RIDUZIONI, INDECIDIBILITA' E RICONOSCIBILITA'

M.Anselmo

12 maggio 2023

Riducibilità

È importante riconoscere che un problema P è indecidibile.

Riducibilità

È importante riconoscere che un problema P è indecidibile.

Come? Tre possibilità:

Riducibilità

È importante riconoscere che un problema P è indecidibile.

Come? Tre possibilità:

- Supporre l'esistenza di una MdT che decide P e provare che questo conduce a una contraddizione.

Riducibilità

È importante riconoscere che un problema P è indecidibile.

Come? Tre possibilità:

- Supporre l'esistenza di una MdT che decide P e provare che questo conduce a una contraddizione.
- Considerare un problema P' di cui sia nota l'indecidibilità e dimostrare che P' "non è più difficile" del problema in questione P.
- Teorema di Rice.

Riducibilità: definizione informale

- Idea: convertire le istanze di un problema P nelle istanze di un problema P' in modo che un algoritmo per P', se esiste, possa essere utilizzato per progettare un algoritmo per P: P non è più difficile di P'.
- Sia A il linguaggio associato a P, sia B il linguaggio associato a P'. Allora proveremo che:
  B decidibile $\Rightarrow$ A decidibile,
  A indecidibile $\Rightarrow$ B indecidibile.
- **Nota**: nulla è detto sulla decidibilità di A o B ma solo sulla decidibilità di A assumendo di disporre di un algoritmo per decidere di B.

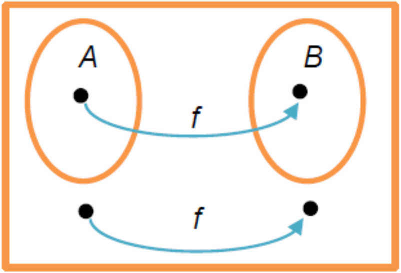
Riducibilità mediante funzione

Definizione

Un linguaggio $A \subseteq \Sigma^*$ è riducibile mediante funzione a un linguaggio $B \subseteq \Sigma^*$, e scriveremo $A \leq_m B$, se esiste una funzione calcolabile $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ tale che $\forall w \in \Sigma^*$

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$$

La funzione f è chiamata una riduzione da A a B.



Riducibilità mediante funzione

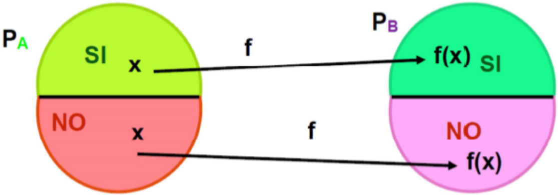


Immagine tratta dalle dispense della Prof.ssa Emanuela Fachini

Una riduzione fornisce un modo per convertire problemi di appartenenza ad A in problemi di appartenenza a B.

Se un problema A è riducibile a B e sappiamo risolvere B allora sappiamo risolvere A cioè A "non è più difficile" di B.

Risultati

Teorema
$A \leq_m B$ se e solo se $\overline{A} \leq_m \overline{B}$.

Teorema
Se $A \leq_m B$ e B è decidibile, allora A è decidibile.

Teorema
Se $A \leq_m B$ e B è Turing riconoscibile, allora A è Turing riconoscibile.

Risultati

Teorema
$A \leq_m B$ *se e solo se* $\overline{A} \leq_m \overline{B}$.

Teorema
Se $A \leq_m B$ *e* B *è decidibile, allora* A *è decidibile.*

Teorema
Se $A \leq_m B$ *e* B *è Turing riconoscibile, allora* A *è Turing riconoscibile.*

Corollario
Se $A \leq_m B$ *e* A *è indecidibile, allora* B *è indecidibile.*

Corollario
Se $A \leq_m B$ *e* A *non è Turing riconoscibile, allora* B *non è Turing riconoscibile.*

Riduzioni e indecidibilità

Nei teoremi seguenti proveremo l'esistenza di riduzioni da A_{TM} (o da un altro linguaggio indecidibile) ad alcuni linguaggi B associati a problemi di decisione sulle macchine di Turing.

Una conseguenza importante di tali teoremi è che ognuno di questi linguaggi B è indecidibile.

Inoltre, quando descriviamo una macchina di Turing che calcola una riduzione da A a B, assumiamo che agli input che non sono "della forma corretta" sia associata una stringa al di fuori di B.

