**Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica**
**RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI**
Fisciano, 7/1/2016

**Esercizio 1** Consideriamo gli eventi $T_1 = \{$la centrale riceve richieste d'intervento dalla città di Salerno$\}$, $T_2 = \{$la centrale riceve richieste d'intervento dalla città di Avellino$\}$, $T_3 = \{$la centrale riceve richieste d'intervento dalla città di Atripalda$\}$ e $T_4 = \{$la centrale riceve richieste d'intervento dalla città di Mercato San Severino$\}$. Dai dati del problema risulta $P(T_1) = 0{,}8$, $P(T_2) = 0{,}5$, $P(T_3) = 0{,}05$ e $P(T_4) = 0{,}3$. Sia poi $E_k = \{$la richiesta d'intervento arriva esattamente da k città$\}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, ed $F = \{$la richiesta d'intervento arriva da non più di due città$\}$.

(i)

$$\begin{aligned}
&P(E_1) = P(T_1 \cap \bar{T}_2 \cap \bar{T}_3 \cap \bar{T}_4) + P(\bar{T}_1 \cap T_2 \cap \bar{T}_3 \cap \bar{T}_4) + P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \cap T_3 \cap \bar{T}_4)\\
&+P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \cap \bar{T}_3 \cap T_4) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}95\\
&+0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}05 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}95 = 0{,}3645.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
&P(F) = 1 - P(E_3) - P(E_4) = 1 - P(T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap \bar{T}_4) - P(T_1 \cap T_2 \cap \bar{T}_3 \cap T_4)\\
&-P(T_1 \cap \bar{T}_2 \cap T_3 \cap T_4) - P(\bar{T}_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4) - P(T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4)\\
&= 1 - [0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}3\\
&+0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}3] = 0{,}8585.
\end{aligned}$$

(iii)

$$P(T_4 \,|\, E_1) = \frac{P(T_4 \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \cap \bar{T}_3 \cap T_4)}{P(E_1)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}3}{0{,}3645} = 0{,}0781.$$

**Esercizio 2** Lo spazio campionario $S$ è formato dalle sequenze binarie di lunghezza 7 con esattamente 4 cifre uguali ad uno. Risulta pertanto $|S| = \binom{7}{4} = 35$.

(i) La distribuzione di probabilità di $X$ è data da

$$P(X = 1) = \frac{\binom{6}{3}}{35} = \frac{20}{35}, \quad P(X = 2) = \frac{\binom{5}{3}}{35} = \frac{10}{35}$$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3}}{35} = \frac{4}{35}, \quad P(X = 4) = \frac{1}{35}.$$

(ii) La funzione di distribuzione di $X$ è
$F(x) = 0$ per $x < 1$,
$F(x) = 20/35$ per $1 \leq x < 2$,
$F(x) = 30/35$ per $2 \leq x < 3$,
$F(x) = 34/35$ per $3 \leq x < 4$,
$F(x) = 1$ per $x \geq 4$.

(iii)

$$E(X) = 1 \cdot \frac{20}{35} + 2 \cdot \frac{10}{35} + 3 \cdot \frac{4}{35} + 4 \cdot \frac{1}{35} = \frac{56}{35} = 1{,}6$$

$$E(X^2) = 1 \cdot \frac{20}{35} + 4 \cdot \frac{10}{35} + 9 \cdot \frac{4}{35} + 16 \cdot \frac{1}{35} = \frac{112}{35} = 3{,}2$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 112/35 - (56/35)^2 = \frac{16}{25} = 0{,}64.$$

(iv)

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{20}{35} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{35} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{35} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{35} = \frac{319}{420} = 0{,}7595.$$

**Esercizio 3** (i) Dovendo essere $p(x,y) \geq 0 \ \forall x, y$, e $\sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{2} p(x,y) = 1$ si deduce la condizione $p = 1/4$. Si ottiene quindi

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 | $p_X(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/8 | 1/4 | 1/8 | 1/2 |
| 1 | 0 | 1/8 | 3/8 | 1/2 |
| $p_X(x)$ | 1/8 | 3/8 | 1/2 | 1 |

(ii) Si ha $p(0,0) = 1/8 \neq p_X(0) \cdot p_Y(0) = 1/16$, quindi X e Y non sono mai indipendenti.

