Esercizio 3 - Gruppo 7

lunedì 3 maggio 2021 13:09

Esercizio 3

Un esperimento consiste nell'estrarre 3 biglie da un'urna contenente 4 biglie bianche e 2 rosse, con la regola che se viene estratta la biglia bianca, questa viene immediatamente reinserita nell'urna; se viene estratta la biglia rossa, questa viene lasciata fuori dall'urna. Calcolare (i) la probabilità che almeno una delle tre biglie estratte sia bianca, (ii) che la terza biglia estratta sia bianca, sapendo che la prima biglia estratta è rossa.

(i) A = "almeno una delle 3 biglie estratte è bianca"

$$\underline{P}(A) = 1 - \underline{P}(\bar{A}) = 1 - \underbrace{\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{0}{4}}_{0} = 1$$

(ii) Bi = "la biglia i-esima è bianca"

$$\underline{P}(B_3 \mid \bar{B}_1) = \frac{\underline{P}(B_3 \cap \bar{B}_1)}{\underline{P}(\bar{B}_1)} = \frac{7/25}{1/3} = \frac{21}{25} \, (= 0{,}84)$$

$B_3 \cap \overline{B}_1 = \{ \underbrace{RBB}_{\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}},\ \underbrace{RRB}_{\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4}} \}$

$\underline{P}(B_3 \cap \overline{B}_1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{7}{25}$

$\underline{P}(\overline{B}_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Esercizio 4

Un algoritmo genera sequenze di interi $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, dove $x_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Dati gli eventi A= {la sequenza contiene solo numeri pari}, B= {la sequenza contiene esattamente due volte il numero 2} e C= {la sequenza contiene tutti numeri uguali}, (i) studiare l'indipendenza delle coppie (A,B), (A,C) e (B,C); (ii) stabilire se risulta $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

$$|S| = 9^5 \qquad |A| = 4^5$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{array}$$

$$|B| = 8^3 \cdot \binom{5}{2}$$

$$\underline{2}\ \underline{2}\ \begin{array}{ccc} \_ & \_ & \_ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 8 \cdot & 8 \cdot & 8 \end{array} \qquad 8^3 \binom{5}{2}$$

$$|C| = 9$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{4^5}{9^5} \qquad P(B) = \frac{|B|}{|S|} = \frac{8^3 \binom{5}{2}}{9^5} \qquad P(C) = \frac{9}{9^5}$$

(A, B) $\quad P(A \cap B) \overset{?}{=} P(A)P(B)$

$A \cap B$ $\quad$ $\underline{2}\ \underline{2}\ \underset{3}{\underline{\ }} \cdot \underset{3}{\underline{\ }} \cdot \underset{3}{\underline{\ }}$ $\quad 3^3 \cdot \binom{5}{2}$

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|S|} = \frac{3^3 \cdot \binom{5}{2}}{9^5} \cong 0{,}0046$$

$$\neq$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{4^5}{9^5} \cdot \frac{8^3 \binom{5}{2}}{9^5} \cong 0{,}0015$$

(A, e) $\quad |A \cap e| = 4$

$$P(A \cap e) = \frac{|A \cap e|}{|S|} = \frac{4}{9^5}$$

$$\neq$$

$$P(A) \cdot P(e) = \frac{4^5}{9^5} \cdot \frac{9}{9^5}$$

(B, e) $\quad P(B \cap e) = 0 \neq P(B)P(e)$

(B, C) $\quad \underline{P}(B \cap C) = 0 \neq \underline{P}(B)\underline{P}(C)$

(ii) $\quad \underline{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \underline{P}(A)\underline{P}(B)\underline{P}(C)$

$$A \cap B \cap C = A \cap \emptyset = \emptyset$$

Esercizio 3.d

lunedì 10 maggio 2021 13:19

$-n \quad \dots \quad -1 \qquad 0 \qquad 1 \quad \dots \quad n$

3.d) Da un'urna contenente $2n+1$ biglie numerate da $-n$ a n si estraggono due biglie a caso.
(i) Calcolare la probabilità che il prodotto dei due numeri estratti sia positivo, sia nullo, sia negativo.
(ii) Verificare che la somma delle tre probabilità è 1.

(i) $P =$ "il prodotto dei due numeri estratti è positivo"

$P = P_1 \cup P_2$

$P_1 =$ "i due numeri estratti sono positivi"
$P_2 =$ "i due numeri estratti sono negativi"

$$\underline{P}(P_1) = \frac{\cancel{n}}{2n+1} \cdot \frac{n-1}{2\cancel{n}} = \frac{n-1}{2(2n+1)}$$

$$\underline{P}(P_2) = \frac{\cancel{n}}{2n+1} \cdot \frac{n-1}{2\cancel{n}} = \frac{n-1}{2(2n+1)}$$

$$\underline{P}(P) = \underline{P}(P_1) + \underline{P}(P_2) = \frac{n-1}{2(2n+1)} + \frac{n-1}{2(2n+1)} = \frac{n-1}{2n+1}$$

Z = "il prodotto dei 2 numeri estratti è nullo"

Z_1 = "il primo numero estratto è nullo"

Z_2 = "il secondo numero estratto è nullo"

$Z = Z_1 \cup Z_2$

$$\underline{P}(Z_1) = \frac{1}{2n+1} \qquad \underline{P}(Z_2) = \frac{\cancel{2n}}{2n+1} \cdot \frac{1}{\cancel{2n}} = \frac{1}{2n+1}$$

$$\underline{P}(Z) = \underline{P}(Z_1) + \underline{P}(Z_2) = \frac{2}{2n+1}$$

N = "il prodotto dei due numeri estratti è negativo"

$$\underline{P}(1° \text{ estratto positivo } \& \ 2° \text{ estratto negativo}) = \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \frac{n}{2(2n+1)}$$

$$\underline{P}(N) = \cancel{2} \cdot \frac{n}{\cancel{2}(2n+1)} = \boxed{\frac{n}{2n+1}}$$

(ii) $$\underline{P}(P) + \underline{P}(Z) + \underline{P}(N) = \frac{n-1+2+n}{2n+1} = 1$$

Esercizio 4.a

lunedì 10 maggio 2021 13:20

4.a) Sia X una variabile aleatoria discreta che assume valori $0, 1, 2, 3$ e tale che

$$\longrightarrow \quad p(x) = \frac{1}{2}p(x-1) \qquad \text{per } x = 1, 2, 3.$$

(i) Determinare la funzione di probabilità $p(x) = P(X = x)$, per $x = 0, 1, 2, 3$.
(ii) Ricavare $E(X)$.

(i)

$$p(0) = a = 8/15$$

$$p(1) = \frac{1}{2}p(0) = \frac{1}{2}\cdot a = \frac{a}{2} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{15} = \frac{4}{15}$$

$$p(2) = \frac{1}{2}\cdot p(1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{a}{4} = \frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{8}^{2}}{15} = \frac{2}{15}$$

$$p(3) = \frac{1}{2}\cdot p(2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{4} = \frac{a}{8} = \frac{1}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{8}}{15} = \frac{1}{15}$$

$$a + \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{8} = 1$$

$$\frac{8a + 4a + 2a + a}{\cancel{8}} = \frac{8}{\cancel{8}}$$

$$15a = 8$$

$$a = \frac{8}{15}$$

$$(ii)\quad \mathbb{E}(X) = \sum_x x \cdot p(x) = \cancel{0 \cdot p(0)} + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3)$$

$$= 1 \cdot \frac{4}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15} + 3 \cdot \frac{1}{15} = \frac{11}{15}$$