Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica

Università di Salerno

Lezione n° 6

- Ottimi globali e locali
- Risoluzione grafica di un problema di PL
- Definizione di Iperpiano e Semispazi.
- Insiemi convessi.
- Politopi e poliedri.

R. Cerulli – F. Carrabs

Ottimi globali e ottimi locali

$$\min f(\underline{x})$$

s.t.

$$\underline{x} \in X \subseteq R^n$$

Definizione 7 (Ottimo Globale)

Un punto $\underline{x}^* \in X$ è un **ottimo globale** per la funzione $f(\underline{x})$ se e solo se: $f(\underline{x}^*) \leq f(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in X$.

Definizione 8 (Ottimo Locale)

Un punto $\underline{x}' \in X$ è un **ottimo locale** per la funzione $f(\underline{x})$ se e solo se: $f(\underline{x}') \leq f(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in N(x;\varepsilon)$.

- *Ogni ottimo globale è anche ottimo locale, in generale non è vero il viceversa*
- *Ci sono però casi particolari in cui tutti gli ottimi locali sono anche ottimi globali*

Un esempio

L’azienda Rossi &C. ha vinto una gara d’appalto per la produzione di due tipologie di leghe di acciaio L1 ed L2. Il contratto prevede il pagamento di 10 milioni di euro a condizione che siano rispettate le seguenti proporzioni tra le tonnellate delle due leghe prodotte.

- La metà delle tonnellate di L1 prodotte non devono superare, per al più 3 unità, le tonnellate di L2 prodotte;
- Le tonnellate di L2 possono essere al più di uno superiori a quelle di L1;
- Le tonnellate di L2 prodotte non devono mai superare il doppio delle tonnellate di L1 decrementate di 2.

Sapendo che l’azienda spende 3 milioni di euro per produrre una tonnellata della lega L1 ed un milione di euro per la lega L2, individuare un piano di produzione che rispetti i vincoli di produzione minimizzando però i costi di produzione.

L’attuale piano di produzione individuato prevede la produzione di 2 tonnellate di L1 e mezza tonnellata di L2 per una spesa totale di 6,5 milioni di euro e un profitto finale pari a 10 - 6,5 = 3,5 milioni. Si può fare di meglio?

$$\min \; z = 3x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

La metà delle tonnellate di L1 prodotte non devono superare, per al più 3 unità, le tonnellate di L2 prodotte

$$\min \quad z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$

La metà delle tonnellate di L1 prodotte non devono superare, per al più 3 unità, le tonnellate di L2 prodotte

Le tonnellate di L2 possono essere al più di uno superiori a quelle di L1

$$\min \; z = 3x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{llll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

La metà delle tonnellate di L1 prodotte non devono superare, per al più 3 unità, le tonnellate di L2 prodotte

Le tonnellate di L2 possono essere al più di uno superiori a quelle di L1

Le tonnellate di L2 prodotte non devono mai superare il doppio delle tonnellate di L1 decrementate di 2

a) Risolvere graficamente il problema

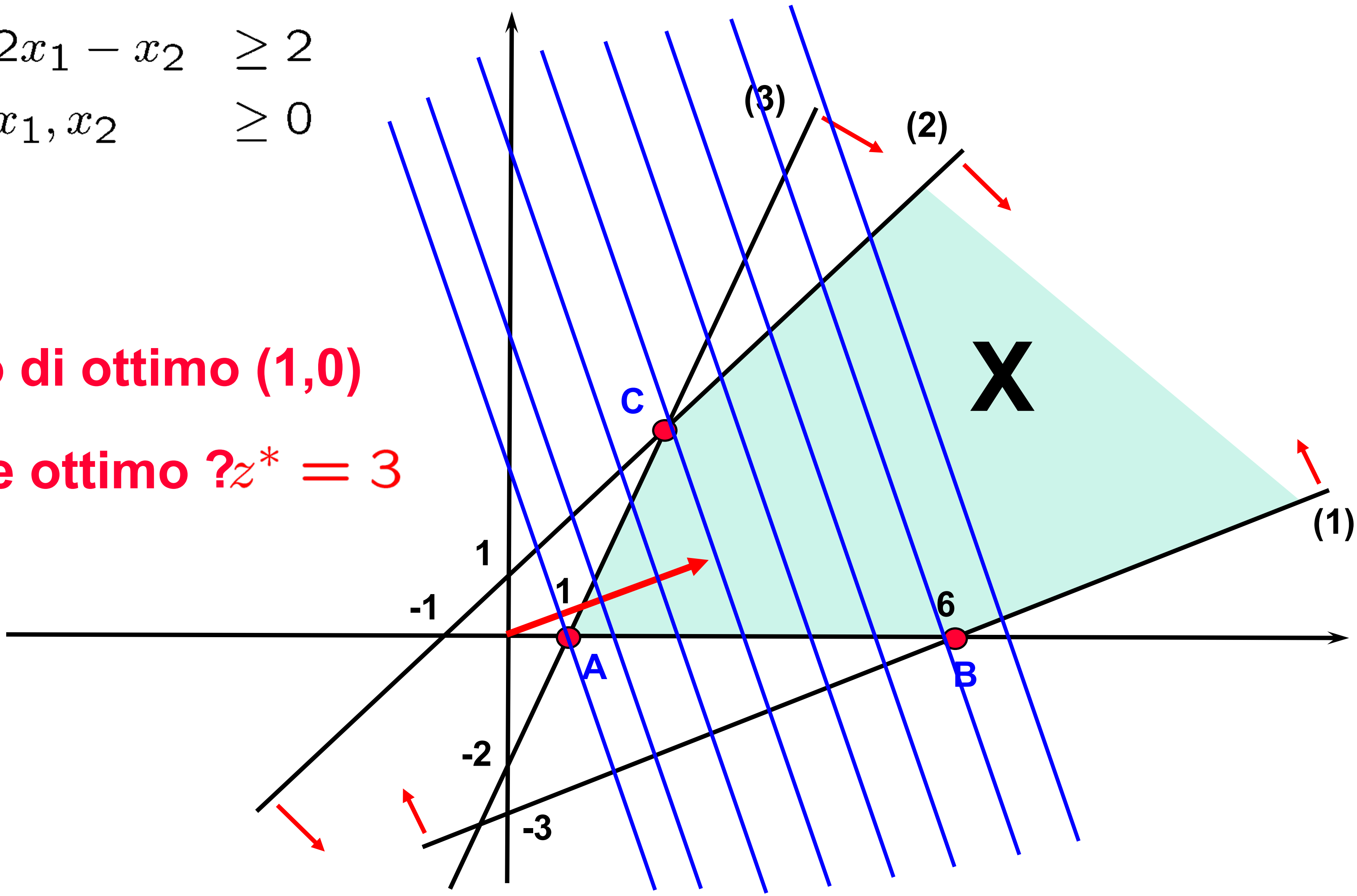
$$\min \quad z = 3x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Gradiente (3,1)

