Esercizio 1

martedì 18 maggio 2021 14:01

Esercizio 1 Sia X la variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot |x-1| & 0 < x < 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Individuare il valore della costante c.
(ii) Ricavare $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Determinare $E(X)$ e $Var(X)$.
(iv) Calcolare $P(X > 1/2 \,|\, X \leq 3/2)$.

(i) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$1 = \int_0^2 c|x-1|\,dx = \int_0^1 c\cdot(1-x)\,dx + \int_1^2 c\cdot(x-1)\,dx =$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$$

$$= c\int_0^1 (1-x)\,dx + c\int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$\left[g(x)\right]_a^b = g(b) - g(a)$$

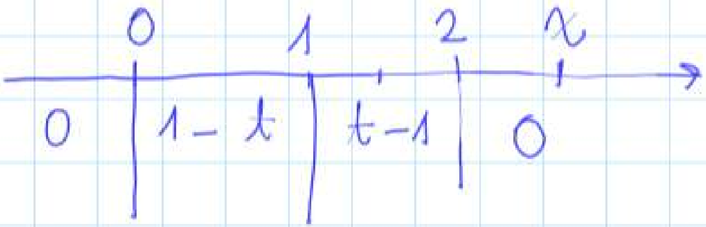
$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 < x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$= c\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + c\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2$$

$$= c\left(1 - \frac{1}{2} - 0 + \frac{0^2}{2}\right) + c\left(\frac{2^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} - \cancel{2} - \frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= c \cdot \frac{1}{2} + c \cdot \frac{1}{2} = c$$

(ii) $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$



Per $x < 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

Per $0 \leq x < 1$, $F(x) = \int^{x} f(t)\,dt =$

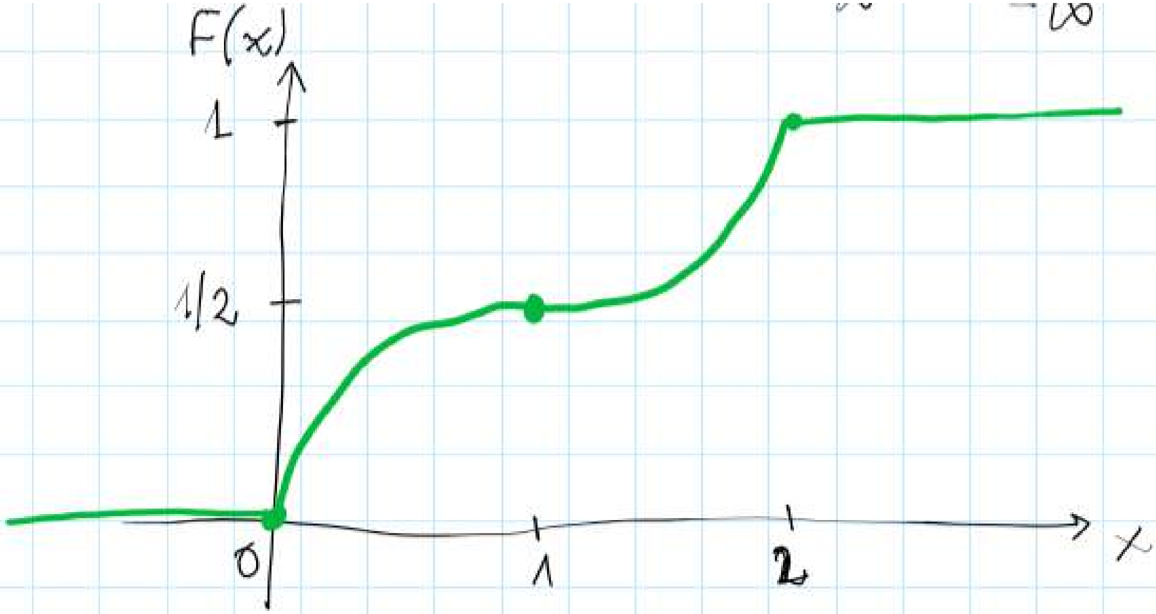
$$= \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\, dt} + \int_{0}^{x} (1-t)\, dt$$

$$= \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^x = x - \frac{x^2}{2}$$

Per $1 \leq x < 2$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\, dt} + \int_{0}^{1} (1-t)\, dt + \int_{1}^{x} (t-1)\, dt$

$$= \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_1^x = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{x^2}{2} - x \cancel{+ \frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} - x + 1$$

Per $x \geq 2$, $F(x) = 1$ $\quad \int^{x} f(t) = \cancel{\int^{0} f(t)} + \int^{1} f(t)\, dt + \int^{2} f(t)\, dt + \cancel{\int_{2}^{x} f(t)\, dt}$



(iii) $$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{0}^{2} x\, f(x)\, dx = \int_{0}^{1} x \cdot (1-x)\, dx + \int_{1}^{2} x(x-1)\, dx$$

$$= \int_{0}^{1} (x - x^2)\, dx + \int_{1}^{2} (x^2 - x)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \cancel{- \frac{1}{3}} \cancel{+ \frac{8}{3}} \cancel{- 2} \cancel{- \frac{1}{3}} + \frac{1}{2} = 1$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x^2(1-x)\,dx + \int_1^2 x^2(x-1)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx + \int_1^2 (x^3 - x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

$$= -2 - \frac{1}{2} + 4 = \frac{3}{2}$$

$$Var(X) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

(iv) $$P(X > 1/2 \mid X \leq \frac{3}{2}) = \frac{P(\frac{1}{2} < X \leq 3/2)}{P(X \leq 3/2)} = \frac{F(\frac{3}{2}) - F(\frac{1}{2})}{F(\frac{3}{2})}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1} = \frac{\frac{5}{\cancel{8}} - \frac{3}{8}}{\frac{5}{\cancel{8}}} = \frac{2}{5}$$

Esercizio 2

martedì 18 maggio 2021 14:03

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ cx^2 + \frac{x}{2}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

(i) Calcolare il valore di c.
(ii) Ricavare la densità di probabilità di X, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Determinare i momenti $E(X^n)$, $n \ge 1$.

