CAPITOLO 5 – Variabili aleatorie continue

5.1 Introduzione

Le variabili aleatorie discrete assumono un numero finito o un'infinità numerabile di valori.

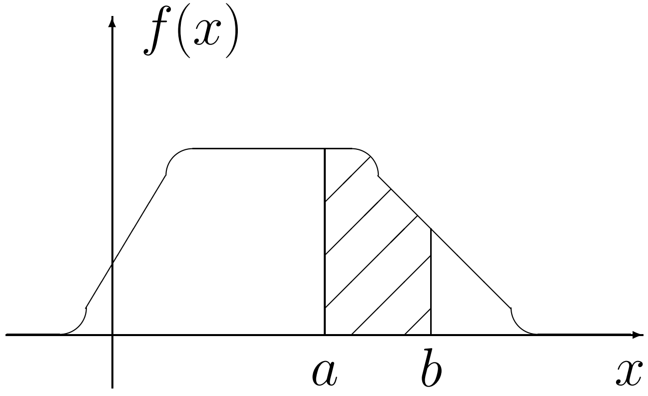
Esistono comunque variabili aleatorie il cui insieme dei valori è non numerabile, come ad esempio l'ora di arrivo di un treno o il tempo di vita di un dispositivo elettronico.

Definizione. Una variabile aleatoria X è detta continua (o, anche, assolutamente continua) se esiste una funzione $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ tale che per ogni sottoinsieme B di numeri reali risulta

$$P(X \in B) = \int_B f(x)\, dx.$$

La funzione f è chiamata *funzione di densità* della variabile aleatoria X, ed è di fatto caratterizzata dalle seguenti proprietà:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{per } x \in \mathbb{R}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$



$$P(a \le X \le b) = \text{ area della regione tratteggiata } = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Tale relazione ricalca la seguente, già vista in passato, che sussiste se X è una variabile aleatoria discreta:

$$P(a \le X \le b) = \sum_{k\colon a \le x_k \le b} p(x_k).$$

Abbiamo visto che se X è una variabile aleatoria continua, si ha

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Quindi, se $b = a$ si ricava

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

Pertanto, a differenza del caso discreto, la probabilità che una variabile aleatoria continua X assuma un singolo valore è uguale a zero, cosicché risulta

$$P(X < a) = P(X \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x)\, dx$$

e quindi

$$F(b) - F(a) = P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Ne segue che la funzione di distribuzione $F(x)$ di una variabile aleatoria X continua è una funzione continua per ogni x reale.

Esempio. Sia X una variabile aleatoria continua di densità

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Calcolare c.

(b) Determinare $P(X > 1)$.

Soluzione. (a) Per determinare c, imponendo che sia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ si ha

$$1 = c\int_0^2 (4x - 2x^2)\,dx = c\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=2} = c\left[8 - \frac{16}{3}\right] = c\,\frac{8}{3}$$

da cui segue $c = 3/8$.

(b) Risulta quindi

$$P(X > 1) = \int_1^{\infty} f(x)\,dx = \frac{3}{8}\int_1^2 (4x - 2x^2)\,dx = \frac{3}{8}\left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_{x=1}^{x=2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Esempio. Il tempo (in ore) che un computer funzioni prima di bloccarsi è una variabile aleatoria continua X di densità

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

(a) Calcolare la probabilità che il computer funzioni tra 50 e 150 ore senza bloccarsi.

(b) Calcolare la probabilità che il computer funzioni per meno di 100 ore senza bloccarsi.

Soluzione. (a) Per determinare λ, imponendo che risulti $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ otteniamo

$$1 = \lambda \int_0^{\infty} e^{-x/100}\, dx = \lambda \left[-100\, e^{-x/100}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \lambda\, 100 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \frac{1}{100}$$

e pertanto

$$P(50 < X < 150) = \int_{50}^{150} \frac{1}{100}\, e^{-x/100}\, dx = \left[-e^{-x/100}\right]_{50}^{150} = e^{-1/2} - e^{-3/2} \approx 0{,}383.$$

(b) Analogamente si ha

$$P(X < 100) = \int_0^{100} \frac{1}{100}\, e^{-x/100}\, dx = \left[-e^{-x/100}\right]_0^{100} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632.$$

Esempio. Il tempo (in ore) di vita di certe pile per la radio è una variabile aleatoria continua X di densità

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 100 \\ 100/x^2 & x > 100. \end{cases}$$

Determinare la probabilità che esattamente 2 pile della radio su 5 debbano essere sostituite entro le 150 ore di attività, supponendo che gli eventi $E_i = \{$l'i-esima pila va rimpiazzata entro 150 ore d'uso$\}$, $1 \le i \le 5$, siano indipendenti.

Soluzione. Risulta

$$P(E_i) = \int_0^{150} f(x)\,dx = 100 \int_{100}^{150} \frac{1}{x^2}\,dx = 100 \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=100}^{x=150} = \frac{1}{3}.$$

Quindi, per l'indipendenza degli eventi E_i, la probabilità richiesta è

$$\binom{5}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{27} = \frac{80}{243} \approx 0{,}329.$$

La relazione tra la funzione di distribuzione F di una variabile aleatoria continua e la densità f è data da

$$F(x) = P\{X \in (-\infty, x]\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Quindi, se x è un reale in cui F è derivabile, derivando ambo i membri si ottiene

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x),$$

cosicché la densità è la derivata della funzione di distribuzione.

Un'interpretazione intuitiva della densità segue da:

$$P\left\{x - \frac{\varepsilon}{2} \leq X \leq x + \frac{\varepsilon}{2}\right\} = \int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} f(x)\, dx \approx \varepsilon\, f(x),$$

dove l'approssimazione vale quando ε è prossimo a 0 e se la densità f è continua in x. Pertanto, la probabilità che X assuma valori in un intorno di x avente ampiezza ε è approssimativamente uguale a $\varepsilon\, f(x)$.

