

Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica

Università degli Studi di Salerno

Lezione n° 13

Teoria della dualità:

- Coppia di Problemi Primale/Duale
- Regole di Trasformazione
- Teorema debole della dualità

R. Cerulli — F. Carrabs

Teoria della Dualità

Ad ogni problema di PL (Primale) è associato un problema Duale

(n variabili, m vincoli)

Problema Primale (P)

$$\min \quad c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

\vdots

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$\underline{x} \geq 0$$

(m variabili, n vincoli)

Problema Duale (D)

$$\max \quad b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m$$

s.t.

$$a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \leq c_1$$

\vdots

$$a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \leq c_n$$

$$\underline{w} \geq 0$$

Il problema D ha tante variabili quanti sono i vincoli di P e tanti vincoli quante sono le variabili di P.

Teoria della Dualità

$$\min c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_1$$

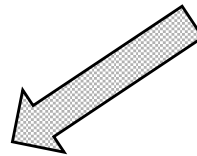
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3$$

$$\underline{x} \geq 0$$



	x_1	x_2	x_3	
w_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
w_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
w_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
	c_1	c_2	c_3	



$$\max b_1w_1 + b_2w_2 + b_3w_3$$

s.t

$$a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3 \leq c_1$$

$$a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3 \leq c_2$$

$$a_{13}w_1 + a_{23}w_2 + a_{33}w_3 \leq c_3$$

$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0$$

Problema Primale (P)

$$\min \quad c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

\vdots

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Problema Duale (D)

$$\max \quad b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m$$

s.t.

$$a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \leq c_1$$

\vdots

$$a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \leq c_n$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

In forma matriciale:

$$(P) \quad \min \quad \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} \geq \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

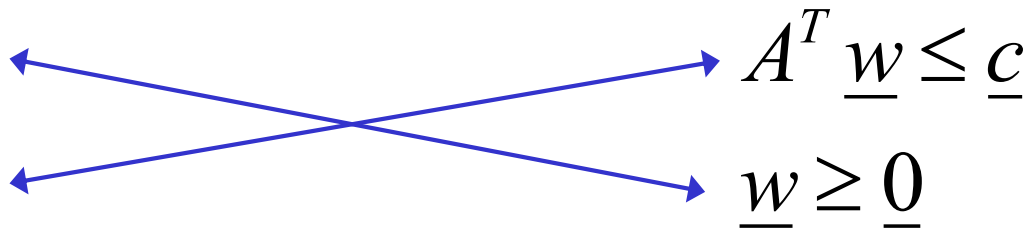
$$\underline{x} \in \mathbf{R}^n$$

$$(D) \quad \max \quad \underline{b}^T \underline{w}$$

$$A^T \underline{w} \leq \underline{c}$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

$$\underline{w} \in \mathbf{R}^m$$



Teoria della Dualità

$$\min 3x_1 + 4x_2$$

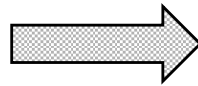
s.t.

$$2x_1 + 1/2 x_2 \geq 3$$

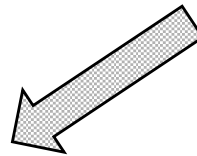
$$4x_1 + x_2 \geq 2$$

$$1/5 x_1 \geq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



	x_1	x_2	
w_1	2	1/2	3
w_2	4	1	2
w_3	1/5	0	7
	3	4	



$$\max 3w_1 + 2w_2 + 7w_3$$

s.t

$$2w_1 + 4w_2 + 1/5 w_3 \leq 3$$

$$1/2 w_1 + w_2 \leq 4$$

$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0$$

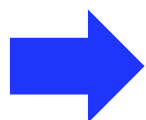
Duale del problema duale

$$(P) \max \quad \underline{b}^T \underline{w}$$

$$A^T \underline{w} \leq \underline{c}$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

$$\underline{w} \in \mathbf{R}^m$$



$$-\min \quad -\underline{b}^T \underline{w}$$

$$-A^T \underline{w} \geq -\underline{c}$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

$$\underline{w} \in \mathbf{R}^m$$

Il **duale** di questo problema è:

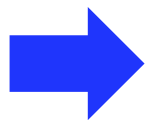
	\underline{w}	
\underline{x}	$-A^T$	$-\underline{c}^T$
	$-\underline{b}^T$	

$$-\max \quad -\underline{c}^T \underline{x}$$

$$-A \underline{x} \leq -\underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\underline{x} \in \mathbf{R}^n$$



$$(D) \min \quad \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A \underline{x} \geq \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\underline{x} \in \mathbf{R}^n$$

Il duale del problema duale è il problema primale.

