ES. 1 2 monete — $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.6$ P(1ª moneta) = P(2ª moneta) = $\frac{1}{2}$

1. T = "esce testa"

$$P(T) = \frac{1}{2}\cdot p_1 + \frac{1}{2}\cdot p_2 = \frac{1}{2}0{,}5 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}6 = 0{,}55$$

2. $$P(M_1|\overline{T}) = \frac{P(\overline{T}|M_1)\,P(M_1)}{P(\overline{T})} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

ES. 2 1 dado tra 2 — 1° Dado regolare $\{1,2,3,4,5,6\}$; 2° Dado truccato $\{1,2,3,4,5,5\}$

lancio dado scelto ~~...~~ 2 volte

1. S = "somma degli esiti ≤ 6" $= \{(x,y) : x+y \leq 6\}$

→ Se scelgo il 1° dado (con prob. 1/2)

$S = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (3,1); (3,2); (3,3); (4,1); (4,2); (5,1)\}$ → $|S| = 15$

$$P(S|D_1) = \frac{15}{36}$$

→ Se scelgo il 2° dado (con prob. 1/2)

$S = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); \underbrace{(1,5); (1,5)}_{\text{perché ci sono due 5}}; (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (3,1); (3,2); (3,3); (4,1); (4,2); (5,1); (5,1)\}$

$|S| = 17$

$$P(S|D_2) = \frac{17}{36}$$

$$P(S) = P(S|D_1)P(D_1) + P(S|D_2)P(D_2)$$
$$= \frac{15}{36}\cdot\frac{1}{2} + \frac{17}{36}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{9}$$

2. $P(D_2 \mid S) = \dfrac{P(S \mid D_2)\, P(D_2)}{P(S)} = \dfrac{\frac{17}{36} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{4}{9}} = \dfrac{17}{32}$

ES. 3

2 monete truccate: $P(T \mid M_1) = \frac{2}{3}$, $P(T \mid M_2) = \frac{1}{3}$

lancio finché non esce testa

(i) $P(\text{esce testa al } 4^\circ \text{ lancio}) = P(T_4) = ?$

→ Se scelgo la 1ª moneta (con prob. $P(M_1) = 1/2$)

$$P(T_4 \mid M_1) = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}_{\text{esce croce nei primi 3 lanci}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{81}$$

→ Se scelgo la 2ª moneta (con prob. $P(M_2) = 1/2$)

$$P(T_4 \mid M_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{81}$$

$$P(T_4) = P(T_4 \mid M_1) P(M_1) + P(T_4 \mid M_2) P(M_2)$$
$$= \frac{\cancel{2}}{81} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{81} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} = \frac{5}{81}$$

(ii) $P(\text{almeno 5 tentativi per il } 1^\circ \text{ successo}) = P(T_{\geq 5}) = ?$

→ Se scelgo la 1ª moneta (con prob. $1/2$)

$$P(T_{\geq 5} \mid M_1) = 1 - P(T_{\leq 4} \mid M_1) = ?$$

$$P(T_{\leq 4} \mid M_1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{80}{81}$$

$$P(T_{\geq 5} \mid M_1) = 1 - \frac{80}{81} = \frac{1}{81}$$

→ Se scelgo la 2ª moneta (con prob. $1/2$)

$$P(T_{\geq 5} \mid M_2) = 1 - P(T_4 \mid M_2) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{16}{81}$$

$P(T\geq 5) = P(T\geq 5 | M_1) P(M_1) + P(T\geq 5|M_2)\, P(M_2)$

$$= \frac{1}{81}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\cancel{16}^{8}}{81}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_1} = \frac{17}{162}$$

(iii) M_2 $\quad X \sim Geom\left(\frac{1}{3}\right)$ $\quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{1/3} = 3.$

ES. 4 moneta equa n volte

- Se esce testa 0 volte su n lanci, $\rightarrow$ con prob. $\left(\frac{1}{2}\right)^n$
 nell'urna ci sono n biglie bianche
 e quindi la prob. di estrarre una biglia nera è 0

- Se esce testa 1 volta su n lanci (con prob. $n\left(\frac{1}{2}\right)^n$)
 nell'urna ci sono $n-1$ palline bianche e 1 nera
 e quindi la prob. di estrarre una nera è $\frac{1}{n}$.

- Se esce testa 2 volte su n lanci (con prob. $\binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$)
 nell'urna ci sono $n-2$ palline bianche e 2 nere
 e quindi la prob. di estrarre una nera è $\frac{2}{n}$.

e così via...

$P(\text{estrazione di una biglia nera}) = \binom{n}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot 0 + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{n} + \dots$
$+ \dots + \binom{n}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{n}{n} =$

$$= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{j}{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{j}{n} \underset{\substack{\downarrow \\ j=0 \text{ non} \\ \text{dà contributo}}}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\frac{j}{n} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{j=1}^{n}\frac{\cancel{n}(n-1)!}{\cancel{j}(j-1)!\,(n-j)!}\cdot\frac{\cancel{j}}{\cancel{n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{j=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(j-1)!\,(n-j)!} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-1}{j-1} + \frac{\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}(n-n)!}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(2^{n-1} + 1\right)$$

ES. 5

$P(\text{malattia}) = P(M+) = 10\% = 0{,}10 \Rightarrow P(M-) = 0{,}90$

$P(\text{test} + | M+) = P(T+|M+) = 0{,}95 \Rightarrow P(T-|M+) = 0{,}05$

$P(\text{test} - | M-) = P(T-|M-) = 0{,}90 \Rightarrow P(T+|M-) = 0{,}10$

(i) $P(T+) = P(T+|M+)\,P(M+) + P(T+|M-)\,P(M-)$

$= 0{,}95 \cdot 0{,}10 + 0{,}10 \cdot 0{,}90$

$= 0{,}185$

(ii) $P(M+|T+) = \dfrac{P(T+|M+)\,P(M+)}{P(T+)} = \dfrac{0{,}95 \cdot 0{,}10}{0{,}185} \cong 0{,}513$

(iii) $P(M+ \cap T+) \stackrel{?}{=} P(M+) \cdot P(T+)$

$P(M+ \cap T+) = P(T+|M+)\,P(M+) = 0{,}095$

$P(M+) \cdot P(T+) = 0{,}10 \cdot 0{,}185 = 0{,}0185$

$P(M+ \cap T+) = 0{,}095 \neq 0{,}0185 = P(M+)\,P(T+) \Rightarrow$ T+ e M+ non sono indipendenti.

ES. 6

4 confezioni da 6

1ª scatola	1 disco rotto
2ª scatola	2 dischi rotti
3ª scatola	3 dischi rotti
4ª scatola	0 dischi rotti

a) $P(\text{disco rotto}) = P(D_R) =$

$$= P(D_R|S_1)P(S_1) + P(D_R|S_2)P(S_2) + P(D_R|S_3)P(S_3) + P(D_R|S_4)P(S_4)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{4} + \frac{0}{6}\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{24} + \frac{2}{24} + \frac{3}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

b) $P(S_4|\bar{D}_R) = \frac{P(\bar{D}_R|S_4)P(S_4)}{P(\bar{D}_R)}$

$P(\bar{D}_R) = 1 - P(D_R) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(\bar{D}_R|S_4) = 1$

$P(S_4) = 1/4$

$$\Rightarrow P(S_4|\bar{D}_R) = \frac{1\cdot 1/\cancel{4}}{3/\cancel{4}} = \frac{1}{3}$$