Definizione. Sia X una variabile aleatoria discreta di valore atteso $E(X) = \mu$; la varianza di X, denotata con $\mathrm{Var}(X)$, è così definita:

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_{x:\, p(x)>0} (x-\mu)^2\, p(x).$$

Una formula alternativa per la varianza si ottiene usando la proprietà di linearità:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E[(X-\mu)^2] = E(X^2 - 2\mu\, X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu\, E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2.\end{aligned}$$

La maniera più semplice di valutare la varianza di X consiste quindi nel calcolare la differenza tra il momento del secondo ordine di X e il quadrato del suo valore atteso.

Esempio. Calcolare $\mathrm{Var}(X)$, dove X rappresenta l'esito del lancio di un dado.
Soluzione. Essendo $p(k) = \frac{1}{6}$ per $k = 1, 2, \ldots, 6$ e $E(X) = \frac{7}{2}$ otteniamo

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = \sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot p(k) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{6} \cdot 91 - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} \approx 2{,}9167.$$

Una variabile aleatoria X si dice *degenere* se esiste un reale x_0 tale che $P(X = x_0) = 1$. In tal caso la funzione di distribuzione di X è data da

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ 1, & x \geq x_0. \end{cases}$$

Se X è una variabile aleatoria degenere tale che $P(X = x_0) = 1$ allora è facile ricavare che $E[X] = x_0$ e $\mathrm{Var}(X) = 0$.

Notiamo che la varianza di una variabile aleatoria X è prossima a 0 quando i valori di X sono molto concentrati in prossimità del valore atteso $E[X]$. In tal caso $E[X]$ è molto significativo per la previsione del valore che assume X nella realizzazione di un esperimento. Al contrario, la varianza di X è molto grande quando i suoi valori sono molto distanti dal valore atteso, e quindi $E[X]$ è poco significativo per la previsione del valore che assume X.

Proposizione. (Proprietà della varianza) Sia X una variabile aleatoria discreta. Se a e b sono costanti reali, allora

$$\mathrm{Var}(a\,X + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X).$$

Dimostrazione. Ricordando che $E(a\,X + b) = a\,E(X) + b$, si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(a\,X + b) &= E[\{a\,X + b - E(a\,X + b)\}^2] = E[\{a\,X + b - a\,E(X) - b\}^2] \\ &= a^2\,E[\{X - E(X)\}^2] = a^2\,\mathrm{Var}(X).\end{aligned}$$

Si noti che risulta $\mathrm{Var}(a\,X + b) \geq \mathrm{Var}(X)$ se e solo se $|a| \geq 1$.

Notiamo che $E(X)$ ha stesse unità di misura di X, mentre $\mathrm{Var}(X)$ ha stesse unità di misura di X^2. La seguente misura di variabilità ha invece stesse unità di X.

Definizione. Sia X una variabile aleatoria discreta; la radice quadrata di $\mathrm{Var}(X)$, che denotiamo con σ_X, è detta *deviazione standard* di X. Cioè

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{E[(X-\mu)^2]}.$$

4.7 Le variabili aleatorie di Bernoulli e binomiali

Supponiamo di eseguire un esperimento i cui possibili esiti appartengono a due categorie, ovvero possono essere classificati come *successo* e *insuccesso*.

Poniamo $X = 1$ quando l'esito è un successo, e $X = 0$ quando l'esito è un insuccesso. La densità discreta della variabile aleatoria X è quindi

$$p(0) = P(X = 0) = 1 - p, \qquad p(1) = P(X = 1) = p \qquad (0 \leq p \leq 1)$$

dove p rappresenta la probabilità che la prova abbia avuto successo.

La variabile aleatoria X siffatta è detta variabile aleatoria di Bernoulli; la sua densità discreta può essere così espressa in forma compatta:

$$p(x) = p^x \, (1 - p)^{1-x}, \qquad x = 0, 1.$$

Notiamo che per una variabile aleatoria di Bernoulli X la funzione di distribuzione è

$$F(x) = \sum_{k \leq x} p(k) = \sum_{k \leq x} p^k \, (1-p)^{1-k} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

e il momento di ordine n è dato da

$$E[X^n] = \sum_{x=0}^{1} x^n \, p(x) = \sum_{x=0}^{1} x^n \, p^x \, (1-p)^{1-x} = p.$$

Ne segue che valore atteso e varianza sono

$$E[X] = p$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = p(1-p).$$

Notiamo che $\mathrm{Var}(X) = 0$ se $p = 0$ e $p = 1$, mentre $\mathrm{Var}(X)$ è massima per $p = 1/2$.

Supponiamo ora di eseguire n prove sotto ipotesi d'indipendenza, ognuna avente come possibili risultati successo (con probabilità p) e insuccesso (con probabilità $1 - p$).

Sia X il numero di successi che si ottengono nelle n prove. Allora, X è detta variabile aleatoria binomiale di parametri $(n; p)$. Quindi, una variabile aleatoria di Bernoulli è semplicemente una variabile aleatoria binomiale di parametri $(1; p)$.

