Tempo di esecuzione
e
Analisi asintotica

2 marzo 2023

Argomenti in breve

- Metodologie di analisi di algoritmi
- Tecniche di progettazione di algoritmi:

1. Divide et impera
2. Programmazione dinamica
3. Tecnica greedy
4. Algoritmi esaustivi intelligenti

- Grafi e principali algoritmi su grafi

Algoritmi e pseudocodice

Un **algoritmo** è un procedimento per risolvere un problema mediante una sequenza finita di operazioni elementari.

Il procedimento deve essere descritto in maniera precisa e univoca allo scopo di essere eseguito automaticamente dall'esecutore.

Un problema computazionale è una relazione fra alcuni dati in ingresso (input) e alcuni dati in uscita (output)

L'algoritmo potrà essere implementato in un programma mediante un linguaggio di programmazione e una opportuna struttura dei dati.

Obiettivi del corso

Abbiamo bisogno di algoritmi ogni qual volta vogliamo scrivere un programma.

Obiettivo finale: programmare in maniera consapevole e creativa

Dal problema reale al programma che lo risolve:

1. Formalizzazione del problema
2. Scelta della tecnica per progettare algoritmo
3. Scelta della struttura dati per organizzare i dati
4. Dimostrazione della correttezza
5. Analisi risorse usate / efficienza

Esempio

Ricerca del massimo

INPUT: n numeri $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ su cui è definito un ordine $\leq$

OUTPUT: elemento $\mathbf{a}_i$ massimo (cioè t.c. ogni altro elemento $\mathbf{a}_j$ sia $\mathbf{a}_j \leq \mathbf{a}_i$)

(Variante: output indice i)

Pseudocodice

Ricerca del massimo fra n numeri $a_1, \dots, a_n$.

Un algoritmo (in pseudo-codice):

```
max = a_1
For i = 2 to n
    If (a_i > max) then
        max = a_i
    Endif
Endfor
```

Pseudocodice di [KT]

```
max ← a_1
for i = 2 to n {
    if (a_i > max)
        max ← a_i
}
```

Pseudocodice di [CLRS]

Quale il tempo di esecuzione?

- Numero di secondi?
- Implementato con quale struttura dati, linguaggio, macchina, architettura, compilatore…..?
- Su quanti numeri? 100, 1.000, 1.000.000?

Analisi

Studieremo il tempo in funzione della taglia n dell'input :

$T(n)$

Vogliamo analizzare l'efficienza dell'algoritmo (non di un programma) prima di scegliere implementazione, hardware etc.

Cosa posso dire?

Tempo di esecuzione

Tempo di esecuzione $T(n)$ sarà misurato in termini del numero di operazioni elementari per eseguire l'algoritmo su un input di taglia n.

Sono considerate operazioni elementari le operazioni che richiedono tempo costante (= non dipendente dalla taglia n dell'input).

Per esempio: assegnamento, incremento, confronto

Calcoleremo il tempo di esecuzione di un algoritmo, ricorsivamente, partendo dalla sua struttura.

Struttura di un algoritmo (non ricorsivo)

Può essere costituito da:

- Una singola istruzione elementare
- Un blocco sequenziale di istruzioni (allo stesso livello di indentazione)
- Un'istruzione if: `If(cond) then istr1`
  `Else istr2 Endif`
- Un ciclo o loop for, while, repeat:
  - `For i=a to b {istr} Endfor`
  - `While (cond){istr}`
  - `Repeat {istr} until (cond)`

Pseudocodice di [KT]

Struttura dell'esempio

```
1. max = a1
2. For i = 2 to n
3.     If (ai > max) then
4.         max = ai
5.     Endif
6. Endfor
```

E' un **blocco** di 2 istruzioni:

1. Assegnamento

2-6. For

L'istruzione **For** delle linee 2-6 è:

For i=a to b {istr0} Endfor

dove **istr0** è l'istruzione if delle linee 3-5

L'istruzione **If** delle linee 3-5 è:

