Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 8/1/2015 - ore 12

Esercizio 1 Un'urna contiene $N+1$ biglie; le prime $N-1$ sono numerate da 1 a $N-1$, mentre le ultime 2 hanno entrambe numero N. Consideriamo l'esperimento che consiste nell'estrarre 2 biglie a caso senza reinserimento da tale urna.
(i) Calcolare la probabilità che il numero 1 sia tra i 2 estratti.
(ii) Calcolare la probabilità che tra i 2 numeri estratti vi sia il numero N sapendo che tra i 2 estratti vi è il numero 1.
(iii) Stabilire se i seguenti eventi sono indipendenti:
$A = \{\text{i 2 numeri estratti sono diversi}\}$,
$B = \{\text{almeno uno dei 2 numeri estratti è } N\}$.
(iv) Esaminare le risposte dei quesiti precedenti quando $N \to \infty$.

Esercizio 2 Sia X la variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Ricavare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \le x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Determinare $E(X)$.
(iii) Calcolare $P(X \le 3/2 \,|\, X > 1/2)$.

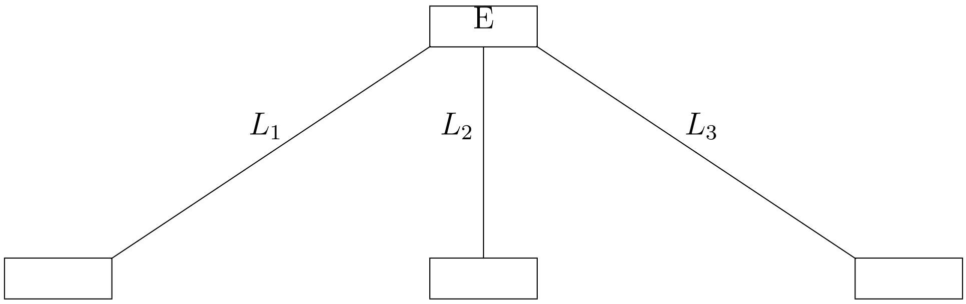
Esercizio 3 Siano X e Y variabili aleatorie di Bernoulli, con funzione di densità congiunta

$$p(x,y) = P(X = x, Y = y) = c\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-y-1|}; \qquad x = 0, 1; \;\; y = 0, 1.$$

(i) Calcolare la costante c.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti e identicamente distribuite.
(iii) Determinare il coefficiente di correlazione di (X, Y).
(iv) Calcolare $E(X - Y)$ e $Var(X - Y)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 22/1/2015

Esercizio 1 Un sistema prevede tre linee di comunicazione collegate ad un elaboratore centrale secondo il seguente schema:



Nello scegliere quale linea usare si lancia un dado; se il risultato è $k \in \{1, \ldots, 6\}$ allora si usa la linea L_j, dove $j = \lfloor k/3 + 1 \rfloor$. Inoltre, la linea L_j è funzionante con probabilità $j/4$, per $j = 1, 2, 3$, indipendentemente dalle altre.
(i) Calcolare la probabilità che la linea usata sia funzionante.
(ii) Se la linea usata è funzionante, qual è la probabilità che la linea usata sia la linea L_j (per $j = 1, 2, 3$)?
(iii) Verificare che la somma delle probabilità calcolate al punto (ii) sia 1.

Esercizio 2 Sia X la variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} c\,(x-1)^2, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Ricavare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Calcolare $E(X)$.
(iii) Determinare il quantile superiore ξ tale che $P(X > \xi) = 8/9$.

Esercizio 3 Un programma consiste di due moduli distinti. Sia X la variabile aleatoria che descrive il numero di errori nel primo modulo ed Y la variabile aleatoria che descrive il numero di errori nel secondo modulo. Si supponga che X ed Y abbiano la seguente distribuzione congiunta

$x \backslash y$	0	1	2
0	p	$p/2$	$p/2$
1	$p/2$	p	p
2	$p/2$	p	$2p$

(i) Determinare i valori ammissibili di p.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti e identicamente distribuite.
(iii) Calcolare $Cov(X, Y)$, $E(X + Y)$ e $Var(X + Y)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 17/2/2015

Esercizio 1 Un vettore booleano di lunghezza 5 contiene 3 bit pari a **1** e 2 bit pari a **0**, distribuiti a caso. Un algoritmo esamina i bit del vettore uno per volta, e si ferma in corrispondenza del secondo bit pari a **1**.
(i) Qual è la probabilità che l'algoritmo si fermi al passo k-esimo ($1 \le k \le 4$)?
(ii) Qual è la probabilità che il bit successivo al secondo **1** sia pari a **1**?
(iii) Se il bit successivo al secondo **1** è pari a **1**, qual è la probabilità che l'algoritmo si sia fermato al passo k-esimo ($1 \le k \le 4$)?
(iv) Verificare che la somma delle probabilità calcolate al punto (iii) è pari a 1.

