Proposizione. Se E ed F sono eventi indipendenti, allora E ed $\overline{F}$ sono indipendenti.
Dimostrazione. Poichè risulta $E = (E \cap F) \cup (E \cap \overline{F})$, con $E \cap F$ ed $E \cap \overline{F}$ eventi incompatibili, dalla proprietà di additività finita segue

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \overline{F}).$$

Poiché per ipotesi E ed F sono eventi indipendenti, si ha

$$P(E) = P(E)\, P(F) + P(E \cap \overline{F}),$$

ossia

$$P(E \cap \overline{F}) = P(E) - P(E)\, P(F) = P(E)\, [1 - P(F)] = P(E)\, P(\overline{F}).$$

Quindi E ed $\overline{F}$ sono indipendenti.

Notiamo pertanto che se E è indipendente da F, la probabilità che E si realizzi non è modificata dalla realizzazione o meno di F.

Inoltre, se E ed F sono indipendenti, tali sono anche $\overline{E}$ ed F, e gli eventi $\overline{E}$ ed $\overline{F}$.

Nel prossimo esempio vedremo che se E è indipendente da F e da G, allora non è detto che E sia indipendente da $F \cap G$.

Esempio. Consideriamo i seguenti eventi nel lancio di due dadi non truccati: $E = \{$la somma dei dadi è 7$\}$, $F = \{$il primo dado dà 4$\}$, $G = \{$il secondo dado dà 3$\}$. Esaminare l'indipendenza delle coppie di eventi E ed F, E e G, E ed $F \cap G$.

Soluzione. L'evento E è indipendente da F ed anche da G, in quanto

$$P(E \cap F) = P(\{(4,3)\}) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(E)\, P(F),$$

$$P(E \cap G) = P(\{(4,3)\}) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(E)\, P(G).$$

Inoltre, poiché $P(E|F \cap G) = 1$, l'evento E non è indipendente da $F \cap G$.

Ispirandoci a questo esempio, appare ragionevole definire l'indipendenza di tre eventi non limitandosi a richiedere l'indipendenza delle 3 possibili coppie, ma imponendo anche una condizione che coinvolga complessivamente i 3 eventi.

Definizione. Tre eventi E, F, G si dicono indipendenti se

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)\, P(F)\, P(G)$$

$$P(E \cap F) = P(E)\, P(F)$$

$$P(E \cap G) = P(E)\, P(G)$$

$$P(F \cap G) = P(F)\, P(G)$$

Si noti che se E, F, G sono indipendenti, allora E è indipendente da ogni evento formato a partire da F e G. Ad esempio E è indipendente da $F \cup G$. Infatti si ha

$$\begin{aligned}
P(E \cap (F \cup G)) &= P((E \cap F) \cup (E \cap G)) \\
&= P(E \cap F) + P(E \cap G) - P(E \cap F \cap G) \\
&= P(E)\, P(F) + P(E)\, P(G) - P(E)\, P(F)\, P(G) \\
&= P(E)\, [P(F) + P(G) - P(F)\, P(G)] \\
&= P(E)\, [P(F) + P(G) - P(F \cap G)] \\
&= P(E)\, P(F \cup G).
\end{aligned}$$

Esempio. Nel lancio di due monete non truccate, con $S = \{cc, ct, tc, tt\}$, stabilire se i seguenti eventi sono indipendenti:

$$T_1 = \{tc, tt\}, \qquad T_2 = \{ct, tt\}, \qquad U = \{cc, tt\}.$$

Soluzione. Si ricava facilmente che

$$\frac{1}{4} = P(\{tt\}) = P(T_1 \cap T_2) = P(T_1)\, P(T_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4} = P(\{tt\}) = P(T_1 \cap U) = P(T_1)\, P(U) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4} = P(\{tt\}) = P(T_2 \cap U) = P(T_2)\, P(U) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Gli eventi T_1, T_2, U sono dunque indipendenti a coppie. Ciononostante, essendo

$$\frac{1}{4} = P(\{tt\}) = P(T_1 \cap T_2 \cap U) \neq P(T_1)\, P(T_2)\, P(U) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

i tre eventi non sono indipendenti.

