Primo Esercizio prova 9 Luglio

martedì 13 luglio 2021 10:57

Una procedura esegue un dato compito in meno di 10 secondi nel 70% delle esecuzioni inoltre la procedura esegue tale compito usando librerie esterne nel 60% delle esecuzioni. Se non usa librerie esterne, la procedura esegue il compito in meno di 10 secondi nell'80% delle esecuzioni.Calcolare la probabilità:

1) che la procedura esegua il compito in meno di 10 secondi e non usi librerie esterne.
2)che non esegua il compito in meno di 10 secondi e non usi librerie esterne.
3)che esegua il compito in meno di 10 secondi oppure usi librerie esterne.
4)chiamiamo A l'evento "la procedura esegue il compito in meno di 10 secondi " e B "la procedura usa librerie esterne ", valutare l'indipendenza

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$$\Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A|\bar{B})\,P(\bar{B})$$

$$P(A) = 70\% = 0{,}7 \qquad P(A|\bar{B}) = 80\% = 0{,}8$$

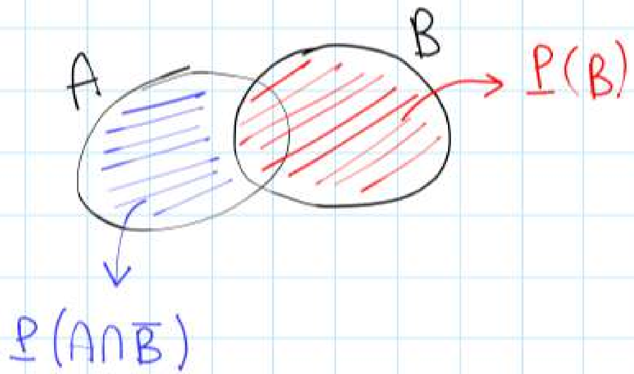
$$P(B) = 60\% = 0{,}6 \rightarrow P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$

1) $P(A \cap \bar{B}) = P(A|\bar{B})\,P(\bar{B}) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32$

2) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}|\bar{B})\,P(\bar{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = 1 - P(A|\bar{B}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

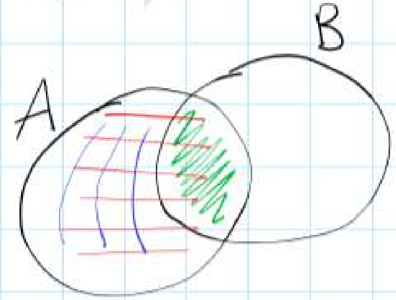
3) $\underline{P}(A \cup B) = \underline{P}(B) + \underline{P}(A \cap \bar{B}) = 0{,}6 + 0{,}32 = 0{,}92$



$$\underline{P}(A \cap \bar{B}) = \underbrace{\underline{P}(\bar{B} \mid A)}_{\begin{array}{c} \| \\ 1 - \underline{P}(B|A) \\ = 1 - \frac{\underline{P}(B \cap A)}{\underline{P}(A)} \end{array}} \underline{P}(A)$$

$$\underline{P}(A \cap \bar{B}) = \left(1 - \frac{\underline{P}(B \cap A)}{\underline{P}(A)}\right) \underline{P}(A) = \underline{P}(A) - \underline{P}(B \cap A)$$

4) $\underline{P}(A \cap B) = \underline{P}(A) - \underline{P}(A \cap \bar{B}) = 0{,}7 - 0{,}32 = 0{,}38$



$\underline{P}(A) \cdot \underline{P}(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42 \neq 0{,}38 = \underline{P}(A \cap B)$

$\Rightarrow$ A e B non sono indipendenti

Secondo Esercizio Prova del 9 Luglio

martedì 13 luglio 2021 11:12

Un esperimento consiste nel lanciare a caso 4 monete truccate, nel senso che ciascuna moneta mostra testa con probabilità 1/4. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di ripetizioni (si ha una ripetizione quando l'esito di un lancio è uguale a quello del precedente). Sia Y la variabile aleatoria che vale 1 se il numero di volte che esce testa nei 4 lanci è maggiore strettamente del numero di volte che esce croce , altrimenti vale 0. Calcolare:

1)Densità discreta
2)Cov(X,Y)
3)E(X+Y)
4)P(X=Y)

$\_\ \_\ \_\ \_$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

1)

	X	Y
T T T T	3	1
T T T C	2	1
T T C T	1	1
T C T T	1	1
C T T T	2	1
T T C C	2	0
T C T C	0	0
C T T C	1	0
T C C T	1	0
C T C T	0	0
C C T T	2	0
T C C C	2	0
C T C C	1	0
C C T C	1	0
C C C T	2	0
C C C C	3	0

p

$\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{256}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{256}$

