Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica ed Informatica Applicata

Università di Salerno

Lezione n° 10

Algoritmo del Simplesso:

- Coefficienti di costo ridotto
- Condizioni di ottimalità
- Test dei minimi rapporti
- Cambio di base

R. Cerulli – F. Carrabs

Calcolo della soluzione ottima di un problema di PL.

Consideriamo il problema (PL) in Forma Standard

$$\min \; z = \underline{c}^T \underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Data una base B ammissibile, partizioniamo sia la matrice A che il vettore delle incognite $\underline{x}$ come segue:

$A=[\, A_B \mid A_N \,]$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{m componenti} \\ \text{n – m componenti} \end{matrix}$$

Il sistema di equazioni lineari $A\underline{x}=\underline{b}$ si può riscrivere come

$$A_B \underline{x}_B + A_N \underline{x}_N = \underline{b} \rightarrow A_B \underline{x}_B = \underline{b} - A_N \underline{x}_N \rightarrow \underline{x}_B = A^{-1}_B\underline{b} - A^{-1}_B A_N \underline{x}_N$$

Calcolo della soluzione ottima di un problema di PL.

Riscriviamo anche la funzione obiettivo come:

$$z = \underline{c}^T \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{c}_B^T & \underline{c}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_B \\ \underline{x}_N \end{bmatrix} = \underline{c}_B^T \underline{x}_B + \underline{c}_N^T \underline{x}_N \qquad (1)$$

Sostituiamo in (1) l'espressione delle variabili di base:

$$\underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N \qquad (2)$$

ottenendo: $$z = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b} - \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}_N^T \underline{x}_N \qquad (3)$$

Il valore della funzione obiettivo corrispondente alla base B è:

$$z = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b}$$

Le relazioni (2) e (3) esprimono rispettivamente i vincoli e la funzione obiettivo in funzione delle variabili fuori base.

$$z = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b} - \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}_N^T \underline{x}_N$$

$$\underline{x}_B = A_B^{-1} \underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N \qquad (4)$$

Le (4) sono m+1 equazioni.

Indicando con:

$$\bar{\underline{b}} = A_B^{-1}\underline{b}$$

Otteniamo:

$$z = \underline{c}_B^T A_B^{-1}\underline{b} - \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}_N^T \underline{x}_N \Leftrightarrow z = \underline{c}_B^T \bar{\underline{b}} - \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}_N^T \underline{x}_N$$

$$\underline{x}_B = A_B^{-1}\underline{b} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N \Leftrightarrow \underline{x}_B = \bar{\underline{b}} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N$$

Inoltre essendo:

$$A_N \underline{x}_N = \sum_{j \in N} \underline{a}_j x_j$$

Abbiamo

$$z = \underline{c}_B^T \underline{\bar{b}} - \underline{c}_B^T A_B^{-1} A_N \underline{x}_N + \underline{c}_N^T \underline{x}_N \Leftrightarrow z = \underline{c}_B^T \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j$$

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - A_B^{-1} A_N \underline{x}_N \Leftrightarrow \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} A_B^{-1} \underline{a}_j x_j$$

dove $\underline{a}_j$ è la colonna di N che moltiplica la j-esima variabile fuori base.

Infine ponendo: $A_B^{-1}\underline{a}_j = \underline{y}_j$

Otteniamo: $\underline{x}_B = \underline{\overline{b}} - \sum_{j\in N} A_B^{-1}\underline{a}_j x_j \Leftrightarrow \underline{x}_B = \underline{\overline{b}} - \sum_{j\in N} \underline{y}_j x_j$

dove le $\underline{y}_j$ sono termini noti e x_j variabili.

La nostra funzione obiettivo diventa:

$$z = \underline{c}_B^T \underline{\overline{b}} - \sum_{j\in N} \underline{c}_B^T A_B^{-1}\underline{a}_j x_j + \sum_{j\in N} c_j x_j \Leftrightarrow z = \underline{c}_B^T \underline{\overline{b}} - \sum_{j\in N} \underline{c}_B^T \underline{y}_j x_j + \sum_{j\in N} c_j x_j$$

Poniamo: $\underline{c}_B^T \underline{\overline{b}} = z_0$ e $\underline{c}_B^T \underline{y}_j = z_j$

la nostra F.O. diventa:

$$\min z = \underline{c}_B^T \underline{\overline{b}} - \sum_{j \in N} \underline{c}_B^T \underline{y}_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j \Leftrightarrow \min z = z_0 - \sum_{j \in N} z_j x_j + \sum_{j \in N} c_j x_j \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \min \quad z = z_0 - \sum_{j \in N} (z_j - c_j) x_j$$

I coefficienti $z_j - c_j$

vengono detti **coefficienti di costo ridotto**.

