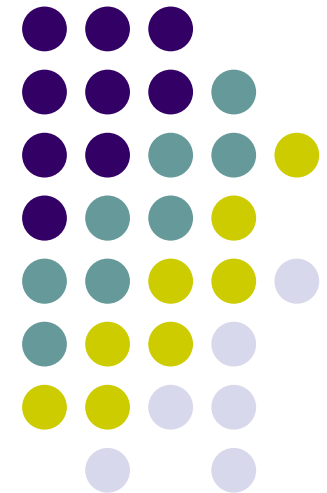


Ricerca Operativa

R. Cerulli e F. Carrabs

Dualità e Analisi di Sensibilità con Excel



Esempio Analisi Sensitività



Dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\min -2x_1 + x_2 - x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$\underline{x} \geq 0$$

Tramite l'utilizzo di excel individuare:

1. Il valore ottimo e la soluzione ottima del problema;
2. I range di variabilità dei coefficienti di costo;
3. I range di variabilità dei termini noti;

Dalla lezione precedente sappiamo che:

- La variazione per il coefficiente di costo c_1 è pari a $\delta \leq 1$
- La variazione per il coefficiente di costo c_2 è pari a $\delta \geq -3$
- La variazione per il termine nodo b_1 è pari a $\delta \geq -6$

Azienda dolciaria: Confetti



Un'azienda dolciaria produce quattro tipi di confetti (classico, doppio latte, al cioccolato, delizia al limone) utilizzando cinque ingredienti (zucchero, mandorla, latte, cioccolato, limone) che vengono acquistate all'esterno. La tabella che segue mostra, per ogni chilo di confetti, le quantità (in litri per il latte e in kg per gli altri ingredienti) di ingredienti necessarie per produrre quel tipo di confetti. Inoltre vengono anche indicati sia la quantità massima di ciascun ingrediente acquistabile mensilmente sia il prezzo di acquisto.

	zucchero	mandorla	latte	cioccolato	limone
Classico	0.4	0.7	0	0	0
Doppio latte	0.2	0.5	0.5	0	0
Al cioccolato	0.1	0.1	0.3	0.4	0
Delizia al limone	0.3	0.2	0	0	0.7
<i>Quantità massima</i>	700	1200	500	200	500
<i>Prezzo di Acquisto</i>	1	4	2	9	6

In base alle vendite dell'anno precedente è stato stabilito che la quantità minima (in kg) di confetti da produrre mensilmente per ogni tipologia è di : 15, 11, 20, 5. Per ottenere un prodotto finito pronto per la vendita è necessaria una lavorazione che richiede un numero di ore diverso a seconda del tipo di confetto. La tabella che segue riporta per ogni chilo di ciascun tipo di confetto il numero di ore di lavorazione necessarie, insieme al prezzo di vendita unitario (in euro al chilo).

	Classico	Doppio latte	Al cioccolato	Delizia al limone
<i>Ore lavorative</i>	0.4	0.7	1.1	1.3
<i>Prezzo di vendita</i>	14	19	27	36

La lavorazione dei confetti viene effettuata da 5 operai che lavorano per 8 ore al giorno e per 24 giorni al mese percependo una paga di 1200 euro. Costruire un modello di PL che permetta di pianificare la produzione mensile dell'azienda, determinando, per ogni tipologia di confetto, i chili da produrre per massimizzare il profitto.

Azienda dolciaria: Confetti



$$\max \quad 14x_1 + 19x_2 + 27x_3 + 36x_4 - (0.4 + 4*0.7)x_1 - (0.2 + 4*0.5 + 2*0.5)x_2 - \\ - (0.1 + 4*0.1 + 2*0.3 + 9*0.4)x_3 - (0.3 + 4*0.2 + 6*0.7)x_4 - 6000$$

s.t.

$$0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.3x_4 \leq 700$$

zucchero

$$0.7x_1 + 0.5x_2 + 0.1x_3 + 0.2x_4 \leq 1200$$

mandorla

$$0.5x_2 + 0.3x_3 \leq 500$$

latte

$$0.4x_3 \leq 200$$

cioccolato

$$0.7x_4 \leq 500$$

limone

$$x_1 \geq 15$$

“classico” prod.min.

$$x_2 \geq 11$$

“doppio latte” prod.min.

$$x_3 \geq 20$$

“al cioccolato” prod.min.

$$x_4 \geq 5$$

“delizia al limone” prod.min.