La densità discreta di una variabile aleatoria binomiale di parametri $(n; p)$ è data da

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x \, (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \dots, n \qquad (0 \le p \le 1).$$

Ogni sequenza di n esiti contenenti x successi e $n-x$ insuccessi si verifica con probabilità $p^x \, (1-p)^{n-x}$, grazie all'ipotesi di indipendenza delle prove. La densità discreta $p(x)$ segue allora dal fatto che ci sono $\binom{n}{x}$ differenti sequenze di n esiti contenenti x successi e $n - x$ insuccessi, essendoci esattamente $\binom{n}{x}$ differenti modi di scegliere le x prove in cui si verifichino i successi. Per esempio, ci sono $\binom{4}{2} = 6$ differenti modi di avere $x = 2$ successi in $n = 4$ prove: $(ssii)$, $(sisi)$, $(siis)$, $(issi)$, $(isis)$, $(iiss)$.

Si ricava facilmente che le probabilità date dalla densità discreta

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n$$

danno somma 1 per ogni $p \in [0,1]$; infatti dal teorema del binomio si ha

$$\sum_{x=0}^{n} p(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = [p + (1-p)]^n = 1^n = 1.$$

Esempio. Determinare la densità discreta della variabile aleatoria che descrive il numero di volte che esce testa in 5 lanci indipendenti di una moneta non truccata.

Soluzione. La variabile aleatoria in questione è binomiale di parametri $(5; \frac{1}{2})$ quindi

$p(x)$	$p(0)$	$p(1)$	$p(2)$	$p(3)$	$p(4)$	$p(5)$
$\binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-x} = \binom{5}{x}\frac{1}{2^5} = \binom{5}{x}\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Esempio. Durante il "Progetto Manhattan" (per la creazione della bomba nucleare), il celebre fisico Enrico Fermi chiese al Gen. Groves, direttore del progetto, quale fosse la definizione di un "grande" generale. Groves replicò che ogni generale che ha vinto 5 battaglie in sequenza può sicuramente definirsi grande. Fermi allora chiese quanti generali fossero grandi. Groves rispose circa 3 su 100. Fermi congetturò che considerando che schieramenti opposti per molte battaglie sono approssimativamente di uguali forze, la probabilità di vincere una battaglia è $1/2$ e la probabilità di vincere 5 battaglie in sequenza è $(1/2)^5 = 1/32 = 0{,}03125$. Così concluse: "Quindi hai ragione Generale, circa 3 su 100. Probabilità matematica, non genio."

Invero, nell'ipotesi di indipendenza tra battaglie, la soluzione di Fermi è la probabilità che una variabile aleatoria binomiale X di parametri $(5; \frac{1}{2})$ assuma valore 5:

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0{,}03125.$$

Esempio. Nel gioco della roulette la probabilità che esca un numero rosso è $p = 18/37 = 0{,}4865$. Se un giocatore gioca 5 volte puntando sul rosso qual è la probabilità che non vinca mai? E che vinca almeno 2 volte? Cosa cambia se gioca 10 volte?

Soluzione. Sia X il numero di vincite realizzate in n tentativi (indipendenti); evidentemente ha distribuzione binomiale di parametri $(n; p)$. Quindi, se $n = 5$ si ha

$$P(X = 0) = \binom{5}{0}\left(\frac{18}{37}\right)^0\left(1 - \frac{18}{37}\right)^5 \approx 0{,}0357$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{18}{37}\right)^0\left(1 - \frac{18}{37}\right)^5 - \binom{5}{1}\left(\frac{18}{37}\right)^1\left(1 - \frac{18}{37}\right)^4 \approx 0{,}7952. \end{aligned}$$

Se $n = 10$ risulta

$$P(X = 0) = \binom{10}{0}\left(\frac{18}{37}\right)^0\left(1 - \frac{18}{37}\right)^{10} \approx 0{,}0013$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{18}{37}\right)^0\left(1 - \frac{18}{37}\right)^{10} - \binom{10}{1}\left(\frac{18}{37}\right)^1\left(1 - \frac{18}{37}\right)^9 \approx 0{,}9866. \end{aligned}$$

A titolo di esempio nella tabella seguente è riportata la densità discreta di una variabile aleatoria binomiale per $n = 5$ e per 2 scelte del parametro p:

$p(x)$	$p = 1/2$	$p = 18/37$
$p(0)$	0,0312	0,0357
$p(1)$	0,1562	0,1691
$p(1)$	0,3125	0,3205
$p(3)$	0,3125	0,3061
$p(4)$	0,1562	0,1438
$p(5)$	0,0312	0,0272

Esempio. In un gioco d'azzardo un giocatore scommette su uno dei numeri compresi tra 1 e 6. Si lanciano 3 dadi. Se il numero su cui ha scommesso appare k volte, con $k = 1, 2, 3$, allora il giocatore vince vince k euro. Se invece il numero non esce, allora il giocatore perde un euro. Il gioco è equo? Ovvero, il capitale finale atteso è zero?

Soluzione. Il numero di dadi che mostra il numero su cui si è puntato è una variabile aleatoria binomiale di parametri $(3; \frac{1}{6})$. Quindi, denotando con X la vincita si ha

$$P(X = -1) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}, \qquad P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216},$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}, \qquad P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216},$$

da cui segue che la vincita attesa è

$$E(X) = \sum_{x:\, p(x)>0} x\, p(x) = -1 \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 3 \cdot \frac{1}{216} = -\frac{17}{216} \approx -0{,}079.$$

Quindi, giocando ripetutamente, ci si attende di perdere 17 euro ogni 216 partite.