Duale di un Primale con vincoli di uguaglianza

$$\begin{aligned}(P) \quad & \min \quad \underline{c}^T \underline{x} \\ & A \underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \\ & \underline{x} \in R^n\end{aligned}$$

Trasformiamo i vincoli di uguaglianza in vincoli di maggiore o uguale come segue:

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b} \quad \text{equivale a} \quad \begin{aligned} & \underline{A} \underline{x} \geq \underline{b} \\ & \underline{A} \underline{x} \leq \underline{b} \Rightarrow -\underline{A} \underline{x} \geq -\underline{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \min \quad \underline{c}^T \underline{x} \\
 & Ax \geq \underline{b} \\
 & -Ax \geq -\underline{b} \\
 & \underline{x} \geq \underline{0} \\
 & \underline{x} \in R^n
 \end{aligned}$$

	\underline{x}	
\underline{u}	A	\underline{b}
\underline{v}	$-A$	$-\underline{b}$
	\underline{c}	

quindi si introducono **2m variabili duali, \underline{u} e \underline{v}**

$$\max (\underline{b}^T \underline{u} - \underline{b}^T \underline{v})$$

$$A^T \underline{u} - A^T \underline{v} \leq \underline{c}$$

$$\underline{u} \geq \underline{0}, \underline{v} \geq \underline{0}$$

$$\underline{u}, \underline{v} \in R^m$$

$$\max (\underline{b}^T \underline{u} - \underline{b}^T \underline{v})$$

$$A^T \underline{u} - A^T \underline{v} \leq \underline{c}$$

$$\underline{u} \geq \underline{0}, \underline{v} \geq \underline{0}$$

$$\underline{u}, \underline{v} \in R^m$$

e sostituendo $\underline{w} = \underline{u} - \underline{v}$ si ottiene (D)







$$\begin{aligned} (P) \quad \min \quad & \underline{c}^T \underline{x} \\ & A \underline{x} = \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \\ & \underline{x} \in R^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D) \quad \max \quad & \underline{b}^T \underline{w} \\ & A^T \underline{w} \leq \underline{c} \\ & \underline{w} \text{ n.v.} \\ & \underline{w} \in R^m \end{aligned}$$

Calcolo del problema duale

- Dato un generico problema di PL, sarebbe possibile trasformarlo in uno equivalente in forma canonica di min/max per calcolarne il duale
- In realtà, questo non è necessario, in quanto è **sempre** possibile calcolare **direttamente** il duale del problema dato

Dualità: regole di trasformazione generali

	min		max	
Coefficienti f.o.	\underline{c}^T		\underline{c}	Termini noti vincoli
Termini noti vincoli	\underline{b}		\underline{b}^T	Coefficienti f.o.
Coefficienti vincoli	A		A^T	Coefficienti vincoli
	\geq		≥ 0	
i -mo vincolo ($i=1 \dots m$)	\leq		≤ 0	i -ma variabile ($i=1 \dots m$)
	$=$		n.v.	
	≥ 0		\leq	
j -ma variabile ($j=1 \dots n$)	≤ 0		\geq	j -mo vincolo ($j=1 \dots n$)
	n.v.		$=$	

Teoria della Dualità

$$\min 5x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$x_1 + 4x_2 - 8x_3 \geq 2$$

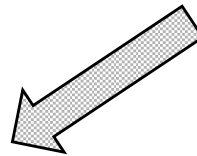
$$7x_2 + 12x_3 \leq 4$$

$$9x_1 - 8x_2 + x_3 = 7$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



	x_1	x_2	x_3	
w_1	1	4	-8	2
w_2	0	7	12	4
w_3	9	-8	1	7
	5	3	0	



$$\max 2w_1 + 4w_2 + 7w_3$$

s.t.

$$w_1 + 9w_3 \leq 5$$

$$4w_1 + 7w_2 - 8w_3 \leq 3$$

$$-8w_1 + 12w_2 + w_3 \leq 0$$

$$w_1 \geq 0, w_2 \leq 0, w_3 \text{ n.v.}$$

La teoria della Dualità è importante perchè:

- le soluzioni di (P) e (D) sono legate tra loro;
- la soluzione ottima del duale è un bound sulla soluzione ottima del primale.
- le soluzioni duali hanno un'interpretazione economica utile per l'analisi di sensitività (post-ottimalità);
- sulla teoria della dualità sono basati algoritmi, quali il Simplex Duale e l'Algoritmo Primale-Duale, alternativi al Simplex (Primale) utili per certe classi di problemi;
- può in certi casi essere conveniente risolvere D al posto di P (conviene risolvere il problema con il minor numero di vincoli)