$$0.4x_1 + 0.7x_2 + 1.1x_3 + 1.3x_4 \leq 960$$

Ore di lavorazione

$$x \geq 0$$

Azienda dolciaria: Confetti



Il direttore dell'azienda dolciaria ha chiesto il nostro aiuto per definire il piano di produzione che massimizza il profitto mensile ma anche per avere risposte alle seguenti domande:

1. Quali sono le risorse scarse e quali quelle abbondanti?
2. Di quanto aumenta il profitto dell'azienda se si incrementa di 20kg la mandorla? E se invece si aumenta di 20kg la cioccolata? Ed infine di 20 kg lo zucchero?
3. Quale risorsa garantisce un tasso di aumento del profitto maggiore?
4. Di quanto aumenterebbe il profitto se l'azienda assumesse un altro operaio?
5. L'azienda vuole valutare la possibilità di produrre un confetto quasi completamente fatto di mandorla. Sapendo che la produzione di 1Kg di questi confetti richiede 0.3 kg di zucchero e 0.9 kg di mandorla e che richiede 1 ora di lavorazione, qual è il prezzo di vendita che rende conveniente produrre questo nuovo confetto?
6. Quali sono i range di variabilità dei coefficienti di costo della funzione obiettivo entro i quali la base ottima non cambia?
7. Quali sono i range di variabilità dei termini noti entro i quali la base ottima non cambia?

[illegible]

Risultati Risolutore

È stata trovata una soluzione. Tutti i vincoli e le condizioni di ottimizzazione sono stati soddisfatti.

☒ Mantieni soluzione del Risolutore
☐ Ripristina valori originali

Rapporti

☒ Valori Sensibilità
☐ Limiti

☐ Torna alla finestra di dialogo parametri Risolutore
☐ Rapporti struttura

Salva scenario... Annulla OK

Rapporto valori



Cella obiettivo (Max)

Cella	Nome	Valore originale	Valore finale
\$B\$2	Funzione Obiettivo	-6000,00	18706,10

Celle variabili

Cella	Nome	Valore originale	Valore finale	Intere
\$H\$10	Classico x	0,00	1563,63	Continue
\$H\$11	Doppio latte x	0,00	11,00	Continue
\$H\$12	Al cioccolato x	0,00	20,00	Continue
\$H\$13	Delizia al limone x	0,00	234,50	Continue

Vincoli

Cella	Nome	Valore della cella	Formula	Stato	Tolleranza
\$J\$16	zucchero / Tot. Risorsa Usata	700	\$J\$16<=\$L\$16	Vincolante	0
\$J\$17	mandorla / Tot. Risorsa Usata	1148,9375	\$J\$17<=\$L\$17	Non vincolante	51,0625
\$J\$18	latte / Tot. Risorsa Usata	11,5	\$J\$18<=\$L\$18	Non vincolante	488,5
\$J\$19	cioccolato / Tot. Risorsa Usata	8	\$J\$19<=\$L\$19	Non vincolante	192
\$J\$20	limone / Tot. Risorsa Usata	164,15	\$J\$20<=\$L\$20	Non vincolante	335,85
\$J\$23	Ore Lavorazione/ Tot. ore impiegate	960	\$J\$23<=\$L\$23	Vincolante	0
\$J\$26	classico (prod. min.)/ Prod. Finale	1563,625	\$J\$26>=\$L\$26	Non vincolante	1548,625
\$J\$27	doppio (latte prod. min.)/ Prod. Finale	11	\$J\$27>=\$L\$27	Vincolante	0
\$J\$28	Al cioccolato (prod. min.)/ Prod. Finale	20	\$J\$28>=\$L\$28	Vincolante	0
\$J\$29	Delizia al limone (prod. min.)/ Prod. Finale	234,5	\$J\$29>=\$L\$29	Non vincolante	229,5

Azienda dolciaria: Confetti



$$\max \quad 14x_1 + 19x_2 + 27x_3 + 36x_4 - (0.4 + 4*0.7)x_1 - (0.2 + 4*0.5 + 2*0.5)x_2 - \\ - (0.1 + 4*0.1 + 2*0.3 + 9*0.4)x_3 - (0.3 + 4*0.2 + 6*0.7)x_4 - 6000$$

s.t.