Forma canonica in funzione di una base B

Consideriamo il problema (PL) in Forma Standard

$$\min \quad z = \underline{c}^T \underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Data una base B ammissibile, riscriviamo il problema in funzione di B come segue:

$$\min z = z_0 - \sum_{j \in N} (z_j - c_j) x_j$$

$$\underline{x}_B = \overline{\underline{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j$$

$$\underline{x} \geq 0$$

$$z_0 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{b}$$

$$z_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j$$

$$\overline{\underline{b}} = A_B^{-1} \underline{b}$$

$$\underline{y}_j = A_B^{-1} \underline{a}_j$$

Verifichiamo se la soluzione di Base corrente è ottima o può essere migliorata

Consideriamo l'obiettivo: $\min z = z_0 - \sum_{j \in N} (z_j - c_j) x_j$

Supponiamo che esista un coefficiente k∈N tale che

$$z_k - c_k > 0$$

e consideriamo come varia l'obiettivo facendo diventare positiva la variabile fuori base x_k, attualmente nulla.

$$z = z_0 - \overbrace{(z_k - c_k) x_k}^{>0}$$

$x_k > 0$

L'obiettivo migliora !

5. Teorema (Condizione di ottimalità)

Una soluzione di base non degenere di un problema di PL è ottima se e solo se:

1) $\bar{b}_i \geq 0$ (ammissibile)

2) $z_j - c_j \leq 0 \;\; \forall j \in N$ (non migliorabile)

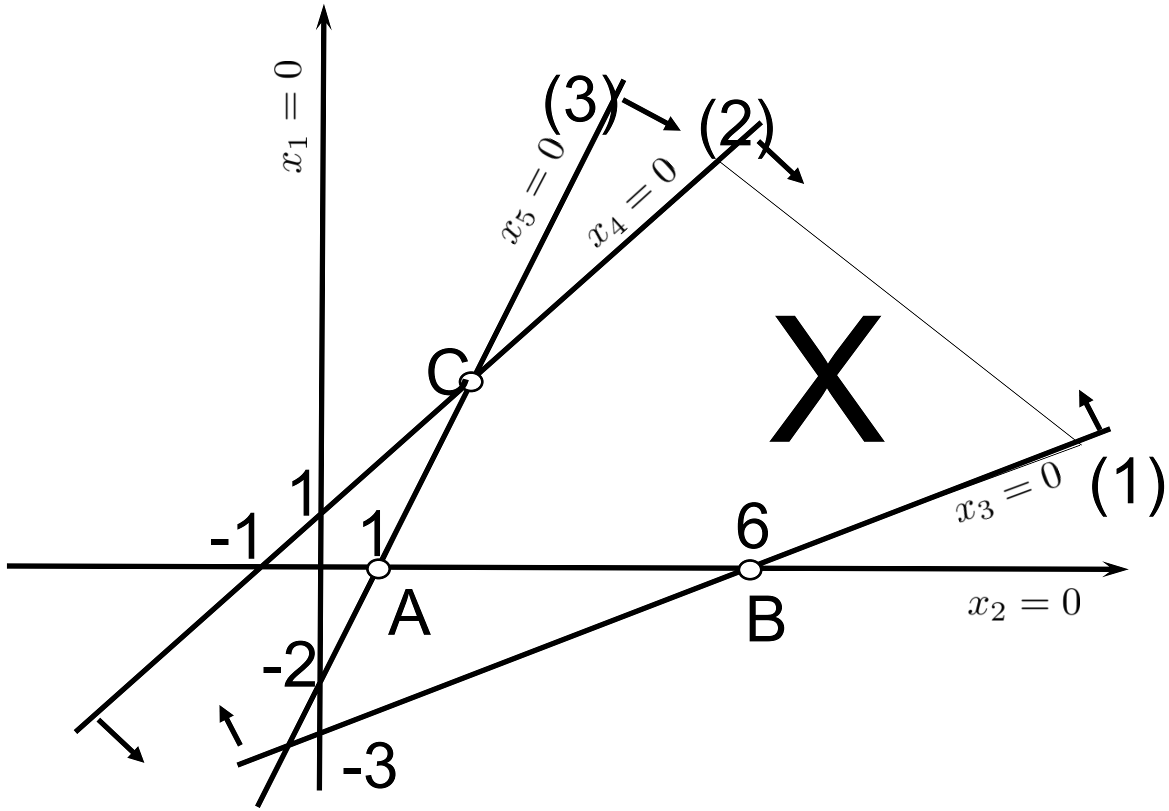
E' possibile iterare il procedimento fino a che esiste qualche variabile fuori base che può migliorare l'obiettivo se portata in base.

Nel caso di soluzione degenere possono esistere soluzioni ottime in cui il punto (2) del teorema 5 non è soddisfatto.

Tuttavia, se un problema ammette soluzione ottima finita allora ammette una soluzione di base ottima che soddisfa le condizioni (1) e (2) del teorema 5.

