

Nome:

Cognome:

Matricola:

1. Dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 \geq 1 \\
 & x_1 + x_2 \geq 3 \\
 & \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

- (a) (2 punti) Individuare graficamente il valore ed il punto di ottimo del problema.
- (b) (3 punti) Calcolare il punto di ottimo del problema duale, a partire dall'ottimo primale calcolato nel punto precedente.
- (c) (4 punti) Scrivere l'enunciato del teorema degli scarti complementari e verificare che le soluzioni trovate nei punti (a) e (b) soddisfino le condizioni degli scarti complementari.
- (d) (4 punti) Aggiungere un vincolo al problema al fine di produrre una soluzione degenera ed individuare graficamente le basi associate a tale soluzione.
2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare [P]:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 8x_1 - x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 - x_3 \geq 9 \\
 & 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

- (a) (4 punti) Risolvere il problema applicando il metodo del simplesso.
3. Sia dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, caratterizzato da 8 nodi ($V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$) e 13 archi. A ciascun arco è associato il seguente costo:

Arco	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(3,2)	(3,5)	(4,6)	(5,2)	(5,6)	(5,7)	(5,8)	(6,7)	(7,4)	(8,7)
Costo	9	12	3	7	8	6	3	2	9	4	10	5	4

- (a) (4 punti) Determinare l'albero ricoprente di peso minimo applicando l'algoritmo di Prim, riportando tutti i passaggi ed il valore finale della funzione obiettivo.
4. Si consideri una istanza del problema del trasporto con 3 nodi di domanda e 3 di offerta, i cui dati sono riportati seguente tabella. Ogni valore nella casella ij rappresenta il costo unitario per trasportare una unità di merce dalla origine i alla destinazione j , il valore a destra della i -ma riga rappresenta il numero totale di unità di merce dell' i -mo nodo di offerta, mentre il valore in fondo alla colonna j -ma rappresenta il numero delle unità richieste dal j -mo nodo di domanda.

20	10	2	7
24	35	7	7
3	16	4	9
10	8	5	

- (a) (2 punti) Scrivere il modello matematico che rappresenta il problema.
- (b) (4 punti) Risolvere il problema. Fermarsi dopo la seconda applicazione della regola del ciclo (se raggiunta). Indicare il valore delle variabili decisionali e della funzione obiettivo per la soluzione ottenuta.
5. Dati i seguenti vettori : (1,2,6) (2,3,4) (0,4,6)
- (a) (2 punti) Determinare se i tre vettori dati sono un base in R^3 .
- (b) (2 punti) Determinare un vettore che sia combinazione convessa dei tre vettori dati.