Risultati fondamentali della Teoria della Dualità

Siano dati i problemi

$$\begin{array}{ll} (P) & \min \quad \underline{c}^T \underline{x} \\ & Ax \geq \underline{b} \\ & \underline{x} \geq \underline{0} \\ (D) & \max \quad \underline{b}^T \underline{w} \\ & A^T \underline{w} \leq \underline{c} \\ & \underline{w} \geq \underline{0} \end{array}$$

1. Teorema (debole) della dualità

Siano \underline{x} e \underline{w} soluzioni ammissibili rispettivamente per (P) e (D), allora

$$\underline{c}^T \underline{x} \geq \underline{b}^T \underline{w}$$

Dimostrazione:

$$\underline{\hat{x}} \text{ soluzione} \Rightarrow A\underline{\hat{x}} \geq \underline{b}$$

$$\text{Poichè } \underline{\hat{w}} \geq \underline{0} \Rightarrow \underbrace{\underline{\hat{w}}^T}_{\text{Poichè } \underline{xy} = \underline{y}^T \underline{x}^T} (A\underline{\hat{x}}) \geq \underline{\hat{w}}^T \underline{b} \Rightarrow \underbrace{(A\underline{\hat{x}})^T \underline{\hat{w}}}_{\text{Poichè } (\underline{xy})^T = \underline{y}^T \underline{x}^T} \geq \underline{b}^T \underline{\hat{w}} \Rightarrow \underbrace{\underline{\hat{x}}^T A^T \underline{\hat{w}}}_{\text{Poichè } (\underline{xy})^T = \underline{y}^T \underline{x}^T} \geq \underline{b}^T \underline{\hat{w}}$$

$$\underline{\hat{w}} \text{ soluzione} \Rightarrow A^T \underline{\hat{w}} \leq \underline{c}$$

$$\text{Poichè } \underline{\hat{x}} \geq \underline{0} \Rightarrow \underline{\hat{x}}^T A^T \underline{\hat{w}} \leq \underline{\hat{x}}^T \underline{c}$$

$$\text{Quindi: } \underline{\hat{x}}^T \underline{c} = \underline{c}^T \underline{\hat{x}} \geq \underline{\hat{x}}^T A^T \underline{\hat{w}} \geq \underline{b}^T \underline{\hat{w}}$$



Risultati fondamentali della Teoria della Dualità

Corollario 1

Se \underline{x} è una soluzione ammissibile per (P) e \underline{w} una soluzione ammissibile per (D) tali che $\underline{c}^T \underline{x} = \underline{b}^T \underline{w}$ allora \underline{x} e \underline{w} sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che \underline{x} non sia ottimo per (P). Quindi esiste un'altra soluzione ammissibile \underline{x}^* di (P) tale che $\underline{c}^T \underline{x}^* < \underline{c}^T \underline{x}$. Ma poiché per ipotesi $\underline{c}^T \underline{x} = \underline{b}^T \underline{w}$ si ha che $\underline{c}^T \underline{x}^* < \underline{b}^T \underline{w}$. Assurdo perchè va contro la tesi del teorema debole della dualità.

Risultati fondamentali della Teoria della Dualità

Corollario 2

Se il problema primale (P) è illimitato inferiormente allora il duale (D) è inammissibile. Viceversa se il duale (D) è illimitato superiormente il primale (P) è inammissibile.

Dimostrazione.

Supponiamo che il valore ottimo del primale (P) sia $-\infty$ e che il problema duale ammetta una soluzione \underline{w} . Dal teorema della dualità debole si ha che $\underline{c}^T \underline{x} \geq \underline{b}^T \underline{w}$ per una qualsiasi soluzione ammissibile \underline{x} di (P). Questo implica che $\underline{b}^T \underline{w} \leq -\infty$. Assurdo.

Risultati fondamentali della Teoria della Dualità

Il corollario 2 stabilisce che l'illimitatezza di un problema implica l'inammissibilità del suo duale. Tuttavia questa non è una proprietà simmetrica ossia se un problema è inammissibile non è detto che il suo duale sia illimitato. Per esempio:

$$\begin{array}{ll} (P) & \min \quad -x_1 - x_2 \\ & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq \underline{0} \end{array}$$

Calcolare il duale di (P) e risolvere entrambi i problemi graficamente