Esempio. Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di distribuzione F_X e densità f_X. Determinare la densità di $Y = aX + b$, con $a \neq 0$.

Soluzione. Se $a > 0$, la funzione di distribuzione di Y è così esprimibile:

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(aX + b \leq x) = P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

mentre per $a < 0$ risulta:

$$F_Y(x) = P\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Derivando rispetto ad x si ottiene infine:

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\, f_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right) & \text{se } a > 0 \\ -\dfrac{1}{a}\, f_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right) & \text{se } a < 0 \end{cases} = \frac{1}{|a|}\, f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Esempio. Sia X una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

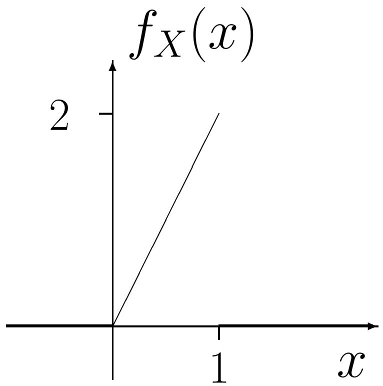
Determinare la densità di $Y = 1 - X$.

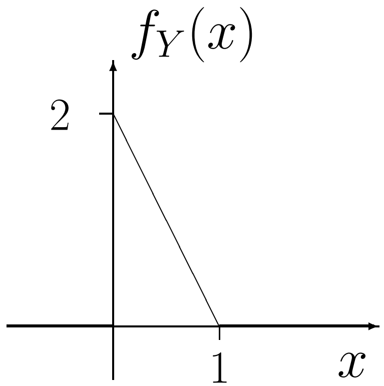
Soluzione. Ricordando che la densità di $aX + b$ è data da

$$f_{aX+b}(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

per $a = -1$ e $b = 1$ segue che la densità di $Y = 1 - X$ è:

$$f_Y(x) = f_X(1-x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$





Alternativamente, è possibile ricavare la densità di Y notando che la funzione di distribuzione di $Y = 1 - X$ è data da

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(1 - X \le x) = P(X \ge 1 - x) = 1 - P(X < 1 - x).$$

Poiché X è una variabile aleatoria continua, risulta

$$P(X < 1 - x) = P(X \le 1 - x) = F_X(1 - x).$$

Pertanto la densità di probabilità di Y si può ricavare come segue:

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx} F_Y(x) = \frac{d}{dx} [1 - F_X(1 - x)] = f_X(1 - x).$$

Usando tale indentità e ricordando che la densità di probabilità di X è

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ottiene infine la densità di Y:

$$f_Y(x) = \begin{cases} 2(1 - x) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

5.2 Valore atteso e varianza di una variabile aleatoria continua

Come visto in precedenza, il valore atteso di una variabile aleatoria discreta X è

$$E[X] = \sum_x x\, P(X = x).$$

Analogamente, se X è una variabile aleatoria continua con densità $f(x)$, poiché

$$f(x)\, dx \approx P(x \leq X \leq x + dx) \qquad \text{per } dx \text{ piccolo},$$

si definisce il valore atteso di X come

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx.$$

Esempio. Determinare $E[X]$ sapendo che la densità di X è

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Soluzione. Si ha

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^1 2x^2\, dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Esempio. Determinare $E\left[e^X\right]$ sapendo che la densità di X è

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Soluzione. Posto $Y = e^X$, determiniamo innanzitutto la funzione di distribuzione e la densità di Y. Per $1 \le x \le e$ risulta

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P\left(e^X \le x\right) = P(X \le \log x) = \int_0^{\log x} f_X(y)\,dy = \log x.$$

Derivando $F_Y(x)$ si ha

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx} F_Y(x) = \frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}, \qquad 1 \le x \le e,$$

da cui segue

$$E\left[e^X\right] = E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_Y(x)\,dx = \int_1^e dx = e - 1 = 1{,}71828.$$

Se X è una variabile aleatoria discreta, sappiamo che

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i)\, p(x_i).$$

È possibile dimostrare il seguente analogo risultato:

Proposizione. Se X è una variabile aleatoria continua con densità $f(x)$, allora per ogni funzione g a valori reali,

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx.$$

Ad esempio, applicando tale Proposizione alla variabile aleatoria continua di densità

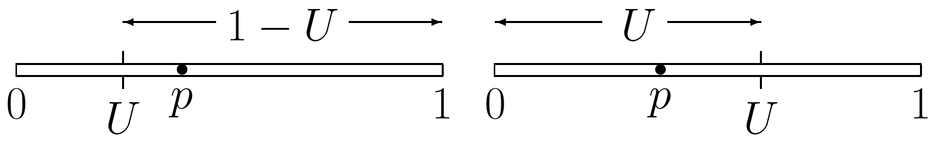
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ottiene

$$E\left[e^X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^x\, f_X(x)\, dx = \int_0^1 e^x\, dx = [e^x]_0^1 = e - 1 = 1{,}71828.$$

Esempio. Un bastoncino di lunghezza 1 è spezzato in un punto U scelto a caso su di esso, e quindi distribuito uniformemente su $(0, 1)$. Determinare il valore atteso della lunghezza del pezzo di bastoncino che contiene il punto p, $0 \le p \le 1$.

