Esempio. Da un'urna contenente 3 biglie numerate da 1 a 3 si estraggono casualmente in sequenza le 3 biglie. Diciamo che si ha una concordanza nell'i-esima estrazione se in tale estrazione viene estratta la biglia avente numero i, per $i = 1, 2, 3$. Calcolare la probabilità degli eventi $C_k = \{\text{si hanno in totale } k \text{ concordanze}\}$, per $k = 0, 1, 2, 3$.

Soluzione. I possibili risultati dell'esperimento sono le $3! = 6$ permutazioni dei numeri $1, 2, 3$. Poichè gli esiti sono equiprobabili, ognuna di tali sequenze si verifica con probabilità $1/6$. Dalla seguente tabella seguono le probabilità richieste:

esito delle estrazioni	numero di concordanze
1 2 3	3
1 3 2	1
2 1 3	1
2 3 1	0
3 1 2	0
3 2 1	1

$$P(C_0) = \frac{2}{6} \qquad P(C_1) = \frac{3}{6}$$

$$P(C_2) = 0 \qquad P(C_3) = \frac{1}{6}$$

(Notiamo che gli eventi C_0, C_1, C_2, C_3 sono necessari e a 2 a 2 incompatibili.)

Esempio. Da un'urna contenente 3 biglie numerate da 1 a 3 si estraggono casualmente in sequenza le 3 biglie. Diciamo che si ha una concordanza nell'i-esima estrazione se in tale estrazione viene estratta la biglia avente numero i, per $i = 1, 2, 3$. Calcolare la probabilità che non si abbia concordanza in nessuna estrazione.

Soluzione. I possibili risultati dell'esperimento sono le $3! = 6$ permutazioni dei numeri $1, 2, 3$, ossia $\{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$.

Per $i = 1, 2, 3$ sia $E_i = \{\text{si ha concordanza nell'}i\text{-esima estrazione}\}$. Dobbiamo calcolare

$$P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = P(\overline{E_1 \cup E_2 \cup E_3}) = 1 - P(E_1 \cup E_2 \cup E_3).$$

Osserviamo che

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{2!}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \cap E_3) = P(E_2 \cap E_3) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}, \quad P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{1}{6}.$$

Pertanto

$$P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Esempio. Il problema delle concordanze. Da un'urna che contiene biglie numerate da 1 a n si estraggono casualmente in sequenza le n biglie. Diciamo che si ha una concordanza nell'i-esima estrazione se in tale estrazione viene estratta la biglia avente numero i, per $i = 1, 2, \ldots, n$. Calcolare la probabilità che non si abbia concordanza in nessuna estrazione.

Soluzione. Per $i = 1, 2, \ldots, n$ sia $E_i = \{\text{si ha concordanza nell'}i\text{-esima estrazione}\}$. Pertanto, la probabilità che si abbia almeno una concordanza è

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_r}).$$

Rappresentiamo l'esito dell'esperimento come un vettore $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, dove ω_i denota il numero estratto all'estrazione i-esima. Lo spazio campionario è quindi l'insieme delle $n!$ permutazioni

$$S = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \colon \omega_i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \omega_i \neq \omega_j \text{ per } i \neq j\}.$$

L'evento E_i si verifica se nell'estrazione i-esima si ha concordanza (e non è escluso che si possa avere concordanza in altre estrazioni). Ciò può accadere in $(n-1)!$ modi, perché nell'estrazione i-esima l'esito deve essere il numero i (per avere concordanza), mentre nelle altre estrazioni ci sono $(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,2\cdot 1$ modi per individuare gli esiti dell'esperimento. Si ha pertanto

$$P(E_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}\quad\text{e analogamente}\quad P(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\ldots\cap E_{i_r})=\frac{(n-r)!}{n!}.$$

Poiché vi sono $\binom{n}{r}$ termini in $\displaystyle\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} P(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\ldots\cap E_{i_r})$, risulta quindi

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} P(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\ldots\cap E_{i_r})=\binom{n}{r}\frac{(n-r)!}{n!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\cdot\frac{(n-r)!}{n!}=\frac{1}{r!}$$

da cui:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} P(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\ldots\cap E_{i_r})=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\frac{1}{r!}.$$

La probabilità che non si abbia concordanza in nessuna estrazione è quindi

$$p_n = P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} E_i}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = 1 - \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r+1}}{r!} = 1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^r}{r!} = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}$$

Notiamo che per n grande la probabilità

$$p_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}$$

può essere approssimata da

$$\mathrm{e}^{-1} = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \approx 0{,}367879$$

(Ricordiamo che $\boxed{\mathrm{e}^x = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{x^r}{r!}}$ per $x \in \mathbb{R}$)

n	p_n
1	0
2	0,5
3	0,333333
4	0,375
5	0,366667
6	0,368056
7	0,367857
8	0,367882
9	0,367879
10	0,367879