$$0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.3x_4 \leq 700$$

zucchero

$$0.7x_1 + 0.5x_2 + 0.1x_3 + 0.2x_4 \leq 1200$$

mandorla

$$0.5x_2 + 0.3x_3 \leq 500$$

latte

$$0.4x_3 \leq 200$$

cioccolato

$$0.7x_4 \leq 500$$

limone

$$x_1 \geq 15$$

“classico” prod.min.

$$x_2 \geq 11$$

“doppio latte” prod.min.

$$x_3 \geq 20$$

“al cioccolato” prod.min.

$$x_4 \geq 5$$

“delizia al limone” prod.min.

$$0.4x_1 + 0.7x_2 + 1.1x_3 + 1.3x_4 \leq 960$$

Ore di lavorazione

$$x \geq 0$$

Quali sono le risorse scarse e quali quelle abbondanti?

Rapporto sensibilità



Celle variabili

Cella	Nome	Finale Valore	Ridotto Costo	Obiettivo Coefficiente	Consentito Incremento	Consentito Decremento
\$H\$10	Classico x	1563,625	0	10,8	6	1,353846154
\$H\$11	Doppio latte x	11	0	15,8	0,9	1E+30
\$H\$12	Al cioccolato x	20	0	22,3	3	1E+30
\$H\$13	Delizia al limone x	234,5	0	30,7	4,4	1,8

Celle variabili: per ogni variabile riporta l'indirizzo di riferimento, l'etichetta, il valore finale, il costo ridotto, il coefficiente della variabile nella funzione obiettivo (c_i), le quantità massime di cui può variare c_i affinché la base ottima non cambi;

Rapporto sensibilità



Vincoli

Cella	Nome	Finale Valore	Ombreggiatura Prezzo	Vincolo a destra	Consentito Incremento	Consentito Decremento
\$J\$16	zucchero / Tot. Risorsa Usata	700	4,4	700	24,60843373	476,5
\$J\$17	mandorla / Tot. Risorsa Usata	1148,9375	0	1200	1E+30	51,0625
\$J\$18	latte / Tot. Risorsa Usata	11,5	0	500	1E+30	488,5
\$J\$19	cioccolato / Tot. Risorsa Usata	8	0	200	1E+30	192
\$J\$20	limone / Tot. Risorsa Usata	164,15	0	500	1E+30	335,85
\$J\$23	Ore Lavorazione/ Tot. ore impiegate	960	22,6	960	479,7857143	157,1153846
\$J\$26	classico (prod. min.)/ Prod. Finale	1563,625	0	15	1548,625	1E+30
\$J\$27	doppio (latte prod. min.)/ Prod. Finale	11	-0,9	11	163,4	11
\$J\$28	Al cioccolato (prod. min.)/ Prod. Finale	20	-3	20	204,25	20
\$J\$29	Delizia al limone (prod. min.)/ Prod. Finale	234,5	0	5	229,5	1E+30

Vincoli: per ogni vincolo riporta l'indirizzo in cui è inserita la formula, l'etichetta, il valore finale, il prezzo ombra, il valore del termine noto, gli estremi dell'intervallo di previsione entro il quale la base ottima non cambia ed i prezzi ombra sono validi.

Azienda dolciaria: Confetti



$$\max \quad 14x_1 + 19x_2 + 27x_3 + 36x_4 - (0.4 + 4*0.7)x_1 - (0.2 + 4*0.5 + 2*0.5)x_2 - \\ - (0.1 + 4*0.1 + 2*0.3 + 9*0.4)x_3 - (0.3 + 4*0.2 + 6*0.7)x_4 - 6000$$

s.t.

$0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.3x_4 \leq 700$	zucchero	$w_1 = 4,4$
$0.7x_1 + 0.5x_2 + 0.1x_3 + 0.2x_4 \leq 1200$	mandorla	$w_2 = 0$
$0.5x_2 + 0.3x_3 \leq 500$	latte	$w_3 = 0$
$0.4x_3 \leq 200$	cioccolato	$w_4 = 0$
$0.7x_4 \leq 500$	limone	$w_5 = 0$
$x_1 \geq 15$	“classico” prod.min.	$w_7 = 0$
$x_2 \geq 11$	“doppio latte” prod.min.	$w_8 = -0,9$
$x_3 \geq 20$	“al cioccolato” prod.min.	$w_9 = -3$
$x_4 \geq 5$	“delizia al limone” prod.min.	$w_{10} = 0$
$0.4x_1 + 0.7x_2 + 1.1x_3 + 1.3x_4 \leq 960$	Ore di lavorazione	$w_6 = 22,6$
$x \geq 0$		

