3.5 $P(\cdot|F)$ è una probabilità

Vedremo ora che la probabilità condizionata soddisfa i tre assiomi della probabilità.

Proposizione. Sia F un evento tale che $P(F) > 0$; allora la probabilità condizionata da F è una funzione $P(\cdot\,|F)\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ tale che

(a) $0 \leq P(A|F) \leq 1$ per ogni evento A;

(b) $P(S|F) = 1$;

(c) per ogni successione di eventi a due a due incompatibili $A_1, A_2, \ldots,$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Big| F\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|F).$$

Dimostrazione. (a) Occorre mostrare che $0 \leq P(A \cap F)/P(F) \leq 1$. La prima disuguaglianza è ovvia, mentre la seconda discende dal fatto che $A \cap F \subset F$, da cui segue $P(A \cap F) \leq P(F)$.

(b) Si ha

$$P(S|F) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1.$$

(c) Risulta

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | F\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap F\right)\frac{1}{P(F)} = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap F)\right)\frac{1}{P(F)}.$$

Essendo gli eventi $A_i \cap F$ incompatibili, per la proprietà di additività numerabile si ha

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | F\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap F)\frac{1}{P(F)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|F),$$

e ciò conclude la dimostrazione.

Poiché la probabilità condizionata $P(\cdot\,|F)$ soddisfa gli assiomi della probabilità, ad essa si applicano le proposizioni sulla probabilità dimostrate in precedenza; ad esempio

$$P(A \cup B|F) = P(A|F) + P(B|F) - P(A \cap B|F).$$

Esempio. Stabilire se $\widetilde{P}(E|F) := \frac{P(E\cup F)}{P(F)}$, $\widetilde{Q}(E|F) := \frac{P(E\cap \overline{F})}{P(\overline{F})}$ e $\widetilde{R}(E|F) := \frac{P(E\cap \overline{F})}{P(F)}$ soddisfano i 3 assiomi della probabilità.

Soluzione. $\widetilde{P}(E|F)$ e $\widetilde{R}(E|F)$ non sono probabilità, $\widetilde{Q}(E|F)$ è una probabilità.

Esercizi per casa

3.a) Si consideri l'esperimento che consiste nell'estrarre 2 biglie da un'urna che contiene 1 biglia azzurra, 2 bianche e 3 rosse. Posto $A = \{$le 2 biglie estratte non sono rosse$\}$, $B = \{$almeno una delle 2 biglie estratte è bianca$\}$, $C = \{$una delle 2 biglie estratte è azzurra$\}$, studiare l'indipendenza di tali eventi, nel caso di estrazioni
(i) con reinserimento,
(ii) senza reinserimento.

3.b) Una moneta non truccata viene lanciata 4 volte. Calcolare la probabilità
(i) che esca testa almeno 2 volte,
(ii) che esca testa almeno 2 volte, sapendo che esce testa al primo lancio,
(iii) che esca testa al primo lancio, sapendo che esce testa almeno 2 volte nei 4 lanci.

3.c) Si estraggono le biglie in sequenza da un'urna contenente n biglie numerate da 1 a n. Si ha concordanza all'estrazione k-esima se in tale estrazione esce la biglia numero k, per $k = 1, 2, \dots, n$.
(i) Se nella prima estrazione si verifica concordanza, qual è la probabilità che si abbia concordanza nella seconda estrazione?
(ii) Se nella seconda estrazione si verifica concordanza, qual è la probabilità che si abbia concordanza nella terza estrazione?

3.d) Da un'urna contenente $2n+1$ biglie numerate da $-n$ a n si estraggono due biglie a caso.
(i) Calcolare la probabilità che il prodotto dei due numeri estratti sia positivo, sia nullo, sia negativo.
(ii) Verificare che la somma delle tre probabilità è 1.

3.e) Se si effettua un vaccino antinfluenzale, la probabilità di contrarre l'influenza risulta pari a 0,3, mentre tale probabilità aumenta a 0,5 se si sceglie di non effettuare il vaccino.
(i) Sapendo che 6 individui su 10 si vaccinano, quanto vale la probabilità di contrarre l'influenza?
(ii) Se un individuo contrae l'influenza, qual è la probabilità che si era vaccinato?

4.1 Variabili aleatorie

Problema. Un sistema è costituito da n unità numerate da 1 a n. In ogni unità si sceglie a caso un numero tra 1 e n, indipendentemente dalle altre. Diciamo che si ha concordanza nell'unità k-esima se ivi si sceglie il numero k.

Qual è la probabilità che non vi siano concordanze?
Qual è la probabilità che vi siano k concordanze?

Posto $A_k = \{\text{vi sono } k \text{ concordanze}\}$, gli eventi $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sono necessari e a 2 a 2 incompatibili. In virtù dell'indipendenza le probabilità richieste sono:

$$P(A_0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \qquad P(A_k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}.$$

Notiamo che se si definisce $X =$"numero di concordanze", appare più adeguato esprimere le probabilità richieste come $P(X = 0) = P(A_0)$ e $P(X = k) = P(A_k)$.