Soluzione. Sia $L(U)$ la lunghezza del pezzo di bastoncino contenente p. Si ha



$$L(U) = \begin{cases} 1 - U & \text{se } 0 < U < p \\ U & \text{se } p < U < 1. \end{cases}$$

Quindi, essendo $f_U(x) = 1$, $0 \le x \le 1$, segue che

$$E[L(U)] = \int_{-\infty}^{\infty} L(x)\, f_U(x)\, dx = \int_0^p (1-x)\, dx + \int_p^1 x\, dx$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^p + \left[\frac{x^2}{2}\right]_p^1 = p - \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{p^2}{2} = \frac{1}{2} + p(1-p).$$

Il valore atteso della lunghezza del pezzo di bastoncino contente p è massimo se p è il punto centrale, ossia se $p = 1/2$. Notiamo inoltre che $E[L(U)] \ge E[U] = 1/2$.

Corollario. Come nel caso discreto, se X è una variabile continua, con a e b costanti, si ha

$$E[aX + b] = aE[X] + b.$$

Se X è una variabile aleatoria continua di valore atteso μ, in analogia col caso discreto la varianza di X è definita da

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx.$$

La formula alternativa,

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2,$$

si dimostra imitando quanto fatto nel caso discreto. Analogamente, se a e b sono delle costanti, allora

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 Var(X).$$

Esempio. Sia X una variabile aleatoria continua avente densità

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare la funzione di distribuzione e la varianza di X.

Soluzione. La funzione di distribuzione di X è data da

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x 2t\,dt = x^2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Ricaviamo la varianza di X ricordando che $\mu = E[X] = 2/3$; pertanto:

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 2x\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \left(x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{9}x\right) dx = 2\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{9}x^3 + \frac{2}{9}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{18}.$$

Si perviene allo stesso risultato anche notando che $E(X^2) = \int_0^1 2t^3\,dt = 1/2$.

Esempio. Sia X una variabile aleatoria continua avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sqrt{x} & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1. \end{cases}$$

Determinare la densità, il valore atteso e la varianza di X.

Soluzione. Derivando $F(x)$ si ottiene la densità di X:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Da questa si ricavano i momenti di X:

$$E\left[X^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, f(x) \, dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1/2}}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^{n+1/2}}{n+1/2} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+1},$$

da cui seguono valore atteso e la varianza di X:

$$E[X] = \frac{1}{3}, \qquad \mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}.$$

5.3 La variabile aleatoria uniforme

Una variabile aleatoria è detta *uniforme* (o *uniformemente* distribuita) sull'intervallo $(0, 1)$ se la sua densità è data da

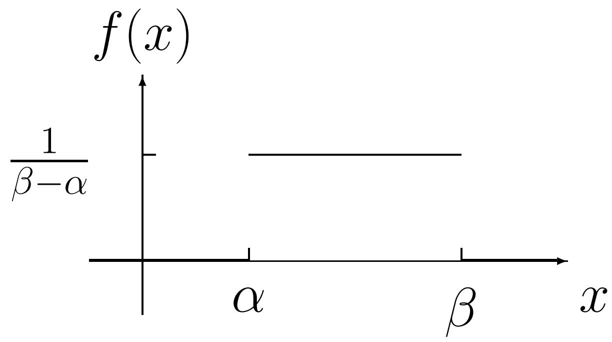
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Risulta $f(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$; inoltre per ogni $0 < a < b < 1$ si ha

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx = b - a.$$

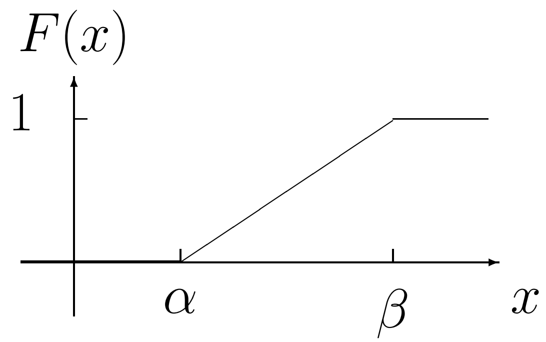
In generale, X è una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo (α, β) se ha densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



Essendo $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$, la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo (α, β) è data da

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha \le x < \beta \\ 1 & x \ge \beta \end{cases}$$



Esempio. Sia X una variabile aleatoria continua avente distribuzione uniforme su (α, β). Determinare momenti, valore atteso e varianza di X.

Soluzione. Si ha

$$E\left[X^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n\, f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^n}{\beta-\alpha}\,dx = \frac{1}{(\beta-\alpha)}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{(n+1)(\beta-\alpha)},$$

$$E[X] = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)} = \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad E\left[X^2\right] = \frac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)} = \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3},$$

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3} - \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

Esempio. Sia X una variabile aleatoria avente distribuzione uniforme su $(-10, 10)$. Calcolare $P(X > 3)$, $P(X < 6)$ e $P(X > 3 \,|\, X < 6)$.

Soluzione. Dall'espressione della funzione di distribuzione

$$F(x) = \frac{x+10}{20}, \qquad -10 \leq x \leq 10$$

segue

$$P(X > 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20},$$

$$P(X < 6) = F(6) = \frac{16}{20},$$

$$P(X > 3 \,|\, X < 6) = \frac{P(3 < X < 6)}{P(X < 6)} = \frac{F(6) - F(3)}{F(6)} = \frac{3/20}{16/20} = \frac{3}{16}.$$

Esempio. Gli autobus passano ad una fermata ad intervalli di 15 minuti a partire dalle ore 7, cioè alle 7, 7:15, 7:30, 7:45, ecc. Se un passeggero arriva alla fermata in un istante uniformemente distribuito tra le 7 e le 7:30, determinare la probabilità che egli aspetti l'autobus (a) meno di 5 minuti (b) più di 10 minuti.

