Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica ed Informatica Applicata

Università di Salerno

Lezione n° 5: Esercitazione

- Vettori linearmente dipendenti e indipendenti
- Combinazioni lineari, coniche e convesse
- Formulazioni

R. Cerulli – F. Carrabs

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Verificare se i seguenti vettori:

$\underline{x}_1^T=(4, 1, 2)$, $\underline{x}_2^T=(7, 3, 1)$ e $\underline{x}_3^T = (3, 2, 0)$

sono linearmente indipendenti o dipendenti.

I vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI se
$\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots + \lambda_n \underline{x}_n = \underline{0}$ implica che $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 4\lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Verificare se i seguenti vettori:

$\underline{x}_1^T=(4, 1, 2)$, $\underline{x}_2^T=(7, 3, 1)$ e $\underline{x}_3^T = (3, 2, 0)$

sono linearmente indipendenti o dipendenti.

$$\begin{cases} 4\lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = -2\lambda_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\lambda_1 - 14\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 6\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = -2\lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ -5\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = -2\lambda_1 \end{cases}$$

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Verificare se i seguenti vettori:

$\underline{x}_1^T=(4, 1, 2)$, $\underline{x}_2^T=(7, 3, 1)$ e $\underline{x}_3^T = (3, 2, 0)$

sono linearmente indipendenti o dipendenti.

$$\begin{cases} -10\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 2/5\,\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10\,(2/5\,\lambda_3) + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 2/5\,\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4\lambda_3 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 2/5\,\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 2/5\,\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Sono linearmente indipendenti

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Verificare se i seguenti vettori:

$\underline{x}_1^T=(4, 1, 2)$, $\underline{x}_2^T=(7, 3, 1)$ e $\underline{x}_3^T = (3, 2, 0)$

sono linearmente indipendenti o dipendenti. Metodo alternativo

Costruiamo la matrice $A=(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. A è invertibile sse le sue righe (le sue colonne) sono linearmente indipendenti
2. A è invertibile sse il suo determinante è diverso da zero.

Se $\det(A)\neq 0$ le righe (le colonne) di A sono linearmente indipendenti.

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Verificare se i seguenti vettori:

$\underline{x}_1^T=(4, 1, 2)$, $\underline{x}_2^T=(7, 3, 1)$ e $\underline{x}_3^T = (3, 2, 0)$

sono linearmente indipendenti o dipendenti. Metodo alternativo

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 2 \cdot det \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 0 \cdot det \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \cdot (14 - 9) - 1 \cdot (8 - 3) + 0 \cdot (12 - 7)$$

$$= 10 - 5 = 5 \neq 0$$ Sono linearmente indipendenti

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Cambiare, ora, il vettore $\underline{x}_1^T = (4, 1, 2)$ con $\underline{x}_1^T = (4, 1, 1)$ e verifichiamo se:

$\underline{x}_1^T=(4, 1, 1)$, $\underline{x}_2^T=(7, 3, 1)$ e $\underline{x}_3^T = (3, 2, 0)$

sono linearmente indipendenti o dipendenti.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\lambda_1 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\lambda_2 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 \end{cases}$$

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

$$\begin{cases} -4\lambda_2 + 7\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 \end{cases}$$

Fissiamo $\lambda_3 = 1$ ottenendo $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_1 = 1$.

$$1\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}7\\3\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-7\\-3\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Poichè la combinazione lineare dei tre vettori con questi coefficienti restituisce il vettore nullo, $\underline{x}_1^T$, $\underline{x}_2^T$, $\underline{x}_3^T$ non sono lineamente indipendenti.

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

Verificare che I tre vettori sono linearmente dipendenti con il metodo alternativo.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il determinante di A è zero?

Vettori linearmente dipendenti e indipendenti

1) Fornire un esempio di vettori in R^3 linearmente indipendenti e linearmente dipendenti.
2) Verificare se i seguenti vettori:

   $\underline{x}_1^T=(4, 1, 2)$ e $\underline{x}_2^T=(7, 3, 1)$

   e

   $\underline{x}_3^T=(4, 1)$, $\underline{x}_4^T=(7/2, 5)$ e $\underline{x}_5^T = (3, 2)$

   sono linearmente indipendenti o dipendenti.
3) I vettori $\underline{x}_1^T$ e $\underline{x}_2^T$ formano una base di R^3?
4) I vettori $\underline{x}_3^T$, $\underline{x}_4^T$ e $\underline{x}_5^T$ formano una base di R^2?
5) I vettori $\underline{x}_3^T$, e $\underline{x}_5^T$ formano una base di R^2?

