

# **Lezioni di Ricerca Operativa**

Corso di Laurea in Informatica ed Informatica Applicata

Università di Salerno

## **Lezione n° 3**

Richiami di Algebra vettoriale:

- Matrici ed Operazioni tra matrici
- Inversa di una matrice
- Risoluzione di un sistema di equazioni lineari
- Metodo di Gauss- Jordan

R.Cerulli – F.Carrabs

# Matrici

**Definizione (Matrice):** Prende il nome di matrice di ordine  $m \times n$  una tabella di elementi ordinatamente disposti su  $m$  righe ed  $n$  colonne.

**Notazione:** Indicheremo le matrici con lettere maiuscole **A**, **B**,.... o per esteso con la seguente notazione:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

# Matrici: Notazione

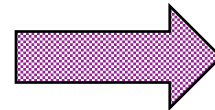
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$A$  è una matrice (3x4)

num. di righe

num. di colonne

generico elemento  $a_{ij}$   
della matrice nella riga  
 $i$  e nella colonna  $j$



$$A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$$

# Matrici: Notazione

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{a}_1 \quad \underline{a}_2 \quad \underline{a}_3 \quad \underline{a}_4$

$\underline{a}^1$   
 $\underline{a}^2$   
 $\underline{a}^3$

A si può indicare anche come insieme di vettori riga:

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \underline{a}^3 \end{pmatrix}$$

Oppure come insieme di vettori colonna:

$$A = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4)$$

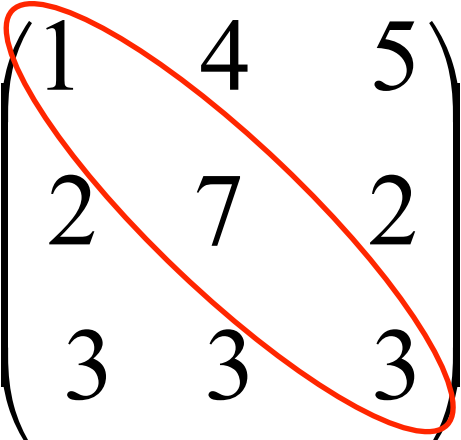
# Matrici

- Se  $m \neq n$  la matrice si dice **rettangolare**; si dice **quadrata** se  $m=n$ .
- In una matrice quadrata di ordine  $n$  gli elementi  $a_{ii}$  ( $i=1, \dots, n$ ) costituiscono la **diagonale principale**.

matrice rettangolare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

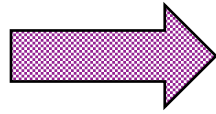
matrice quadrata

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$


# Moltiplicazione per uno scalare

$$A_{m \times n} = \{a_{ij}\}$$

$k$  scalare



$$k A = \{ka_{ij}\}$$

matrice ( $m \times n$ )

Esempio

$$k = 2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$kA = 2 * \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 & 4 \\ 4 & 14 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

# Addizione tra matrici

$$A_{m \times n} = \{a_{ij}\} \quad B_{m \times n} = \{b_{ij}\}$$

$$A + B = C \quad \longrightarrow \quad C_{m \times n} = \{c_{ij}\}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Condizione necessaria: le matrici devono avere le stesse dimensioni

**Esempio:**

$$A_{2 \times 2} = \begin{Bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} \quad B_{2 \times 2} = \begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad A + B_{2 \times 2} = \begin{Bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix}$$

# Moltiplicazione tra matrici

$$A = \{a_{ij}\}_{m \times n} \quad B = \{b_{ij}\}_{n \times p}$$


Condizione necessaria

Ciascun elemento di  $C$  è il prodotto interno di una riga di  $A$  ed una colonna di  $B$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$\forall i = 1, \dots, m \quad \forall j = 1, \dots, p$$



# Moltiplicazione tra matrici

## Esempio

$$A_{3 \times 3} = \begin{Bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad B_{3 \times 2} = \begin{Bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$C_{3 \times 2} = AB = \begin{Bmatrix} 3 & 1 \\ 19 & 5 \\ 11 & 1 \end{Bmatrix}$$