Esempio. Nell'eperimento che consiste nel generare a caso una sequenza booleana di lunghezza 3, stabilire se i seguenti eventi sono indipendenti:

$$A = \{000, 001, 010, 100\}, \quad B = \{000, 001, 100, 101\}, \quad C = \{011, 100, 110, 111\}.$$

Soluzione. Lo spazio campionario è costituito da 8 sequenze equiprobabili, quindi

$$\frac{1}{8} = P(\{100\}) = P(A \cap B \cap C) \; = \; P(A)\, P(B)\, P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$
$$\frac{3}{8} = P(\{000, 001, 100\}) = P(A \cap B) \; \neq \; P(A)\, P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{8} = P(\{100\}) = P(A \cap C) \; \neq \; P(A)\, P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{8} = P(\{100\}) = P(B \cap C) \; \neq \; P(B)\, P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Gli eventi A, B ,C non sono indipendenti poiché non sono indipendenti a coppie.

Definizione. Gli eventi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ si dicono indipendenti se per ogni sottoinsieme $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_r}$, $2 \leq r \leq n$, di questi eventi si ha

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_r}) = P(E_{i_1})\, P(E_{i_2})\, \ldots\, P(E_{i_r}).$$

Il numero di uguaglianze coinvolte nell'indipendenza di n eventi è pari al numero di sottoinsiemi di cardinalità $r = 2, 3, \ldots, n$ di un insieme di n elementi, ossia:

$$\sum_{r=2}^{n} \binom{n}{r} = 2^n - \binom{n}{1} - \binom{n}{0} = 2^n - n - 1.$$

Definizione. Gli eventi di una successione $E_1, E_2, \ldots$ si dicono indipendenti se ogni sottoinsieme finito di essi $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_r}$, $r \geq 2$, è formato da eventi indipendenti.

Notiamo che se gli eventi $E_1, E_2, \ldots$ sono indipendenti, allora ogni sequenza di eventi ottenuta sostituendo qualche evento E_i con l'evento complementare $\overline{E}_i$ è ancora costituita da eventi indipendenti.

Alcuni esperimenti talvolta consistono nell'effettuare una successione di sub-esperimenti identici, ripetuti nelle stesse condizioni, ai quali si dà il nome di *prove*.

Ad esempio, nel lancio ripetuto di una moneta, ogni lancio corrisponde ad una prova.

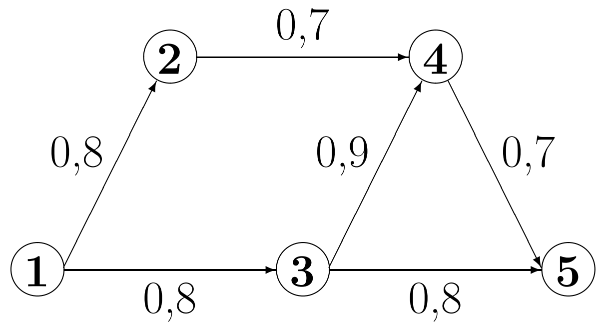
Talora è ragionevole supporre che gli esiti di ogni gruppo di prove non abbiano effetti sugli esiti delle altre prove. In tal caso diciamo che le prove sono indipendenti. Ne segue che la successione

$$E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$$

costituisce un insieme di eventi indipendenti, dove E_i dipende esclusivamente dall'esito dell'i-esima prova.

Esercizio. Nel lancio di 3 monete non truccate, consideriamo i seguenti eventi: $T_1 = \{\text{testa al primo lancio}\}$, $B = \{\text{esce almeno una volta testa negli ultimi 2 lanci}\}$ e $U = \{\text{nei 3 lanci si ha lo stesso risultato}\}$. Studiare l'indipendenza di T_1, B e U.