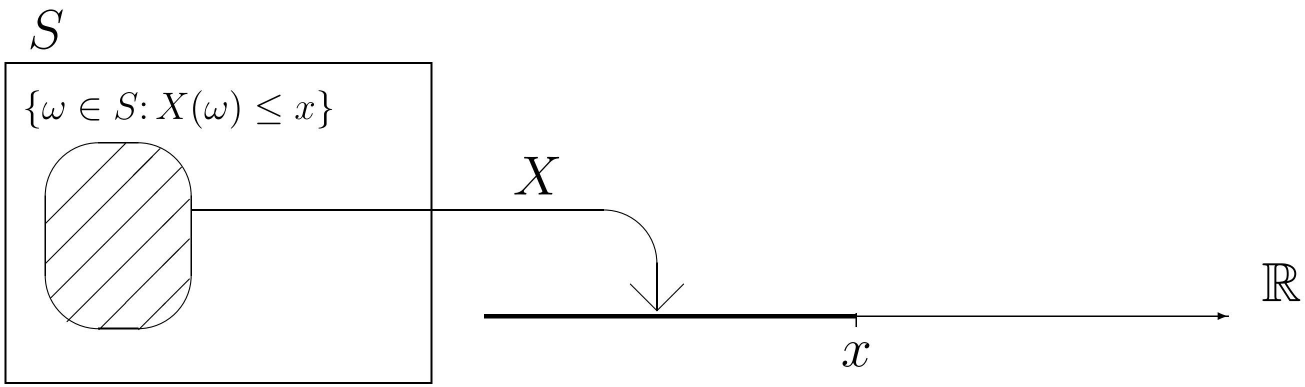
Nella tabella sono riportati i valori delle probabilità di X per varie scelte di n.

	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$P(X=0)$	0,25	0,2963	0,3164	0,3277
$P(X=1)$	0,50	0,4444	0,4219	0,4096
$P(X=2)$	0,25	0,2222	0,2109	0,2048
$P(X=3)$		0,0370	0,0469	0,0512
$P(X=4)$			0,0039	0,0064
$P(X=5)$				0,0003

Talora studiando un fenomeno aleatorio l'interesse va riposto su una funzione $X(\omega)$ dell'esito ω dell'esperimento. Ad esempio, lanciando due dadi siamo interessati alla somma dei due valori, oppure lanciando n volte una moneta possiamo riferirci al numero totale di teste. La quantità d'interesse, o più precisamente, queste funzioni a valori reali definite sullo spazio campionario sono note come *variabili aleatorie*.

Definizione. Dato uno spazio di probabilità $(S, \mathcal{F}, P)$, una funzione $X\colon S \to \mathbb{R}$ è detta variabile aleatoria se risulta

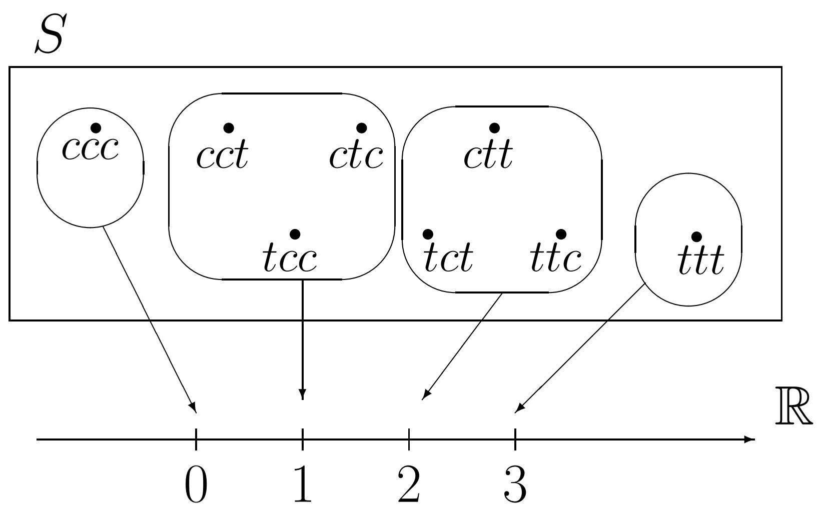
$$\{\omega \in S\colon X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$



Poiché il valore di una variabile aleatoria è determinato dall'esito dell'esperimento, possiamo assegnare le probabilità ai possibili valori ottenuti dalla variabile aleatoria.

Esempio. Nel lancio di 3 monete non truccate sia Y il numero di teste che si ottengono; Y è una variabile aleatoria che assume i valori $0, 1, 2, 3$ con le seguenti probabilità:

$$
\begin{aligned}
P(Y=0) &= P(\{ccc\}) = \frac{1}{8} \\
P(Y=1) &= P(\{cct, ctc, tcc\}) = \frac{3}{8} \\
P(Y=2) &= P(\{ctt, tct, ttc\}) = \frac{3}{8} \\
P(Y=3) &= P(\{ttt\}) = \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$



Poiché Y deve assumere uno tra i valori $0, 1, 2, 3$ abbiamo

$$
P\left(\bigcup_{i=0}^{3}\{Y=i\}\right) = \sum_{i=0}^{3} P(Y=i) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.
$$