Soluzione. Sia X il minuto tra le 7 e le 7:30 in cui arriva il passeggero. Il passeggero aspetterà meno di 5 minuti se (e solo se) egli arriva tra le 7:10 e le 7:15 o tra le 7:25 e le 7:30. Pertanto, poiché X è uniforme sull'intervallo $(0, 30)$, si ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{30} & 0 < x < 30 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi la probabilità cercata in (a) è

$$P(10 < X < 15) + P(25 < X < 30) = \int_{10}^{15} \frac{1}{30}\, dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30}\, dx = \frac{5+5}{30} = \frac{1}{3}.$$

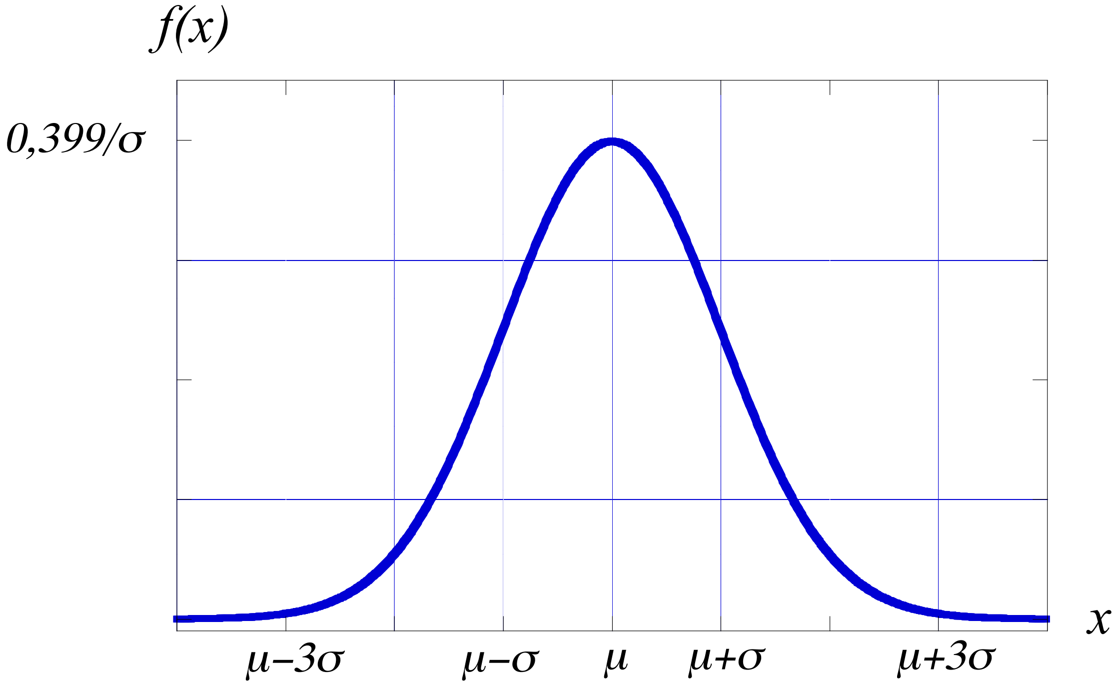
Analogamente, la probabilità cercata in (b) vale

$$P(0 < X < 5) + P(15 < X < 20) = \int_{0}^{5} \frac{1}{30}\, dx + \int_{15}^{20} \frac{1}{30}\, dx = \frac{5+5}{30} = \frac{1}{3}.$$

5.4 Variabili aleatorie normali

Una variabile aleatoria continua X è detta normale (o gaussiana) di parametri $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ se la densità di X è data da

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$



La densità è una funzione con grafico a campana, è simmetrica rispetto a $x = \mu$, ossia $f(\mu - t) = f(\mu + t)$ per ogni $t \geq 0$, e possiede 2 punti di flesso: $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$.

Esempio. Mostrare che se X è una variabile aleatoria normale di parametri μ e σ^2, allora valore atteso e varianza sono: $E[X] = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$.

Soluzione. Si ha

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \, dx.$$

Ponendo $z = (x - \mu)/\sigma$, si ottiene

$$E[X] = \sigma \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \, e^{-z^2/2} \, dz + \mu \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} \, dz.$$

Il risultato $E[X] = \mu$ segue direttamente da

$$\int_{-\infty}^{\infty} z \, e^{-z^2/2} \, dz = -e^{-z^2/2} \Big|_{z=-\infty}^{z=\infty} = 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} \, dz = 1,$$

dove l'ultima uguaglianza si può ricavare da opportune considerazioni.

Pertanto si ha

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \, dx.$$

Ponendo ancora $z = (x-\mu)/\sigma$, si ottiene

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \, e^{-z^2/2} \, dz = \sigma^2 \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-z) \, \frac{d}{dz} e^{-z^2/2} \, dz.$$

Quindi (integrando per parti) si ottiene

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-z) \, e^{-z^2/2} \Big|_{z=-\infty}^{z=\infty} + \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} \, dz = \sigma^2.$$

Proposizione. Se X è normale di parametri μ e σ^2, allora $Y = aX + b$ è una variabile normale di parametri $a\mu + b$ e $a^2\sigma^2$.

Dimostrazione. La densità di $Y = aX + b$ è data da

$$
\begin{aligned}
f_Y(x) &= \frac{1}{|a|}\, f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \\
&= \frac{1}{|a|}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{x-b}{a}-\mu\right)^2\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|a|\sigma}\,\exp\left\{-\frac{[x-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}\right\},
\end{aligned}
$$

che è la densità di una variabile aleatoria normale di parametri $a\mu + b$ e $a^2\sigma^2$.

Una variabile aleatoria di valore medio 0 e varianza 1 è detta *standard*.