Punto di ottimo (1,0)

Valore ottimo ? $z^* = 3$



Un problema di PL può essere:

1. **Non Ammissibile** (senza soluzioni ammissibili)
2. **Ammissibile con valore ottimo illimitato**
3. **Ammissibile con valore ottimo finito:**

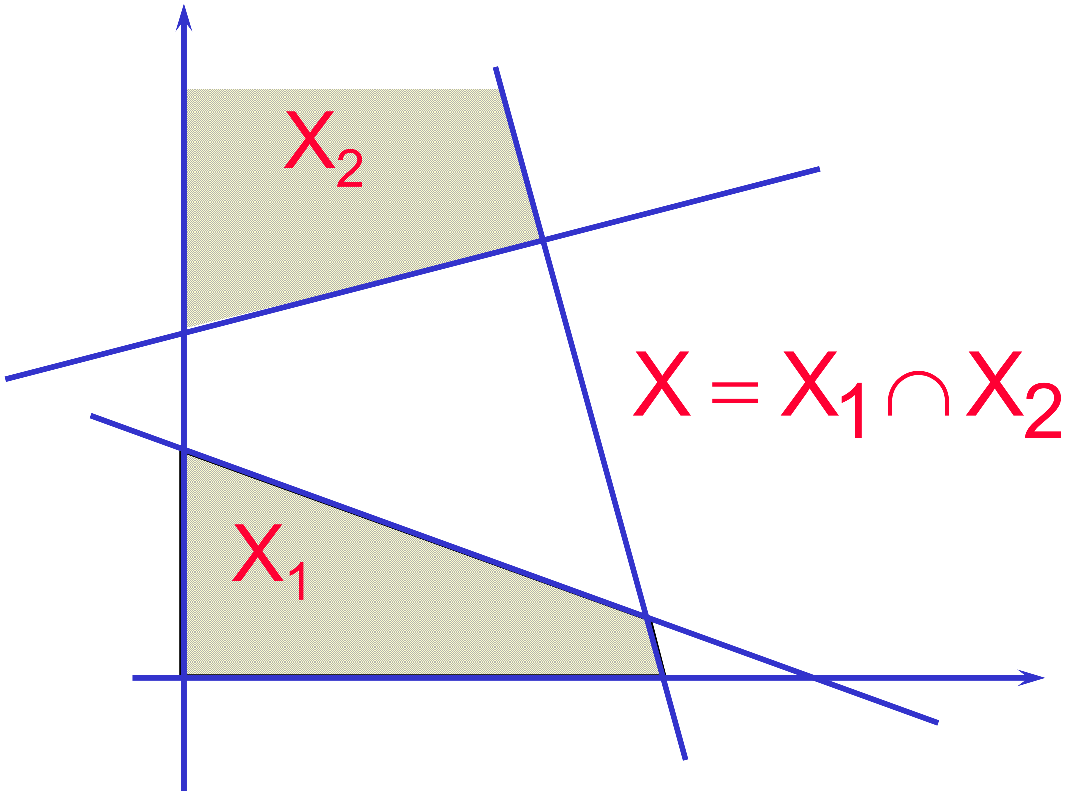
   2.1 unico punto di ottimo

   2.2 infiniti punti di ottimo

Definizione 2 (Problema inammissibile)

Un problema di ottimizzazione si dice **inammissibile** se X= ∅, cioè non esistono soluzioni ammissibili.

Graficamente:



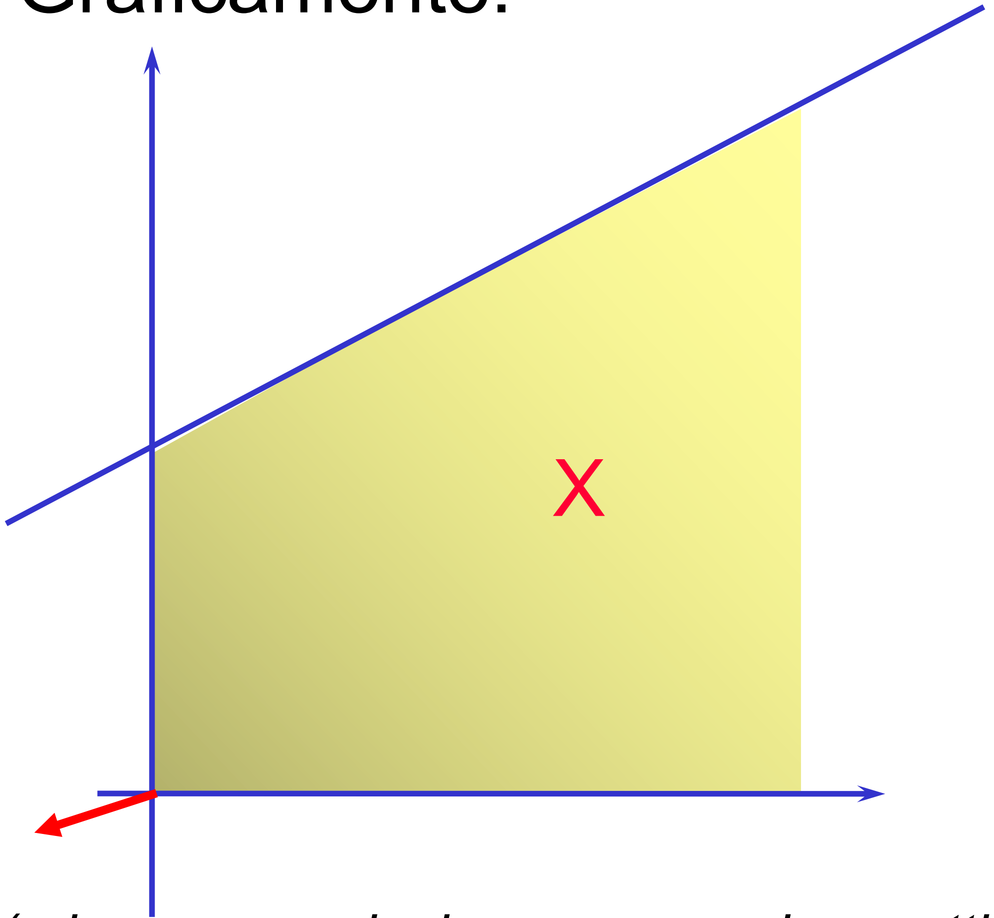
$X = X_1 \cap X_2 = \emptyset$

$$X = \emptyset \Rightarrow \nexists \underline{x} \in \mathbf{R}^n : A\underline{x} \geq \underline{b},\ \underline{x} \geq 0$$

Definizione 3 (Ottimo illimitato)

Un problema di ottimizzazione si dice **illimitato (inferiormente)** se scelto un qualsiasi valore M>0, esiste sempre un punto $\underline{x} \in X$ tale che $f(\underline{x}) < -M$.