Indecidibilità del problema della fermata

$A_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M$ è una MdT e M accetta $w\}$

$HALT_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M$ è una MdT e M si arresta su $w\}$

Teorema
$A_{TM} \leq_m HALT_{TM}$.

Dimostrazione
Occorre definire una funzione calcolabile $f \ : \Sigma^* \to \Sigma^*$ tale che $f(\langle M, w\rangle) = \langle M', w'\rangle$ e

$$\langle M, w\rangle \in A_{TM} \ \text{ sse } \ \langle M', w'\rangle \in HALT_{TM}$$

.

Indecidibilità del problema della fermata

Definiamo $w' = w$ e M' come segue:

$$M' : x \to \boxed{\boxed{M} \to \begin{cases} accetta \\ rifiuta \end{cases}} \to \begin{cases} accetta \\ cicla \end{cases}$$

La MdT M' si ferma su input $x \Leftrightarrow M$ accetta x.

Indecidibilità del problema della fermata

Definiamo $w' = w$ e M' come segue:

$$M' : x \rightarrow \boxed{\boxed{M} \rightarrow \begin{cases} accetta \\ rifiuta \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} accetta \\ cicla \end{cases}$$

La MdT M' si ferma su input $x \Leftrightarrow M$ accetta x.

La funzione $f : \langle M, w\rangle \rightarrow \langle M', w\rangle$ è una riduzione:

- f è calcolabile
- $\langle M, w\rangle \in A_{TM} \Leftrightarrow M$ accetta $w \Leftrightarrow M'$ si ferma su w $\Leftrightarrow \langle M', w\rangle \in HALT_{TM}$.

Problema del vuoto

$A_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ è una TM e } w \in L(M)\}$
$E_{TM} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ è una } TM \text{ e } L(M) = \emptyset\}$

$$A_{TM} \leq_m \overline{E_{TM}}$$

Problema del vuoto

$A_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ è una TM e } w \in L(M)\}$
$E_{TM} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ è una } TM \text{ e } L(M) = \emptyset\}$

$$A_{TM} \leq_m \overline{E_{TM}}$$

Consideriamo $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ tale che $f(\langle M, w\rangle) = \langle M_1\rangle$ dove

$$M_1 : x \to \boxed{\boxed{x =?w} \to \begin{cases} No & \to \\ Si & w \to \boxed{M} \to accetta \end{cases}} \to \begin{cases} rifiuta \\ accetta \end{cases}$$

Quindi $L(M_1) = \begin{cases} \{w\} & \text{se } \langle M, w\rangle \in A_{TM} \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$

Indecidibilità del problema del vuoto

Teorema
$\overline{E_{TM}}$ è indecidibile.

Infatti $A_{TM} \leq_m \overline{E_{TM}}$ e A_{TM} indecidibile $\Rightarrow \overline{E_{TM}}$ indecidibile.

Corollario E_{TM} è indecidibile.

Infatti la classe dei linguaggi decidibili è chiusa per complemento.

Nota. A_{TM} non è riducibile mediante funzione ad E_{TM} (vedi es. 5.5 di [Sipser]).

$REGULAR_{TM}$

$$REGULAR_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una } MdT \text{ e } L(M) \text{ è regolare } \}$$

$$A_{TM} \leq_m REGULAR_{TM}$$

$REGULAR_{TM}$

$$REGULAR_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una } MdT \text{ e } L(M) \text{ è regolare } \}$$

$$A_{TM} \leq_m REGULAR_{TM}$$

Sia $f : \langle M, w \rangle \rightarrow \langle R \rangle$ dove R su un input x:

$$x \rightarrow \boxed{\boxed{M_{\{0^n1^n\}}} \rightarrow \begin{cases} accetta & \rightarrow \\ rifiuta & w \rightarrow \boxed{M} \rightarrow \begin{cases} accetta \\ non \;\; accetta \end{cases} \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} accetta \\ accetta \\ non\ accetta \end{cases}$$

(cont.)

$$x \rightarrow \boxed{\boxed{M_{\{0^n1^n\}}} \rightarrow \begin{cases} \textit{accetta} & \rightarrow \\ \textit{rifiuta} & w \rightarrow \boxed{M} \rightarrow \begin{cases} \textit{accetta} \\ \textit{non accetta} \end{cases} \end{cases}} \rightarrow \begin{cases} \textit{accetta} \\ \textit{accetta} \\ \textit{non accetta} \end{cases}$$