$\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{256}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$

X \ Y	0	1	$p_X(x)$
0	$2 \cdot \frac{9}{256}$	0	$\frac{18}{256}$
1	$\frac{72}{256}$	$2 \cdot \frac{3}{256}$	$\frac{78}{256}$
2	$\frac{72}{256}$	$2 \cdot \frac{3}{256}$	$\frac{78}{256}$
3	$\frac{81}{256}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{82}{256}$
$p_Y(y)$	$\frac{243}{256}$	$\frac{13}{256}$	1

$$p(1,0) = 2 \cdot \frac{9}{256} + 2 \cdot \frac{27}{256} = \frac{72}{256}$$

$$p(2,0) = 2 \cdot \frac{9}{256} + 2 \cdot \frac{27}{256} = \frac{72}{256}$$

2) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y) = \frac{21}{256} - \frac{480}{256} \cdot \frac{13}{256} = -\frac{27}{2048}$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{78}{256} + 2 \cdot \frac{78}{256} + 3 \cdot \frac{82}{256} = \frac{480}{256}$$

$$E(Y) = \frac{13}{256}$$

$$E(X \cdot Y) = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{256} + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{256} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{256} = \frac{21}{256}$$

3) $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{480}{256} + \frac{13}{256} = \frac{493}{256}$

4) $P(X=Y) = p(0,0) + p(1,1) = \frac{18}{256} + \frac{6}{256} = \frac{24}{256} = \frac{3}{32}$

$X \in \{0, 1, 2, 3\}$ $\qquad$ $Y \in \{0, 1\}$

ES. 1

In un esperimento si hanno a disposizione 2 monete. La prima moneta m_1 mostra T con prob. $\frac{1}{3}$, mentre la seconda, m_2, mostra T con prob. $\frac{1}{4}$.
Si sceglie una delle due monete e la si lancia 3 volte. La probabilità di scegliere la moneta m_2 è il doppio di quella di scegliere la moneta m_1.

- Calcolare la probabilità di ottenere nei 3 lanci 2 volte testa e 1 croce.
- Se nei 3 lanci si è ottenuto 2 volte testa e 1 croce, qual è la probabilità di aver scelto la moneta m_1?

2 monete m_1, m_2

$$P(T|m_1) = \frac{1}{3} \longrightarrow P(C|m_1) = \frac{2}{3}$$

$$P(T|m_2) = \frac{1}{4} \longrightarrow P(C|m_2) = \frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} P(m_2) = 2 \cdot P(m_1) \\ P(m_1) + P(m_2) = 1 \end{cases}$$

$$P(m_1) + 2 \cdot P(m_1) = 1$$

$$3 \cdot P(m_1) = 1$$

$$P(m_1) = \frac{1}{3}$$

$$P(m_2) = \frac{2}{3}$$

(i) → Se scelgo m_1

$$P(2T \text{ e } 1C \mid m_1) = 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{27}$$

→ Se scelgo m_2

$$P(2T \text{ e } 1C \mid m_2) = 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{64}$$

In totale

$$P(2T \text{ e } 1C) = P(2T \text{ e } 1C \mid m_1)\,P(m_1) + P(2T \text{ e } 1C \mid m_2)\,P(m_2)$$

$$= \frac{6}{27}\cdot\frac{1}{3} + \frac{9}{64}\cdot\frac{2}{3} = \frac{145}{864}$$

(ii) $$P(m_1 \mid 2T \text{ e } 1C) = \frac{P(2T \text{ e } 1C \mid m_1)\cdot P(m_1)}{P(2T \text{ e } 1C)} =$$

$$= \frac{\frac{6}{27}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{145}{864}} = \frac{64}{145}$$

Es. 2

Un esperimento consiste nel generare una sequenza binaria di lunghezza 5 contenente esattamente 2 bit uguali a 1.
Sia X la v.a. che indica la prima locazione occupata dal numero 1.

i) Ricava la densità discreta di X

ii) Calcola la prob. che $X \geq 2$

iii) Calcolare la funzione di distribuzione, disegnarne il grafico

iv) Calcolare $E[X]$ e $Var(X)$.