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 & \leq 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 & \leq 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 & \geq 2 \\ (4) & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$



Forma Standard

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lll} (1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 & = 3 \\ (2) & -x_1 + x_2 + x_4 & = 1 \\ (3) & 2x_1 - x_2 - x_5 & = 2 \\ (4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{array}$$

Verificare analiticamente se la soluzione di base associata al punto A soddisfa il test di ottimalità.

$$\min z = 3x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 & = 3 \\
(2) & -x_1 + x_2 + x_4 & = 1 \\
(3) & 2x_1 - x_2 - x_5 & = 2 \\
(4) & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 &
\end{array}
$$

$$
A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$
A_{B_A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$
A_{B_A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
$$

$B_A = \{1,3,4\}$ $N_A = \{2,5\}$

$$\underline{c}_B^T = (3,0,0)$$

$$z_j - c_j = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_j - c_j$$

$$z_2 - c_2 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_2 - c_2 = (3,0,0) A_B^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 = (0,0,\tfrac{3}{2}) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 = -\tfrac{3}{2} - 1 = -\tfrac{5}{2}$$

$$z_5 - c_5 = \underline{c}_B^T A_B^{-1} \underline{a}_5 - c_5 = (3,0,0) A_B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = (0,0,\tfrac{3}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = -\tfrac{3}{2} - 0 = -\tfrac{3}{2}$$

Poichè incrementando il valore della variabile fuori base x_k il valore della funzione obiettivo migliora, si potrebbe pensare di aumentare indefinitivamente x_k.

Tuttavia, aumentando x_k anche le equazioni (5) corrispondenti ai vincoli variano, modificando i valori delle variabili di base:

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j \geq \underline{0} \qquad (5)$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

Dal momento che per $j \in N$ le x_j sono uguali a zero per $j \neq k$ la relazione:

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \sum_{j \in N} \underline{y}_j x_j$$

Diventa:

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \underline{y}_k x_k$$

$$\underline{x}_B = \underline{\bar{b}} - \underline{y}_k x_k$$

In forma vettoriale:

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_r} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_r \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{rk} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k$$

Se $\mathbf{y_{ik}} \leq \mathbf{0} \quad \forall \, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{B}$

allora x_{B_i} cresce al crescere di x_k e così x_{B_i} continua a essere non negativo. (**ottimo illimitato**)

Se esiste una componente *i* tale che y_{ik} >0

allora x_{B_i} decresce al crescere di x_k. Il valore di x_k verrà incrementato finché una delle variabili in base assumerà valore zero. Infatti noi vogliamo che:

$$x_{B_1} = \bar{b}_1 - y_{1k}x_k \geq 0$$

$$x_{B_2} = \bar{b}_2 - y_{2k}x_k \geq 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{B_m} = \bar{b}_m - y_{mk}x_k \geq 0$$

la variabile x_{B_i} che si azzererà per prima verrà tolta dalle variabili di base e sarà rimpiazzata dalla variabile x_k.

Possiamo scrivere:

$$x_{B_1} = \bar{b}_1 - \overset{\leq 0}{y_{1k}} x_k \geq 0 \iff sempre$$

$$x_{B_2} = \bar{b}_2 - \overset{>0}{y_{2k}} x_k \geq 0 \iff x_k \leq \frac{\bar{b}_2}{y_{2k}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{B_m} = \bar{b}_m - \overset{>0}{y_{mk}} x_k \geq 0 \iff x_k \leq \frac{\bar{b}_m}{y_{mk}}$$

Dobbiamo considerare solo i rapporti in cui $y_{ik} > 0$

Quindi considerando quei rapporti in cui $y_{jk} > 0$ la variabile x_k assumerà il seguente valore:

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{i \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Così:

$$x_{B_1} = \bar{b}_1 - y_{1k} x_k \geq 0 \Leftrightarrow \bar{b}_1 - y_{1k} \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \geq 0$$

....

$$x_{B_r} = \bar{b}_r - y_{rk} x_k \geq 0 \Leftrightarrow \bar{b}_r - y_{rk} \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = 0$$

....

$$x_{B_m} = \bar{b}_m - y_{mk} x_k \geq 0 \Leftrightarrow \bar{b}_m - y_{mk} \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \geq 0$$

Fare assumere ad x_k un valore positivo significa portare la variabile x_k in base.

Nello stesso tempo il valore delle altre variabili di base per cui $y_{ik}>0$ diminuisce.

Il valore che x_k assume in base è quello corrispondente all'annullamento della prima variabile di base, cioè

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{i \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

La variabile x_k entra in base, con tale valore, mentre la variabile x_{B_r} esce dalla base.

Il coefficiente y_{rk} è detto **Pivot**, (l'aggiornamento della base si dice **Pivoting**) e viene usato per aggiornare i valori delle variabili in base dopo l'ingresso in base di x_k.

$$\boxed{\begin{aligned} x_{B_i} &= \bar{b}_i - y_{ik}\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \\ x_k &= \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \end{aligned}}$$

La nuova soluzione di base

$$x_j = 0 \;\; \forall j \in N' \text{ con } N' = \{B_r\} \cup N - \{k\},\;\; x_{B_r} = 0$$

Le nuove variabili fuori base

Con il cambio delle variabili in base, la nuova matrice di base risulta composta delle stesse colonne della vecchia base ad eccezione del fatto che la colonna associata a x_{B_r} è stata sostituita dalla colonna associata a x_k.

La nuova soluzione di base ha migliorato il valore della funzione obiettivo:

$$z = z_0 - \overbrace{(\underbrace{z_k - c_k}_{>0})\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}}^{>0} \leq z_0$$