Esempio. Si consideri un sistema costituito da 5 unità collegate mediante archi orientati (vedi figura, dove su ogni arco è indicata la probabilità che esso sia attivo, indipendentemente dagli altri archi). Calcolare la probabilità che vi sia almeno un percorso da **1** a **5** con tutti gli archi attivi.



Soluzione. Sia A = {gli archi del percorso **1245** sono attivi}, B = {gli archi del percorso **1345** sono attivi} e C = {gli archi del percorso **135** sono attivi}. Per la formula di inclusione/esclusione e l'indipendenza degli archi, la probabilità richiesta è

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

con $P(A) = 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7 = 0{,}392$; $P(B) = 0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}7 = 0{,}504$; $P(C) = 0{,}8\cdot 0{,}8 = 0{,}64$; $P(A\cap B) = 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9 = 0{,}2822$; $P(A\cap C) = 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8 = 0{,}2509$; $P(B\cap C) = 0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8 = 0{,}4032$; $P(A\cap B\cap C) = 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}8 = 0{,}2258$; ne segue: $P(A\cup B\cup C) = 0{,}8255$.

Esempio. Con riferimento all'esempio precedente, trovare l'errore nel seguente testo:

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C) &= 1-P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) \\ &= 1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C}) \\ &= 1-(1-0{,}392)\cdot(1-0{,}504)\cdot(1-0{,}64) \\ &= 1-0{,}1086 = 0{,}8914. \end{aligned}$$

Soluzione. Gli eventi A, B, C non sono indipendenti, quindi la seconda uguaglianza è falsa. Invero, gli eventi A e C sono indipendenti, mentre gli eventi A e B, e gli eventi B e C, non sono indipendenti.

Esempio. In una sequenza infinita di prove indipendenti ogni prova ha 2 esiti: successo con probabilità p e insuccesso con probabilità $1-p$. Qual è la probabilità che
(a) vi sia almeno un successo nelle prime n prove;
(b) vi siano esattamente k successi nelle prime n prove;

Soluzione. (a) Ponendo $E_i = \{\text{si ha successo alla prova } i\text{-esima}\}$, $i = 1, 2, \ldots$, con $P(E_i) = p$ e $P(\overline{E}_i) = 1-p$, la probabilità richiesta è

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = P\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E}_i}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{E}_i) = 1 - (1-p)^n.$$

(b) Consideriamo le sequenze di prove che nei primi n esiti hanno k successi e $n-k$ insuccessi. Ognuna di esse si realizza, per l'indipendenza, con probabilità $p^k(1-p)^{n-k}$. Ad esempio

$$P(E_1 \ldots E_k \overline{E}_{k+1} \ldots \overline{E}_n) = P(E_1) \ldots P(E_k) P(\overline{E}_{k+1}) \ldots P(\overline{E}_n) = p^k(1-p)^{n-k}.$$

Vi sono $\binom{n}{k}$ sequenze di questo tipo poiché vi sono $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ permutazioni distinte di k successi e $n-k$ insuccessi, quindi la probabilità richiesta è

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Esempio. Nel lancio di 2 dadi si vince se esce almeno una volta 6. Determinare la probabilità che in 5 partite (a) si vinca 2 volte; (b) si vinca almeno una volta.

Soluzione. Posto $E_i = \{\text{il dado } i\text{-esimo dà } 6\}$, $i = 1, 2$, la probabilità di vincita di una partita è $p = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$. Per l'indipendenza dei lanci risulta $p = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1)P(E_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$.

(a) Poichè le 5 partite sono indipendenti, la probabilità che in una generica partita si vinca 2 volte (e quindi si perda 3 volte) è

$$\binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = \binom{5}{2} \left(\frac{11}{36}\right)^2 \left(\frac{25}{36}\right)^3 = 0{,}3127.$$

(b) Esprimendo la probabilità di vincere almeno una volta in termini dell'evento complementare si ha

$$1 - (1-p)^5 = 1 - \left(\frac{25}{36}\right)^5 = 0{,}8385.$$

Esempio. Risolvere i quesiti dell'esempio precedente supponendo che il primo dado è stato truccato, nel senso che il 5 è stato modificato in 6.