(iii) La covarianza è data da

$$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 3/16,$$

essendo

$$E(X \cdot Y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{8},$$

$$E(X) = \frac{4}{8}, \qquad E(Y) = \frac{3}{8} + \frac{8}{8} = \frac{11}{8}.$$

**Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica**
**RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI**
Fisciano, 27/1/2016

**Esercizio 1** Un vettore booleano di lunghezza 6 contiene 3 bit pari a **1** e 3 bit pari a **0**, distribuiti a caso, quindi lo spazio campionario ha cardinalità $|S| = \binom{6}{3} = (6 \cdot 5 \cdot 4)/(3 \cdot 2) = 20$. Un algoritmo esamina i bit del vettore uno per volta, e si ferma in corrispondenza del secondo bit pari a **1**. Sia $A_k = \{$l'algoritmo si ferma al passo $k$-esimo$\}$, con $2 \leq k \leq 5$.
(i) Risulta:

$$P(A_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, \qquad P(A_3) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10},$$

$$P(A_4) = \frac{\binom{3}{1}\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}, \qquad P(A_5) = \frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Sia $B = \{$il bit successivo al secondo **1** è pari a **0**$\}$.
(ii) Si ricava:

$$P(B|A_2) = \frac{3}{4}, \qquad P(B|A_3) = \frac{2}{3}, \qquad P(B|A_4) = \frac{1}{2}, \qquad P(B|A_5) = 0.$$

(iii) Pertanto, per la formula delle alternative, la probabilità che il bit successivo al secondo **1** sia pari a **0** è

$$P(B) = \sum_{k=2}^{5} P(B|A_k)P(A_k) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} + 0 \cdot \frac{1}{5} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

**Esercizio 2** Sia $X$ una variabile aleatoria continua avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{4}(3-x), & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

(i) La densità di probabilità di $X$ è

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x\left(1 - \frac{x}{2}\right), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(ii) Il valore atteso di $X$ è:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^2 x\, \frac{3}{2}x\left(1 - \frac{x}{2}\right)\, dx = \left[\frac{x^3}{2} - \frac{3}{16}x^4\right]_0^2 = \frac{8}{2} - 3 = 1.$$

(iii) Si ha

$$P(X > 1 \,|\, X > 1/2) = \frac{P(\{X > 1\} \cap \{X > 1/2\})}{P(X > 1/2)} = \frac{P(X > 1)}{P(X > 1/2)} = \frac{1 - F(1)}{1 - F(1/2)},$$

quindi

$$P(X > 1 \mid X > 1/2) = \frac{1 - F(1)}{1 - F(1/2)} = \frac{1 - 1/2}{1 - 5/32} = \frac{16}{27} = 0{,}5926.$$

(iv) Analogamente, se $Z$ è una variabile aleatoria normale standard, si ha

$$P(Z > 1 \mid Z > 1/2) = \frac{1 - F_Z(1)}{1 - F_Z(1/2)} = \frac{1 - \Phi(1)}{1 - \Phi(1/2)} = \frac{1 - 0{,}8413}{1 - 0{,}6915} = \frac{0{,}1587}{0{,}3085} = 0{,}5144.$$

**Esercizio 3** Risulta

| $\omega$ | $X$ | $Y$ | $\omega$ | $X$ | $Y$ | $\omega$ | $X$ | $Y$ | $\omega$ | $X$ | $Y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0000 | 0 | 0 | 0100 | 1 | 0 | 1000 | 1 | 0 | 1100 | 2 | 1 |
| 0001 | 1 | 0 | 0101 | 2 | 1 | 1001 | 2 | 1 | 1101 | 3 | 3 |
| 0010 | 1 | 0 | 0110 | 2 | 0 | 1010 | 2 | 1 | 1110 | 3 | 2 |
| 0011 | 2 | 0 | 0111 | 3 | 1 | 1011 | 3 | 2 | 1111 | 4 | 4 |

(i) Quindi la distribuzione congiunta di $(X, Y)$ e le distribuzioni marginali di $X$ e $Y$ sono

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $p_X(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/16 |
| 1 | 4/16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4/16 |
| 2 | 2/16 | 4/16 | 0 | 0 | 0 | 6/16 |
| 3 | 0 | 1/16 | 2/16 | 1/16 | 0 | 4/16 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/16 | 1/16 |
| $p_Y(y)$ | 7/16 | 5/16 | 2/16 | 1/16 | 1/16 | 1 |