Graficamente:



X illimitato

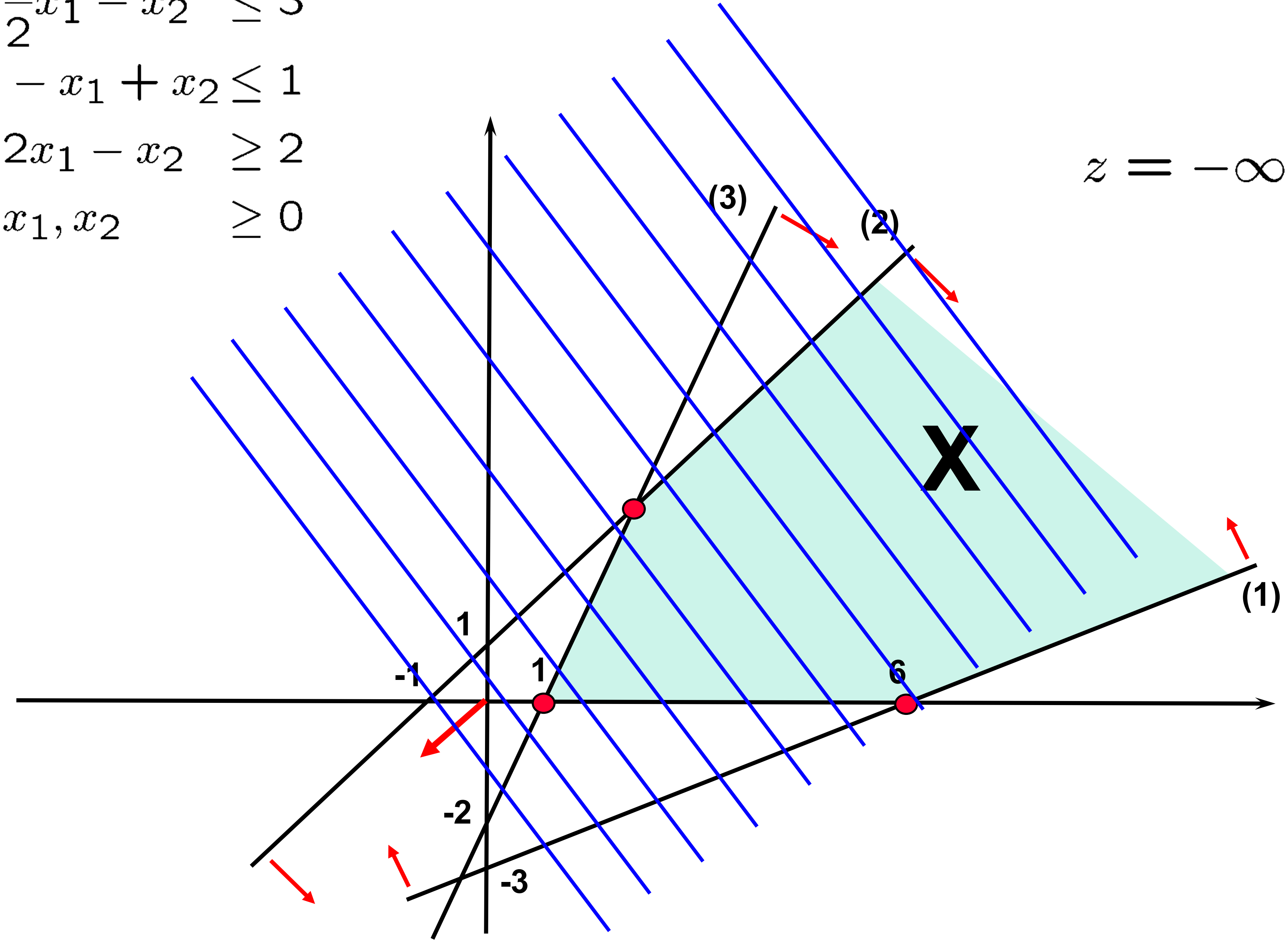
(n.b., una soluzione con valore ottimo illimitato implica un insieme di ammissibilità X illimitato, ma non è vero il viceversa)

$$\min \quad z = -x_1 - x_2$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\ (4) & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

