Probabilità 1

martedì 29 giugno 2021 16:27

Esercizio 3
Un esperimento consiste nell'estrarre 3 biglie da un'urna contenente 4 biglie bianche e 2 rosse, con la regola che se viene estratta la biglia bianca, questa viene immediatamente reinserita nell'urna; se viene estratta la biglia rossa, questa viene lasciata fuori dall'urna. Calcolare (i) la probabilità che almeno una delle tre biglie estratte sia bianca, (ii) che la terza biglia estratta sia bianca, sapendo che la prima biglia estratta è rossa.

3 biglie da estrarre $\begin{cases} 4 \text{ biglie bianche} \\ 2 \text{ biglie rosse} \end{cases}$

estrazione biglia bianca $\Rightarrow$ reinserimento

estrazione biglia rossa $\Rightarrow$ senza reinserimento

(i) A = "estrazione di almeno una biglia bianca"

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0 = 1$$

$\bar{A}$ = "estrazione di 0 biglie bianche"

$$P(\bar{A}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot 0 = 0$$

(ii) B_i = "all' estrazione i-esima peschiamo una biglia bianca" $i = 1, 2, 3$

$$\underline{P}(B_3 | \bar{B}_1) = \frac{\underline{P}(B_3 \cap \bar{B}_1)}{\underline{P}(\bar{B}_1)} = \frac{7/25}{1/3} = \frac{21}{25}$$

$$\underline{P}(\bar{B}_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \underline{P}(B_3 \cap \bar{B}_1) &= \underline{P}(B_3 \cap (B_2 \cup \bar{B}_2) \cap \bar{B}_1) \\ &= \underline{P}(\bar{B}_1 \cap B_2 \cap B_3) + \underline{P}(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap B_3) \\ &= \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} \\ &= \frac{7}{25} \end{aligned}$$

Esercizio 2

Un esperimento consiste nell'estrarre 2 biglie senza reinserimento da un'urna contenente 8 biglie numerate da 1 ad 8. Supponendo che l'ordine delle estrazioni sia rilevante, calcolare (i) la probabilità che il secondo numero estratto sia immediato successore del primo numero estratto (ii) la probabilità che il secondo numero estratto sia maggiore del primo numero estratto (iii) la probabilità che il secondo numero estratto sia maggiore del primo numero estratto oppure ne sia un immediato successore (iv) la probabilità che il secondo numero estratto sia maggiore del primo numero estratto ma non ne sia un immediato successore.

Cosa si può dire riguardo l'indipendenza degli eventi esaminati al punto (i) e al punto (ii) dell'esercizio?

$|S| = 8 \cdot 7 = 56$ $\qquad S = \{(1,2); (1,3); \dots; (1,8); \dots; (8,1); (8,2); \dots; (8,7)\}$

$$\underset{8}{\underline{\ \ }} \cdot \underset{7}{\underline{\ \ }}$$

(i) $A = \{(a_i, a_i + 1);\ a_i = 1, \dots, 7\}$ $\qquad |A| = 7$

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\cancel{7}}{8 \cdot \cancel{7}} = \frac{1}{8}$$

(ii) $B = \{(a,b): \quad b>a\}$ $\qquad |B| = 7+6+\ldots+1 = \frac{7\cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{2}} = 28$

$$\underline{P}(B) = \frac{|B|}{|S|} = \frac{28}{56} = \frac{1}{2}$$

(iii) $\underline{P}(A\cup B) = \underline{P}(A) + \underline{P}(B) - \underbrace{\underline{P}(A\cap B)}_{=\underline{P}(A)} = \cancel{\underline{P}(A)} + \underline{P}(B) - \cancel{\underline{P}(A)} = \underline{P}(B) = \frac{1}{2}$

$A\cap B = A$ $\qquad A\subseteq B$

$\boxed{\underline{P}(A\cap B) = \underline{P}(A)\cdot\underline{P}(B)}$ non è verificata $\Rightarrow$ A e B non sono indipendenti

(iv) $\underline{P}(B\cap\bar{A}) = \frac{|B\cap\bar{A}|}{|S|} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$