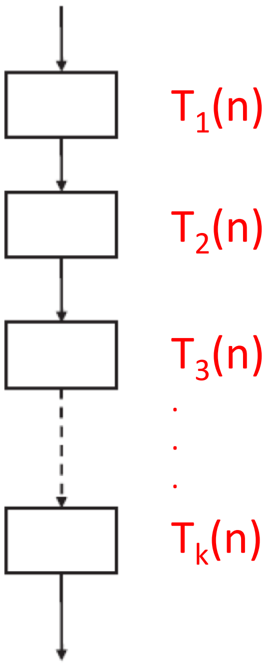
```
If(cond) then istr1
         Else istr2 Endif
```

dove **cond** è il confronto: $a_i > max$

istr1 è l'assegnamento: $max = a_i$

istr2 è vuota

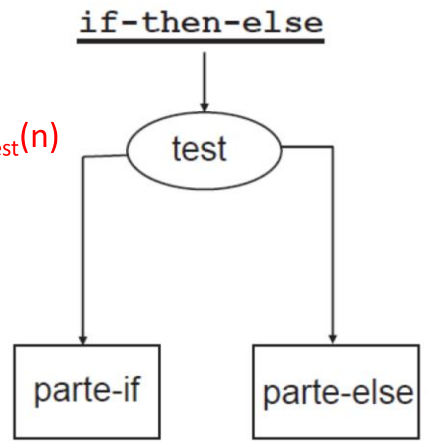
Blocco sequenziale



$$T(n) = T_1(n) + T_2(n) + T_3(n) + \dots + T_k(n)$$

If then else

$T_{test}(n)$

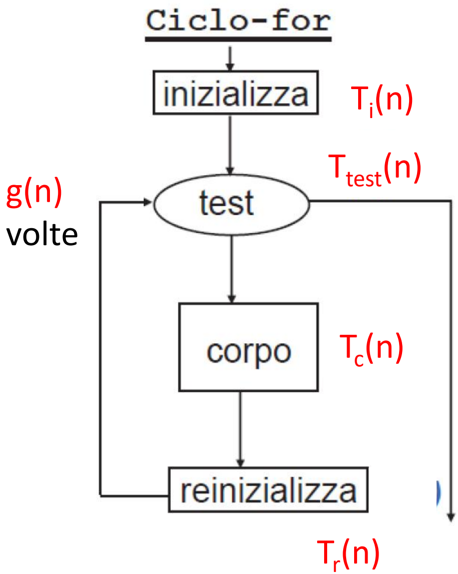


$T_{if}(n)$

$T_{else}(n)$

$$T(n) \leq T_{test}(n) + \max \{T_{if}(n), T_{else}(n)\}$$

Ciclo for



$$T(n) = T_i(n) + T_{test}(n) + g(n) \times (T_{test}(n) + T_c(n) + T_r(n))$$

Regole per il calcolo di T(n) (caso non ricorsivo)

- il costo di istruzioni semplici, quali assegnazione, letture/scrittura di variabili é $O(1)$
- il costo di un blocco sequenziale di istruzioni è pari alla somma dei costi delle singole istruzioni
- il costo di istruzioni tipo **if.... then ....else** é pari al tempo per effettuare il test (tipicamente $O(1)$) piú $O($costo della alternativa piú costosa$)$
- il costo di loop (**for, while, repeat**) é pari alla somma su tutte le iterazioni del costo di ogni iterazioni
- Usando queste regole si puó ottenere la complessitá di tempo di ogni algoritmo (ad eccezione degli algoritmi ricorsivi, che richiedono una tecnica diversa)

Calcolo del tempo di esecuzione (1)

Esempio: algoritmo per la ricerca del massimo fra n numeri $\mathbf{a_1},\dots,\mathbf{a_n}$

```
1. max = a_1
2. For i = 2 to n
3.     If (a_i > max) then
4.         max = a_i
5.     Endif
6. Endfor
```

Esecuzione del for (2-6):

	i=2	2<=n?	if
	i=2+1=3	3<=n?	if
	i=3+1=4	4<=n?	if
n-1	…	…	…
	i=n	n<=n?	if
	i=n+1	n+1<=n?	

