Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica – A.A. 2021/22

CAPITOLO 1 – Analisi combinatoria

N.B. La presente dispensa non sostituisce i libri di testo e non va resa accessibile sul web.

Gli argomenti indicati con ($\star\star$) sono da considerarsi facoltativi.

1.1 Introduzione

Problema. Un sistema di comunicazione consiste di n antenne allineate. Ogni antenna può essere funzionante oppure difettosa. Quante sono le possibili configurazioni?

Avendo 2 casi per ogni antenna, il numero di possibili configurazioni è

$$2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$$

Ad esempio, se $n = 4$ vi sono $2^4 = 16$ possibili configurazioni:

$$\begin{array}{cccc} 0\,0\,0\,0 & 0\,1\,0\,0 & 1\,0\,0\,0 & 1\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 & 0\,1\,0\,1 & 1\,0\,0\,1 & 1\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 & 0\,1\,1\,0 & 1\,0\,1\,0 & 1\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,1 & 0\,1\,1\,1 & 1\,0\,1\,1 & 1\,1\,1\,1 \end{array}$$

(1 = antenna funzionante)

(0 = antenna difettosa)

Supponiamo che il sistema sia funzionante se non vi sono 2 antenne difettose consecutive. Sapendo che esattamente m delle n antenne sono difettose, qual è la probabilità che il sistema sia funzionante?

Ad esempio, se $n = 4$ e $m = 2$ le possibili configurazioni sono 6:

(1 = antenna funzionante)
(0 = antenna difettosa)

$$\begin{array}{llll}
0 & 0 & 1 & 1: \text{ sistema } \textbf{non} \text{ funzionante} \\
0 & 1 & 0 & 1: \text{ sistema funzionante} \\
0 & 1 & 1 & 0: \text{ sistema funzionante} \\
1 & 0 & 0 & 1: \text{ sistema } \textbf{non} \text{ funzionante} \\
1 & 0 & 1 & 0: \text{ sistema funzionante} \\
1 & 1 & 0 & 0: \text{ sistema } \textbf{non} \text{ funzionante}
\end{array}$$

3 casi su 6: possiamo affermare che la probabilità che il sistema sia funzionante è

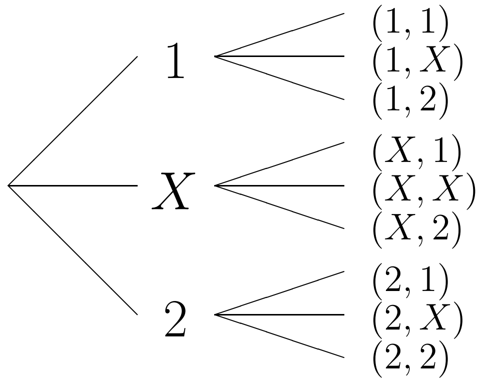
$$\text{prob.} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \ ?$$

In molti problemi il calcolo delle probabilità si effettua semplicemente calcolando il numero di modi in cui avviene un dato evento; sarà questo l'argomento dell'*analisi combinatoria*.

1.2 Il principio fondamentale del calcolo combinatorio

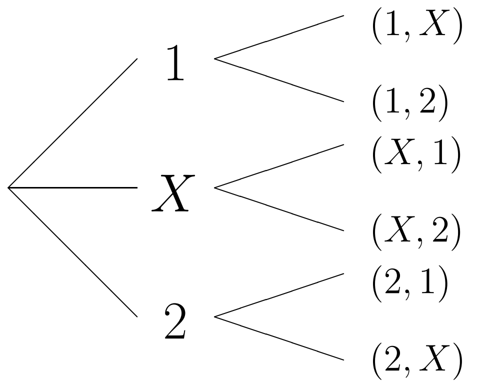
Esempio. Un giocatore scommette su 2 partite di calcio, con esiti 1, X, 2. In quanti modi può scegliere come scommettere?

Soluzione. $3 \times 3 = 9$



Esempio. Due giocatori (avversari) scommettono su una partita di calcio, con esiti 1, X, 2. In quanti modi si possono effettuare le scelte?

Soluzione. $3 \times 2 = 6$



Principio fondamentale del calcolo combinatorio. Si realizzino 2 esperimenti. Si supponga che il primo esperimento abbia m esiti possibili, e che per ognuno di questi il secondo esperimento abbia n esiti possibili. Se sequenze distinte di esiti dei due esperimenti producono esiti finali distinti, allora vi sono in tutto mn esiti possibili.