$|B\cap\bar{A}| = 6+5+\ldots+1 = \frac{\cancel{6}^{3}\cdot 7}{\cancel{2}} = 21$ $\qquad (a,b)$ $\quad b>a$ $\quad b\neq a+1$

Probabilità 3

martedì 29 giugno 2021 16:48

Esercizio 3
Un programma consiste di due moduli. La probabilità che ci sia un errore solo nel primo modulo è 0,2, quella che ci sia un errore solo nel secondo modulo è 0,4 mentre la probabilità che ci sia un errore in entrambi i moduli è 0,1. La probabilità che entrambi i moduli siano corretti è 0,3.
Un errore solo nel primo modulo determina l'arresto del programma con probabilità 0,5, un errore solo nel secondo con probabilità 0,7, mentre un errore in entrambi i moduli fa terminare il programma con probabilità 0,9. Nel caso di mancanza di errori, il programma non si arresta.
(i) Calcolare la probabilità che il programma si arresti (4 punti).
(ii) Se il programma si è arrestato, qual è la probabilità che solo il secondo modulo contenga un errore? (6 punti).

E_i = "errore nel modulo i-esimo" $\quad i = 1,2$

$\underline{P}(E_1 \cap \bar{E}_2) = 0,2 \qquad \underline{P}(E_1 \cap E_2) = 0,1$

$\underline{P}(\bar{E}_1 \cap E_2) = 0,4 \qquad \underline{P}(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2) = 0,3$

A = "il programma si arresta"

$\underline{P}(A \mid E_1 \cap \bar{E}_2) = 0,5 \qquad \underline{P}(A \mid E_1 \cap E_2) = 0,9$

$\underline{P}(A \mid \bar{E}_1 \cap E_2) = 0,7 \qquad \underline{P}(A \mid \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2) = 0$

$$\underline{P}(A \mid \bar{E}_1 \cap E_2) = 0{,}7 \qquad \underline{P}(A \mid \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2) = 0$$

(i) $$\underline{P}(A) = \underline{P}(A \mid E_1 \cap \bar{E}_2) \cdot \underline{P}(E_1 \cap \bar{E}_2) + \underline{P}(A \mid \bar{E}_1 \cap E_2) \cdot \underline{P}(\bar{E}_1 \cap E_2)$$

$$+ \underline{P}(A \mid E_1 \cap E_2) \cdot \underline{P}(E_1 \cap E_2) + \underline{P}(A \mid \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2) \cdot \underline{P}(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2)$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}3$$

$$= 0{,}10 + 0{,}28 + 0{,}09 = 0{,}47$$

(ii) $$\underline{P}(\bar{E}_1 \cap E_2 \mid A) = \frac{\underline{P}(A \mid \bar{E}_1 \cap E_2) \cdot \underline{P}(\bar{E}_1 \cap E_2)}{\underline{P}(A)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}4}{0{,}47} = \frac{0{,}28}{0{,}47} \simeq 0{,}5957$$

Esercizio 1
Da un'urna contenente 2 biglie nere e 4 biglie bianche si effettuano 6 estrazioni senza reinserimento. Sia X la variabile aleatoria che descrive in quale estrazione si estrae la biglia nera per la **seconda volta**. Calcolare (i) la distribuzione di probabilità della variabile X, (ii) il valore atteso $E(X)$, (iii) la probabilità $P(X > 2 \mid X \leq 5)$.

X = "in quale estrazione si estrae la biglia nera per la 2ª volta"

(i) $P(X = x) = ?$

$$\frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2! \cdot \cancel{4!}} = 15$$

	X
N N B B B B	2 *
N B N B B B	3
N B B N B B	4
N B B B N B	5
N B B B B N	6
B N N B B B	3
B N B N B B	4
B N B B N B	5
B N B B B N	6
B B N N B B	4
B B N B N B	5
B B N B B N	6
B B B N N B	5
B B B N B N	6
B B B B N N	6

$X \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(X = 2) = \frac{1}{15}$ $\qquad P(X = 3) = \frac{2}{15}$