Combinazioni lineari, coniche e convesse

- *Un vettore $\underline{y}$ è combinazione LINEARE dei vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ numeri reali tali che: $\underline{y} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots + \lambda_n \underline{x}_n$*

- *Un vettore $\underline{y}$ è combinazione CONICA dei vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ numeri reali tali che: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ e $\underline{y} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots + \lambda_n \underline{x}_n$*

- *Un vettore $\underline{y}$ è combinazione CONVESSA dei vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ numeri reali tali che: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ e $\underline{y} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots + \lambda_n \underline{x}_n$*

Esercizi:

Determinare **<u>geometricamente</u>** se:

1)il vettore $\underline{y}^T=(8/3, 1)$ è combinazione **conica** dei vettori $\underline{x}_1^T=(1, 1)$ e $\underline{x}_2^T = (2, -1)$.

Combinazioni lineari, coniche e convesse

Determinare che tipo di combinazione (lineare, conica o convessa) è il vettore $\underline{y}^T = (5/3, 2/3, 4)$ rispetto ai vettori:

$\underline{x}_1^T=(2, 1, 8)$, $\underline{x}_2^T=(1, 0, 3)$ e $\underline{x}_3^T = (2, 1, 1)$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 5/3 \\ \lambda_1 + \quad \lambda_3 = 2/3 \\ 8\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 5/3 \\ \lambda_1 = 2/3 - \lambda_3 \\ 8\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2/3 - \lambda_3) + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 5/3 \\ \lambda_1 = 2/3 - \lambda_3 \\ 8(2/3 - \lambda_3) + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

Combinazioni lineari, coniche e convesse

Determinare che tipo di combinazione (lineare, conica o convessa) è il vettore $\underline{y}^T = (5/3, 2/3, 4)$ rispetto ai vettori:

$\underline{x}_1^T=(2, 1, 8)$, $\underline{x}_2^T=(1, 0, 3)$ e $\underline{x}_3^T = (2, 1, 1)$

$$\begin{cases} 2(2/3 - \lambda_3) + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 5/3 \\ \lambda_1 = 2/3 - \lambda_3 \\ 8(2/3 - \lambda_3) + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4/3 - 2\lambda_3 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 5/3 \\ \lambda_1 = 2/3 - \lambda_3 \\ 16/3 - 8\lambda_3 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 5/3 - 4/3 = 1/3 \\ \lambda_1 = 2/3 - \lambda_3 \\ - 7\lambda_3 + 3\lambda_2 = 4 - 16/3 = -4/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 1/3 \\ \lambda_1 = 2/3 - \lambda_3 \\ - 7\lambda_3 + 1 = - 4/3 \end{cases}$$

Combinazioni lineari, coniche e convesse

Determinare che tipo di combinazione (lineare, conica o convessa) è il vettore $\underline{y}^T = (5/3, 2/3, 4)$ rispetto ai vettori:

$\underline{x}_1^T=(2, 1, 8)$, $\underline{x}_2^T=(1, 0, 3)$ e $\underline{x}_3^T = (2, 1, 1)$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 1/3 \\ \lambda_1 = 2/3 - \lambda_3 \\ -7\lambda_3 + 1 = -4/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 1/3 \\ \lambda_1 = 2/3 - \lambda_3 \\ -7\lambda_3 = -1 - 4/3 = -7/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 1/3 \\ \lambda_1 = 2/3 - \lambda_3 \\ \lambda_3 = 1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 1/3 \\ \lambda_1 = 1/3 \\ \lambda_3 = 1/3 \end{cases}$$

Combinazioni lineari, coniche e convesse

Determinare che tipo di combinazione (lineare, conica o convessa) è il vettore $\underline{y}^T = (5/3, 2/3, 4)$ rispetto ai vettori:

$\underline{x}_1^T=(2, 1, 8)$, $\underline{x}_2^T=(1, 0, 3)$ e $\underline{x}_3^T = (2, 1, 1)$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/3\\2/3\\4\end{pmatrix}$$

