5.3 La variabile aleatoria uniforme

Una variabile aleatoria è detta *uniforme* (o *uniformemente* distribuita) sull'intervallo $(0, 1)$ se la sua densità è data da

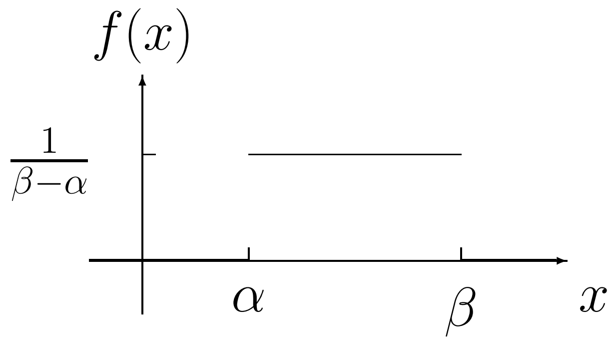
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Risulta $f(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$; inoltre per ogni $0 < a < b < 1$ si ha

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx = b - a.$$

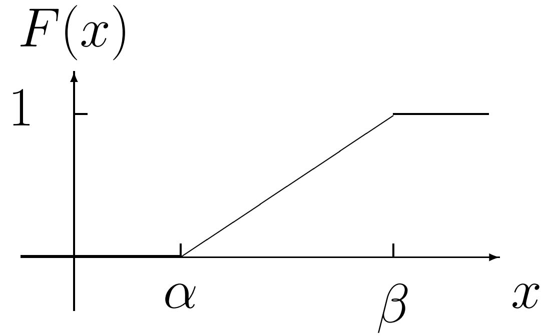
In generale, X è una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo (α, β) se ha densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



Essendo $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$, la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo (α, β) è data da

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha \le x < \beta \\ 1 & x \ge \beta \end{cases}$$



Esempio. Sia X una variabile aleatoria continua avente distribuzione uniforme su (α, β). Determinare momenti, valore atteso e varianza di X.

Soluzione. Si ha

$$E\left[X^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^n}{\beta-\alpha}\,dx = \frac{1}{(\beta-\alpha)}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{(n+1)(\beta-\alpha)},$$

$$E[X] = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)} = \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad E\left[X^2\right] = \frac{\beta^3-\alpha^3}{3(\beta-\alpha)} = \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3},$$

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3} - \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

Esempio. Sia X una variabile aleatoria avente distribuzione uniforme su $(-10, 10)$. Calcolare $P(X > 3)$, $P(X < 6)$ e $P(X > 3 \,|\, X < 6)$.

Soluzione. Dall'espressione della funzione di distribuzione

$$F(x) = \frac{x+10}{20}, \qquad -10 \leq x \leq 10$$

segue

$$P(X > 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20},$$

$$P(X < 6) = F(6) = \frac{16}{20},$$

$$P(X > 3 \,|\, X < 6) = \frac{P(3 < X < 6)}{P(X < 6)} = \frac{F(6) - F(3)}{F(6)} = \frac{3/20}{16/20} = \frac{3}{16}.$$

Esempio. Gli autobus passano ad una fermata ad intervalli di 15 minuti a partire dalle ore 7, cioè alle 7, 7:15, 7:30, 7:45, ecc. Se un passeggero arriva alla fermata in un istante uniformemente distribuito tra le 7 e le 7:30, determinare la probabilità che egli aspetti l'autobus (a) meno di 5 minuti (b) più di 10 minuti.

Soluzione. Sia X il minuto tra le 7 e le 7:30 in cui arriva il passeggero. Il passeggero aspetterà meno di 5 minuti se (e solo se) egli arriva tra le 7:10 e le 7:15 o tra le 7:25 e le 7:30. Pertanto, poiché X è uniforme sull'intervallo $(0, 30)$, si ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{30} & 0 < x < 30 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi la probabilità cercata in (a) è

$$P(10 < X < 15) + P(25 < X < 30) = \int_{10}^{15} \frac{1}{30}\, dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30}\, dx = \frac{5+5}{30} = \frac{1}{3}.$$