Esempio. Se X è una variabile aleatoria di valore medio μ e varianza σ^2 (con $\sigma > 0$), determinare i valori di a e b tali che $Z = aX + b$ sia standard.

Soluzione. Affinché sia $E(Z) = 0$ e $\mathrm{Var}(Z) = 1$ deve risultare

$$E(aX + b) = a\mu + b = 0, \qquad \mathrm{Var}(aX + b) = a^2\sigma^2 = 1,$$

da cui si ottengono due diverse scelte dei valori di a e b tali che $Z = aX+b$ è standard:

$$(a,\, b) = \left(\frac{1}{\sigma},\, -\frac{\mu}{\sigma}\right), \qquad (a,\, b) = \left(-\frac{1}{\sigma},\, \frac{\mu}{\sigma}\right).$$

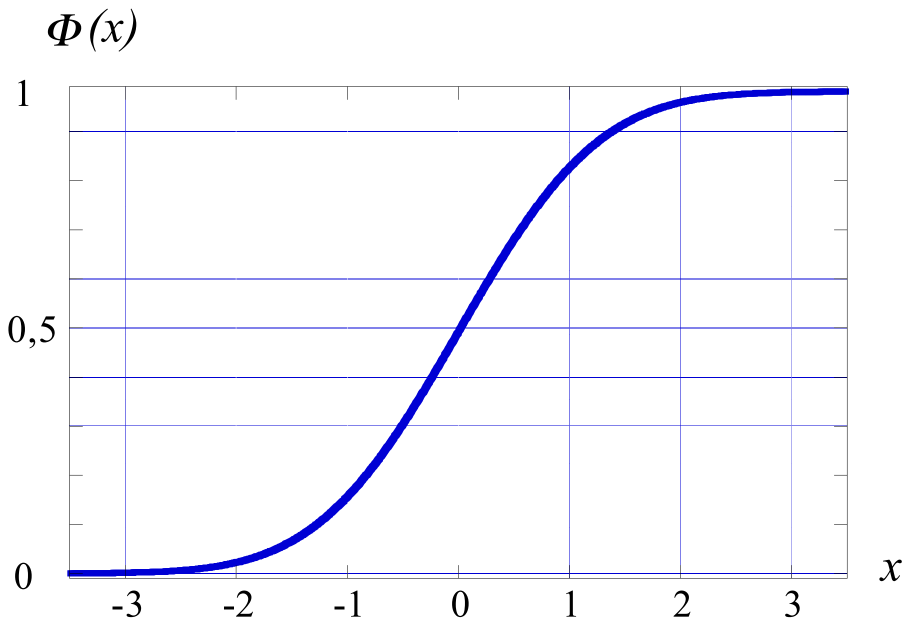
Dai risultati precedenti segue che se X è una variabile normale di parametri μ e σ^2,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad \text{e} \qquad Z' = \frac{\mu - X}{\sigma}$$

sono variabili normali di parametri 0 e 1, ossia sono *variabili normali standard*.

La funzione di distribuzione di una variabile normale standard si indica con $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\, dz, \qquad -\infty < x < \infty.$$



Nella Tabella in Appendice sono dati i valori di $\Phi(x)$ per $x = 0;\ 0{,}01;\ 0{,}02;\ \ldots;\ 3{,}49$. Per valori negativi di x, tale funzione si può ottenere dalla seguente formula:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Dalla simmetria della densità normale standard $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$ segue la relazione di simmetria per $\Phi(x)$:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \qquad -\infty < x < \infty,$$

la quale afferma che se Z è una variabile normale standard allora

$$P(Z \le -x) = P(Z > x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Ricordiamo che se X è una variabile normale di parametri μ e σ^2, allora $Z = (X-\mu)/\sigma$ è una variabile normale standard, e quindi la funzione di distribuzione di X è

$$F_X(x) = P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Ne segue:

$$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X < a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Qui di seguito è riportata una routine in Linguaggio C per il calcolo di $\Phi(x)$:

```
//  File: gaussian_distribution.c
//  Routine(s): Gaussian_Distribution

#include <math.h>              // required for erf() and M_SQRT1_2

//  double Gaussian_Distribution( double x )
//
//  Description:
//  This function returns the probability that a random variable with
//  a standard Normal (Gaussian) distribution has a value less than "x".
//
//  Arguments:
//  double x   Argument of Pr[X < x] where X ~ N(0,1).
//
//  Return Values:
//  The probability of observing a value less than (or equal) to x assuming
//  a normal (Gaussian) distribution with mean 0 and variance 1.
//
//  M_SQRT1_2 = 1/(Ã2)=0.707107     (The inverse of the square root of 2)
//
//  Example:
//  double x, pr;
//
//  pr = Gaussian_Distribution(x);

double Gaussian_Distribution( double x )
{
   return  0.5 * ( 1.0 + erf( M_SQRT1_2 * x ) );
}
```

Esempio. Sia X una variabile aleatoria normale di parametri $\mu = 3$ e $\sigma^2 = 9$. Determinare $P(2 < X < 5)$, $P(X > 0)$, $P(|X-3| > 6)$.