_ _ _ _ _ 2 bit uguali a 1

(i)

					X
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	2
0	1	0	1	0	2
0	1	0	0	1	2
0	0	1	0	1	3
0	0	1	1	0	3
0	0	0	1	1	4

$X \in \{1, 2, 3, 4\}$

$P(X=1) = \frac{4}{10}$

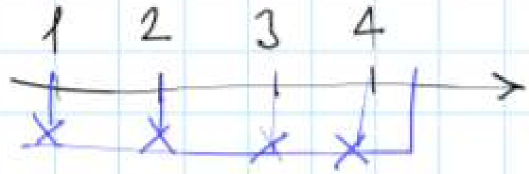
$P(X=2) = \frac{3}{10}$

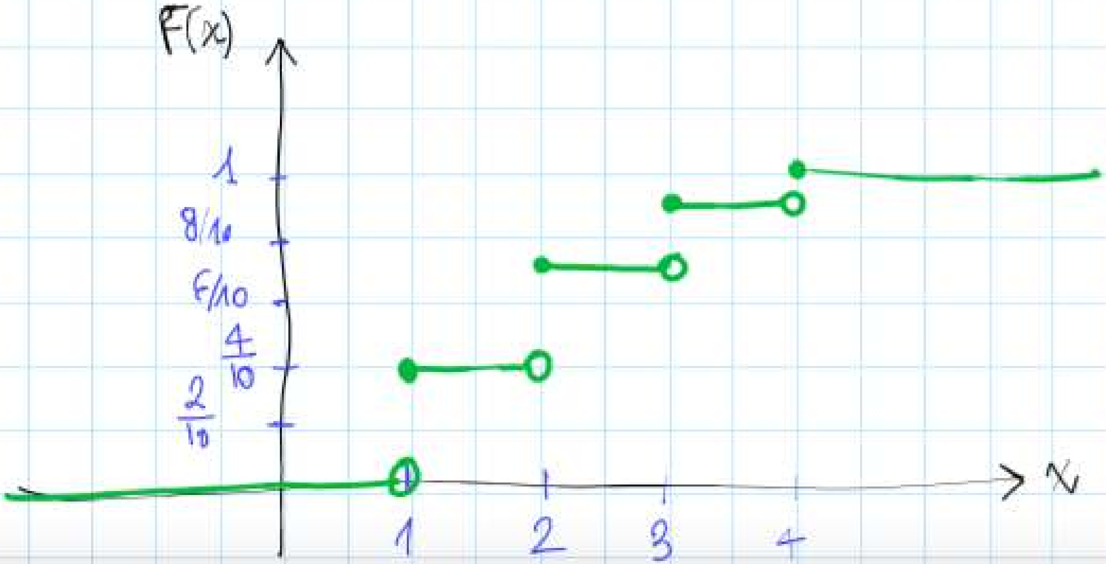
$P(X=3) = \frac{2}{10}$

(ii) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 1) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10}$

(iii) $F(x) = P(X \leq x)$

$$= \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{4}{10} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$





(iv) $\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{4}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{2}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} =$

$= \frac{20}{10} = 2$

$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot \frac{4}{10} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} + 3^2 \cdot \frac{2}{10} + 4^2 \cdot \frac{1}{10} = 5$

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 5 - 4 = 1$

Esercizio 3

Definiamo una variabile aleatoria X secondo la seguente procedura. Si estrae una carta da un mazzo di 52 carte francesi. Se la carta è un JACK, una REGINA oppure un RE, allora $X = 2$; se la carta è un ASSO allora $X = 1$; altrimenti (quindi nel caso si estragga un numero da 1 a 10) si ha $X = 3$. La variabile aleatoria Y è definita in accordo alla seguente procedura: se il seme della carta estratta (per determinare il valore di X) è CUORI, allora $Y = X - 1$, altrimenti è $Y = X + 1$.

(i) Determinare la densità discreta congiunta $p(x, y)$;

(ii) Stabilire se X ed Y sono indipendenti;

(iii) Calcolare $E(X \cdot Y)$.

(i)

$$X = \begin{cases} 1, & \text{la carta è un asso} \\ 2, & \text{la carta è un jack, regina o re} \\ 3, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} X-1, & \text{la carta è di cuori} \\ X+1, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$Y \in \{0, 1, 3, 2, 4\}$

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	$p_X(x)$
1	$\frac{1}{52}$	0	$\frac{3}{52}$	0	0	$\frac{4}{52}$
2	0	$\frac{3}{52}$	0	$\frac{9}{52}$	0	$\frac{12}{52}$
3	0	0	$\frac{9}{52}$	0	$\frac{27}{52}$	$\frac{36}{52}$
$p_Y(y)$	$\frac{1}{52}$	$\frac{3}{52}$	$\frac{12}{52}$	$\frac{9}{52}$	$\frac{27}{52}$	1

(ii) $\quad p(1,1) = 0 \neq \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{52} = p_X(1) \cdot p_Y(1) \quad \Rightarrow$ X e Y no indipend.

(iii) $$\mathbb{E}(X \cdot Y) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{52} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{52} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{9}{52} + $$

$$+ 3 \cdot 2 \cdot \frac{9}{52} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{27}{52} = \frac{444}{52} = \frac{111}{13}$$