Dimostrazione. Elenchiamo tutti gli esiti dei due esperimenti:

$$m \text{ righe:} \quad \left\{ \begin{array}{cccccl} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,n) & \leftarrow n \text{ elementi} \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,n) & \leftarrow n \text{ elementi} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ (m,1) & (m,2) & \dots & (m,n) & \leftarrow n \text{ elementi} \end{array} \right.$$

dove si intende che l'esito finale è la coppia ordinata (i,j) se il primo esperimento ha prodotto esito i e il secondo ha prodotto esito j. L'insieme dei possibili esiti consiste di m righe, ognuna contenente n elementi. Quindi vi sono in tutto mn esiti possibili.

Notiamo che sequenze distinte di esiti dei due esperimenti producono esiti finali distinti; in altri termini (i,j) è un risultato distinto da (j,i).

Esempio. Si lanciano a caso due dadi da gioco. Quanti sono i risultati possibili?
Soluzione. Il lancio del primo dado dà l'esito del primo esperimento, e il lancio del secondo dado dà l'esito del secondo esperimento; per il principio fondamentale del calcolo combinatorio vi sono in tutto $6 \times 6 = 36$ risultati possibili.

Esempio. Un campionato di calcio prevede 10 partite in una giornata, ed ognuna può dar luogo a 3 tipi di risultati (1, X, 2). Se si deve scegliere una partita e un risultato, quante sono le scelte possibili?
Soluzione. Si può vedere la scelta della partita come l'esito del primo esperimento e la scelta del risultato come l'esito del secondo esperimento; per il principio fondamentale del calcolo combinatorio vi sono in tutto $10 \times 3 = 30$ scelte possibili.

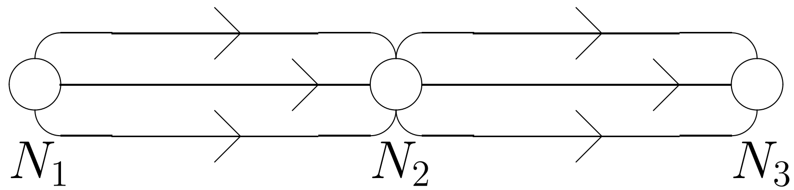
Esempio. Uno studente può inserire nel piano di studi 2 insegnamenti a scelta, di cui uno deve essere selezionato da un elenco di 9 insegnamenti e l'altro da un elenco distinto di 10 insegnamenti. In quanti modi diversi può completare il piano di studi?
Soluzione. Si hanno in totale $9 \times 10 = 90$ modi diversi.

Esempio. Quante sono le funzioni booleane definite su $\{0, 1\}$?

Soluzione. Per ogni $x \in \{0, 1\}$ risulta $f(x)$ uguale a 0 o 1, con $f(0)$ corrispondente all'esito del primo esperimento e $f(1)$ all'esito del secondo esperimento. Vi sono pertanto $2 \times 2 = 4$ funzioni siffatte.

x	$f(x) = 0$	$f(x) = x$	$f(x) = \overline{x}$	$f(x) = 1$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Esempio. Si cosideri il seguente grafo orientato. Quanti sono i percorsi distinti possibili che portano dal nodo N_1 al nodo N_3?



Soluzione. Vi sono $3 \times 3 = 9$ percorsi distinti.

Esempio. Si lancia a caso un dado da gioco. Se esce un numero pari si lancia nuovamente il dado. Se esce un numero dispari si lancia un dado truccato, in cui il 6 è stato modificato in 5. Quanti sono i risultati possibili?
Soluzione. Tenendo conto delle alternative relative al primo lancio, per il principio fondamentale del calcolo combinatorio vi sono in tutto $3 \times 6 + 3 \times 5 = 33$ esiti possibili.

Esempio. Un'urna contiene un dado regolare ed un dado con numeri 7, 8, 9, 10, 11, 11. Si lancia un dado estratto a caso dall'urna. Quanti sono i risultati possibili?
Soluzione. Tenendo conto delle 2 alternative relative all'estrazione, vi sono in tutto $6 + 5 = 11$ esiti possibili.

Esempio. Si effettuano due esperimenti. Il primo ha m possibili esiti. Se il primo esperimento produce l'esito $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, il secondo può avere k_i possibili esiti. Supponendo che sequenze distinte di esiti dei due esperimenti producano esiti finali distinti, quanti sono gli esiti finali possibili?
Soluzione. Gli esiti possibili sono $\sum_{i=1}^{m} k_i = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$.

