ESERCIZI ETC

Riferimento: Lezione 2 - Definizioni e notazioni preliminari

Esercizio 1

Sia U l'insieme di tutte le stringhe su {0,1} e A = {x ∈ U | x può avere il carattere 0 solo nelle posizioni dispari}.
La sequenza 11 appartiene ad A?

Esercizio 2

Sia U l'insieme di tutte le stringhe su {0,1} e B = {x ∈ U | ogni terna di bit consecutivi in x contiene al più uno 0}.
Le sequenze 1; 10 appartengono a B?

Esercizio 3

Dimostrare il seguente lemma usando il principio di induzione su |S|.

Lemma:
*Se S e T sono insiemi finiti allora $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$.
In particolare, se S e T sono disgiunti (cioè $S \cap T = \emptyset$), allora $|S \cup T| = |S| + |T|$.*

Esercizio 4

Lemma Se S è un insieme finito allora $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$.

Cioè, esistono $2^{|S|}$ differenti sottoinsiemi di S. Perchè?
Suggerimento: utilizzare il principio di induzione su $|S|$.

Esercizio 5

Esempio. Indicare quali delle seguenti espressioni sono soddisfacibili, giustificando la risposta.

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}),$$

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}),$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

Esercizio 6

Es. Alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$
Linguaggio
$L = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb, \ldots\} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$.
Chi è il complemento $\overline{L}$ di L?

Esercizio 7

Es. Se $L = \{ba, a\}$, allora

$$L^* = \{\epsilon, a, aa, ba, aaa, aba, baa, aaaa, aaba, \ldots\}$$

Può bb essere una sottostringa di $w \in L^*$?

Esercizio 8

Esiste un linguaggio L tale che $\epsilon \in L^+$?

Esercizio 9

- Dare una definizione più semplice del linguaggio

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ non contiene occorrenze della stringa } ab$$
$$\text{e non contiene occorrenze della stringa } ba\}$$

Esercizio 10

Definire il seguente linguaggio in funzione del linguaggio L del precedente esercizio.

$\{w \in \{a, b\}^* \mid w$ non è né una potenza di a né una potenza di $b\}$

Esercizio 11

Trovare la parola più corta sull'alfabeto $\{0\}$ che non appartiene a $\{\epsilon, 0, 0^2, 0^5\}^3$.

Esercizio 12

Trovare una stringa w che non appartenga al linguaggic

$$\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ contiene un numero pari di } 0$$
$$\text{oppure esattamente due occorrenze di } 1\}$$

Esercizio 13

Fornire una dimostrazione costruttiva del seguente teorema.

Teorema
Per ogni numero pari n, $n > 2$, esiste un grafo non orientato con n nodi, in cui ogni nodo ha grado 3.

Esercizio 14

Fornire una dimostrazione per induzione della seguente proprietà $S(n)$.

$$S(n) : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Esercizio 15

Risolvere il Problema 0.11 in [Sip].

Trovare l'errore nella seguente dimostrazione che tutti i cavalli sono dello stesso colore.
AFFERMAZIONE: In un qualsiasi insieme di h cavalli, $h \geq 1$, tutti i cavalli sono dello stesso colore.

DIMOSTRAZIONE: Per induzione su h.

Base (h=1): In ogni insieme contenente un solo cavallo, tutti i cavalli sono banalmente dello stesso colore.

Passo induttivo: Supponiamo che l'affermazione sia vera per h cavalli (ipotesi induttiva) e dimostriamola vera per h+1 cavalli.
Prendiamo un insieme H di h+1 cavalli. Mostriamo che tutti i cavalli in H sono dello stesso colore.
Rimuoviamo un solo cavallo da H ottenendo l'insieme H_1 contenente h cavalli. Per ipotesi induttiva, tutti i cavalli di H_1 sono dello stesso colore. Ora sostituiamo il cavallo rimosso e rimuoviamone un altro in modo da ottenere l'insieme H_2. Per lo stesso motivo, tutti i cavalli in H_2 sono dello stesso colore. Pertanto, tutti i cavalli in H devono essere dello stesso colore, e la dimostrazione è completa.

Esercizio 16

Risolvere il Problema 0.13 in [Sip].

Trovare l'errore nella seguente dimostrazione che 2 = 1.
Si consideri l'equazione a = b. Moltiplicare entrambi i membri per a per ottenere $a^2 = ab$.
Sottrarre b^2 da entrambi i membri per ottenere $a^2 - b^2 = ab - b^2$.
Ora fattorizzare ogni membro $(a + b)(a - b) = b(a - b)$ e dividere entrambi i membri per $(a - b)$ per ottenere $a + b = b$. Infine, porre $a = b = 1$, che mostra che $2 = 1$.