# Moltiplicazione tra matrici

Da ricordare:  $A = \begin{Bmatrix} a_{ij} \end{Bmatrix}_{m \times n}$        $B = \begin{Bmatrix} b_{ij} \end{Bmatrix}_{q \times p}$

1. Il prodotto  $AB$  è definito solo se  $n=q$ .  $AB$  è allora una matrice  $m \times p$

2. Il prodotto  $BA$  è definito solo se  $m=p$ .  $BA$  è allora una matrice  $q \times n$

3. NON necessariamente vale la proprietà **COMMUTATIVA**

$$A_{2 \times 2} = \begin{Bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} \quad B_{2 \times 2} = \begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB \neq BA$$

# Alcune matrici particolari

$$I_{n \times n} = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\} \rightarrow$$

Matrice Identita'

$$A_{m \times n} I_{n \times n} = A$$

$$I_{m \times m} A_{m \times n} = A$$

$$A_{n \times n} = \left\{ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{array} \right\}$$

Matrice Triangolare  
superiore

# Trasposta di una matrice

Data una matrice  $A = \{ a_{ij} \}$  ( $m \times n$ ), la sua matrice TRASPOSTA  $A^t$  è una matrice ( $n \times m$ ) ottenuta invertendo le righe con le colonne:

$$A_{3 \times 2} = \begin{Bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} \rightarrow A^T_{2 \times 3} = \begin{Bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

# Trasposta di una matrice

## Proprietà

1.  $(A^T)^T = A$

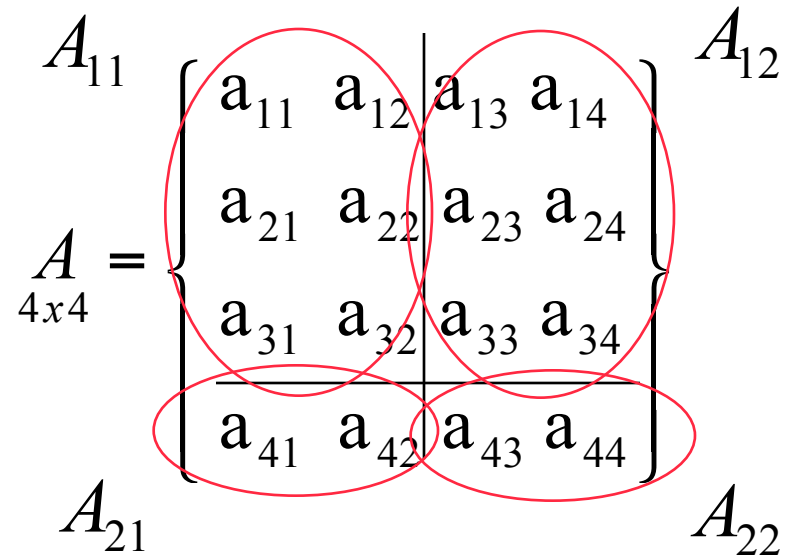
2.  $(A + B)^T = A^T + B^T$  (quando la somma è definita)

3.  $(AB)^T = B^T A^T$  (quando il prodotto è definito)

# Matrici partizionate

Una matrice  $A$  ( $m \times n$ ) possiamo anche vederla *partizionata* in sottomatrici.

$$A_{4 \times 4} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Bmatrix}$$


$$A_{4 \times 4} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Bmatrix}$$

The diagram shows the 4x4 matrix partitioned into four 2x2 submatrices:  $A_{11}$  (top-left),  $A_{12}$  (top-right),  $A_{21}$  (bottom-left), and  $A_{22}$  (bottom-right). Red circles highlight each of these submatrices.

$$A_{4 \times 4} = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}$$

hanno dimensione  $3 \times 2$   
hanno dimensione  $1 \times 2$

# Operazioni elementari

Data una matrice  $A$  ( $m \times n$ ) è possibile definire alcune operazioni sulle righe e sulle colonne utili a risolvere un sistema di equazioni lineari.