Indipendentemente da M e w, R accetta sempre le stringhe di $\{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Inoltre, accetta anche tutte le altre $x \notin \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sse M accetta w. Quindi:

$$L(R) = \begin{cases} \Sigma^* & \text{(regolare)} & \text{se } \langle M, w \rangle \in A_{TM} \\ \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\} & \text{(non regolare)} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(cont.)

$$x \to \boxed{\boxed{M_{\{0^n1^n\}}} \to \begin{cases} \mathit{accetta} & \to \\ \mathit{rifiuta} & w \to \boxed{M} \to \begin{cases} \mathit{accetta} \\ \mathit{non\ \ accetta} \end{cases} \end{cases}} \to \begin{cases} \mathit{accetta} \\ \mathit{accetta} \\ \mathit{non\ accetta} \end{cases}$$

Indipendentemente da M e w, R accetta sempre le stringhe di $\{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Inoltre, accetta anche tutte le altre $x \notin \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sse M accetta w. Quindi:

$$L(R) = \begin{cases} \Sigma^* & \text{(regolare)} & \text{se } \langle M, w\rangle \in A_{TM} \\ \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\} & \text{(non regolare)} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\langle M, w\rangle \in A_{TM} \Leftrightarrow L(R)$ è regolare $\Leftrightarrow \langle R\rangle \in REGULAR_{TM}$.

La funzione f è calcolabile (perchè?).

Quindi f è una riduzione da A_{TM} a $REGULAR_{TM}$.

Linguaggi indecidibili

Teorema

A_{TM}, $HALT_{TM}$, E_{TM}, $\overline{E_{TM}}$, $REGULAR_{TM}$ sono linguaggi indecidibili.

EQ_{TM} è indecidibile

$E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M$ è una MdT e $L(M) = \emptyset\}$
$EQ_{TM} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1, M_2$ sono MdT e $L(M_1) = L(M_2)\}$

$$E_{TM} \leq_m EQ_{TM}$$

EQ_{TM} è indecidibile

$E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una } MdT \text{ e } L(M) = \emptyset\}$
$EQ_{TM} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1, M_2 \text{ sono MdT e } L(M_1) = L(M_2)\}$

$$E_{TM} \leq_m EQ_{TM}$$

Sia M_1 una macchina di Turing tale che $L(M_1) = \emptyset$.
$f : \langle M \rangle \to \langle M, M_1 \rangle$ è una riduzione di E_{TM} a EQ_{TM}.

EQ_{TM} è indecidibile

$E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M$ è una MdT e $L(M) = \emptyset\}$
$EQ_{TM} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1, M_2$ sono MdT e $L(M_1) = L(M_2)\}$

$$E_{TM} \leq_m EQ_{TM}$$

Sia M_1 una macchina di Turing tale che $L(M_1) = \emptyset$.
$f : \langle M \rangle \rightarrow \langle M, M_1 \rangle$ è una riduzione di E_{TM} a EQ_{TM}.
Perchè?

Riduzione da A_{TM} a EQ_{TM}

$$A_{TM} \leq_m EQ_{TM}$$

Riduzione da A_{TM} a EQ_{TM}

$$A_{TM} \leq_m EQ_{TM}$$

Idea: Data $\langle M, w \rangle$, considerare le MdT M_1 e M_2 tali che

Riduzione da A_{TM} a EQ_{TM}

$$A_{TM} \leq_m EQ_{TM}$$

Idea: Data $\langle M, w \rangle$, considerare le MdT M_1 e M_2 tali che

Per ogni input x:

M_1 accetta x,

M_2 simula M su w. Se M accetta w, M_2 accetta x.

Riduzione da A_{TM} a EQ_{TM}

$$A_{TM} \leq_m EQ_{TM}$$

Idea: Data $\langle M, w \rangle$, considerare le MdT M_1 e M_2 tali che

Per ogni input x:

M_1 accetta x,

M_2 simula M su w. Se M accetta w, M_2 accetta x.

$f : \langle M, w \rangle \rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle$ è riduzione da A_{TM} a EQ_{TM}.