b) Determinare una nuova funzione obiettivo che abbia ottimo illimitato

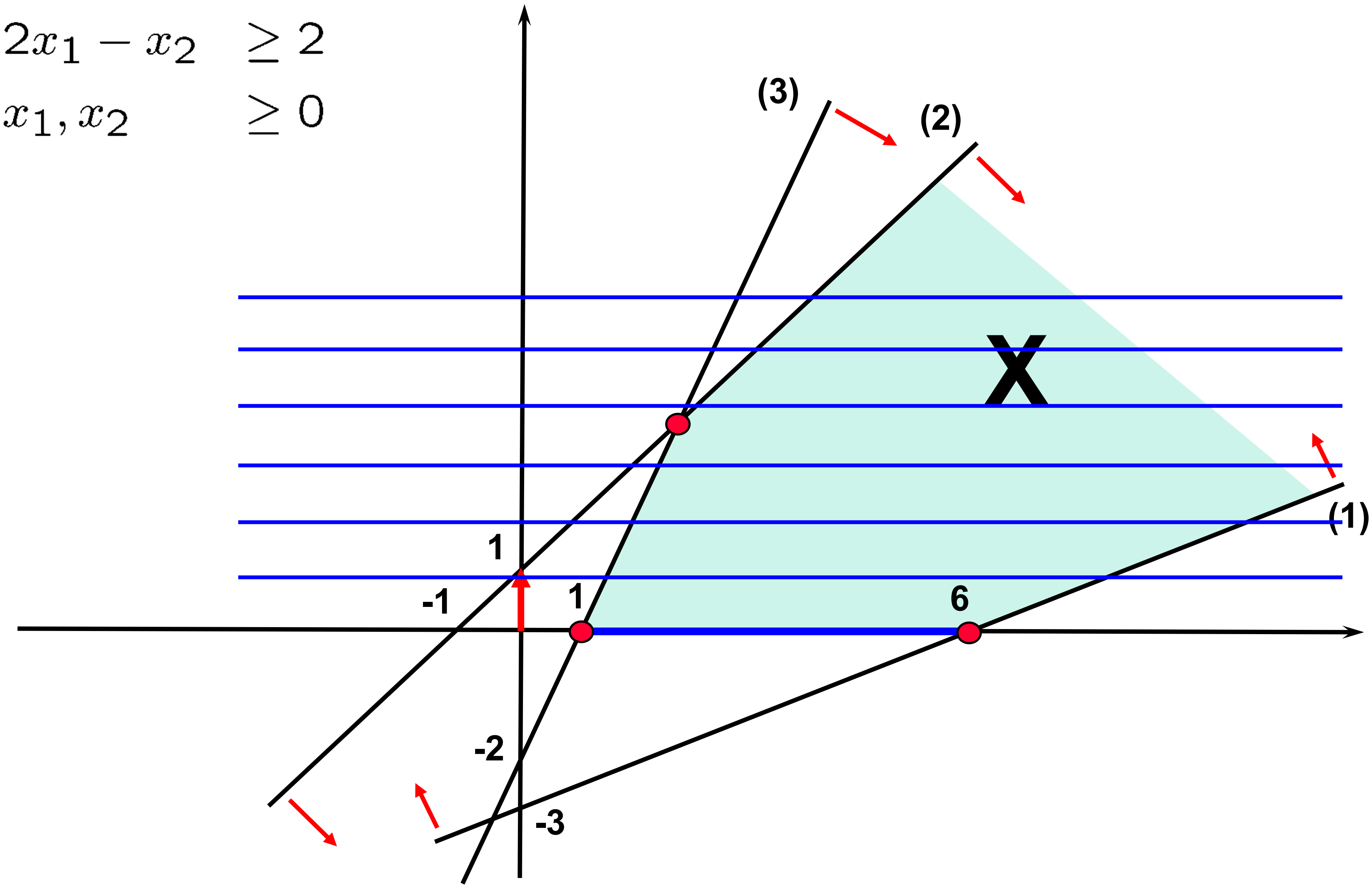
$$z = -\infty$$



$$\min \quad z = x_2$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$

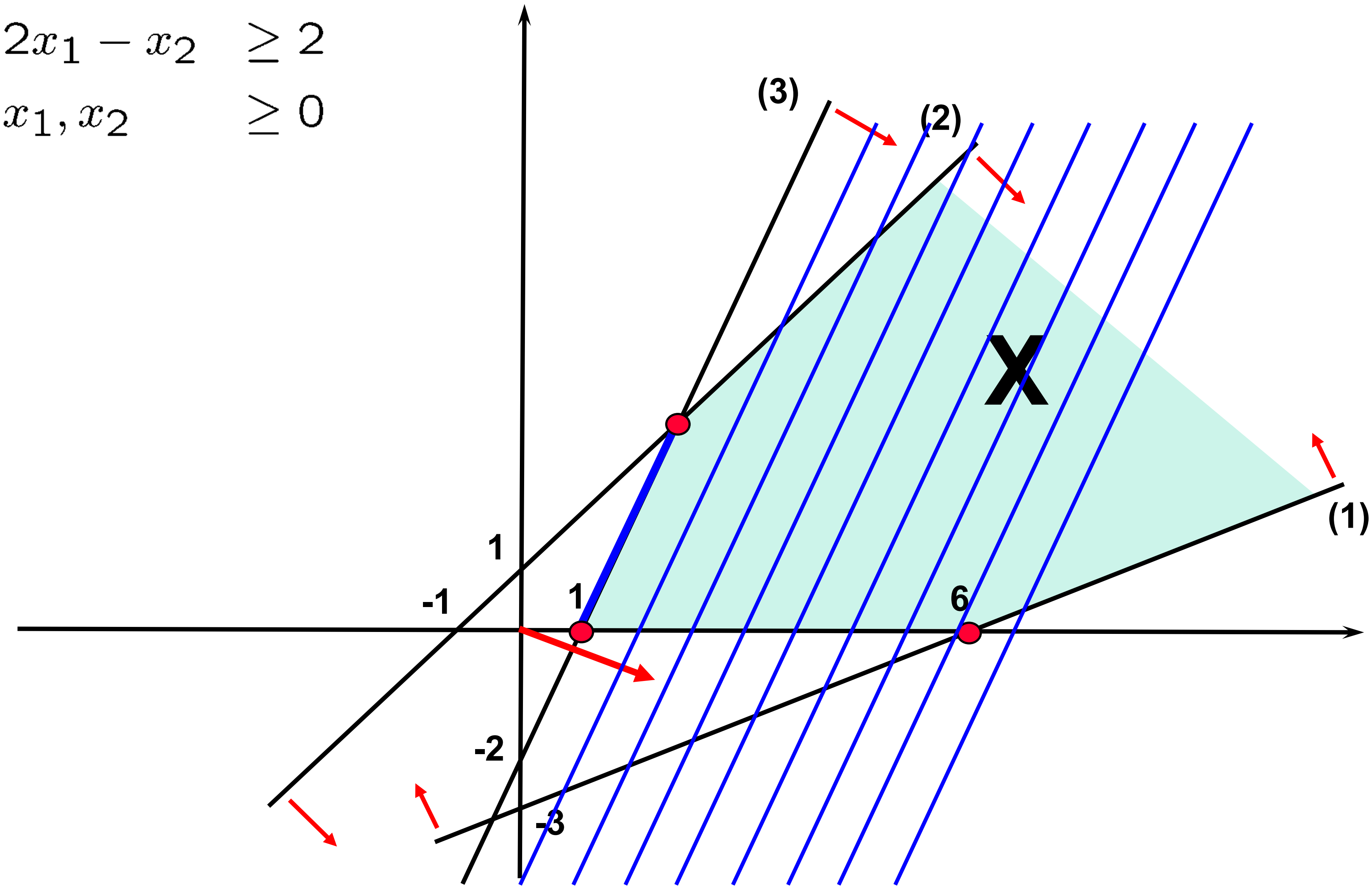
c) Determinare una nuova funzione obiettivo che abbia infiniti punti di ottimo



$$\min \quad z = 2x_1 - x_2$$

$$\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\
(4) & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}$$

c) Determinare una nuova funzione obiettivo che abbia infiniti punti di ottimo



Due problemi di PL

PROBLEMA 1:

Una multinazionale produce due versioni di una bevanda energetica: normale e super. Per ogni quintale di bevanda venduta, l'azienda ha un profitto pari ad 1000 euro per il tipo normale e 1200 euro per il tipo super. Nella produzione è necessario utilizzare in sequenza tre tipi di macchinari, A, B, C, che ogni giorno possono lavorare un numero di ore massimo come riportato nella tabella seguente:

	ORE	NORMALE	SUPER
A	4	1	0.4
B	6	0.75	1
C	3.5	1	0

Per produrre un quintale di bevanda (normale o super) è richiesto l'utilizzo delle macchine per il tempo indicato nella stessa tabella. L'obiettivo del signor Rossi è quello di pianificare la produzione giornaliera dei due tipi di bevande al fine di massimizzare il profitto (supponendo che l'intera produzione verrà venduta).