Esempio. Nell'esperimento che consiste nel lanciare n volte una moneta non truccata, indicando con t la fuoriuscita di testa e con c di croce, lo spazio campionario è

$$S = \{\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \colon \omega_i \in \{t, c\} \text{ per } 1 \le i \le n\},$$

e le sue 2^n sequenze sono equiprobabili. Per $1 \le k \le n$, calcolare le probabilità di

$T_k = \{\text{al } k\text{-esimo lancio esce testa}\} = \{\underline{\omega} \colon \omega_k = t; \omega_i \in \{t, c\} \text{ per } i \neq k\}$

$A_k = \{\text{nei primi } k \text{ lanci esce testa}\} = \{\underline{\omega} \colon \omega_1 = \ldots = \omega_k = t; \omega_i \in \{t, c\} \text{ per } i > k\}$

$A'_k = \{\text{nei primi } k \text{ lanci esce croce}\} = \{\underline{\omega} \colon \omega_1 = \ldots = \omega_k = c; \omega_i \in \{t, c\} \text{ per } i > k\}$

$B_k = \{\text{esce testa } k \text{ volte}\} = \{\underline{\omega} \colon \sum_{i=1}^{n} I[\omega_i = t] = k\}$ ($I[A] = 1$ se A è vera, 0 senò).

Soluzione. Trattandosi di uno spazio campionario con esiti equiprobabili, si ha

$$P(T_k) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}, \qquad P(A_k) = P(A'_k) = \frac{2^{n-k}}{2^n} = \frac{1}{2^k}, \qquad P(B_k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

Esercizio. Riferendosi all'esercizio precedente, mostrare che gli eventi $B_0, B_1, \ldots, B_n$ sono necessari e incompatibili, ed inoltre che

$$P(T_1 \cap A_k) = \frac{1}{2^k}, \qquad P(T_1 \cup A_k) = \frac{1}{2},$$

$$P(T_1 \cap B_k) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^n}, \qquad P(T_1 \cup B_k) = \frac{1}{2} + \frac{\binom{n-1}{k}}{2^n},$$

$$P(A_k \cap A'_k) = 0, \qquad P(A_k \cup A'_k) = \frac{1}{2^{k-1}},$$

$$P(A_k \cap B_k) = \frac{1}{2^n}, \qquad P(A_k \cup B_k) = \frac{1}{2^k} + \frac{\binom{n}{k}}{2^n} - \frac{1}{2^n},$$

$$P(A'_{k-1} \cup T_k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}, \qquad P(A'_{k-1} \cap T_k) = \frac{1}{2^k}.$$

Esercizi per casa

2.a) Nel lancio di due dadi non truccati, sia $A = \{$il primo dado dà esito 6$\}$ e $B = \{$il secondo dado dà esito diverso da 6$\}$.
(i) Definire lo spazio campionario e determinarne la cardinalità.
(ii) Calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$.

2.b) Un esperimento consiste nel lanciare n volte una moneta equa. Sia $A = \{$negli n lanci si ottiene 2 volte testa$\}$ e $B = \{$negli n lanci si ottiene sempre croce oppure una sola volta testa$\}$.
(i) Definire lo spazio campionario e determinarne la cardinalità.
(ii) Calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup \overline{B})$.

2.c) Un esperimento consiste nell'estrarre a caso k biglie da un'urna contenente n biglie numerate da 1 ad n. Sia $A = \{$la biglia numero 1 viene estratta$\}$ e $B = \{$le biglie numerate da 1 a k vengono estratte$\}$. Calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ e $P(A \cup B)$.

2.d) Da un elenco di 10 impiegati, di cui 6 laureati e 4 diplomati, se ne selezionano 3 a caso.
(i) Calcolare la probabilità che almeno uno degli impiegati selezionati sia diplomato.
(ii) Calcolare la probabilità che gli impiegati selezionati siano tutti diplomati.
(iii) Calcolare la probabilità che tra i 3 impiegati selezionati vi sia un solo diplomato.

2.e) Da un'urna contenente 12 biglie (di cui 3 bianche, 4 rosse e 5 blu), se ne estraggono 3 (senza reinserimento). Calcolare la probabilità che tra le 3 estratte almeno uno dei 3 colori non sia presente.

2.f) Calcolare le seguenti somme:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n!}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-2}}{n!}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-2n-1}$

2.g) Un giocatore di poker ha le seguenti carte: $(A, A, A, K, 2)$; calcolare la probabilità di fare full e la probabilità di fare poker nei seguenti casi:
(i) se cambia il 2;
(ii) se cambia il K e il 2.

2.h) Stabilire quale dei seguenti eventi ha probabilità maggiore:
(i) esce 6 almeno una volta in 4 lanci di un dado;
(ii) esce un doppio 6 almeno una volta in 24 lanci di una coppia di dadi.