Perchè?

$$L(M_1) = \Sigma^*;\ L(M_2) = \begin{cases} \Sigma^* & \text{se } \langle M, w \rangle \in A_{TM} \\ \emptyset & \text{se } \langle M, w \rangle \notin A_{TM} \end{cases}$$

Riduzione da A_{TM} al complemento di EQ_{TM}

$f : \langle M, w \rangle \rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle$ è riduzione che prova $A_{TM} \leq_m EQ_{TM}$.

$$L(M_1) = \Sigma^*;\ L(M_2) = \begin{cases} \Sigma^* & \text{se } \langle M, w \rangle \in A_{TM} \\ \emptyset & \text{se } \langle M, w \rangle \notin A_{TM} \end{cases}$$

Riduzione da A_{TM} al complemento di EQ_{TM}

$f : \langle M, w \rangle \to \langle M_1, M_2 \rangle$ è riduzione che prova $A_{TM} \leq_m EQ_{TM}$.

$$L(M_1) = \Sigma^*;\ L(M_2) = \begin{cases} \Sigma^* & \text{se } \langle M, w \rangle \in A_{TM} \\ \emptyset & \text{se } \langle M, w \rangle \notin A_{TM} \end{cases}$$

Possiamo modificare f per dimostrare che $A_{TM} \leq_m \overline{EQ_{TM}}$?

Riduzione da A_{TM} al complemento di EQ_{TM}

$f : \langle M, w \rangle \rightarrow \langle M_1, M_2 \rangle$ è riduzione che prova $A_{TM} \leq_m EQ_{TM}$.

$$L(M_1) = \Sigma^*;\ L(M_2) = \begin{cases} \Sigma^* & \text{se } \langle M, w \rangle \in A_{TM} \\ \emptyset & \text{se } \langle M, w \rangle \notin A_{TM} \end{cases}$$

Possiamo modificare f per dimostrare che $A_{TM} \leq_m \overline{EQ_{TM}}$?

Lasciamo la stessa M_2 e cambiamo M_1 in $\mathbf{M_3}$.
$g : \langle M, w \rangle \rightarrow \langle M_3, M_2 \rangle$

$$\mathbf{L(M_3)} = \emptyset;\ L(M_2) = \begin{cases} \Sigma^* & \text{se } \langle M, w \rangle \in A_{TM} \\ \emptyset & \text{se } \langle M, w \rangle \notin A_{TM} \end{cases}$$

Riepilogo riduzioni e linguaggi indecidibili

Teorema

- $A_{TM} \leq_m HALT_{TM}$
- $A_{TM} \leq_m \overline{E_{TM}}$
- $A_{TM} \leq_m REGULAR_{TM}$
- $E_{TM} \leq_m EQ_{TM}$
- $A_{TM} \leq_m EQ_{TM}$
- $A_{TM} \leq_m \overline{EQ_{TM}}$

Corollario

A_{TM}, $HALT_{TM}$, E_{TM}, $\overline{E_{TM}}$, $REGULAR_{TM}$, EQ_{TM}, $\overline{EQ_{TM}}$, sono linguaggi indecidibili.

Definizione

Diciamo che un linguaggio L è co-Turing riconoscibile se $\overline{L}$ è Turing riconoscibile.

Linguaggi riconoscibili e co-Turing riconoscibili

Definizione

Diciamo che un linguaggio L è co-Turing riconoscibile se $\overline{L}$ è Turing riconoscibile.

Teorema

Un linguaggio L è decidibile se e solo se L è Turing riconoscibile **e** *co-Turing riconoscibile.*

Linguaggi riconoscibili e co-Turing riconoscibili

Definizione

Diciamo che un linguaggio L è co-Turing riconoscibile se $\overline{L}$ è Turing riconoscibile.

Teorema

Un linguaggio L è decidibile se e solo se L è Turing riconoscibile **e** *co-Turing riconoscibile.*

Esempio A_{TM} è riconoscibile, ma non co-Turing riconoscibile.

Linguaggi riconoscibili e co-Turing riconoscibili

Teorema

EQ_{TM} non è nè Turing riconoscibile nè co-Turing riconoscibile.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che EQ_{TM} sia Turing riconoscibile.

$A_{TM} \leq_m \overline{EQ_{TM}} \Rightarrow \overline{A_{TM}} \leq_m EQ_{TM}$

Quindi $\overline{A_{TM}}$ sarebbe Turing riconoscibile: assurdo.