Tempo di esecuzione = tempo esecuzione linea 1 + tempo esecuzione for(2-6)

Linea 1: 1 assegnamento

Linee 3-5 (una esecuzione): 1 confronto + 1 assegnamento eventualmente

Linee 2-6: 1 assegnamento (i=2) + (n-1) incrementi + n confronti + (n-1) if

Calcolo del tempo di esecuzione (2)

```
1. max = a_1
2. For i = 2 to n
3.     If (a_i > max) then
4.         max = a_i
5.     Endif
6. Endfor
```

Taglia dell'input = n

Tempo di un assegnamento= c_1
(costante = non dipende da n)

Tempo di un confronto = c_2

Tempo di un incremento = c_3

Linea 1: 1 assegnamento = c_1

Linee 3 – 5 (una esecuzione): 1 confronto + 1 assegnamento eventualmente $\leq c_2 + c_1$

Linea 2 - 6: 1 assegnamento + (n-1) incremento + n confronti + (n-1) if ≤

$$\leq c_1 + (n-1)\, c_3 + n\, c_2 + (n-1)\,(c_2 + c_1)$$

$$T(n) \leq 2\, c_1 + (n-1)\, c_3 + n\, c_2 + (n-1)\,(c_2 + c_1) =$$
$$= (c_3 + 2c_2 + c_1)\, n + c_1 - c_3 - c_2$$

Calcolo del tempo di esecuzione (3)

Esempio: algoritmo per la ricerca del massimo fra n numeri $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}$

```
max = a1
For i = 2 to n
    If (ai > max) then
        max = ai
    Endif
Endfor
```

Taglia dell'input = n

Tempo di un assegnamento= c_1
(costante = non dipende da n)

Tempo di un confronto = c_2

Tempo di un incremento = c_3

Cosa posso dire adesso?

$$T(n) \leq 2\,c_1 + (n-1)\,c_3 + n\,c_2 + (n-1)\,(c_2 + c_1) = (c_3 + 2c_2 + c_1)\,n + (c_1 - c_3 - c_2)$$

$$T(n) \leq A\,n + B$$

T(n) è lineare!

dove A e B sono costanti non quantificabili a priori (dipendono dall'implementazione)

Analisi asintotica di T(n)

Nell'analisi dell'algoritmo possiamo studiare T(n)

- Indipendentemente dal valore delle costanti (costo di operazioni elementari)
- Al crescere della taglia dell'input

Questa si chiama analisi asintotica dove «asintotica» significa

- per n che tende a infinito
- per n arbitrariamente grande
- da un certo punto in poi
- per ogni $n \geq n_0$

Vantaggi dell'analisi asintotica

- Indipendente da hardware
- Effettuabile con pseudocodice prima di implementare l'algoritmo
- Considera infiniti input

Alternativa? Analisi su dati campione.
Svantaggi: bisogna avere già implementato l'algoritmo;
analizza numero finito di dati

Funzioni T(n)

Se T(n) rappresenta un tempo di esecuzione su un input di taglia n, allora:

n è un intero positivo

T(n) è un reale positivo

$T: N \rightarrow R_+$

Inoltre T(n) è una funzione (non de)crescente

Ma vi sono vari modi di crescita della funzione T(n) al crescere di n (lineare, quadratica, polinomiale, esponenziale, ….): questa informazione può dirci già molto sull'efficienza di quella che sarà un'implementazione dell'algoritmo.