Esempio. Si lanciano due dadi. Se il prodotto dei due numeri usciti è dispari allora vince Dario, se è pari allora vince Piero. Chi ha più possibilità di vincere?

Soluzione. Dario vince se il prodotto è dispari, ossia se entrambi i numeri usciti sono dispari. Ciò si realizza in $3 \times 3 = 9$ modi distinti. Piero vince se il prodotto è pari, ossia se almeno uno dei numeri usciti è pari. Ciò si realizza in $3 \times 6 + 3 \times 3 = 18 + 9 = 27$ modi distinti (pari e qualsiasi oppure dispari e pari). Quindi Piero è avvantaggiato.

Principio fondamentale (generalizzato) del calcolo combinatorio. Si realizzino r esperimenti. Si supponga che il primo esperimento abbia n_1 esiti possibili, e che per ognuno di questi il secondo esperimento abbia n_2 esiti possibili, e ancora che per ognuno degli esiti dei primi 2 esperimenti il terzo esperimento abbia n_3 esiti possibili, ecc. Allora, se sequenze distinte di esiti degli r esperimenti producono esiti finali distinti, allora gli r esperimenti producono in tutto $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$ esiti possibili.

Esempio. (i) Quante sono le targhe automobilistiche formate da 7 caratteri, di cui 3 sono numeri e 4 sono lettere (scelte tra le 26 lettere dell'alfabeto anglosassone)?
(ii) Quante targhe vi sono escludendo le ripetizioni tra numeri e lettere?
Soluzione. Per il principio fondamentale (generalizzato) del calcolo combinatorio,
(i) vi sono $10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 = 456\,976\,000$ targhe possibili;
(ii) vi sono $10 \times 9 \times 8 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23 = 258\,336\,000$ targhe senza ripetizioni.

Esempio. Quanti sono i risultati possibili se si lancia a caso una moneta per n volte, se l'ordine è rilevante?
Soluzione. Ognuno degli n esperimenti consistenti nel lancio della moneta ha 2 possibili esiti, e quindi i risultati possibili sono $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$.
Ad esempio, per $n = 3$ si hanno 8 risultati: $ccc, cct, ctc, ctt, tcc, tct, ttc, ttt$.

Esempio. Si lancia un dado e poi si lanciano tante monete pari al risultato del lancio del dado. Quanti sono gli esiti finali possibili?
Soluzione. Gli esiti possibili sono $2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6 = \sum_{i=1}^{6} 2^i = 2^7-2 = 126$, avendo usato la formula $\sum_{i=1}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} - 1$, valida per $x \neq 1$.

Esempio. In quanti modi si possono scegliere r oggetti in un insieme di n oggetti, se l'ordine delle scelte è rilevante? (Corrisponde a estrazioni senza reinserimento)

Soluzione. $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

Esempio. Quanti sono i risultati possibili se si estraggono in sequenza 6 biglie da un'urna contente 90 biglie distinte (tenendo conto dell'ordine delle estrazioni)?

Soluzione. Nella prima estrazione vi sono 90 possibili risultati, nella seconda ve ne sono 89, e così via nella sesta ve ne sono 85, quindi i risultati possibili sono in tutto $90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86 \times 85 = 448\,282\,533\,600$.

Esempio. Si cosideri il seguente grafo. Avendo a disposizione 3 colori distinti, in quanti modi è possibile colorare i nodi del grafo dando colori diversi a nodi adiacenti? Cosa cambia se si aggiunge un arco che congiunge N_1 a N_4?

Soluzione. Vi sono $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$ colorazioni possibili. Nel secondo caso 18.

1.3 Permutazioni

In quanti modi si possono ordinare le lettere a, b, c? Per il principio fondamentale del calcolo combinatorio i casi possibili sono $3 \times 2 \times 1 = 6$: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Ciascuno di questi ordinamenti prende il nome di *permutazione*.

Le permutazioni distinte di n oggetti sono $n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

$$
\begin{array}{ll}
0! = 1 & 10! = 3\,628\,800 \\
1! = 1 & 11! = 39\,916\,800 \\
2! = 2 & 12! = 479\,001\,600 \\
3! = 6 & 13! = 6\,227\,020\,800 \\
4! = 24 & 14! = 87\,178\,291\,200 \\
5! = 120 & 15! = 1\,307\,674\,368\,000 \\
6! = 720 & 16! = 20\,922\,789\,888\,000 \\
7! = 5\,040 & 17! = 355\,687\,428\,096\,000 \\
8! = 40\,320 & 18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000 \\
9! = 362\,880 & 19! = 121\,645\,100\,408\,832\,000
\end{array}
$$

Esempio. Si eseguono simultaneamente 10 programmi, di cui 4 sono scritti in Linguaggio C e 6 in Java. Viene poi stilato l'elenco dei programmi nell'ordine di terminazione delle esecuzioni. Sapendo che le 10 esecuzioni hanno avuto termine in istanti diversi,
(a) quanti sono i possibili elenchi dei programmi?
(b) quanti sono i possibili elenchi, se i programmi in C e Java compaiono in 2 liste, con precedenza alla lista dei programmi in C?