Soluzione. Ponendo $Z = (X-\mu)/\sigma$ si ha:

$$\begin{aligned} P(2 < X < 5) &= P\left(\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right) = P\left(-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) \approx \Phi\big(0{,}67\big) - \big[1 - \Phi\big(0{,}33\big)\big] \\ &= 0{,}7486 - (1 - 0{,}6293) = 0{,}3779 \end{aligned}$$

$$P(X > 0) = P\left(\frac{X-3}{3} > \frac{0-3}{3}\right) = P\left(Z > -1\right) = 1 - \Phi\big(-1\big) = \Phi\big(1\big) = 0{,}8413$$

$$\begin{aligned} P(|X-3| > 6) &= P\big(X > 9\big) + P\big(X < -3\big) \\ &= P\left(\frac{X-3}{3} > \frac{9-3}{3}\right) + P\left(\frac{X-3}{3} < \frac{-3-3}{3}\right) \\ &= P\left(Z > 2\right) + P\left(Z < -2\right) = 1 - \Phi(2) + \Phi(-2) \\ &= 2\big[1 - \Phi\big(2\big)\big] = 2(1 - 0{,}9772) = 0{,}0456 \end{aligned}$$

Esempio. In un test d'esame in cui il punteggio assegnato è una variabile aleatoria normale X di parametri μ e σ^2 viene assegnata la lettera A a chi ha un punteggio superiore a $\mu+\sigma$, B a chi ha un punteggio tra μ e $\mu+\sigma$, C a chi ha un punteggio tra $\mu-\sigma$ e μ, D a chi ha punteggio tra $\mu-2\sigma$ e $\mu-\sigma$, ed E a chi ottiene un punteggio inferiore a $\mu-2\sigma$. Determinare le percentuali dei giudizi A, B, C, D, E.

Soluzione. Dato che

$$P(X>\mu+\sigma)=P\Big(\frac{X-\mu}{\sigma}>1\Big)=1-\Phi\big(1\big)=1-0{,}8413=0{,}1587$$

$$P(\mu<X<\mu+\sigma)=P\Big(0<\frac{X-\mu}{\sigma}<1\Big)=\Phi\big(1\big)-\Phi\big(0\big)=0{,}8413-0{,}5=0{,}3413$$

$$P(\mu-\sigma<X<\mu)=P\Big(-1<\frac{X-\mu}{\sigma}<0\Big)=\Phi\big(0\big)-\Phi\big(-1\big)=0{,}3413$$

$$P(\mu-2\sigma<X<\mu-\sigma)=P\Big(-2<\frac{X-\mu}{\sigma}<-1\Big)=\Phi\big(2\big)-\Phi\big(1\big)=0{,}1359$$

$$P(X<\mu-2\sigma)=P\Big(\frac{X-\mu}{\sigma}<-2\Big)=\Phi\big(-2\big)=1-\Phi\big(2\big)=1-0{,}9772=0{,}0228$$

segue che il 16% otterrà A, il 34% B, il 34% C, il 14% D ed il 2% E.

Esempio. Un bit deve essere trasmesso attraverso un canale soggetto a rumore. Per ridurre la possibilità di errore si invia il valore 2 quando il messaggio è **1** ed il valore -2 quando il messaggio è **0**. Se si spedisce x, allora il valore ricevuto è $R = x + Z$, per $x = \pm 2$, dove Z è una variabile aleatoria normale standard che descrive il rumore del canale. Si determini la probabilità di errore se il valore ricevuto è così decodificato:

$$\text{se } R \geq 0{,}5 \ \text{ si decodifica } \mathbf{1},$$
$$\text{se } R < 0{,}5 \ \text{ si decodifica } \mathbf{0}.$$

Soluzione. Si hanno 2 tipi di errore: uno è che il messaggio **1** sia erroneamente interpretato come **0**, l'altro è che **0** sia erroneamente interpretato come **1**. Il primo tipo di errore si realizza se il messaggio è **1** e $R = 2 + Z < 0{,}5$, il secondo si realizza se il messaggio è **0** e $R = -2 + Z \geq 0{,}5$. Posto $p_{\mathbf{k}} = P(\text{errore} \,|\, \text{il messaggio è}\, \mathbf{k})$, si ha

$$p_{\mathbf{1}} = P\big(2 + Z < 0{,}5\big) = P\big(Z < -1{,}5\big) = \Phi\big(-1{,}5\big) = 1 - \Phi\big(1{,}5\big) = 0{,}0668$$
$$p_{\mathbf{0}} = P\big(-2 + Z \geq 0{,}5\big) = P\big(Z \geq 2{,}5\big) = 1 - \Phi\big(2{,}5\big) = 0{,}0062.$$

Quesito. Cosa cambia se nel criterio di decodifica si usa la soglia 0 invece di 0,5?

5.5 Variabili aleatorie esponenziali

Una variabile aleatoria continua X è detta esponenziale (o distribuita esponenzialmente) di parametro $\lambda > 0$ se la densità di X è data da

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione di distribuzione di una variabile aleatoria esponenziale è data da

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0.$$

Si noti che $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_0^{\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = \lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) = 1.$

Inoltre, per $x \geq 0$ risulta

$$P(X > x) = 1 - F(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Esempio. Se X è una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ, allora valore atteso e varianza sono: $E[X] = 1/\lambda$ e $Var(X) = 1/\lambda^2$.

Soluzione. Ricordando l'espressione della densità esponenziale, si ha

$$E[X] = \int_0^\infty x\, f(x)\, dx = \int_0^\infty x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} dx$$

e quindi, integrando per parti, si ottiene

$$E[X] = -x\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(x)dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Per calcolare la varianza di X dobbiamo prima calcolare $E[X^2]$. Si ha

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = -x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^\infty 2x\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Quindi

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Si dice *mediana* di una variabile aleatoria X ogni valore m tale che

$$P(X \le m) \ge 1/2 \quad \text{e} \quad P(X \ge m) \ge 1/2.$$

Esempio. Sia X una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ. Valutare $P\{X > E(X)\}$ e determinare il valore m tale che $P\{X > m\} = 1/2$.
Soluzione. Ricordando che $P(X > x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$ per $x \ge 0$, da $E(X) = \lambda^{-1}$ segue

$$P\{X > E(X)\} = P\{X > \lambda^{-1}\} = \mathrm{e}^{-1} = 0{,}3679.$$

Risulta $P\{X > m\} = 1/2$ per

$$\mathrm{e}^{-\lambda m} = \frac{1}{2}, \qquad \text{ossia per} \qquad m = \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \frac{1}{\lambda}\, 0{,}6931.$$

Esercizio. Mostrare che se X è una variabile aleatoria uniforme oppure una variabile aleatoria normale, allora la mediana coincide con $E(X)$.