- Il nostro obiettivo è decidere **quanti quintali** produrre per ogni tipologia di bevanda; assegniamo ad ogni **tipologia di bevanda** una **variabile** (x_1=normale, x_2=super)
- I **vincoli** del problema devono modellare il rispetto del numero massimo di ore di lavorazione per **ogni macchinario**

$$\max \quad 1000x_1 + 1200x_2$$
$$x_1 + 0.4x_2 \leq 4$$
$$x_1 \leq 3.5$$
$$0.75x_1 + x_2 \leq 6$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Due problemi di PL

PROBLEMA 2:

Il cuoco del ristorante dove lavoriamo ci ha assegnato il compito di andare a comprare le mele e le arance con 20 euro in tasca. Il costo di ogni kg di mele è pari a 5 euro mentre ogni kg di arance costa 2 euro. Inoltre il cuoco non vuole che acquistiamo più di 3.5 kg di mele. Infine il fruttivendolo questa settimana offre un buono sconto da 1 euro su ogni kg di mele e di 1.2 euro su ogni kg di arance acquistato. Questi buoni sconto sono però offerti a condizione che il numero di kg di mele, moltiplicato per 3, più il numero di kg di arance, moltiplicato per 4, non superi i 24 kg. L'obiettivo da raggiungere è quello di ottenere il massimo sconto, rispettando però le indicazioni sia del cuoco che del fruttivendolo.

- x_1=chili di mele da acquistare, x_2=chili di arance da acquistare
- Funzione obiettivo: Massimizzare il **valore totale** dei **buoni sconto** ottenuti
- Vincolo 1: rispetto del **limite di spesa**
- Vincolo 2: rispetto della **richiesta del cuoco**
- Vincolo 3: rispetto della **condizione imposta dal fruttivendolo** per avere accesso ai buoni sconto

$$\max \quad x_1 + 1.2x_2$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 20$$

$$x_1 \leq 3.5$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

P1

$$\begin{aligned}
&\max \quad 1000\mathrm{x}_1 + 1200x_2 \\
&x_1 + 0.4x_2 \le 4 \\
&x_1 \le 3.5 \\
&0.75x_1 + x_2 \le 6 \\
&\underline{x} \ge \underline{0}
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

P2

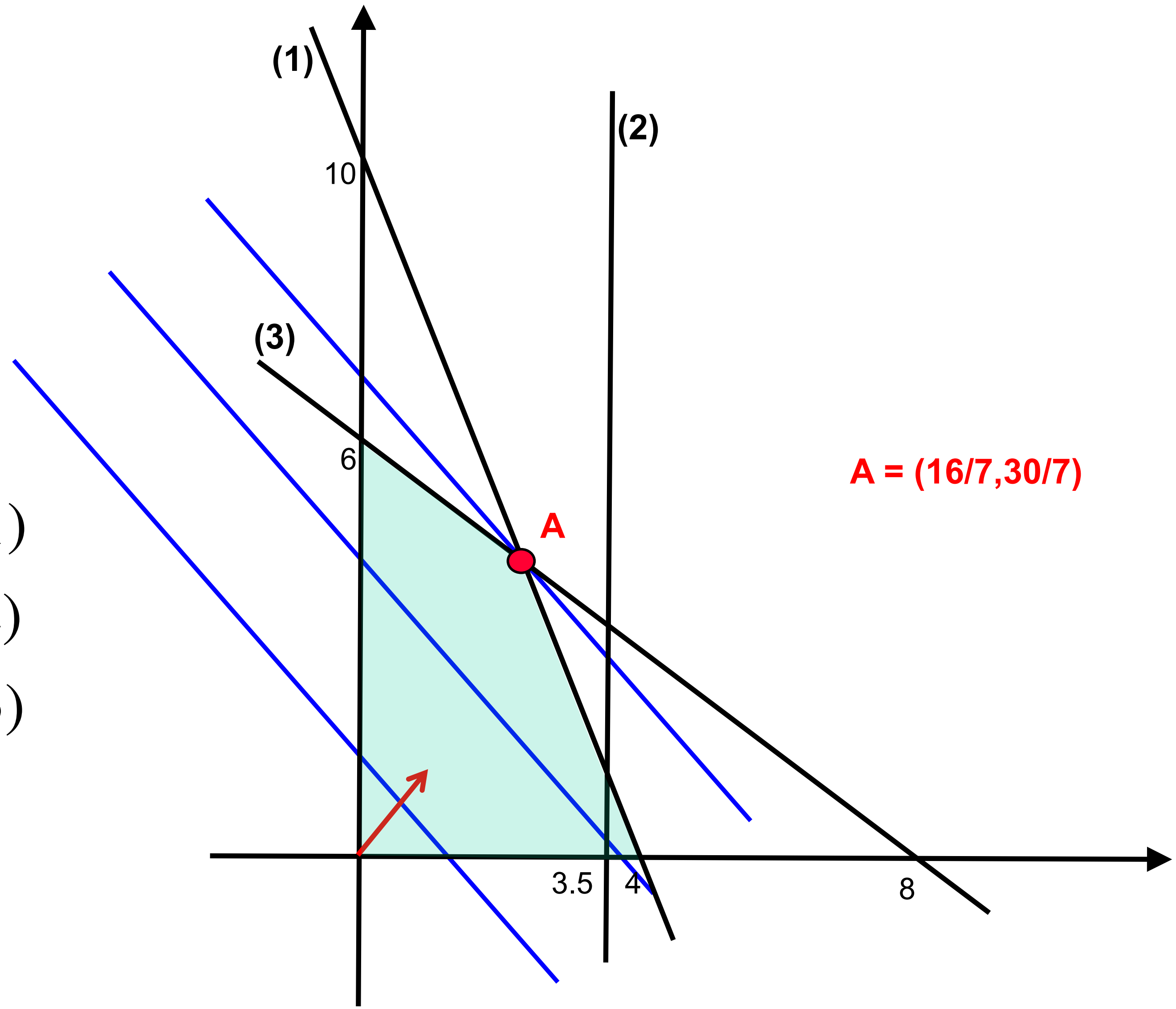
$$\begin{aligned}
&\max \quad \mathrm{x}_1 + 1.2x_2 \\
&5x_1 + 2x_2 \le 20 \\
&x_1 \le 3.5 \\
&3x_1 + 4x_2 \le 24 \\
&\underline{x} \ge \underline{0}
\end{aligned}$$

- I vincoli dei due problemi definiscono lo **stesso insieme di soluzioni ammissibili** (possibili assegnamenti di valori alle variabili);
- Data la proporzionalità tra i coefficienti di costo delle due funzioni obiettivo**, le soluzioni ottime di P1 e P2 coincidono**;
- Il **valore** della funzione obiettivo all'ottimo per P1 ($\underline{c}^T\underline{x}$) sarà pari a 1000 volte quello di P2.