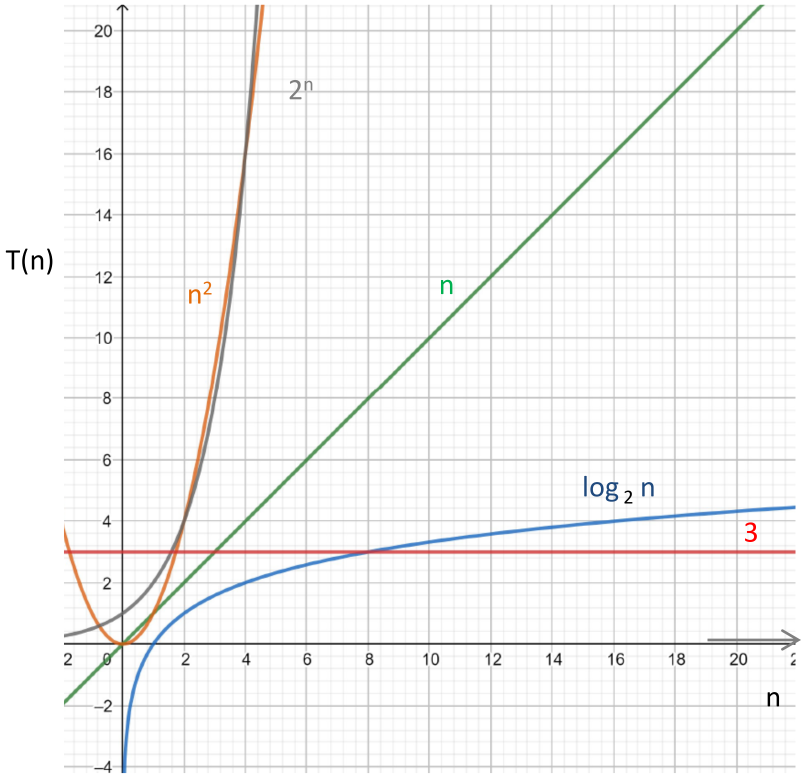
Funzioni standard

Confronteremo la crescita della funzione T(n) con alcune funzioni standard.

Fra le funzioni non decrescenti $T: N \rightarrow R_+$ ci interesseranno principalmente le seguenti (e le loro combinazioni):

$T_1(n) = c$, con c costante
$T_2(n) = \log n$
$T_3(n) = n$
$T_4(n) = n^2$
$T_5(n) = 2^n$

Grafici delle funzioni



Casi di interesse

Esempio: problema dell'ordinamento

INPUT: n numeri $\mathbf{a_1, \dots, a_n}$
OUTPUT: permutazione dei numeri in cui ogni numero sia minore del successivo

Esistono svariati algoritmi che lo risolvono

Qual è il tempo di esecuzione per ordinare **n** elementi con un fissato algoritmo (per esempio InsertionSort)?
Anche per una stessa taglia **n** fissata, il tempo può dipendere dalla distribuzione dei numeri fra di loro
(es.: sono già ordinati, sono ordinati in senso inverso, sono tutti uguali, etc.)

Caso peggiore, migliore, medio

Analisi del caso peggiore: qualunque sia la distribuzione dell'input, T(n) è limitata superiormente da f(n)

Analisi del caso migliore: qualunque sia la distribuzione dell'input, T(n) è limitata inferiormente da g(n) (poco significativa)

Analisi del caso medio: nel caso di una distribuzione media o random (difficile da determinare)

Quando un algoritmo può essere considerato efficiente?

Worst-Case Polynomial-Time

- Def. An algorithm is efficient if its running time is polynomial, i.e. upper bounded by a polynomial function (e.g. $T(n) \leq A\ n^3 + B\ n + C$)

- Justification: It really works in practice!
  - Although $6.02 \times 10^{23} \times N^{20}$ is technically poly-time, it would be useless in practice.
  - In practice, the poly-time algorithms that people develop almost always have low constants and low exponents.
  - Breaking through the exponential barrier of brute force typically exposes some crucial structure of the problem.

- Exceptions.
  - Some poly-time algorithms do have high constants and/or exponents and are useless in practice.
  - Some exponential-time (or worse) algorithms are widely used because the worst-case instances seem to be rare.

Efficiency = polynomial

Polynomial-time solvability emerged as a formal notion of efficiency by a gradual process, motivated by the work of a number of researchers including Cobham, Rabin, Edmonds, Hartmanis, and Stearns.