Una variabile aleatoria X si dice priva di memoria se

$$P(X > s + t \,|\, X > t) = P(X > s) \qquad \text{per ogni } s, t \geq 0.$$

Se X descrive il tempo di vita di un dispositivo, la proprietà di assenza di memoria afferma che la probabilità che esso funzioni per almeno $s + t$ ore, sapendo che ha funzionato per t ore, è uguale alla probabilità iniziale che esso funzioni per almeno s ore. In altri termini, se il dispositivo ha funzionato per t ore, la distribuzione del tempo di vita residuo è uguale a quella del tempo di vita originale.

La condizione di assenza di memoria può essere scritta equivalentemente come

$$P(X > s + t) = P(X > t)\, P(X > s) \qquad \text{per ogni } s, t \geq 0.$$

La variabile aleatoria esponenziale soddisfa la proprietà di assenza di memoria, essendo

$$P(X > s + t) = e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda t}\, e^{-\lambda s} = P(X > t)\, P(X > s), \qquad s, t \geq 0,$$

ed è l'unica variabile aleatoria continua a godere di tale proprietà. Notiamo che $e^{-\lambda}$ per la variabile esponenziale ha lo stesso ruolo di $1 - p$ per la variabile geometrica.

Esempio. Supponiamo che la durata di una telefonata in minuti sia una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{10}$. Calcolare la probabilità che la durata sia

(a) maggiore di 5 minuti;

(b) tra 10 e 20 minuti;

(c) tra 15 e 20 minuti sapendo che è maggiore di 10 minuti.

Soluzione. Se X rappresenta la durata della telefonata, risulta

$$P(X > 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{10}5}) = e^{-0,5} \simeq 0{,}6065;$$

$$P(10 < X < 20) = F(20) - F(10) = 1 - e^{-2} - 1 + e^{-1} = e^{-1} - e^{-2} \simeq 0{,}2325;$$

infine

$$\begin{aligned} P(15 < X < 20 \,|\, X > 10) &= P(X > 15 \,|\, X > 10) - P(X > 20 \,|\, X > 10) \\ &= P(X > 5) - P(X > 10) = e^{-0,5} - e^{-1} \simeq 0{,}2387, \end{aligned}$$

avendo fatto uso della proprietà di assenza di memoria.

Esempio. Consideriamo un ufficio postale con due sportelli, e supponiamo che quando Carlo entra nell'ufficio veda Alice e Bruno agli sportelli. Supponiamo che il Carlo acceda al primo sportello che si libera. Se il tempo che un impiegato dedica ad un cliente è distribuito esponenzialmente con parametro λ, qual è la probabilità che, sui tre clienti, Carlo sia l'ultimo a lasciare l'ufficio?

Soluzione. Prendiamo in esame il tempo necessario affinché Carlo trovi uno sportello libero. A questo punto, Alice o Bruno hanno appena lasciato lo sportello e uno dei due può trovarsi ancora allo sportello. Tuttavia, per la proprietà di assenza di memoria della variabile esponenziale, il tempo residuo di permanenza allo sportello di quest'altra persona (Alice o Bruno) è distribuito esponenzialmente con parametro λ. Per simmetria la probabilità che questa persona finisca prima di Carlo è $1/2$, in quanto anche il tempo di permanenza allo sportello di Carlo è distribuito esponenzialmente con parametro λ.

Esempio. Si supponga che il numero di chilometri che un'auto possa percorrere prima che la batteria ceda sia una variabile aleatoria esponenziale di valore atteso 10000. Se si desidera fare un viaggio di 5000 chilometri, qual è la probabilità di effettuarlo senza dover cambiare la batteria? Cosa si può dire se la distribuzione non è esponenziale?

Soluzione. Dalla proprietà di assenza di memoria della variabile esponenziale segue che il tempo di vita rimanente (in migliaia di chilometri) della batteria è una variabile esponenziale di parametro $\lambda = 1/10$. La probabilità cercata vale quindi

$$P(\text{tempo di vita rimanente} > 5) = 1 - F(5) = \mathrm{e}^{-5\lambda} = \mathrm{e}^{-1/2} \simeq 0{,}6065.$$

Se la funzione di distribuzione $F(x)$ non fosse esponenziale, la probabilità sarebbe

$$P(\text{tempo di vita} > 5 + t \,|\, \text{tempo di vita} > t) = \frac{1 - F(t+5)}{1 - F(t)},$$

dove t è il numero di chilometri già percorsi prima dell'inizio del viaggio. Quindi, se la distribuzione non è esponenziale, occorre una informazione aggiuntiva (il valore di t) per poter calcolare la probabilità richiesta.

5.6 Distribuzione di una funzione di variabile aleatoria

Supponiamo di conoscere la distribuzione di X e di voler determinare la distribuzione di $g(X)$. A tal fine è necessario esprimere l'evento $\{g(X) \leq y\}$ in termini dell'appartenenza di X ad un insieme.

Esempio. Sia X uniformemente distribuita su $(0, 1)$. Determinare la funzione di distribuzione della variabile aleatoria $Y = -(\log X)/\lambda$, con $\lambda > 0$.
Soluzione. Ricordando che $F_X(x) = x$ per $0 \leq x \leq 1$, per $y > 0$ si ha

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\frac{1}{\lambda}\log X \leq y) = P(X \geq e^{-\lambda y}) = 1 - F_X(e^{-\lambda y}) = 1 - e^{-\lambda y}.$$

Pertanto, Y ha distribuzione esponenziale di parametro λ.

