

Figure 1: Grafo orientato e pesato.

Esercizi sull'albero dei cammini minimi

Dato il grafo in figura 1:

- Formulare il modello matematico del problema dell'albero dei cammini minimi radicato nel nodo 1.
- Risolvere il problema applicando l'algoritmo di Dijkstra.
- Determinare il valore delle variabili corrispondente alla soluzione ottima trovata e verificarne analiticamente l'ammissibilità.

1a) Il modello matematico del problema dell'albero dei cammini minimi è il seguente:

$$\begin{aligned}
 &\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\
 &\sum_{j \in FS(i)} x_{ij} - \sum_{j \in BS(i)} x_{ji} = \begin{cases} n-1 & \text{se } i = s \\ -1 & \text{se } i \neq s \end{cases} \\
 &x_{ij} \geq 0
 \end{aligned}$$

Applicandolo al grafo in esame otteniamo:

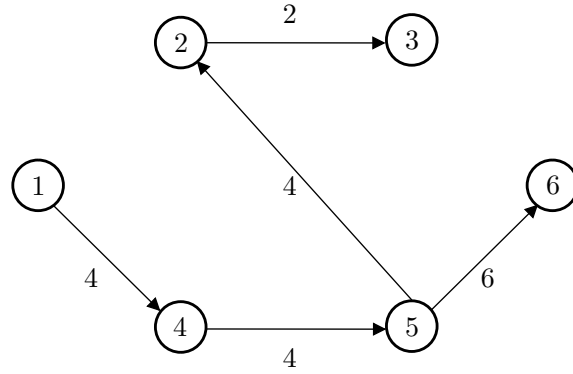


Figure 2: Albero dei cammini minimi radicato nel nodo 1.

$$\min 17x_{12} + 4x_{14} + 2x_{23} + 5x_{36} + 9x_{42} + 4x_{45} + 4x_{52} + 7x_{53} + 6x_{56}$$

$$x_{14} + x_{12} = 5$$

$$x_{23} - x_{12} - x_{42} - x_{52} = -1$$

$$x_{36} - x_{23} - x_{53} = -1$$

$$x_{42} + x_{45} - x_{14} = -1$$

$$x_{52} + x_{53} + x_{56} - x_{45} = -1$$

$$-x_{36} - x_{56} = -1$$

$$x_{12}, x_{14}, x_{23}, x_{36}, x_{42}, x_{45}, x_{52}, x_{53}, x_{56} \geq 0$$

1b) Risolviamo il problema applicando l'algoritmo di Dijkstra. Per prima cosa inizializziamo le etichette dei nodi: $d_1 = 0$, $d_i = \infty \forall i \neq s$, i puntatori al padre dei nodi: $\pi_s = NULL$, $\pi_i = s \forall i \neq s$, e la coda a priorità Q : $Q \leftarrow \{1\}$.

S1. Estrai il nodo 1 da Q ed analizza la sua stella uscente: $d_4 = 4$, $\pi_4 = 1$, $d_2 = 17$, $\pi_2 = 1$, $Q \leftarrow Q \cup \{2, 4\}$.

S2. Il nodo con etichetta minima è il nodo 4 che viene estratto dalla coda: $d_2 = 13$, $\pi_2 = 4$, $d_5 = 8$, $\pi_5 = 4$, $Q \leftarrow \{2, 5\}$.

S3. Estrai il nodo 5: $d_2 = 12$, $\pi_2 = 5$, $d_3 = 15$, $\pi_3 = 5$, $d_6 = 14$, $\pi_6 = 5$, $Q \leftarrow \{2, 3, 6\}$.

S4. Estrai il nodo 2: $d_3 = 14$, $\pi_3 = 2$, $d_6 = 14$, $\pi_6 = 5$, $Q \leftarrow \{3, 6\}$.

S5. Estrai il nodo 3: $d_6 = 14$, $\pi_6 = 5$, $Q \leftarrow \{6\}$.

S6. Estrai il nodo 6. La coda Q è vuota e l'algoritmo termina

- 1c)** Per poter individuare la quantità di flusso passante su ogni arco dell'albero (il valore della variabile associata) bisogna innanzitutto individuare le foglie dell'albero individuato: ovviamente il valore del flusso sugli archi che hanno come estremo una foglia sarà uguale ad 1. Dopo si deve effettuare una visita bottom-up dell'albero: la quantità di flusso ricevuto da un qualsiasi nodo interno u sarà pari a 1 più la somma del flusso degli archi uscenti da u nell'albero.

$$x_{23} = 1, x_{56} = 1$$

$$x_{52} = 2$$

$$x_{45} = 4$$

$$x_{14} = 5$$

Per verificare analiticamente la correttezza della soluzione basta sostituire i valori calcolati nel sistema di vincoli del problema e verificare che tutti i vincoli siano soddisfatti.