Supponiamo per assurdo che EQ_{TM} sia co-Turing riconoscibile, cioè che $\overline{EQ_{TM}}$ sia Turing riconoscibile.

$A_{TM} \leq_m EQ_{TM} \Rightarrow \overline{A_{TM}} \leq_m \overline{EQ_{TM}}$

Quindi $\overline{A_{TM}}$ sarebbe Turing riconoscibile: assurdo.

□

Diagramma delle classi

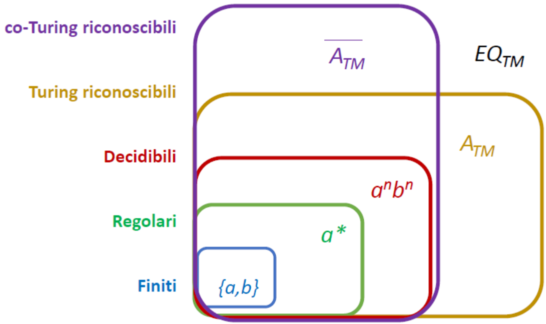
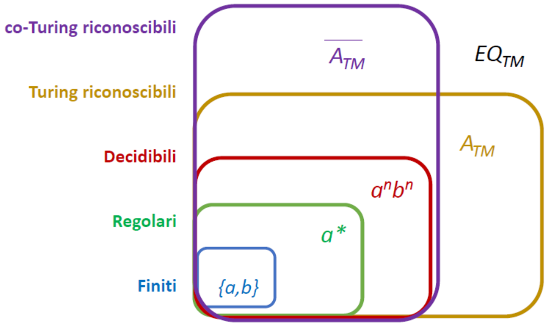


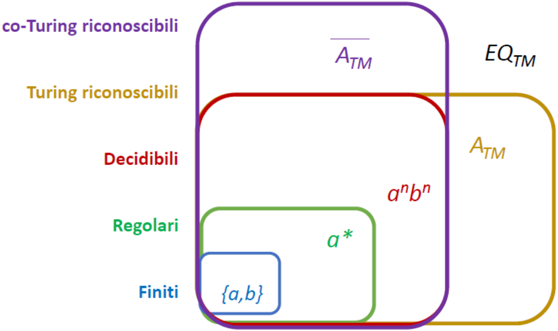
Diagramma delle classi



Domanda:

E' corretta la posizione di Decidibili?
Ovvero: Decidibili $\subseteq$ Turing riconoscibili $\cap$ co-Turing riconoscibili ?
Se sì, l'inclusione è stretta?

The right picture



Decidibili = Turing riconoscibili ∩ co-Turing riconoscibili

Esercizio da svolgere

Esercizio (applicabilità Teorema di Rice)
(a) Enunciare il Teorema di Rice
(b) E' possibile utilizzare il Teorema di Rice per mostrare che il seguente linguaggio è indecidibile? Giustificare la risposta.

$\{\langle M\rangle \mid M$ è una MdT che accetta ogni stringa di lunghezza dispari $\}$

Esercizi da svolgere

Esercizio (transitività delle riduzioni)
Dimostrare che se $A \leq_m B$ e $B \leq_m C$ allora $A \leq_m C$.
La dimostrazione deve essere costruttiva.

Esercizio (riduzione da A_{TM} a $\overline{EQ_{TM}}$)
Sia f_{A-NE} la funzione di riduzione esibita per dimostrare che $A_{TM} \leq_m \overline{E_{TM}}$ e sia f_{E-EQ} la funzione di riduzione esibita per dimostrare che $E_{TM} \leq_m EQ_{TM}$.

E' possibile utilizzare f_{A-NE} e f_{E-EQ} per esibire una funzione di riduzione f_{A-NEQ} per dimostrare che $A_{TM} \leq_m \overline{EQ_{TM}}$?

Se sì, la funzione f_{A-NEQ} è la stessa di quella esibita nelle slide precedenti per dimostrare che $A_{TM} \leq_m \overline{EQ_{TM}}$?

Esercizio da svolgere

Esercizio (Linguaggio diagonale)
Sia $L_d = \{\langle M \rangle \mid M \notin L(M)\}$ il linguaggio diagonale e $L_{ne} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \neq \emptyset\}$. Si dimostri che

$$\bar{L}_d \leq L_{ne}$$

.