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria normale di media $\mu = -1$ e varianza $\sigma^2 = 4$.
(i) Posto $A = \{X + 2 > 0\}$ e $B = \{2 - X > 0\}$, stabilire se tali eventi sono indipendenti oppure se sono correlati positivamente o negativamente.
[Teniamo presente che se $P(A|B) > P(A)$ allora gli eventi A e B sono correlati positivamente; se $P(A|B) < P(A)$ allora sono correlati negativamente.]
(ii) Posto $Y = 1 - 2X$, ricavare $Cov(X, Y)$.

Esercizio 3 Un esperimento consiste nel lanciare a caso 3 monete non truccate. Sia X il numero di volte che esce testa, e sia Y la lunghezza della più lunga sottosequenza contenente risultati identici.
(i) Determinare la distribuzione congiunta di (X, Y) e le distribuzioni marginali di X e Y.
(ii) Calcolare il coefficiente di correlazione di (X, Y).
(iii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iv) Determinare $P(X = Y)$ e $P(X \le 2, Y > 1)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

Fisciano, 16/4/2015

Esercizio 1 Si consideri una sequenza di n bit casuali, con $n \geq 4$, tali che ognuno indipendentemente dagli altri assuma valore **1** o **0** con probabilità 1/2. Posto

$A = \{$almeno 1 dei primi 3 bit assume valore **1**$\}$,

$B = \{$il primo e l'ultimo bit assumono stesso valore$\}$,

Stabilire se ognuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa:

(i) A e B sono eventi necessari;

(ii) A e B sono eventi indipendenti;

(iii) $P(A \cup B) - P(\overline{B} \,|\, A) < 1/2$;

(iv) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \,|\, B) < 1/2$.

Esercizio 2 Sia X la variabile aleatoria continua avente funzione di distribuzione

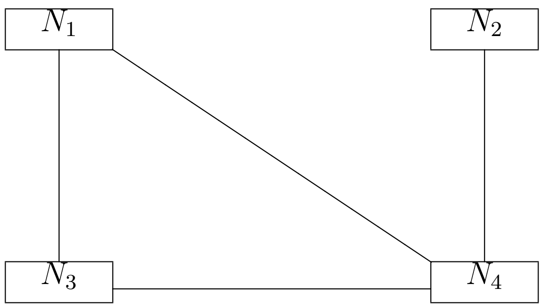
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{2} \leq x < 1 \\ \dfrac{x}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

(i) Ricavare la densità di probabilità di X, mostrandone l'andamento grafico.

(ii) Calcolare il valore atteso $\mu = E(X)$ e la varianza $\sigma^2 = Var(X)$.

(iii) Determinare il valore di h tale che $P(|X - \mu| < h) = 5/8$.

Esercizio 3 Si consideri il seguente grafo:



Supponiamo che in ciascuno dei 4 nodi si generi un bit a caso; ovvero ognuno dei 4 bit può assumere valore **0** o **1** con probabilità 1/2 indipendentemente dagli altri. Consideriamo la variabile aleatoria bidimensionale (X, Y), dove X denota quanti sono gli archi concordanti (diciamo che un arco è concordante se i bit dei 2 nodi su cui insiste sono uguali) e

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se almeno 2 bit sono pari a } \mathbf{1}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Stabilire se X e Y sono indipendenti oppure positivamente (o negativamente) correlate.

(ii) Determinare $P(X = Y)$, $P(X \geq 2, Y \geq 1)$ e $P(X \geq 2, Y \geq 1 \,|\, X \neq Y)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 25/6/2015

Esercizio 1 Un canale di trasmissione è soggetto ad errore nel senso che ogni volta che si trasmette un bit, indipendentemente dalle altre trasmissioni, questo può essere modificato con la probabilità indicata nella seguente tabella:

bit trasmesso	bit ricevuto	probabilità
0	**0**	0,7
0	**?** (errore di tipo A)	0,2
0	**1** (errore di tipo B)	0,1
1	**0** (errore di tipo B)	0,2
1	**?** (errore di tipo A)	0,2
1	**1**	0,6

(i) Calcolare la probabilità che trasmettendo la sequenza binaria **001**
– si verifichi un solo errore, di tipo A,
– si verifichi un solo errore, di tipo B,
– si verifichi un solo errore, di tipo qualsiasi.
(ii) Se nel trasmettere la sequenza **001** si è verificato un solo errore, di tipo qualsiasi, qual è la probabilità che l'errore si sia verificato nella trasmissione del terzo bit?