**Di quanto aumenta il profitto dell'azienda se si incrementa di 20kg la mandorla?
E se invece si aumenta di 20kg la cioccolata? Ed infine di 20 kg lo zucchero?**

mandorla
 $20*w_2 = 20*0 = 0$

cioccolato
 $20*w_4 = 20*0 = 0$

zucchero
 $20*w_1 = 20*4,4 = 88$

Azienda dolciaria: Confetti



$$\max \quad 14x_1 + 19x_2 + 27x_3 + 36x_4 - (0.4 + 4 \cdot 0.7)x_1 - (0.2 + 4 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.5)x_2 - \\ - (0.1 + 4 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.4)x_3 - (0.3 + 4 \cdot 0.2 + 6 \cdot 0.7)x_4 - 6000$$

s.t.

$0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.3x_4 \leq 700$	zucchero	$w_1 = 4,4$
$0.7x_1 + 0.5x_2 + 0.1x_3 + 0.2x_4 \leq 1200$	mandorla	$w_2 = 0$
$0.5x_2 + 0.3x_3 \leq 500$	latte	$w_3 = 0$
$0.4x_3 \leq 200$	cioccolato	$w_4 = 0$
$0.7x_4 \leq 500$	limone	$w_5 = 0$
$x_1 \geq 15$	“classico” prod.min.	$w_7 = 0$
$x_2 \geq 11$	“doppio latte” prod.min.	$w_8 = -0,9$
$x_3 \geq 20$	“al cioccolato” prod.min.	$w_9 = -3$
$x_4 \geq 5$	“delizia al limone” prod.min.	$w_{10} = 0$
$0.4x_1 + 0.7x_2 + 1.1x_3 + 1.3x_4 \leq 960$	Ore di lavorazione	$w_6 = 22,6$
$x \geq 0$		

Quale risorsa garantisce un tasso di aumento del profitto maggiore?

Ore di lavorazione

$w_6 = 22,6$

Azienda dolciaria: Confetti



$$\max \quad 14x_1 + 19x_2 + 27x_3 + 36x_4 - (0.4 + 4*0.7)x_1 - (0.2 + 4*0.5 + 2*0.5)x_2 - \\ - (0.1 + 4*0.1 + 2*0.3 + 9*0.4)x_3 - (0.3 + 4*0.2 + 6*0.7)x_4 - 6000$$

s.t.

$0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.3x_4 \leq 700$	zucchero	$w_1 = 4,4$
$0.7x_1 + 0.5x_2 + 0.1x_3 + 0.2x_4 \leq 1200$	mandorla	$w_2 = 0$
$0.5x_2 + 0.3x_3 \leq 500$	latte	$w_3 = 0$
$0.4x_3 \leq 200$	cioccolato	$w_4 = 0$
$0.7x_4 \leq 500$	limone	$w_5 = 0$
$x_1 \geq 15$	“classico” prod.min.	$w_7 = 0$
$x_2 \geq 11$	“doppio latte” prod.min.	$w_8 = -0,9$
$x_3 \geq 20$	“al cioccolato” prod.min.	$w_9 = -3$
$x_4 \geq 5$	“delizia al limone” prod.min.	$w_{10} = 0$
$0.4x_1 + 0.7x_2 + 1.1x_3 + 1.3x_4 \leq 960$	Ore di lavorazione	$w_6 = 22,6$
$x \geq 0$		

Di quanto aumenterebbe il profitto se l'azienda assumesse un altro operaio?

$$-1200 + 8 \text{ ore} * 24 \text{ giorni} * w_6 = -1200 + 192 * 22,6 = 3139,2$$

Azienda dolciaria: Confetti



$$\max \quad 14x_1 + 19x_2 + 27x_3 + 36x_4 - (0.4 + 4 \cdot 0.7)x_1 - (0.2 + 4 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.5)x_2 - \\ - (0.1 + 4 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.4)x_3 - (0.3 + 4 \cdot 0.2 + 6 \cdot 0.7)x_4 - 6000$$

s.t.