*Operazioni elementari* sulle righe (colonne) di una matrice sono:

- **SCAMBIO**: scambio della riga  $i$  con la riga  $j$
- **MOLTIPLICAZIONE**: moltiplicazione di una riga per uno scalare (diverso da zero).
- **SOSTITUZIONE**: sostituzione della riga  $i$  con la somma della riga  $i$  e della riga  $j$  moltiplicata per uno scalare

# Inversa di una matrice

Sia  $A_{n \times n}$  una matrice quadrata, se esiste  $B_{n \times n}$  matrice quadrata tale che

$$AB = I$$

$$BA = I$$

B è detta matrice inversa di A

## Ricorda:

- l'inversa di una matrice A (se esiste) è UNICA ed è indicata con  $A^{-1}$
- se una matrice ammette l'inversa allora è detta matrice NON SINGOLARE
- una matrice è non singolare se e solo se le righe sono linearmente indipendenti o equivalentemente se e solo se le colonne sono linearmente indipendenti



# Calcolo dell'inversa di una matrice

L'inversa di una matrice quadrata  $A$  può essere calcolata attraverso un numero finito di operazioni elementari nel seguente modo:

1. Si considera la nuova matrice  $(A, I)$

2. Si effettuano una serie di operazioni elementari sulle righe e sulle colonne di questa nuova matrice in modo tale che:

$A$  diventa la matrice identità  $I$

$I$  diventa la matrice inversa  $A^{-1}$

# Calcolo dell'inversa di una matrice esempio (1/3)

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

Considero la nuova matrice

Divido la prima riga per 2.

Aggiungo la nuova riga ottenuta alla seconda.

Sottraggo la riga ottenuta dalla terza

$$\left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

# Calcolo dell'inversa di una matrice esempio (2/3)

$$\left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

Moltiplico la seconda riga per  $2/5$ .

Moltiplico la nuova riga ottenuta per  $-1/2$  e la aggiungo alla prima riga.

Moltiplico la nuova riga ottenuta per  $3/2$  e la aggiungo alla terza riga.

# Calcolo dell'inversa di una matrice

## Esempio (3/3)

$$\left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{3}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{12} & \frac{3}{12} & -\frac{3}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} & \frac{3}{12} & \frac{5}{12} \end{array} \right\}$$

Moltiplico la terza riga per 5/12.

Moltiplico la nuova riga ottenuta per -3/5 e la aggiungo alla seconda riga.

Moltiplico la nuova riga ottenuta per -1/5 e la aggiungo alla prima riga.


Quindi l'inversa in questo caso esiste

# Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

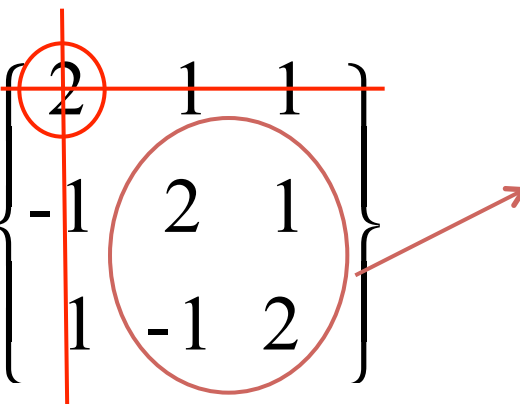
Il determinante di una matrice quadrata  $A$  è uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche.

Viene denotato con **det(A)** e si calcola con la seguente formula:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\text{minor}(A_{ij})) \quad \text{fissata una riga } i$$

$i = 1$   


$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

  $\text{minor}(A_{11})$


$$\det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} +$$

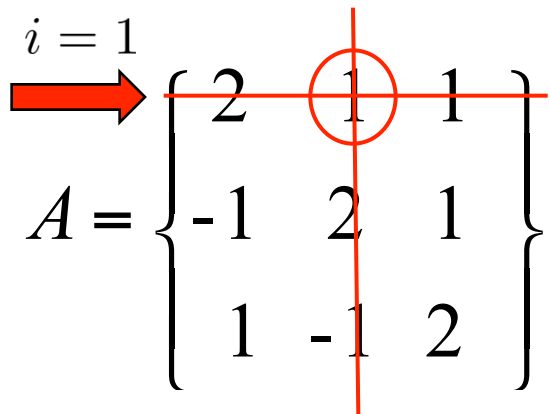
# Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

Il determinante di una matrice quadrata  $A$  è uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche.