Soluzione. Posto $E_i = \{\text{il dado } i\text{-esimo dà } 6\}$, $i = 1, 2$, la probabilità di vincita di una partita è $p = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$. Per l'indipendenza dei lanci risulta $p = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1)P(E_2) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} - \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

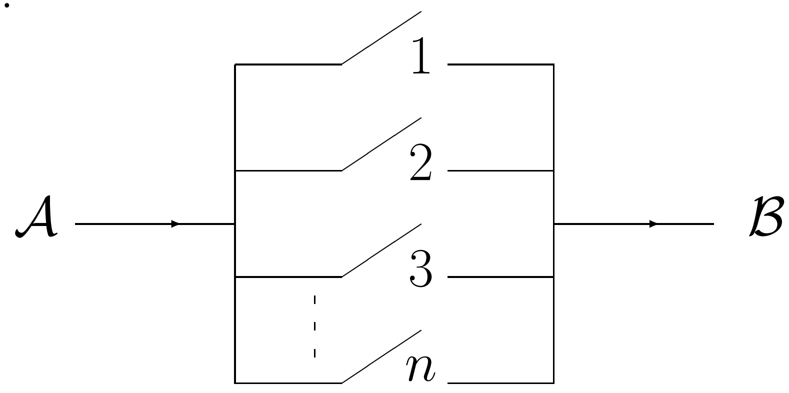
(a) Poichè le 5 partite sono indipendenti, la probabilità che in una generica partita si vinca 2 volte (e quindi si perda 3 volte) è

$$\binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = \binom{5}{2} \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{5}{9}\right)^3 = 0{,}3387.$$

(b) Esprimendo la probabilità di vincere almeno una volta in termini dell'evento complementare si ha

$$1 - (1-p)^5 = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^5 = 0{,}9471.$$

Esempio. Un sistema formato da n componenti è detto in parallelo se esso funziona quando almeno uno dei suoi componenti funziona.
Il componente i-esimo, indipendentemente dagli altri, funziona con probabilità p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Qual è la probabilità che il sistema funzioni?



Soluzione.
Sia $E_i = \{\text{il componente } i\text{-esimo funziona}\}$. Allora

$$\begin{aligned} P(F_p) = P(\text{il sistema funziona}) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E_i}\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{E_i}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i) \end{aligned}$$

per l'indipendenza.

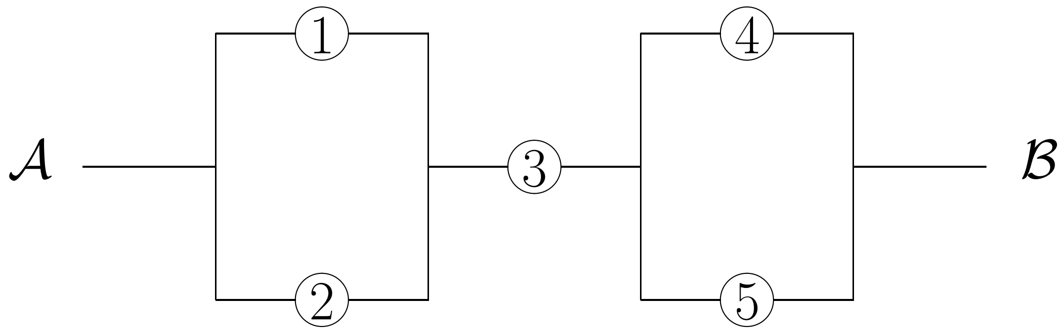
Esempio. Un sistema formato da n componenti è detto in serie se esso funziona quando tutti i suoi componenti funzionano. Il componente i-esimo, indipendentemente dagli altri, funziona con probabilità p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Qual è la probabilità che il sistema funzioni?

Soluzione. Sia $E_i = \{$il componente i-esimo funziona$\}$. Allora

$$P(F_s) = P(\text{il sistema funziona}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

per l'indipendenza.