Risolvere i seguenti problemi

$$\max \quad 1000x_1 + 1200x_2$$
$$x_1 + 0.4x_2 \le 4$$
$$x_1 \le 3.5$$
$$0.75x_1 + x_2 \le 6$$
$$\underline{x} \ge \underline{0}$$

$$\max \quad x_1 + 1.2x_2$$
$$5x_1 + 2x_2 \le 20 \qquad (1)$$
$$x_1 \le 3.5 \qquad (2)$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 24 \qquad (3)$$
$$\underline{x} \ge \underline{0}$$



A = (16/7,30/7)

Iperpiano: generalizzazione della retta

Definizione:

Un insieme geometrico H è un iperpiano se e solo se:

$$H = \{\underline{x} : \underline{p}^T \underline{x} = k\}$$

o equivalentemente

$$H = \{\underline{x} : p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = k\}$$

$\underline{p}$ è un vettore e k è uno scalare

Il vettore $\underline{p} \neq \underline{0}$ è detto gradiente o normale dell'iperpiano, ed è la direzione di crescita dell'iperpiano

Iperpiano: in particolare

Consideriamo un punto $\underline{x}_0$ di H ed il gradiente $\underline{p}$. L'iperpiano H è l'insieme dei vettori $\underline{x}$ tali che il vettore $\underline{x}-\underline{x}_0$ è perpendicolare a $\underline{p}$

$$\underline{x}_0 \in H \quad \Rightarrow \quad \underline{p}^T \underline{x}_0 = k$$

$$\underline{x} \in H \quad \Rightarrow \quad \underline{p}^T \underline{x} = k$$

sottraendo:

$$\underline{p}^T (\underline{x} - \underline{x}_0) = 0$$

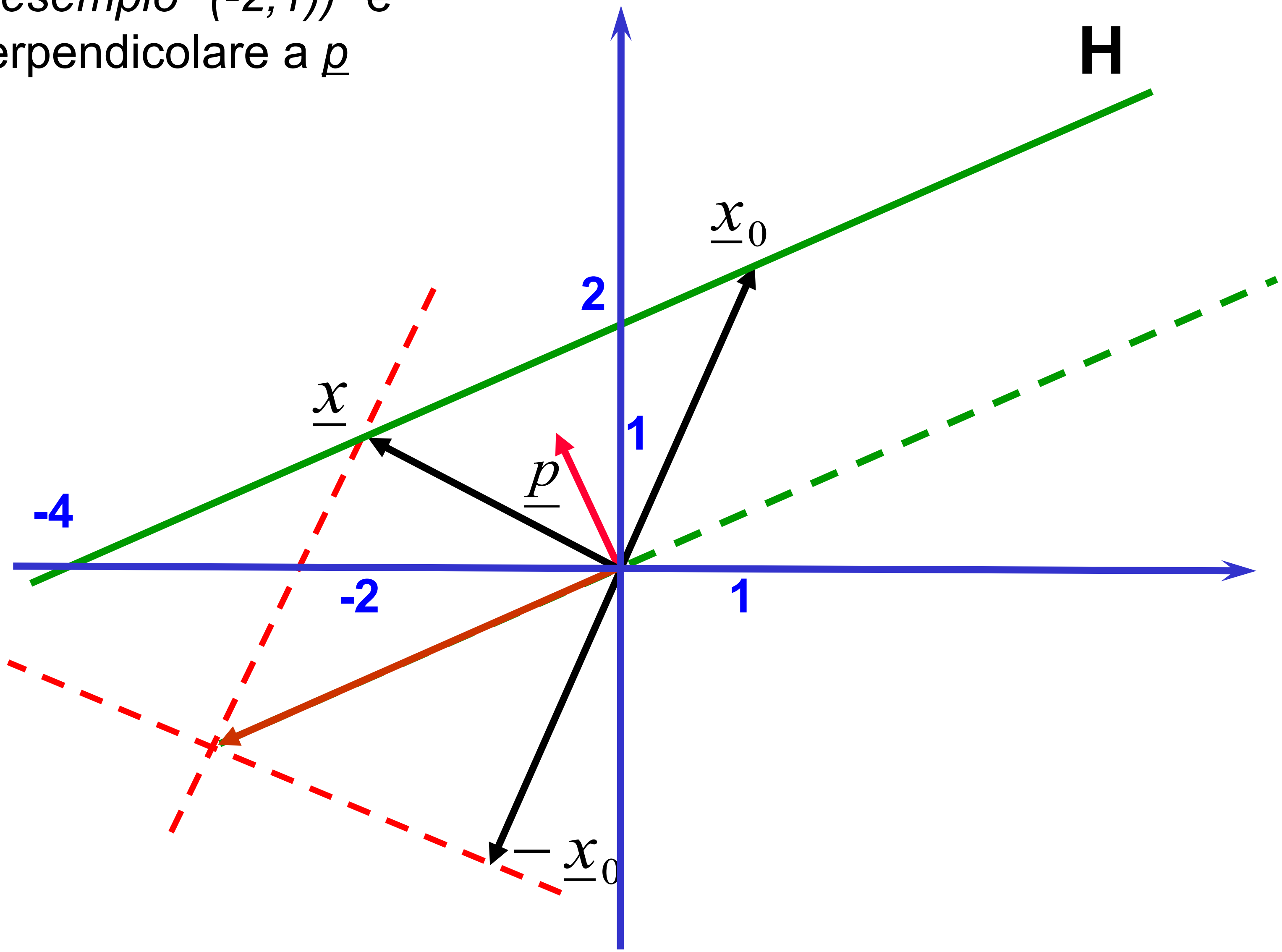
se due vettori hanno prodotto interno nullo allora sono perpendicolari

Esempio in R^2

$$H = \left\{ \; (x_1, x_2) : p_1 x_1 + p_2 x_2 = k \right\}$$

$$= \; -\frac{1}{2} x_1 + x_2 = 2$$

Sia $\underline{x}_0$=(1,5/2) un punto *di H*, e verifichiamo che un qualunque altro punto $\underline{x} \in H$ *(ad esempio (-2,1))* è tale che $\underline{x}$-$\underline{x}_0$ è perpendicolare a $\underline{p}$