Viene denotato con **det(A)** e si calcola con la seguente formula:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\text{minor}(A_{ij})) \quad \text{fissata una riga } i$$

$i = 1$   


$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$


$$\det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} +$$

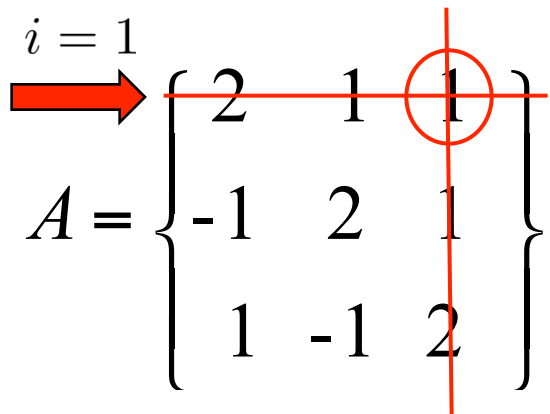
# Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

Il determinante di una matrice quadrata  $A$  è uno scalare che ne sintetizza alcune proprietà algebriche.

Viene denotato con **det(A)** e si calcola con la seguente formula:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(\text{minor}(A_{ij})) \quad \text{fissata una riga } i$$

$i = 1$


$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$\det(A) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

# Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) = 12 \end{aligned}$$

Matrice trasposta dei cofattori

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \text{cof}(A_{11}) & \text{cof}(A_{21}) & \dots & \text{cof}(A_{n1}) \\ \text{cof}(A_{12}) & \text{cof}(A_{22}) & \dots & \text{cof}(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cof}(A_{1n}) & \text{cof}(A_{2n}) & \dots & \text{cof}(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$\text{cof}(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(\text{minor}(A_{ij}))$$



# Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix} \quad \begin{aligned} \det(A) &= 12 \\ \operatorname{cof}(A_{ij}) &= (-1)^{i+j} \cdot \det(\operatorname{minor}(A_{ij})) \end{aligned}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \operatorname{cof}(A_{11}) & \operatorname{cof}(A_{21}) & \dots & \operatorname{cof}(A_{n1}) \\ \operatorname{cof}(A_{12}) & \operatorname{cof}(A_{22}) & \dots & \operatorname{cof}(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{cof}(A_{1n}) & \operatorname{cof}(A_{2n}) & \dots & \operatorname{cof}(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{cof}(A_{11}) = (-1)^{1+1} \cdot \det(\operatorname{minor}(A_{11})) = (-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 5$$

$$A^{-1} = \begin{Bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

# Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix} \quad \begin{aligned} \det(A) &= 12 \\ \operatorname{cof}(A_{ij}) &= (-1)^{i+j} \cdot \det(\operatorname{minor}(A_{ij})) \end{aligned}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \operatorname{cof}(A_{11}) & \operatorname{cof}(A_{21}) & \dots & \operatorname{cof}(A_{n1}) \\ \operatorname{cof}(A_{12}) & \operatorname{cof}(A_{22}) & \dots & \operatorname{cof}(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{cof}(A_{1n}) & \operatorname{cof}(A_{2n}) & \dots & \operatorname{cof}(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{cof}(A_{11}) = (-1)^{1+1} \cdot \det(\operatorname{minor}(A_{11})) = (-1)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 5$$

$$A^{-1} = \begin{Bmatrix} \frac{5}{12} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

# Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix} \quad \begin{aligned} \det(A) &= 12 \\ \operatorname{cof}(A_{ij}) &= (-1)^{i+j} \cdot \det(\operatorname{minor}(A_{ij})) \end{aligned}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \operatorname{cof}(A_{11}) & \operatorname{cof}(A_{21}) & \dots & \operatorname{cof}(A_{n1}) \\ \operatorname{cof}(A_{12}) & \operatorname{cof}(A_{22}) & \dots & \operatorname{cof}(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{cof}(A_{1n}) & \operatorname{cof}(A_{2n}) & \dots & \operatorname{cof}(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{cof}(A_{21}) = (-1)^{2+1} \cdot \det(\operatorname{minor}(A_{21})) = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -3$$

$$A^{-1} = \begin{Bmatrix} \frac{5}{12} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

# Calcolo dell'inversa di una matrice metodo alternativo

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$\det(A) = 12$$

$$\text{cof}(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(\text{minor}(A_{ij}))$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \text{cof}(A_{11}) & \text{cof}(A_{21}) & \dots & \text{cof}(A_{n1}) \\ \text{cof}(A_{12}) & \text{cof}(A_{22}) & \dots & \text{cof}(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{cof}(A_{1n}) & \text{cof}(A_{2n}) & \dots & \text{cof}(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$\text{cof}(A_{21}) = (-1)^{2+1} \cdot \det(\text{minor}(A_{21})) = (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -3$$

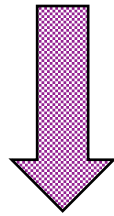
$$A^{-1} = \begin{Bmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{3}{12} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

# Rango di una matrice

Rango di riga: numero massimo di righe lin. indipendenti

Rango di colonna: numero massimo di colonne lin. indipendenti

Teorema: Rango di riga = Rango di colonna



$$\text{Rango}(A) \leq \min(m, n)$$

Se  $\text{rango}(A) = \min(m, n)$   $A$  è una matrice a rango pieno

# Rango di una matrice e sistema di equazioni lineari (1/2)

Cercare una soluzione ad un sistema di equazioni lineari

$$\underset{m \times n}{A} \underline{x} = \underline{b}$$

Significa cercare quei valori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tali che il vettore  $b$  può essere espresso come combinazione lineare delle colonne della matrice.



Per la soluzione di un sistema di equazioni lineari valgono le seguenti:

1.  $\text{Rango}(A, b) > \text{Rango}(A) \Rightarrow$  il sistema non ha soluzione
2.  $\text{Rango}(A, b) = \text{Rango}(A) \Rightarrow$  il sistema ha soluzione

# Rango di una matrice e sistema di equazioni lineari (2/2)

$$\text{Rango}(A,b) = \text{Rango}(A)$$

$m > n$  :

$$\text{Rango}(A) \leq \min(m,n) \Rightarrow \text{Rango}(A) \leq n < m$$

Se  $\text{Rango}(A) = n \Rightarrow$  il sistema ha soluzione unica

Se  $\text{Rango}(A) < n \Rightarrow$  il sistema ha infinite soluzioni

$m < n$  :

$$\text{Rango}(A) \leq \min(m,n) \Rightarrow \text{Rango}(A) \leq m < n$$

Se  $\text{Rango}(A) = m \Rightarrow$  il sistema ha infinite soluzioni

Se  $\text{Rango}(A) < m \Rightarrow$  il sistema ha infinite soluzioni

$m = n$  :

