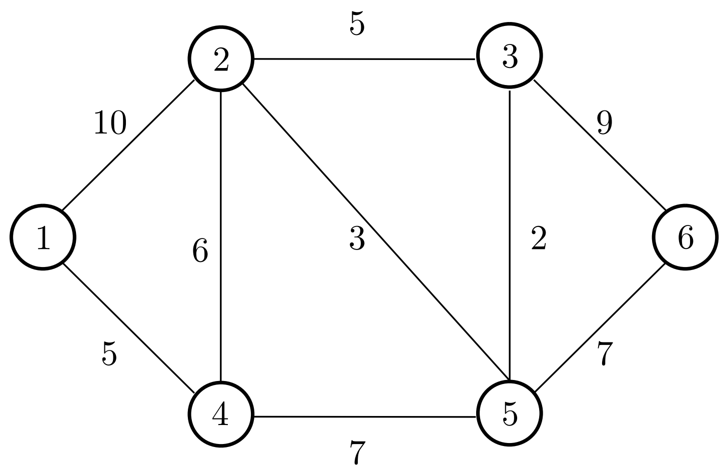

Figure 1: Grafo pesato.

Esercizi sull'albero di Copertura di peso minimo (MST)

Dato il grafo in figura 1

a) Calcolare l'albero di copertura di peso minimo utilizzando l'algoritmo di Kruskal.

b) Calcolare l'albero di copertura minimo utilizzando l'algoritmo di Prim.

1*a*) Risolviamo il problema applicando l'algoritmo di Kruskal. Per prima cosa bisogna ordinare gli archi del grafo in ordine non decrescente di costo:

$Q = \{(3,5),(2,5),(1,4),(2,3),(2,4),(4,5),(5,6),(3,6),(1,2)\}$

Una volta effettuato l'ordinamento si selezionano gli archi a partire da quello con costo inferiore. Per ogni arco selezionato si va a verificare sul grafo temporaneo, composto da tutti i nodi di G e dagli archi in Q già inseriti, se esso crea un ciclo. In caso affermativo l'arco viene scartato altrimenti viene inserito nel grafo temporaneo e farà parte dell'albero di copertura finale. All'inizio abbiamo quindi il grafo $ST = (V, E^0)$ con $E^0 = \emptyset$.

S1. Seleziono l'arco $(3,5)$. Poichè $E^0 = \emptyset$ sicuramente l'inserimento di questo arco in ST non può produrre cicli e quindi viene scelto. Si ha quindi $E^1 = \{(3,5)\}$.

S2. Seleziono l'arco $(2,5)$. Anche questo arco non crea cicli in ST e quindi viene inserito. $E^2 = \{(3,5),(2,5)\}$.

S3. Seleziono l'arco $(1,4)$. Anche questo arco non crea cicli in ST e quindi viene inserito. $E^3 = \{(3,5),(2,5),(1,4)\}$.

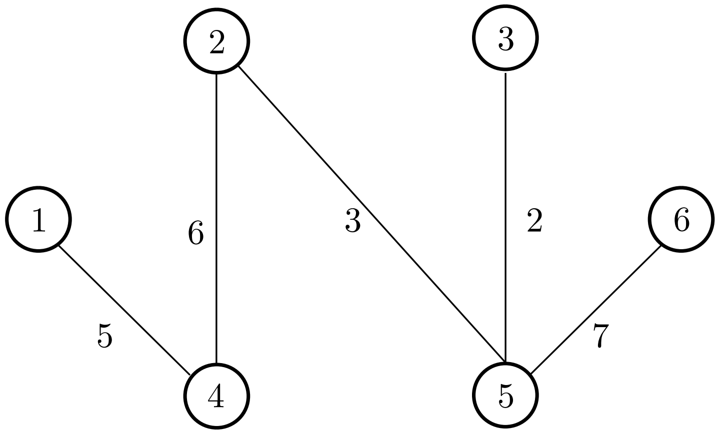

Figure 2: Albero di copertura minimo.

S4. Seleziono l'arco $(2,3)$. Poichè l'inserimento di questo arco in ST produce il ciclo {(3,5),(2,5),(2,3)}, l'arco viene scartato.

S5. Seleziono l'arco $(2,4)$. Anche questo arco non crea cicli in ST e quindi viene inserito. $E^4 = \{(3,5),(2,5),(1,4),(2,4)\}$.

S6. Seleziono l'arco $(4,5)$. Poichè l'inserimento di questo arco in ST produce il ciclo {(2,5),(2,4),(4,5)}, l'arco viene scartato.

S7. Seleziono l'arco $(5,6)$. Anche questo arco non crea cicli in ST e quindi viene inserito. $E^5 = \{(3,5),(2,5),(1,4),(2,4),(5,6)\}$.

A questo punto poichè sono stati inseriti n-1 archi l'algoritmo si arresta. L'albero di copertura minimo individuato è riportato in figura 2. Il suo peso ottimo è dato dalla somma dei pesi dei suoi archi ed è uguale a 23.

1*b*) Risolviamo il problema applicando l'algoritmo di Prim. L'algoritmo di Prim per prima cosa seleziona un nodo di partenza per esempio $V^0 = \{1\}$, $E^0 = \emptyset$. L'algoritmo ad ogni passo k seleziona l'arco di costo minimo tra quelli che collegano i nodi in V^{k-1} con quelli in $V \setminus V^{k-1}$.

S1. Seleziono l'arco $(1,4)$, quindi $V^1 = \{1,4\}$, $E^1 = (1,4)$.

S2. Seleziono l'arco $(2,4)$, quindi $V^2 = \{1,4,2\}$, $E^2 = \{(1,4),(2,4)\}$.

S3. Seleziono l'arco $(2,5)$, quindi $V^3 = \{1,4,2,5\}$, $E^3 = \{(1,4),(2,4),(2,5)\}$.

S4. Seleziono l'arco $(3,5)$, quindi $V^4 = \{1,4,2,5,3\}$, $E^4 = \{(1,4),(2,4),(2,5),(3,5)\}$.

S5. Seleziono l'arco $(5,6)$, quindi $V^5 = \{1,4,2,5,3,6\}$, $E^5 = \{(1,4),(2,4),(2,5),(3,5),(5,6)\}$.

Risolvendo il problema dei cammini minimi sullo stesso grafo partendo dal nodo 1 come nodo sorgente si può facilmente osservare come gli alberi costruiti dai due algoritmi siano distinti.