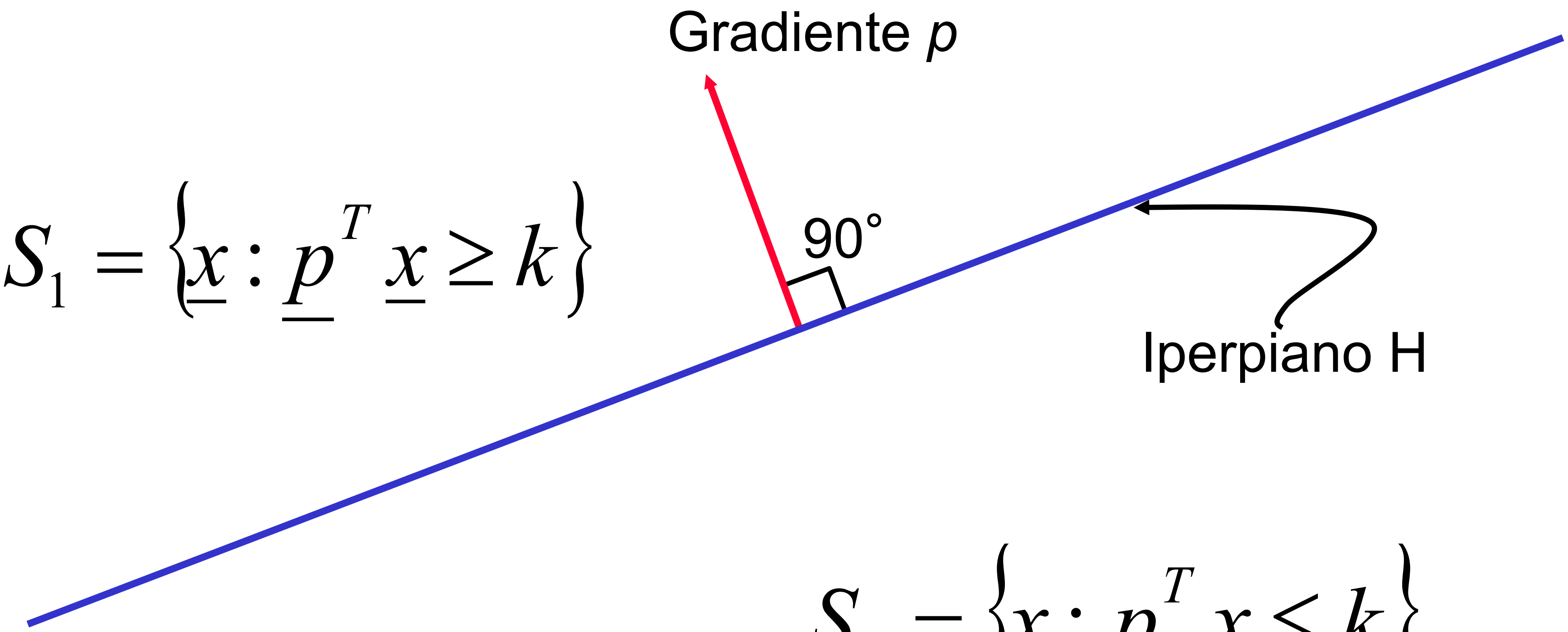


Un iperpiano H divide lo spazio R^n cui appartiene in due semispazi

$$H = \{\underline{x} : \underline{p}^T \underline{x} = k\}$$

$$S_1 = \{\underline{x} : \underline{p}^T \underline{x} \geq k\} \qquad S_2 = \{\underline{x} : \underline{p}^T \underline{x} \leq k\}$$

Esempio



$$S_1 = \{\underline{x} : \underline{p}^T \underline{x} \geq k\}$$

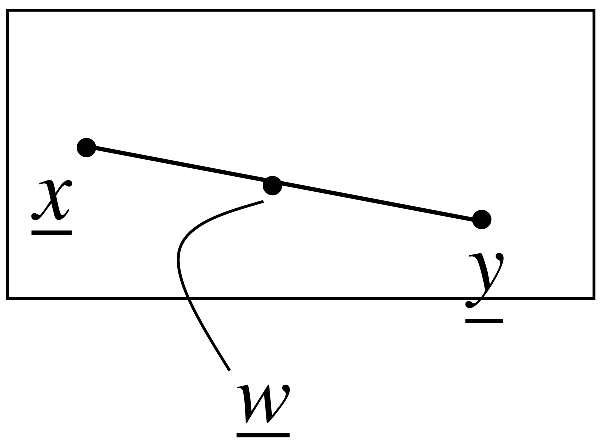
$$S_2 = \{\underline{x} : \underline{p}^T \underline{x} \leq k\}$$

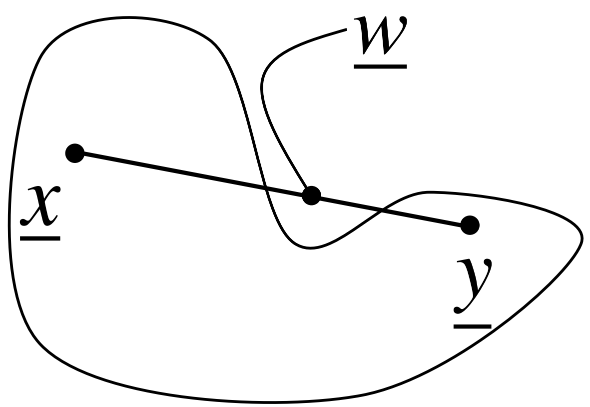
Insieme convesso

Def: Un insieme X è convesso se e solo se dati due punti, $\underline{x}$, $\underline{y}$ $\in X$ ogni punto $\underline{w}$ generato come loro combinazione convessa:

$$\underline{w} = \lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y} \qquad \lambda \in [0,1]$$

è tale che $\underline{w} \in X$





Alcuni insiemi convessi

$$X = \{ \underline{x} : A\underline{x} = \underline{b} \}$$

Dim.
Dobbiamo dimostrare che un qualunque punto $\underline{w} \in X$ può essere espresso come combinazione convessa di due altri punti di X

Consideriamo $\underline{x}$, $\underline{y} \in X$ generici.

$$\underline{x} \in X \Rightarrow A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{y} \in X \Rightarrow A\underline{y} = \underline{b}$$

Considero il punto $\underline{w}$ espresso come combinazione convessa di $\underline{x}$ ed $\underline{y}$

$$\underline{w} = \lambda \underline{x} + (1 - \lambda)\underline{y} \qquad \lambda \in [0,1]$$

Dobbiamo verificare che $\underline{w}$ appartiene ad X

Alcuni insiemi convessi: $X = \left\{ \underline{x} : A\underline{x} = \underline{b} \right\}$

$$\underline{w} = \lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}$$

Premoltiplico per la matrice A

$$A\underline{w} = \lambda A\underline{x} + (1-\lambda)A\underline{y}$$

Poiché x ed y appartengono ad X

$$A\underline{w} = \lambda \underline{b} + (1-\lambda)\underline{b} = \lambda \underline{b} + \underline{b} - \lambda \underline{b} = \underline{b}$$

Altri insiemi convessi

- Un **Iperpiano** è un insieme convesso
- Un **Semispazio** è un insieme convesso
- L'**intersezione** di iperpiani/semispazi produce un insieme convesso