Combinazione convessa

- *Un vettore $\underline{y}$ è combinazione LINEARE dei vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ numeri reali tali che: $\underline{y}= \lambda_1 \underline{x}_1+ \lambda_2 \underline{x}_2+\ldots+ \lambda_n \underline{x}_n$*

- *Un vettore $\underline{y}$ è combinazione CONICA dei vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ numeri reali tali che: $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n \geq 0$ e $\underline{y}= \lambda_1 \underline{x}_1+ \lambda_2 \underline{x}_2+\ldots+ \lambda_n \underline{x}_n$*

- *Un vettore $\underline{y}$ è combinazione CONVESSA dei vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ numeri reali tali che: $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n \geq 0$ e $\lambda_1+ \lambda_2+\ldots+\lambda_n = 1$ e $\underline{y}= \lambda_1 \underline{x}_1+ \lambda_2 \underline{x}_2+\ldots+ \lambda_n \underline{x}_n$*

Combinazioni lineari, coniche e convesse

Si determini un vettore che sia combinazione conica dei seguenti tre vettori:

$\underline{x}_1^T=(3, 0, 1)$, $\underline{x}_2^T=(5, 4, 1)$ e $\underline{x}_3^T = (1, 3, 8)$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\3\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

Combinazione conica implica che
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\3\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}1+5 = y_1\\ 4 = y_2\\ 1/3 + 1 = y_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6 = y_1\\ 4 = y_2\\ 4/3 = y_3\end{cases}$$

Esercizio

Scrivere la forma canonica e la forma standard per il seguente problema di programmazione lineare.

$$\max \ z = x_1 - x_2 - x_3$$

$$\begin{aligned}
-3x_1 - x_2 + x_3 \quad &<= \quad -3 \\
2x1 - 3x_2 - 2x_3 \quad &>= \quad 4 \\
x_1 - x_3 \quad &= \quad 2 \\
x_1 > \quad &= \quad 0 \\
x_2 \quad &<= \quad 0 \\
x_3 \quad & n.v.
\end{aligned}$$

Esempio: Pianificazione della produzione (formulazione)

Un'industria fabbrica 4 tipi di prodotti, **P1**, **P2**, **P3**, **P4**, la cui lavorazione è affidata a due reparti dell'industria: il reparto produzione e il reparto confezionamento. Per ottenere i prodotti pronti per la vendita è necessaria naturalmente la lavorazione in entrambi i reparti. La tabella che segue riporta, per ciascun tipo di prodotto i tempi (in ore) necessari di lavorazione in ciascuno dei reparti per avere una tonnellata di prodotto pronto per la vendita.

	P1	**P2**	**P3**	**P4**
Reparto produzione	2	1.5	0.5	2.5
Reparto confezionamento	0.5	0.25	0.25	1

ciascuna tonnellata di prodotto dà i seguenti profitti (prezzi espressi in Euro per tonnellata)

	P1	**P2**	**P3**	**P4**
Profitto	250	230	110	350

Determinare le quantità che si devono produrre settimanalmente di ciascun tipo di prodotto in modo da massimizzare il profitto complessivo, sapendo che ogni settimana, il reparto produzione e il reparto confezionamento hanno una capacità lavorativa massima rispettivamente di 100 e 50 ore.

Variabili di decisione.

E' naturale introdurre le variabili reali $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ e $\mathbf{x_4}$ rappresentanti rispettivamente le quantità di prodotto **P1**, **P2**, **P3**, **P4** da fabbricare in una settimana.

Funzione Obiettivo.

Ciascuna tonnellata di prodotto contribuisce al profitto totale secondo la tabella data. Quindi il profitto totale sarà:

$$\text{Max } 250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4$$

Vincoli.

Ovviamente la capacità produttiva della fabbrica (risorsa «scarsa») limita i valori che possono assumere le variabili; infatti si ha una capacità massima lavorativa in ore settimanali di ciascun reparto. In particolare per il reparto produzione si hanno a disposizione al più 100 ore settimanali e poiché ogni tonnellata di prodotto **P1** utilizza il reparto produzione per 2 ore, ogni tonnellata di prodotto **P2** utilizza il reparto produzione per 1.5 ore e così via per gli altri tipi di prodotti si dovrà avere:

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100$$

Ragionando in modo analogo per il reparto confezionamento si ottiene:

$$0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50$$

Vincolo di non negatività delle variabili:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

La formulazione finale quindi può essere scritta in questa forma:

$\max 250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4$

$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100$ (utilizzo reparto produzione)

$0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50$ (utilizzo reparto confezion.)

