Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica

Università di Salerno

Lezione n° 24

R. Cerulli – F. Carrabs

1. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare (P):

$$\begin{gathered} \min\ 2x_1 + 1/2x_2 \\ 8x_1 + 4x_2 \geq 16 \\ 12x_1 - 18x_2 \leq 36 \\ x_1 - \frac{1}{3}x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

a) (3 punti) Risolvere graficamente il problema dato (P) specificando il valore ottimo ed il punto di ottimo, se esiste.
b) (3 punti) Determinare i vertici e le direzioni estreme del poliedro di ammissibilità del problema (P).
c) (3 punti) Riscrivere il problema (P) applicando il teorema della rappresentazione, risolvere la nuova formulazione ottenuta (P') e commentare la relazione tra la soluzione ottima del problema (P) e la soluzione ottima del problema (P').
d) (4 punti) Scrivere la formulazione duale (D) del problema (P) e determinare, applicando il teorema della dualita' forte, la soluzione ottima duale corrispondente alla soluzione ottima primale trovata al punto (a).
e) (3 punti) Verificare, tramite gli scarti complementari, che le due soluzioni trovate sono ottime per i rispettivi problemi.

2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{gathered} \max hx_1 + x_2 + 6x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 2k \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq k \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{gathered}$$

a) (2 punti) Si determini il range di valori del parametro k per cui la la base $B = \{1,3\}$ risulti ammissibile.
b) (3 punti) Si determini, per k=0, il range di valori del parametro h per cui la base $B = \{1,3\}$ risulti ottima.

3. (4 punti) Un'azienda agricola deve determinare quanti ettari di terreno devono essere dedicati alla produzione di lattuga e pomodori. Si e' stimato che, coltivando un ettaro di terreno, si possono produrre annualmente 20 quintali di lattuga e 30 quintali di pomodori. Inoltre la coltivazione di un ettaro di terreno per la produzione di lattuga richiede 18 ore settimanali di lavoro, mentre per la produzione di pomodori sono richieste 24 ore settimanali. Per motivi di marketing l'azienda deve produrre annualmente almeno 45 quintali di lattuga e 50 quintali di pomodori. Sapendo che un quintale di lattuga viene venduto a 100 euro e un quintale di pomodori viene venduto a un prezzo di 150 euro, e sapendo che sono disponibili al massimo 100 ore settimanali per la coltivazione di tutto il terreno, formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di massimizzare il ricavo complessivo annuale.

4. (2 punti) *[Individuare la risposta esatta]* Quale e' il numero massimo di iterazioni che la fase II del simplesso puo' dovere eseguire per trovare la soluzione ottima di un problema di 6 variabili, 3 vincoli di disuguaglianza e 3 vincoli di uguaglianza? Supporre che la prima soluzione di base ammissibile sia nota.

a) 120
b) $\binom{9}{6}$
c) 9×6
d) $\binom{6}{6}$

5. (5 punti) Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{gathered} \max x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ 3x_1 + 5x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + 5x_4 = \frac{8}{3} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\ x_4 \geq 0 \end{gathered}$$

Applicare l'algoritmo del simplesso per risolvere il problema dato e determinare: il valore ottimo della funzione obiettivo, il valore ottimo delle variabili in base e delle variabili fuori base, specificare quali sono le variabili di slack/surplus.

1. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare (P):

$$\begin{gathered} \min\ 2x_1 + 1/2x_2 \\ 8x_1 + 4x_2 \geq 16 \\ 12x_1 - 18x_2 \leq 36 \\ x_1 - \frac{1}{3}x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

a) (3 punti) Risolvere graficamente il problema dato (P) specificando il valore ottimo ed il punto di ottimo, se esiste.
b) (3 punti) Determinare i vertici e le direzioni estreme del poliedro di ammissibilità del problema (P).
c) (3 punti) Riscrivere il problema (P) applicando il teorema della rappresentazione, risolvere la nuova formulazione ottenuta (P') e commentare la relazione tra la soluzione ottima del problema (P) e la soluzione ottima del problema (P').
d) (4 punti) Scrivere la formulazione duale (D) del problema (P) e determinare, applicando il teorema della dualita' forte, la soluzione ottima duale corrispondente alla soluzione ottima primale trovata al punto (a).
e) (3 punti) Verificare, tramite gli scarti complementari, che le due soluzioni trovate sono ottime per i rispettivi problemi.

[redacted]

2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max\ hx_1 + x_2 + 6x_3$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 2k$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq k$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

a) (2 punti) Si determini il range di valori del parametro k per cui la la base $B = \{1{,}3\}$ risulti ammissibile.

b) (3 punti) Si determini, per k=0, il range di valori del parametro h per cui la base $B = \{1{,}3\}$ risulti ottima.

[redacted]

3. (4 punti) Un'azienda agricola deve determinare quanti ettari di terreno devono essere dedicati alla produzione di lattuga e pomodori. Si e’ stimato che, coltivando un ettaro di terreno, si possono produrre annualmente 20 quintali di lattuga e 30 quintali di pomodori. Inoltre la coltivazione di un ettaro di terreno per la produzione di lattuga richiede 18 ore settimanali di lavoro, mentre per la produzione di pomodori sono richieste 24 ore settimanali. Per motivi di marketing l'azienda deve produrre annualmente almeno 45 quintali di lattuga e 50 quintali di pomodori. Sapendo che un quintale di lattuga viene venduto a 100 euro e un quintale di pomodori viene venduto a un prezzo di 150 euro, e sapendo che sono disponibili al massimo 100 ore settimanali per la coltivazione di tutto il terreno, formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di massimizzare il ricavo complessivo annuale.

[redacted]

4. (2 punti) *[Individuare la risposta esatta]* Quale e' il numero massimo di iterazioni che la fase II del simplesso puo' dovere eseguire per trovare la soluzione ottima di un problema di 6 variabili, 3 vincoli di disuguaglianza e 3 vincoli di uguaglianza? Supporre che la prima soluzione di base ammissibile sia nota.

a) 120

b) $\binom{9}{6}$

c) 9×6

d) $\binom{6}{6}$

[redacted]

$$\max x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4$$
$$3x_1 + 5x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 4$$
$$2x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + 5x_4 = \frac{8}{3}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\ x_4 \geq 0$$

Applicare l’algoritmo del simplesso per risolvere il problema dato e determinare: il valore ottimo della funzione obiettivo, il valore ottimo delle variabili in base e delle variabili fuori base, specificare quali sono le variabili di slack/surplus.

[redacted]

Dato il seguente problema di programmazione lineare P:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{P}) \quad \min z = x_1 - 4x_2 - x_3 \\
s.t. \\
3x1 - x_2 - x_3 \leq 9 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -8 \\
x_1 - x_3 \leq 7 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Quale dei seguenti vettori è una soluzione di base ammissibile per P?

$\underline{x}_a$= (2,0,3,0,-2,0) $\underline{x}_b$=(1,2,0,3,0,9) $\underline{x}_c$=(0,0,0,9,8,7)

[redacted]