Soluzione. (a) Ad ogni elenco corrisponde una possibile permutazione di 10 oggetti, quindi la risposta è $10! = 3\,628\,800$.
(b) Vi sono $4!$ elenchi dei programmi in C e $6!$ elenchi dei programmi in Java; per il principio fondamentale del calcolo combinatorio vi sono quindi $4! \cdot 6! = 24 \cdot 720 = 17\,280$ diversi elenchi se i programmi in C e Java compaiono in 2 liste, con precedenza alla lista dei programmi in C.

Esempio. Quanti sono gli anagrammi di S T A T I S T I C A ?

Soluzione. Se le 10 lettere da permutare fossero distinte vi sarebbero $10! = 3\,628\,800$ permutazioni possibili. Tuttavia le lettere non sono distinte: se permutiamo le lettere S tra di loro, le lettere T tra di loro, le lettere A tra di loro, e le lettere I tra di loro, si ottiene comunque la stessa parola. Il numero di anagrammi distinti è quindi

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{3\,628\,800}{2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2} = 75\,600.$$

Permutazioni di oggetti non tutti distinti

Un ragionamento analogo a quello svolto nell'esempio precedente mostra che vi sono

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

permutazioni distinte di n oggetti presi da r categorie, dei quali n_1 sono identici fra loro, n_2 sono identici fra loro e distinti dai precedenti, ..., n_r sono identici fra loro e distinti dai precedenti, con

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r.$$

Esempio. Si eseguono simultaneamente 10 programmi, di cui 4 sono scritti in Linguaggio C e 6 in Java. Viene poi stilato l'elenco dei programmi nell'ordine di terminazione delle esecuzioni. Quanti sono i possibili elenchi dei programmi se è indicato solo il loro linguaggio?

Soluzione. Trattandosi di permutazioni di oggetti non tutti distinti, gli elenchi possibili sono

$$\frac{10!}{4!\,6!} = \frac{3\,628\,800}{24 \cdot 720} = 210.$$

Esempio. Quanti sono i vettori booleani di dimensione n costituiti da k bit pari a 1 e da $n-k$ bit pari a 0?

Soluzione. I possibili vettori siffatti sono $\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Per $n = 4$ e $k = 2$ i vettori sono $\dfrac{4!}{2!\,(4-2)!} = 6$: 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100.

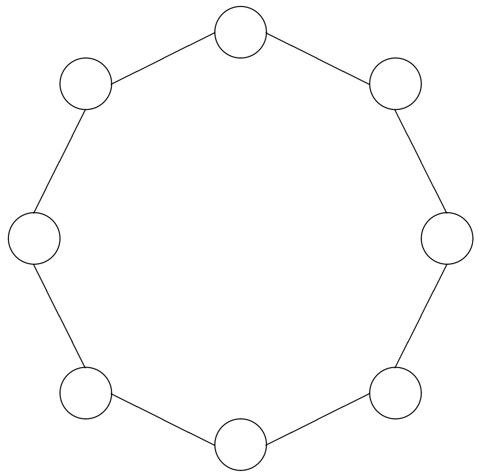
Esempio. In una giornata di un campionato di calcio vi sono 10 partite, ed ognuna può dar luogo a 3 tipi di risultati (1, X, 2). (i) Quanti sono i risultati possibili? (ii) Quante sono le sequenze di risultati possibili se vi sono 5 vincite in casa e 3 pareggi?

Soluzione. (i) I possibili risultati sono $3^{10} = 59\,049$.

(ii) Nel caso di 5 vincite in casa e 3 pareggi, allora le sequenze di risultati possibili sono

$$\frac{10!}{5!\,3!\,2!} = 2\,520.$$

Esercizio. Quante configurazioni si possono realizzare disponendo n oggetti in un allineamento circolare?



Soluzione. $n!/n = (n-1)!$

poiché per ogni permutazione ve ne sono n equivalenti.