Esempio. Un sistema è formato da 5 componenti come in figura. Il componente i-esimo, indipendentemente dagli altri, funziona con probabilità p_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Qual è la probabilità che il sistema funzioni? E se $p_i = p$ per ogni i? Confrontare tale probabilità con quelle dei sistemi in serie e in parallelo con 3 componenti.



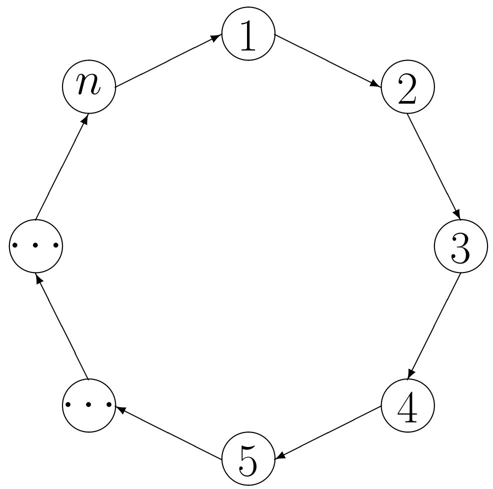
Soluzione. Sia $E_i = \{$il componente i-esimo funziona$\}$. Allora, per l'indipendenza,

$$\begin{aligned} P(F_m) &:= P(\text{il sistema funziona}) = P\left((E_1 \cup E_2) \cap E_3 \cap (E_4 \cup E_5)\right) \\ &= P(E_1 \cup E_2)P(E_3)P(E_4 \cup E_5) = (p_1 + p_2 - p_1\, p_2)\, p_3\, (p_4 + p_5 - p_4\, p_5). \end{aligned}$$

Pertanto, se $p_i = p$ per ogni i, risulta $P(F_m) = p^3\,(2-p)^2$, $0 \le p \le 1$. Confrontando tale probabilità con con quelle dei sistemi in serie e in parallelo con 3 componenti si ha

$$P(F_s) = p^3 \le P(F_m) \le 1 - (1-p)^3 = P(F_p), \qquad 0 \le p \le 1.$$

Esempio. Si consideri un sistema costituito da n unità numerate da 1 a n (vedi figura). Ciascuna unità, indipendentemente dalle altre, sceglie a caso un numero da 1 a n e lo invia all'unità successiva in senso orario. Calcolare la probabilità che almeno un'unità riceva dall'unità precedente un numero identico al proprio, e valutarla quando $n \to \infty$ ricordando che $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha}$



Soluzione. Per $C_i = \{$l'unità i-esima riceve il mumero $i\}$, si ha $P(C_i) = \frac{1}{n}$ e quindi per l'indipendenza risulta

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{C}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{C}_i\right) = 1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = 1 - e^{-1} = 0{,}6321.$$

Esempio. Nell'esperimento che consiste nel lanciare n volte una moneta truccata, indicando con t la fuoriuscita di testa e con c di croce, lo spazio campionario è

$$S = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \colon \omega_i \in \{t, c\} \text{ per } 1 \le i \le n\},$$

le cui 2^n sequenze in generale non sono equiprobabili. Supponendo che per $0 < p < 1$

$$P(T_k) = P(\{\text{al } k\text{-esimo lancio esce testa}\}) = p, \qquad 1 \le k \le n,$$

e che i lanci siano indipendenti, calcolare le probabilità degli eventi $A_k = \{$nei primi k lanci esce testa$\}$, $A'_k = \{$nei primi k lanci esce croce$\}$, $B_k = \{$esce testa k volte$\}$.

Soluzione. Per l'indipendenza si ha

$$P(A_k) = P(T_1 \cap T_2 \cap \ldots \cap T_k) = P(T_1)\, P(T_2) \ldots P(T_k) = p^k,$$

e analogamente $P(A'_k) = (1-p)^k$. Inoltre risulta

$$P(B_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$