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria avente valore medio e varianza

$$E(X) = 3{,}5; \qquad Var(X) = 6{,}25.$$

Posto $Y = X - 1$,
(i) determinare $\mu = E(Y)$ e $\sigma^2 = Var(Y)$;
(ii) calcolare $P(|Y - \mu| < \sigma)$ e $P(Y > \sigma)$
– nel caso in cui Y ha distribuzione esponenziale;
– nel caso in cui Y ha distribuzione normale.

Esercizio 3 Un esperimento consiste nel lanciare a caso 4 monete non truccate. Sia X il numero di volte che esce testa, e sia

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se solo nel secondo lancio esce un risultato uguale a quello del primo} \\ 2, & \text{se solo nel terzo lancio esce un risultato uguale a quello del primo} \\ 3, & \text{se solo nel quarto lancio esce un risultato uguale a quello del primo} \\ 0, & \text{se non si verifica nessuno dei casi precedenti.} \end{cases}$$

(i) Determinare la distribuzione congiunta di (X, Y) e le distribuzioni marginali di X e Y.
(ii) Calcolare il coefficiente di correlazione di (X, Y).
(iii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iv) Determinare $P(X \neq Y)$ e $P(X \geq 2, Y < 2)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 14/7/2015

Esercizio 1 Nell'archivio di una banca dati sono presenti 2 cartelle, ognuna delle quali contiene 8 file, di cui 6 pubblici e 2 riservati. Da ogni cartella si estraggono 2 file a caso (senza reinserimento).
(i) Calcolare la probabilità che i 4 file estratti siano tutti pubblici.
(ii) Calcolare la probabilità che almeno uno dei 4 file estratti sia riservato.
(iii) Calcolare la probabilità che tra i 4 file estratti vi sia un solo file riservato.
(iv) Calcolare la probabilità che tra i 4 file estratti vi sia un solo file riservato, sapendo che almeno uno dei 4 file estratti è riservato.

Esercizio 2 Un programma consiste di 2 moduli distinti. Nel primo modulo è presente un errore con probabilità 1/5, e non sono presenti errori con probabilità 4/5. Nel secondo modulo, indipendentemente dal primo, è presente un errore con probabilità 1/4, e non sono presenti errori con probabilità 3/4. Sia X la variabile aleatoria che descrive il numero totale di errori presenti nel programma.
(i) Ricavare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \le x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Calcolare il valore medio μ e la deviazione standard σ di X.
(iii) Determinare $P(|X - \mu| > \sigma)$.

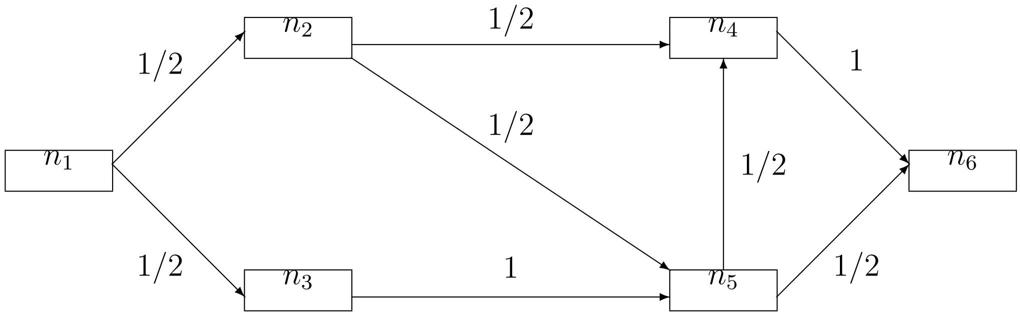
Esercizio 3 Sia (X, Y) la variabile aleatoria doppia discreta avente funzione di probabilità

$$p(x, y) = c\,|x - y|, \qquad x = 0, 1, 2 \qquad y = 0, 1, 2.$$

(i) Ricavare c.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare il coefficiente di correlazione di (X, Y).
(iv) Calcolare $E(X - Y)$ e $Var(X - Y)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 4/9/2015

Esercizio 1 Si consideri la seguente rete, costituita da 6 nodi ($n_1, \ldots, n_6$) e 8 archi orientati:



Un messaggio viene trasmesso dal nodo n_1 al nodo n_6 secondo il seguente protocollo:
• se da un nodo si dirama un unico arco in uscita (ad esempio da n_3 a n_5), allora il messaggio viene trasmesso direttamente su tale arco;
• se da un nodo si diramano due archi in uscita (ad esempio da n_1 a n_2, e da n_1 a n_3), allora il messaggio viene trasmesso su uno dei due archi a seguito dell'esito del lancio di una moneta (indipendentemente dagli altri lanci).