Esempio. Sia X uniformemente distribuita su $(0,1)$. Determinare la funzione di distribuzione e la densità di probabilità della variabile aleatoria $Y = X^\alpha$, con $\alpha > 0$.

Soluzione. Poiché $F_X(x) = x$ per $0 \le x \le 1$, per $0 \le y \le 1$ si ha

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^\alpha \le y) = P(X \le y^{1/\alpha}) = F_X(y^{1/\alpha}) = y^{1/\alpha}.$$

Pertanto, la densità di probabilità di Y è data da

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{\alpha}\, y^{1/\alpha - 1}, \qquad 0 < y < 1.$$

Ad esempio, per $\alpha = 2$ si ha $f_Y(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, per $\alpha = 1/2$ si ha $f_Y(y) = 2y$, $0 < y < 1$.

Esempio. Sia X una variabile aleatoria continua con densità $f_X(x)$. Determinare la funzione di distribuzione e la densità di probabilità di $Y = X^2$ e $U = |X|$.

Soluzione. La funzione di distribuzione di $Y = X^2$, per $y \geq 0$, è data da

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}).$$

Derivando rispetto a y si ottiene la densità

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})], \qquad y > 0.$$

Determiniamo ora la funzione di distribuzione di $U = |X|$. Per $u \geq 0$, si ha

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(|X| \leq u) = P(-u \leq X \leq u) = F_X(u) - F_X(-u).$$

La densità è pertanto

$$f_U(u) = \frac{d}{du} F_U(u) = f_X(u) + f_X(-u), \qquad u > 0.$$

Teorema. Sia X una variabile aleatoria continua con densità f_X, e $g(x)$ una funzione strettamente monotona (crescente o decrescente) e derivabile con continuità. Allora la variabile aleatoria Y definita da $Y = g(X)$ è continua e la sua densità è data da

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[g^{-1}(y)] \left| \dfrac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| & \text{se } y = g(x) \text{ per qualche } x \\ 0 & \text{se } y \neq g(x) \text{ per ogni } x, \end{cases}$$

dove $g^{-1}(y)$ è l'unica x tale che $y = g(x)$.

Dimostrazione. Supponiamo $g(x)$ crescente. Se y appartiene a tale intervallo è $y = g(x)$ per qualche x. Allora, se $Y = g(X)$, si ha

$$F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)).$$

In accordo con l'enunciato del teorema, derivando si ottiene

$$f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)] \frac{d}{dy} g^{-1}(y),$$

dato che $g^{-1}(y)$ è non decrescente e la sua derivata è quindi non negativa.

Se y non appartiene all'insieme dei valori di g, cioè $y \neq g(x)$ per ogni x, allora $F_Y(y)$ è uguale a 0 o a 1 ed in ogni caso $f_Y(y) = 0$.

Esempio. Sia X una variabile aleatoria continua non negativa con densità f e sia $Y = X^n$. Determinare la densità $f_Y(y)$.
Soluzione. Se $g(x) = x^n$, allora

$$g^{-1}(y) = y^{1/n}, \qquad \frac{d}{dy}\, g^{-1}(y) = \frac{1}{n}\, y^{1/n-1}.$$

In virtù del teorema si ha pertanto: $f_Y(y) = \dfrac{1}{n}\, y^{1/n-1} f(y^{1/n})$.

Esempio. Sia X una variabile aleatoria uniforme in $(0, 1)$ e sia $\lambda > 0$. Mostrare che la densità di $Y = g(X) = -(\ln X)/\lambda$ è esponenziale di parametro λ.
Soluzione. Risulta $g^{-1}(y) = \mathrm{e}^{-\lambda y}$, e quindi per $y > 0$ si ha:

$$f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)] \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| = 1 \cdot \left| \frac{d}{dy} \mathrm{e}^{-\lambda y} \right| = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda y}.$$

Esercizi per casa

5.a) Sia $F(x) = 0$ per $x < 1$, $F(x) = c\,(x-1)^2$ per $1 \leq x < 2$, $F(x) = 1$ per $x \geq 2$.
(i) Ricavare i valori di c per cui $F(x)$ è la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria X.
(ii) Stabilire per quale valore di c la variabile aleatoria X è continua, ed in tal caso ricavare $E(X)$.

5.b) Sia X una variabile aleatoria continua con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2 + |x| & -1/2 < x < 1/2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare i valori ammissibili per c.
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione di X.
(iii) Calcolare $E(X)$ e $Var(X)$.

5.c) Il tempo di funzionamento (in ore) di una batteria di un computer è descritto da una variabile aleatoria esponenziale. Sapendo che la durata media della batteria è di 3 ore, calcolare:
(i) la probabilità che la batteria duri più di 4 ore,
(ii) la probabilità che la batteria duri in totale meno di 4 ore sapendo che il computer è già funzionante da un'ora.

5.d) Sia X una variabile aleatoria con distribuzione normale tale che $E(X+2) = 1$ e $Var(2X+2) = 4$.
(i) Calcolare $P(X \geq 0)$ e $P(-1{,}55 \leq X \leq 1{,}55 \,|\, X \geq 0)$.
(ii) Determinare il valore di c tale che $P(X > c) = 0{,}30$.

5.e) Sia X una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo (a, b).
(i) Determinare la funzione di distribuzione di X sapendo che $E(X) = -1/2$ e $Var(X) = 3/4$.
(ii) Calcolare $P(-1 < X < 0 \,|\, X < 1/2)$.