---

Un **poliedro** è l'intersezione di un numero finito di <u>semispazi</u>

⬇

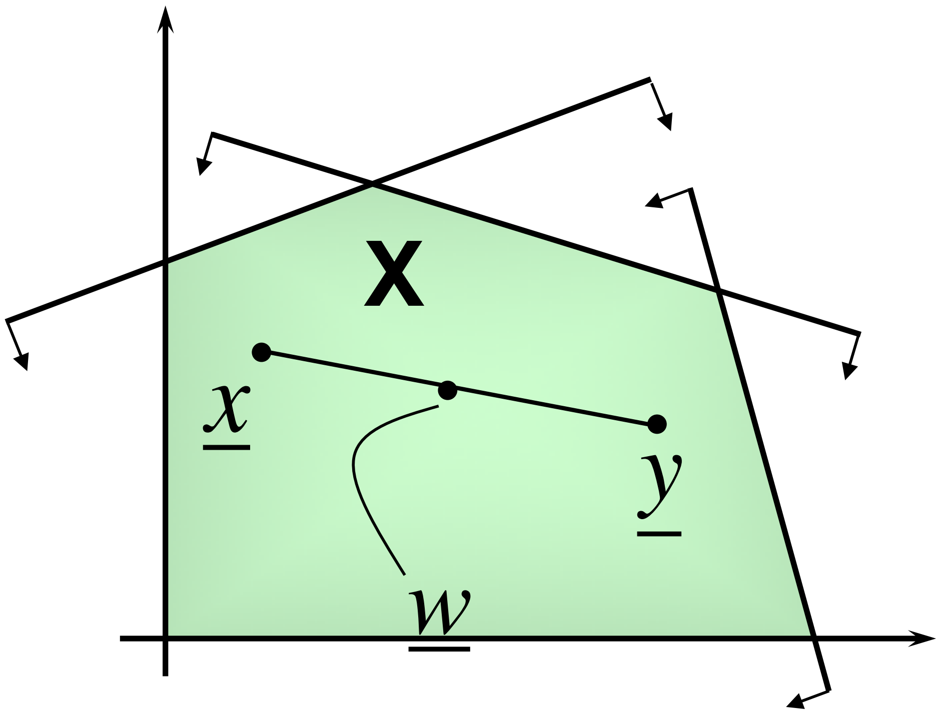
Un poliedro X è un **insieme convesso**

poliedro chiuso e limitato

(Politopo)

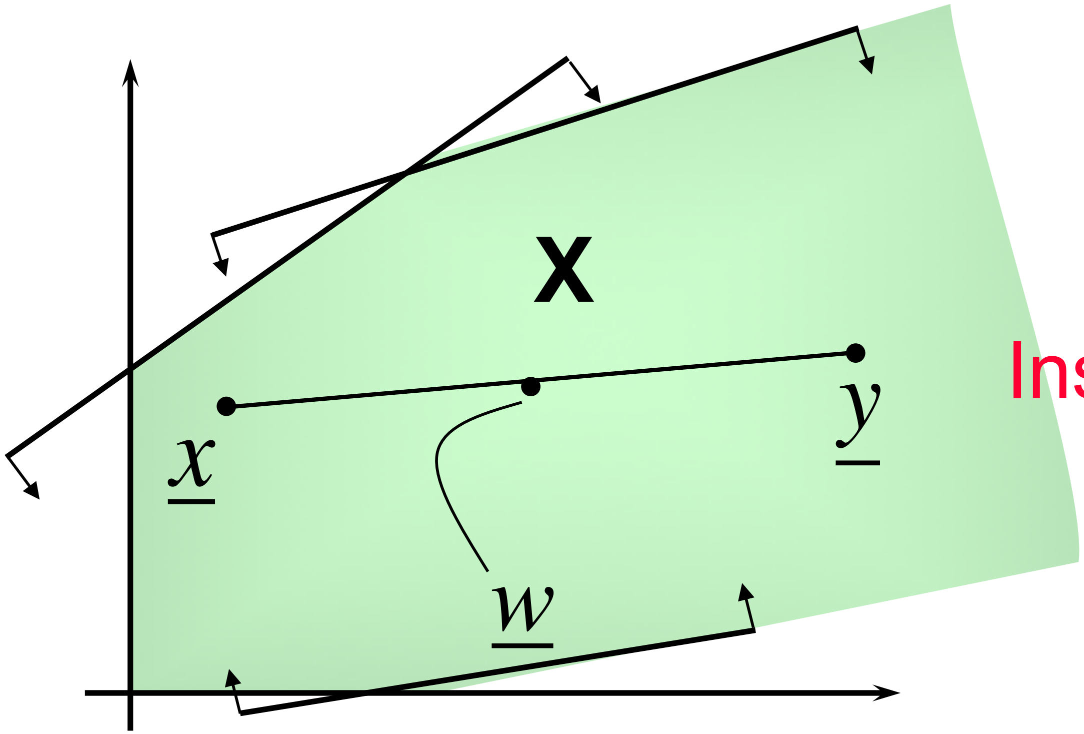
poliedro illimitato

Esempio: politopo



Insieme convesso

Esempio: poliedro illimitato



Insieme convesso

Funzione convessa

Definizione 6 (Funzione convessa)

Una funzione *f(x)* si dice convessa su insieme X se, presi comunque due punti $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2 \in X$ risulta che: $f(\lambda\underline{x}_1+(1-\lambda)\underline{x}_2) \leq \lambda f(\underline{x}_1) + (1-\lambda)f(\underline{x}_2)$ con $\lambda \in [0,1]$

Teorema 1 (Funzione convessa)

Una funzione lineare del tipo $\underline{c}^T\underline{x}$ è una funzione convessa.

DIM. Dalla definizione di funzione convessa, sostituendo la $f(\underline{x})$ con $\underline{c}^T\underline{x}$ si ha:

$$\left.\begin{array}{lcl} f(\lambda\underline{x}_1+(1-\lambda)\underline{x}_2) & \longrightarrow & \underline{c}^T\lambda\underline{x}_1 + \underline{c}^T(1-\lambda)\underline{x}_2 \\ \lambda f(\underline{x}_1) + (1-\lambda)f(\underline{x}_2) & \longrightarrow & \lambda\underline{c}^T\underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{c}^T\underline{x}_2 \end{array}\right\} \text{uguali}$$

Poiché $f(\lambda\underline{x}_1+(1-\lambda)\underline{x}_2) = \lambda f(\underline{x}_1) + (1-\lambda)f(\underline{x}_2)$ la funzione $\underline{c}^T\underline{x}$ è convessa.

Teorema 2

Se f è una funzione convessa e X è un insieme convesso allora ogni ottimo locale $\underline{x}'$ di f su X (se ne esistono) è anche un ottimo globale.