Pertanto su ogni arco della rete è indicata la probabilità che un messaggio giunto al nodo in ingresso sia trasmesso su di esso.
(i) Individuare i 5 possibili percorsi da n_1 a n_6, denotati con $\pi_1, \ldots, \pi_5$ (ad esempio $\pi_1 = [n_1, n_2, n_4, n_6]$), e calcolare la probabilità che il messaggio sia trasmesso su ciascun percorso.
(ii) Per $k = 1, \ldots, 5$ valutare $P(N_k) = \sum_{i: N_k \in \pi_i} P(\pi_i)$, con $N_k =$"il messaggio transita per n_k".
(iii) Sapendo che il messaggio è passato per n_4 qual è la probabilità che sia passato per n_3?
(iv) Stabilire se gli eventi N_3 e N_4 sono indipendenti.

Esercizio 2 Sia X la variabile aleatoria continua che descrive il tempo di completamento (in minuti) di un task, avente densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} x/100, & 0 \le x < 10, \\ 1/10, & 10 \le x < 15, \\ 0, & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

(i) Determinare la funzione di distribuzione di X, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Calcolare il valore atteso di X.
(iii) Se il task non è stato completato nei primi 6 minuti, qual è la probabilità che si completi nei successivi 6 minuti?

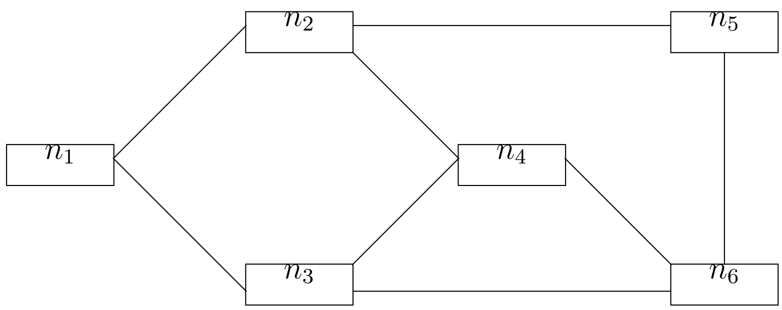
Esercizio 3 Un esperimento consiste nel lanciare una moneta 4 volte a caso. Sia X la variabile aleatoria che descrive il numero di volte che esce testa. Sia Y la variabile aleatoria che descrive il numero di variazioni nei risultati riscontrati.
(i) Ricavare la distribuzione congiunta di (X, Y), e le distribuzioni marginali.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare la covarianza di (X, Y) e $P(Y > 1 \,|\, X > 1, Y > 0)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 6/11/2015

Esercizio 1 Da un'urna contenente 90 biglie numerate da 1 ad 90 se ne estraggono due a caso senza reinserimento.
(i) Calcolare la probabilità che la biglia numero 90 non sia tra le due estratte.
(ii) Calcolare la probabilità che la biglia numero 90 non sia tra le due estratte sapendo che la biglia numero 1 è estratta.
(iii) Cosa cambia se i quesiti (i) e (ii) si riferiscono al caso di estrazioni con reinserimento?

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria tale che $Var(X) = 1$; calcolare $P(X > 3 \,|\, X > 2)$ nei seguenti casi:
(i) X ha distribuzione esponenziale;
(ii) X ha distribuzione normale di valore atteso $E(X) = 1$;
(iii) X è uniformemente distribuita nell'intervallo $(0, b)$;
(iv) X ha distribuzione binomiale di parametri $n = 4$ e $p \in (0, 1)$.

Esercizio 3 Si consideri il problema che consiste nella scelta a caso di 2 nodi del seguente grafo.



Indichiamo con α e β i gradi dei 2 nodi scelti. (Ricordiamo che il grado di un nodo è il numero di archi connessi ad esso.) Consideriamo le variabili aleatorie

$$X = \alpha + \beta, \qquad Y = |\alpha - \beta|.$$

(i) Ricavare la distribuzione congiunta di (X, Y), e le distribuzioni marginali.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare il coefficiente di correlazione di (X, Y).