$P(X = 4) = \frac{3}{15}$ $\qquad P(X = 5) = \frac{4}{15}$

$P(X = 6) = \frac{5}{15}$

$$P(X = x) = \frac{x-1}{15} \qquad x \in \{2, \dots, 6\}$$

(ii) $\mathbb{E}(X) = \sum_x x \cdot P(X=x) = 2 \cdot \frac{1}{15} + 3 \cdot \frac{2}{15} + 4 \cdot \frac{3}{15} + 5 \cdot \frac{4}{15} + 6 \cdot \frac{5}{15}$

$$= \frac{2+6+12+20+30}{15} = \frac{70}{15} = \frac{14}{3}$$

(iii) $P(X>2 \mid X \leq 5) = \frac{P(X>2 \cap X \leq 5)}{P(X \leq 5)} = \frac{P(2<X\leq 5)}{P(X\leq 5)} =$

$$= \frac{P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)}{1-P(X=6)} = \frac{\frac{2}{15}+\frac{3}{15}+\frac{4}{15}}{1-\frac{5}{15}}$$

$$= \frac{\frac{9}{\cancel{15}}}{\frac{10}{\cancel{15}}} = \frac{9}{10}$$

Variabili aleatorie 2

martedì 29 giugno 2021 17:41

Esercizio 1
Una sequenza booleana è costituita da 4 bit uguali a 0 e 3 bit uguali ad 1. Si scelgono a caso 3 bit di tale sequenza e sia X la variabile aleatoria che conta il numero di bit uguali ad 1 tra quelli scelti. Calcolare (i) la distribuzione di probabilità e la funzione di distribuzione della variabile X, (ii) la probabilità $P(X \geq 2 \mid X > 0)$, (iii) $E(|X-1|)$.

(i) $X \in \{0, 1, 2, 3\}$

	X		
0 0 0	0	$\longrightarrow \frac{4}{7}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{6}}\cdot\frac{2}{5} =$	$\frac{4}{35}$
1 0 0	1	$\longrightarrow \frac{3}{7}\cdot\frac{\cancel{4}\,2}{\cancel{6}\,3}\cdot\frac{3}{5} =$	$\frac{6}{35}$
0 1 0	1	$\longrightarrow$	$6/35$
0 0 1	1	$\longrightarrow$	$6/35$
1 1 0	2	$\rightarrow \frac{\cancel{3}}{7}\cdot\frac{2}{\cancel{6}}\cdot\frac{4}{5} \longrightarrow$	$4/35$
1 0 1	2	$\longrightarrow$	$4/35$
0 1 1	2	$\longrightarrow$	$4/35$
1 1 1	3	$\rightarrow \frac{\cancel{3}}{7}\cdot\frac{2}{\cancel{6}}\cdot\frac{1}{5} \longrightarrow$	$1/35$

$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}$

$$P(X=0)=\frac{4}{35} \qquad P(X=1)=3\cdot\frac{6}{35}=\frac{18}{35}$$

$$P(X=2)=3\cdot\frac{4}{35}=\frac{12}{35} \qquad P(X=3)=\frac{1}{35}$$

$$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 4/35 & 0\le x<1 \\ \frac{4}{35}+\frac{18}{35}=\frac{22}{35} & 1\le x<2 \\ \frac{22}{35}+\frac{12}{35}=\frac{34}{35} & 2\le x<3 \\ 1=\frac{34}{35}+\frac{1}{35} & x\ge 3 \end{cases}$$

(ii) $$P(X\ge 2\mid X>0)=\frac{P(X\ge 2\cap X>0)}{P(X>0)}=\frac{P(X\ge 2)}{P(X>0)}=\frac{P(X=2)+P(X=3)}{1-P(X=0)}$$

$$=\frac{\frac{12}{35}+\frac{1}{35}}{1-\frac{4}{35}}=\frac{\frac{13}{\cancel{35}}}{\frac{31}{\cancel{35}}}=\frac{13}{31}$$

(iii) $\mathbb{E}(|X-1|) = \sum_x |x-1| \cdot \mathbb{P}(X=x) =$

$$= |0-1| \cdot \frac{4}{35} + \cancel{|1-1| \cdot \frac{18}{35}} + |2-1| \cdot \frac{12}{35} + |3-1| \cdot \frac{1}{35}$$

$$= 1 \cdot \frac{4}{35} + 1 \cdot \frac{12}{35} + 2 \cdot \frac{1}{35} = \frac{18}{35}$$