(i) $\lim_{x\to 0^-} F(x) = F(0)$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1^-} F(x) = F(1)$

$0 = \lim_{x\to 0^-} 0 = c \cdot 0^2 + \frac{0}{2} = 0$ $\qquad$ $c + \frac{1}{2} = \lim_{x\to 1^-} cx^2 + \frac{x}{2} = F(1) = 1$

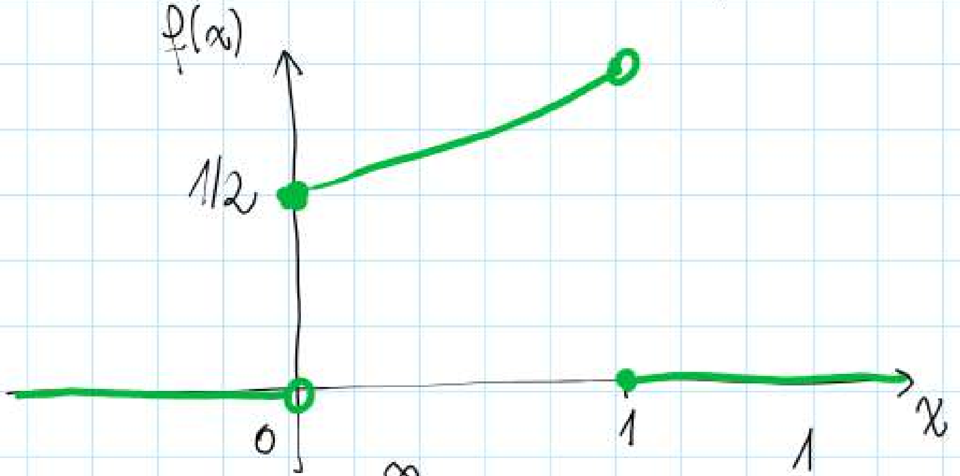
$c + \frac{1}{2} = 1$

$c = \frac{1}{2}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

(ii)

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$



(iii)

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\, dx = \int_0^1 x^n \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^1 \left(x^{n+1} + \frac{x^n}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{x^{n+1}}{2(n+1)} \right]_0^1 = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2(n+1)}$$

Esercizio 3

martedì 18 maggio 2021 14:03

Esercizio 5 Si supponga che la frazione di tempo che un cliente aspetta in coda ad uno sportello sia una variabile aleatoria X uniformemente distribuita tra 0 ed 1 ora.

(i) Determinare media e varianza di X.
(ii) Calcolare la funzione di distribuzione.
(iii) Valutare la probabilità che il tempo di attesa sia inferiore ai 30 minuti.

$$X \sim \mathrm{Unif}(0, 60\,\mathrm{min}) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}, & x \in (0,60) \\ 0, & x \notin (0,60) \end{cases}$$

$$(i) \quad E(X) = \int_0^{60} x \cdot \frac{1}{60}\, dx = \frac{1}{60}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{60} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{60}_{1}}\left[\frac{\cancel{3600}^{\cancel{60}^{30}}}{\cancel{2}}\right] = 30$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_0^{60} x^2 \cdot \frac{1}{60} dx = \frac{1}{60} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{60} = \frac{1}{60} \left[\frac{216000}{3} \right] = 1200$$

$$Var(X) = 1200 - 900 = 300 = \frac{(60-0)^2}{12}$$

(ii) $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{60} & 0 \leq x < 60 \\ 1, & x \geq 60 \end{cases} \qquad \left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \right)$$

(iii) $$P(X \leq 30) = F(30) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Esercizio 4

martedì 18 maggio 2021 15:40

5.c) Il tempo di funzionamento (in ore) di una batteria di un computer è descritto da una variabile aleatoria esponenziale. Sapendo che la durata media della batteria è di 3 ore, calcolare:
(i) la probabilità che la batteria duri più di 4 ore,
(ii) la probabilità che la batteria duri in totale meno di 4 ore sapendo che il computer è già funzionante da un'ora.

$$X \sim \mathcal{E}xp\left(\frac{1}{3}\right) \qquad X \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \qquad \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{1}{\lambda} = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

(i) $$\underline{P}(X > 4) = 1 - \underline{P}(X \leq 4)$$

$$= 1 - F(4)$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 4}\right) = \cancel{1} - \cancel{1} + e^{-\frac{4}{3}} \cong 0,2636$$

(ii) $$\underline{P}(X < 4 \mid X \geq 1) = \underline{P}(X < 1+3 \mid X \geq 1) = \underline{P}(X < 3) = F(3) = 1 - e^{-\frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}}$$

$$= 1 - e^{-1} \cong 0,6321$$