$0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.3x_4 \leq 700$	zucchero	$w_1 = 4,4$
$0.7x_1 + 0.5x_2 + 0.1x_3 + 0.2x_4 \leq 1200$	mandorla	$w_2 = 0$
$0.5x_2 + 0.3x_3 \leq 500$	latte	$w_3 = 0$
$0.4x_3 \leq 200$	cioccolato	$w_4 = 0$
$0.7x_4 \leq 500$	limone	$w_5 = 0$
$x_1 \geq 15$	“classico” prod.min.	$w_7 = 0$
$x_2 \geq 11$	“doppio latte” prod.min.	$w_8 = -0,9$
$x_3 \geq 20$	“al cioccolato” prod.min.	$w_9 = -3$
$x_4 \geq 5$	“delizia al limone” prod.min.	$w_{10} = 0$
$0.4x_1 + 0.7x_2 + 1.1x_3 + 1.3x_4 \leq 960$	Ore di lavorazione	$w_6 = 22,6$
$x \geq 0$		

Quali sono i range di variabilità dei coefficienti di costo della funzione obiettivo entro i quali la base ottima non cambia?

Azienda dolciaria: Confetti



$$\max \quad 14x_1 + 19x_2 + 27x_3 + 36x_4 - (0.4 + 4 \cdot 0.7)x_1 - (0.2 + 4 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.5)x_2 - \\ - (0.1 + 4 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.4)x_3 - (0.3 + 4 \cdot 0.2 + 6 \cdot 0.7)x_4 - 6000$$

s.t.

$$0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.3x_4 \leq 700$$

zucchero

$$w_1 = 4,4$$

$$0.7x_1 + 0.5x_2 + 0.1x_3 + 0.2x_4 \leq 1200$$

mandorla

$$w_2 = 0$$

$$0.5x_2 + 0.3x_3 \leq 500$$

latte

$$w_3 = 0$$

$$0.4x_3 \leq 200$$

cioccolato

$$w_4 = 0$$

$$0.7x_4 \leq 500$$

limone

$$w_5 = 0$$

$$x_1 \geq 15$$

“classico” prod.min.

$$w_7 = 0$$

$$x_2 \geq 11$$

“doppio latte” prod.min.

$$w_8 = -0,9$$

$$x_3 \geq 20$$

“al cioccolato” prod.min.

$$w_9 = -3$$

$$x_4 \geq 5$$

“delizia al limone” prod.min.

$$w_{10} = 0$$

$$0.4x_1 + 0.7x_2 + 1.1x_3 + 1.3x_4 \leq 960$$

Ore di lavorazione

$$w_6 = 22,6$$

$$x \geq 0$$

Quali sono i range di variabilità dei termini noti entro i quali la base ottima non cambia?

Azienda dolciaria: Confetti



$$\max \quad 14x_1 + 19x_2 + 27x_3 + 36x_4 - (0.4 + 4*0.7)x_1 - (0.2 + 4*0.5 + 2*0.5)x_2 - \\ - (0.1 + 4*0.1 + 2*0.3 + 9*0.4)x_3 - (0.3 + 4*0.2 + 6*0.7)x_4 - 6000$$

s.t.

$0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.3x_4 \leq 700$	zucchero	$w_1 = 4,4$
$0.7x_1 + 0.5x_2 + 0.1x_3 + 0.2x_4 \leq 1200$	mandorla	$w_2 = 0$
$0.5x_2 + 0.3x_3 \leq 500$	latte	$w_3 = 0$
$0.4x_3 \leq 200$	cioccolato	$w_4 = 0$
$0.7x_4 \leq 500$	limone	$w_5 = 0$
$x_1 \geq 15$	“classico” prod.min.	$w_7 = 0$
$x_2 \geq 11$	“doppio latte” prod.min.	$w_8 = -0,9$
$x_3 \geq 20$	“al cioccolato” prod.min.	$w_9 = -3$
$x_4 \geq 5$	“delizia al limone” prod.min.	$w_{10} = 0$
$0.4x_1 + 0.7x_2 + 1.1x_3 + 1.3x_4 \leq 960$	Ore di lavorazione	$w_6 = 22,6$
$x \geq 0$		

L'azienda vuole valutare la possibilità di produrre un confetto quasi completamente fatto di mandorla. Sapendo che la produzione di 1Kg di questi confetti richiede 0.3 kg di zucchero e 0.9 kg di mandorla e che richiede 1 ora di lavorazione, qual è il prezzo di vendita che rende conveniente produrre questo nuovo confetto?

$$c_5 > 0,3*w_1 + 0,9 w_2 + 1*w_6 = -0,3*4,4 + 0,9*0+22,6 = 23,92$$