(ii) $X$ e $Y$ non sono indipendenti: ad esempio $p(0,0) = 1/16 \neq p_X(0) \cdot p_Y(0) = (1/16)(7/16)$.
(iii) Si ha

$$P(X = Y) = \sum_{k=0}^{4} p(k,k) = \frac{1}{16} + 0 + 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16},$$

$$E[(X - Y)^2] = \sum_{k=0}^{4} \sum_{h=0}^{4} (k - h)^2 p(k,h) = \frac{3}{16} \cdot 0 + \frac{10}{16} \cdot 1 + \frac{3}{16} \cdot 4 = \frac{11}{8} = 1{,}375.$$

**Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica**
**RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI**
Fisciano, 10/2/2016

**Esercizio 1** (i) Si ha $P(\overline{A}) = P(\{\text{nessun bit ha valore } \mathbf{1}\})$, e quindi

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad P(B) = P(\mathbf{00}) + P(\mathbf{11}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad P(A \cap B) = P(B) - P(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(ii) Risulta $P(A \cap B) \neq P(A)\, P(B)$ per ogni $n \geq 2$, quindi $A$ e $B$ non sono indipendenti.
(iii) Si ha

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1,$$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

**Esercizio 2** (i) Essendo $X$ una variabile aleatoria continua avente densità

$$f(x) = \frac{1}{2} - c\,x \quad \text{per } 0 < x < 1$$

si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ per

$$1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - c\,x\right) dx = \left[\frac{x}{2} - c\,\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - c\,\frac{1}{2}$$

ossia per $c = -1$, e in tal caso $f(x) \geq 0$ per ogni $x$ reale.
(ii) Per la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$ si ha:
$F(x) = 0$ per $x < 0$;

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} + t\right) dt = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} \quad \text{per } 0 \leq x < 1;$$

$F(x) = 1$ per $x \geq 1$.
(iii)

$$E(X) = \int_0^1 x\, f(x)\, dx = \int_0^1 x \left(\frac{1}{2} + x\right) dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{7}{12} = 0{,}58\overline{3}.$$

(iv)

$$P\left(X > \frac{1}{4} \,\Big|\, X \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{4} < X \leq \frac{1}{2}\right)}{P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)} = \frac{F(1/2) - F(1/4)}{F(1/2)} = \frac{1/4 + 1/8 - 1/8 - 1/32}{1/4 + 1/8} = \frac{7}{12}.$$

**Esercizio 3** (i) La funzione di probabilità congiunta $p(x,y) = P(X = x, Y = y)$ si ricava notando che

$$P(X = 0, Y = 1) = P(BBB) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{20}$$

$$P(X = 1, Y = 1) = P(BBN) + P(BNB) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{6}{20}$$

$$P(X = 2, Y = 1) = P(BNN) = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$$

$$P(X = 1, Y = 2) = P(NBB) = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$$

$$P(X = 2, Y = 2) = P(NBN) = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$$

$$P(X = 2, Y = 3) = P(NNB) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$$

$$P(X = 3, Y = 0) = P(NNN) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{20}$$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $p_X(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1/20 | 0 | 0 | 1/20 |
| 1 | 0 | 6/20 | 3/20 | 0 | 9/20 |
| 2 | 0 | 3/20 | 3/20 | 3/20 | 9/20 |
| 3 | 1/20 | 0 | 0 | 0 | 1/20 |
| $p_Y(y)$ | 1/20 | 10/20 | 6/20 | 3/20 | 1 |

(ii) Essendo

$$E(X) = \sum_{x=0}^{3} x\, p_X(x) = \frac{9}{20} + \frac{18}{20} + \frac{3}{20} = \frac{3}{2}$$

$$E(Y) = \sum_{x=0}^{3} y\, p_Y(y) = \frac{10}{20} + \frac{12}{20} + \frac{9}{20} = \frac{31}{20}$$

$$E(X \cdot Y) = \sum_{x=0}^{3} \sum_{y=0}^{3} x\, y\, p(x,y) = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} + \frac{6}{20} + \frac{12}{20} + \frac{18}{20} = \frac{48}{20}$$

La covarianza di $(X,Y)$ è

$$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{48}{20} - \frac{3}{2} \cdot \frac{31}{20} = \frac{3}{40} = 0{,}075 > 0$$

quindi $X$ e $Y$ sono positivamente correlate, e dunque non sono indipendenti.
(iii) Si ha $P(X = x \,|\, Y = 1) = p(x,1)/p_Y(1) = 2 \cdot p(x,1)$ per $x = 0,1,2,3$ e pertanto
$P(X = 0 \,|\, Y = 1) = 1/10$,
$P(X = 1 \,|\, Y = 1) = 6/10$,
$P(X = 2 \,|\, Y = 1) = 3/10$,
$P(X = 3 \,|\, Y = 1) = 0$.

**Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica**
**RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI**
Fisciano, 5/4/2016

**Esercizio 1** Definiamo i seguenti eventi: $A = \{w_1 < w_2 < w_3\}$ e $B_k = \{w_1 = k\}$; risulta:
(i)

$$P(A) = \frac{\binom{5}{3}}{5^3} = \frac{10}{125} = \frac{2}{25} = 0{,}08$$

(ii)

$$P(B_1 \,|\, A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{\binom{1}{1}\binom{4}{2}/5^3}{\binom{5}{3}/5^3} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

$$P(B_2 \,|\, A) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{2}\binom{1}{0}/5^3}{\binom{5}{3}/5^3} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$P(B_3 \,|\, A) = \frac{P(B_3 \cap A)}{P(A)} = \frac{\binom{2}{0}\binom{1}{1}\binom{2}{2}/5^3}{\binom{5}{3}/5^3} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

(iii)

$$\sum_{i=1}^{3} P(B_i \,|\, A) = \frac{6+3+1}{10} = 1.$$

**Esercizio 2** (i) Si ha

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{per } x \geq 0$$

e $f(x) = 0$ altrimenti.
(ii) Risulta

$$E[V(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} V(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2 = 0{,}6931.$$

(iii) Poiché per $x \geq 0$ risulta

$$P(X > x) = 1 - F(x) = 1 - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1},$$

$$P(X > 2x \,|\, X > x) = \frac{P(X > 2x)}{P(X > x)} = \frac{1/(2x+1)}{1/(x+1)} = \frac{x+1}{2x+1},$$

si ha

$$P(X > 2x \,|\, X > x) \geq P(X > x) \iff \frac{x+1}{2x+1} \geq \frac{1}{x+1} \iff x^2 + 2x + 1 \geq 2x + 1$$

e quindi la condizione è soddisfatta per ogni $x \geq 0$.

**Esercizio 3**

| $\omega$ | $X$ | $Y$ | $\omega$ | $X$ | $Y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 0 | 0 | 1 | 1 0 0 0 | 1 | 0 |
| 0 0 0 1 | 1 | 0 | 1 0 0 1 | 2 | 1 |
| 0 0 1 0 | 1 | 0 | 1 0 1 0 | 2 | 0 |
| 0 0 1 1 | 2 | 0 | 1 0 1 1 | 3 | 0 |
| 0 1 0 0 | 1 | 0 | 1 1 0 0 | 2 | 0 |
| 0 1 0 1 | 2 | 0 | 1 1 0 1 | 3 | 0 |
| 0 1 1 0 | 2 | 1 | 1 1 1 0 | 3 | 0 |
| 0 1 1 1 | 3 | 0 | 1 1 1 1 | 4 | 1 |

(i) Quindi

| $x\backslash y$ | 0 | 1 | $p_x(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1/16 | 1/16 |
| 1 | 4/16 | 0 | 4/16 |
| 2 | 4/16 | 2/16 | 6/16 |
| 3 | 4/16 | 0 | 4/16 |
| 4 | 0 | 1/16 | 1/16 |
| $p_Y(y)$ | 3/4 | 1/4 | 1 |

(ii) Essendo

$$p(0,0) = 0 \neq p_X(0)\, p_Y(0) = \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{4},$$

si ha che X e Y non sono indipendenti.
(iii) $X$ ha distribuzione binomiale, quindi

$$E(X) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Inoltre

$$E(Y) = \frac{1}{4}, \qquad E(XY) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{16} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{2} - 2\,\frac{1}{4} = 0,$$

da cui segue che il coefficiente di correlazione di $(X,Y)$ è nullo.
(iv) Si ha

$$P(X+Y \leq 1 | X+Y \leq 3) = \frac{P(X+Y \leq 1)}{P(X+Y \leq 3)} = \frac{\frac{1}{16} + \frac{4}{16}}{\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{2}{16} + \frac{4}{16}} = \frac{1}{3}.$$