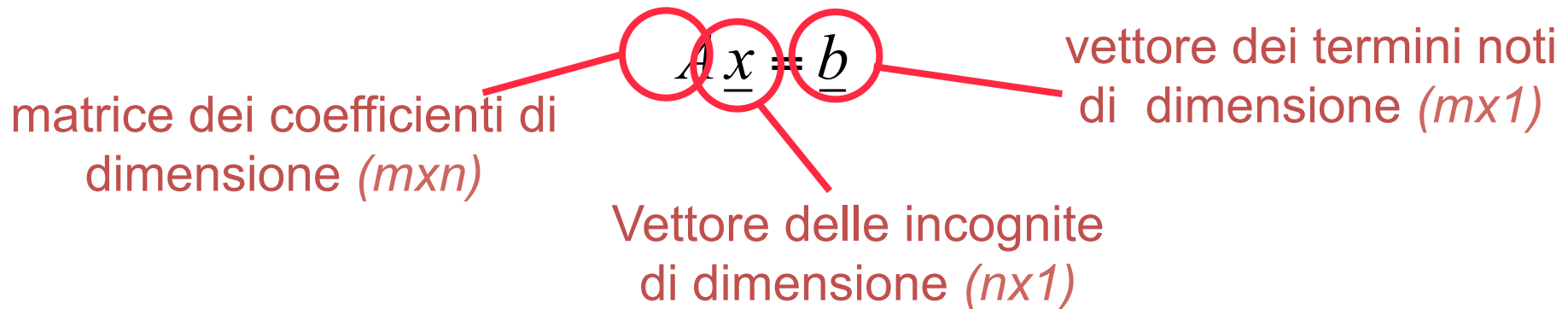
$$\text{Rango}(A) \leq \min(m,n) \Rightarrow \text{Rango}(A) \leq n = m$$

Se  $\text{Rango}(A) = n \Rightarrow$  il sistema ha soluzione unica

Se  $\text{Rango}(A) < n \Rightarrow$  il sistema ha infinite soluzioni

# Risolvere un sistema di equaz. Lineari attraverso operazioni elementari

Dato un sistema di  $m$  equazioni lineari ed  $n$  incognite



è equivalente al sistema:  $A'\underline{x} = \underline{b}'$

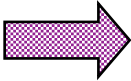
dove la matrice  $(A', \underline{b}')$  è ottenuta da  $(A, \underline{b})$

attraverso un numero finito di operazioni elementari



# Risolvere un sistema di equazioni lineari

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 &= 2\end{aligned}$$

La matrice dei coefficienti ha rango  $= 3 < 4$   il sistema ha infinite soluzioni

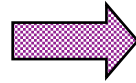
---

Metodo di Gauss-Jordan:  
ridurre la matrice dei coefficienti ad una matrice triangolare superiore attraverso un numero finito di operazioni elementari

# Risolvere un sistema di equazioni lineari

## Metodo di Gauss-Jordan

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 + x_3 &= 2\end{aligned}$$



$$\left\{ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right\}$$

Aggiungi la prima riga alla seconda riga.

$$\left\{ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right\}$$

Dividi la seconda riga per 4.  
Sottrai la nuova riga ottenuta alla terza riga.

$$\left\{ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -2 \end{array} \right\}$$

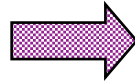
# Risolvere un sistema di equazioni lineari

## Metodo di Gauss-Jordan

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 10$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6$$

$$x_2 + x_3 = 2$$



$$\left\{ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -2 \end{array} \right\}$$

infinite soluzioni al sistema:

$$x_4 = \lambda$$

$$x_3 = -2 - \frac{1}{4}\lambda$$

$$x_2 = 4 + \frac{1}{4}\lambda$$

$$x_1 = 10 + 2\lambda - 2x_2 - x_3 = 4 + \frac{7}{4}\lambda$$

# ESERCIZI

1. Dati i seguenti vettori  $A=(4,1,2)$ ,  $B=(7, -8, 0)$ ,  $C=(4, 1, 3)$  determinare un nuovo vettore  $D$  che risulti combinazione lineare dei tre vettori dati.
2. Dare la definizione di lineare indipendenza e lineare dipendenza tra vettori in  $R^n$ . Fornire un esempio di vettori in  $R^3$  linearmente indipendenti e vettori in  $R^3$  linearmente dipendenti.
3. Dati i seguenti vettori in  $R^3$ :  $A = (1, 3, -4)$ ,  $B = (0, 3, 2)$ ,  $C = (1, 0, 1)$ :
  - Si verifichi se i vettori dati costituiscono una base per lo spazio;
  - Si determini un nuovo vettore ottenuto come combinazione convessa dei tre vettori dati.