Similarly, the use of asymptotic order of growth notation to bound the running time of algorithms—as opposed to working out exact formulas with leading coefficients and lower-order terms—is a modeling decision that was quite non-obvious at the time it was introduced;

Confronto efficienza

n logn vs **2^n**

	n	$n \log_2 n$	n^2	n^3	1.5^n	2^n	$n!$
$n = 10$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	4 sec
$n = 30$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	18 min	10^{25} years
$n = 50$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	11 min	36 years	very long
$n = 100$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	1 sec	12,892 years	10^{17} years	very long
$n = 1{,}000$	< 1 sec	< 1 sec	1 sec	18 min	very long	very long	very long
$n = 10{,}000$	< 1 sec	< 1 sec	2 min	12 days	very long	very long	very long
$n = 100{,}000$	< 1 sec	2 sec	3 hours	32 years	very long	very long	very long
$n = 1{,}000{,}000$	1 sec	20 sec	12 days	31,710 years	very long	very long	very long

accettabile

non accettabile

Crescita funzioni

funzione	n	n+1	n+2	2×n
	2^n	$2^{n+1} = 2^n \times 2$	$2^{n+2} = 2^n \times 4$	$2^{2\times n} = (2^n)^2$
	n^2	$(n+1)^2 = n^2 + 2n+1$	$(n+2)^2 = n^2+4n+4$	$(2n)^2 = 4\times n^2$
	n	n+1	n+2	2×n
	$\log_2 n$	$\log_2(n+1) = \log_2 n + \varepsilon$	$\log_2(n+2) = \log_2 n + \delta$	$\log_2(2\times n) = \log_2 n + 1$

funzione	n=8	n+1	n+2	2×n
2^n	$2^8=256$	$2^{8+1} = 512$	$2^{8+2} = 1024$	$2^{2\times 8} = (2^n)^2 = 65.536$
n^2	$8^2 = 64$	$(8+1)^2 = 81$	$(8+2)^2 = 100$	$(2\times 8)^2 = 256$
n	8	8 +1 =9	8 +2 =10	2× 8=16
$\log_2 n$	$\log_2 8 = 3$	$\log_2(8+1) = 3,169$	$\log_2(8+2) = 3,321$	$\log_2(2\times 8) = 4$

Notazioni asintotiche

Nell'analisi asintotica analizziamo T(n)

1. A meno di costanti moltiplicative (perché non quantificabili)
2. Asintoticamente (per considerare input di taglia arbitrariamente grande)

Le notazioni asintotiche: O, Ω, Θ

ci permetteranno il **confronto** tra funzioni, mantenendo queste caratteristiche

Diremo per esempio che l'algoritmo per la ricerca del massimo ha un tempo di esecuzione lineare, $T(n) = O(n)$, essendo $T(n) \leq An + B$

In termini di analisi .... matematica

- se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \neq 0$ allora

  $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(f(n))$ (ovvero $f(n) = \Theta(g(n))$)

- se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ allora

  $f(n) = O(g(n))$ ma $g(n) \neq O(f(n))$ (ovvero $f(n)=o(g(n))$)

- se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ allora

  $f(n) \neq O(g(n))$ ma $g(n) = O(f(n))$ (ovvero $g(n)=o(f(n))$)

Definizione per «informatici» la prossima volta!

Obiettivi formativi…

- Estrapolare il problema computazionale
- Riconoscere (analogie e variazioni con) problemi noti
- Scegliere tecnica/he più appropriata/e
- Applicarla/e correttamente
- Valutare l’efficienza

ESERCIZI
Nei compiti che seguono, potete provare a formalizzare il problema computazionale alla base del problema «reale» descritto.

Problemi…

Un algoritmo risolve un problema, ma…

… cos'è un problema?

Corrispondenza fra spazio delle istanze (dati in ingresso) e delle soluzioni

Appello 25 gennaio 2021

Quesito 3 (*20 punti*)

I signori Braccino hanno comprato una **bicicletta elettrica** per i loro 6 figli. Siccome è il loro **unico** mezzo di locomozione, ogni mattina i ragazzi si ritrovano, ognuno esprime la propria richiesta per la bicicletta e cercano la soluzione che accontenti il maggior numero di loro. Oggi Ada ne avrebbe bisogno dalle 10 alle 14, Bea dalle 11 alle 12, Camillo dalle 15 alle 18, Dante dalle 12 alle 16, Elena dalle 13 alle 15 e Fabio dalle 15 alle 17.

Quanti ragazzi al massimo potranno usufruire della bicicletta? **Giustificate** la risposta, indicando quale algoritmo, fra quelli studiati, avete utilizzato.