaggio L risulta $(L^*)^* = L^*$.

Per dimostrare questa uguaglianza occorre utilizzare la definizione dell'operazione star.

Chiusura di Kleene

Es. Se $L = \{a^n \mid n \geq 0, n \in \mathbb{N}\} = \{a\}^*$, allora
$L^* = \{a^n \mid n \geq 0, n \in \mathbb{N}\} = L$

Nota. Per ogni linguaggio L risulta $(L^*)^* = L^*$.

Per dimostrare questa uguaglianza occorre utilizzare la definizione dell'operazione star.

Per intuire perché sussiste l'uguaglianza: $(L^*)^*$ è l'insieme delle stringhe ottenute concatenando stringhe di L^* e la concatenazione di stringhe di L^* è ancora una stringa di L^*.

Chiusura positiva

Chiusura positiva

Definizione

Per un linguaggio L sull'alfabeto Σ, definiamo

$$\begin{aligned} L^{+} &= \bigcup_{n>0} L^{n} \\ &= \{w_1 w_2 \cdots w_k \mid k > 0,\ w_i \in L,\ 1 \le i \le k\} \end{aligned}$$

Chiusura positiva

Definizione

Per un linguaggio L sull'alfabeto Σ, definiamo

$$\begin{aligned} L^+ &= \bigcup_{n>0} L^n \\ &= \{w_1 w_2 \cdots w_k \mid k > 0,\ w_i \in L,\ 1 \leq i \leq k\} \end{aligned}$$

Es. Se $L = \{a\}$, allora

$$L^+ = \{a, aa, aaa, ...\} = \{a^n \mid n > 0, n \in \mathbb{N}\}$$

Chiusura positiva

Definizione

Per un linguaggio L sull'alfabeto Σ, definiamo

$$\begin{aligned} L^+ &= \bigcup_{n>0} L^n \\ &= \{w_1 w_2 \cdots w_k \mid k > 0,\ w_i \in L,\ 1 \leq i \leq k\} \end{aligned}$$

Es. Se $L = \{a\}$, allora

$$L^+ = \{a, aa, aaa, ...\} = \{a^n \mid n > 0, n \in \mathbb{N}\}$$

Esiste un linguaggio L tale che $\epsilon \in L^+$?

- Quante sono le stringhe sull'alfabeto $\Sigma = \{a_1, \dots, a_k\}$ di lunghezza n? Qual è la cardinalità di Σ^n?

- Quante sono le stringhe sull'alfabeto $\Sigma = \{a_1, \dots, a_k\}$ di lunghezza n? Qual è la cardinalità di Σ^n?
- Dare una definizione più semplice del linguaggio

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ non contiene occorrenze della stringa } ab$$
$$\text{e non contiene occorrenze della stringa } ba\}$$

- Quante sono le stringhe sull'alfabeto $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_k\}$ di lunghezza n? Qual è la cardinalità di Σ^n?
- Dare una definizione più semplice del linguaggio

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ non contiene occorrenze della stringa } ab$$
$$\text{e non contiene occorrenze della stringa } ba\}$$

- Definire il seguente linguaggio in funzione del linguaggio L del precedente esercizio.

$$\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ non è né una potenza di } a \text{ né una potenza di } b\}$$

- Trovare la parola più corta sull'alfabeto $\{0\}$ che non appartiene a $\{\epsilon, 0, 0^2, 0^5\}^3$.

- Trovare la parola più corta sull'alfabeto $\{0\}$ che non appartiene a $\{\epsilon, 0, 0^2, 0^5\}^3$.
- Trovare una stringa w che non appartenga al linguaggio

$$\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ contiene un numero pari di 0}$$

$$\text{oppure esattamente due occorrenze di 1}\}$$