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$

Consideriamo ulteriori richieste (vincoli):

1.P1 non può utilizzare per più di 20 ore settimanali il reparto di produzione.

2.La produzione di **P2** non può superare quella di **P3**.

3.P4 può utilizzare complessivamente 30 ore settimanali di lavorazione (tra il reparto di produzione e quello di confezionamento).

4.La produzione di **P1** non può superare il doppio della produzione di **P2** e **P3**.

1. **P1** non può utilizzare per più di 20 ore settimanali il reparto di produzione:

$$2x_1 \leq 20 \iff x_1 \leq 10$$

2. La produzione di **P2** non può superare quella di **P3**:

$$x_2 \leq x_3$$

3. **P4** può utilizzare complessivamente 30 ore settimanali di lavorazione:

$$2.5x_4 + x_4 \leq 30 \iff 3.5x_4 \leq 30$$

4. La produzione di **P1** non può superare il doppio della produzione di **P2** e **P3**:

$$x_1 \leq 2 * (x_2+x_3)$$

Esempio 2

Supponiamo che ci siano tre lavori da svolgere: **stuccare, imbiancare e levigare**. Abbiamo a disposizione tre persone **Mario, Luca ed Andrea** che sanno svolgere questi tre lavori ma con differenti tempistiche come indicato nella seguente tabella (i valori rappresentano le ore necessarie ad ogni persona per portare a termine il rispettivo lavoro).

	STUCCA	IMBIANCA	LEVIGA
MARIO	3	1	2
LUCA	2	1.5	1.5
ANDREA	3	1.5	3

Il nostro obiettivo è quello di assegnare ad ogni persona un lavoro e ad ogni lavoro una persona al fine di minimizzare le ore totali necessarie per svolgere i tre lavori.

Esempio 2

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se assegnamo alla persona } i \text{ il lavoro } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Min $3X_{11}+1X_{12}+2X_{13}+3X_{21}+1.5X_{22}+1.5X_{23}+3X_{31}+1.5X_{32}+3X_{33}$

$X_{11}+ \quad X_{12}+ \quad X_{13}= 1$ (Mario)

$X_{21}+ \quad X_{22}+ \quad X_{23}= 1$ (Luca)

$X_{31}+ \quad X_{32}+ \quad X_{33}= 1$ (Andrea)

$X_{11}+ \quad X_{21}+ \quad X_{31}= 1$ (Levigare)

$X_{12}+ \quad X_{22}+ \quad X_{32}= 1$ (Stuccare)

$X_{13}+ \quad X_{23}+ \quad X_{33}= 1$ (Imbiancare)

Esempio 2

Min $3X_{11}+1X_{12}+2X_{13}+3X_{21}+1.5X_{22}+1.5X_{23}+3X_{31}+1.5X_{32}+3X_{33}$

$$\begin{array}{lll} X_{11}+ & X_{12}+ & X_{13}=1 \\ X_{21}+ & X_{22}+ & X_{23}=1 \\ X_{31}+ & X_{32}+ & X_{33}=1 \end{array} \Rightarrow \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1 \quad \text{per ogni } i = 1,2,3$$

$$\begin{array}{lll} X_{11}+ & X_{21}+ & X_{31}=1 \\ X_{12}+ & X_{22}+ & X_{32}=1 \\ X_{13}+ & X_{23}+ & X_{33}=1 \end{array} \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1 \quad \text{per ogni } j = 1,2,3$$

Esempio 2

$$\text{Min } 3X_{11}+1X_{12}+2X_{13}+ 3X_{21}+1.5X_{22}+1.5X_{23}+3X_{31}+1.5X_{32}+3X_{33}$$

$\boxed{c_{11}}$ $\boxed{c_{22}}$

$$\min \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

Esempio 2

$$\min \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1 \quad \text{per ogni } i = 1,2,3$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1 \quad \text{per ogni } j = 1,2,3$$

Generalizzando…

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{per ogni } i = 1,2,\ldots n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \text{per ogni } j = 1,2,\ldots n$$