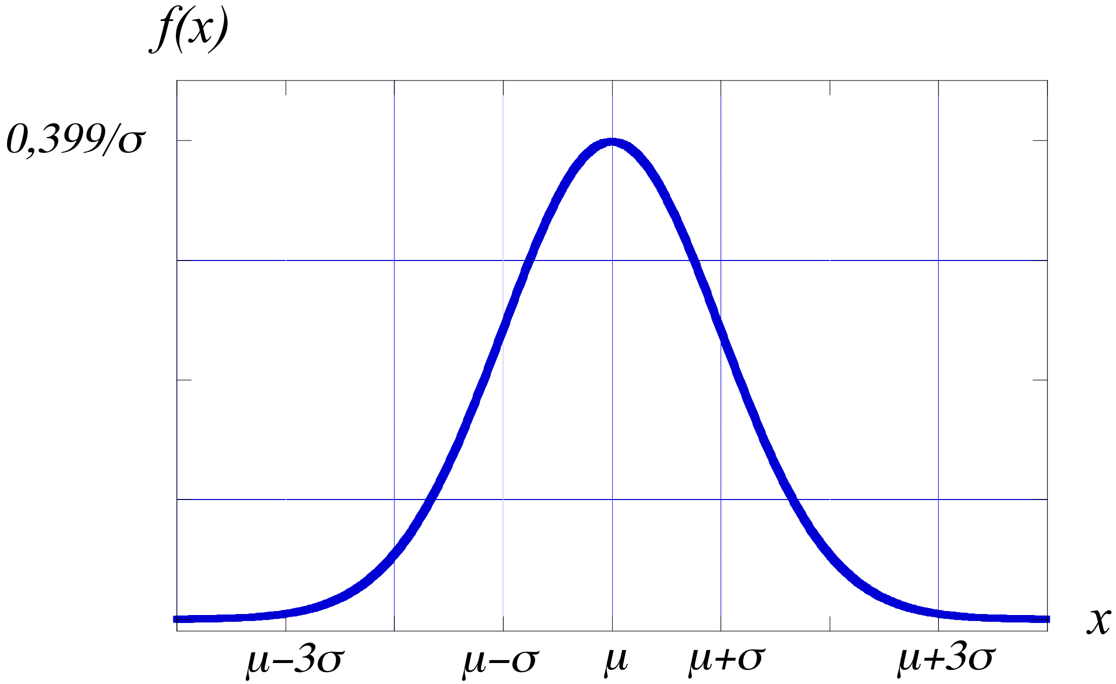
Analogamente, la probabilità cercata in (b) vale

$$P(0 < X < 5) + P(15 < X < 20) = \int_{0}^{5} \frac{1}{30}\, dx + \int_{15}^{20} \frac{1}{30}\, dx = \frac{5+5}{30} = \frac{1}{3}.$$

5.4 Variabili aleatorie normali

Una variabile aleatoria continua X è detta normale (o gaussiana) di parametri $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ se la densità di X è data da

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$



La densità è una funzione con grafico a campana, è simmetrica rispetto a $x = \mu$, ossia $f(\mu - t) = f(\mu + t)$ per ogni $t \geq 0$, e possiede 2 punti di flesso: $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$.

Esempio. Mostrare che se X è una variabile aleatoria normale di parametri μ e σ^2, allora valore atteso e varianza sono: $E[X] = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$.
Soluzione. Si ha

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \, dx.$$

Ponendo $z = (x - \mu)/\sigma$, si ottiene

$$E[X] = \sigma \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \, e^{-z^2/2} \, dz + \mu \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} \, dz.$$

Il risultato $E[X] = \mu$ segue direttamente da

$$\int_{-\infty}^{\infty} z \, e^{-z^2/2} \, dz = -e^{-z^2/2} \Big|_{z=-\infty}^{z=\infty} = 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} \, dz = 1,$$

dove l'ultima uguaglianza si può ricavare da opportune considerazioni.

Pertanto si ha

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \, dx.$$

Ponendo ancora $z = (x-\mu)/\sigma$, si ottiene

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \, e^{-z^2/2} \, dz = \sigma^2 \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-z) \, \frac{d}{dz} e^{-z^2/2} \, dz.$$

Quindi (integrando per parti) si ottiene

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-z) \, e^{-z^2/2} \Big|_{z=-\infty}^{z=\infty} + \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} \, dz = \sigma^2.$$

Proposizione. Se X è normale di parametri μ e σ^2, allora $Y = aX + b$ è una variabile normale di parametri $a\mu + b$ e $a^2\sigma^2$.

Dimostrazione. La densità di $Y = aX + b$ è data da

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= \frac{1}{|a|}\, f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \\ &= \frac{1}{|a|}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{x-b}{a}-\mu\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|a|\sigma}\,\exp\left\{-\frac{\left[x-(a\mu+b)\right]^2}{2(a\sigma)^2}\right\}, \end{aligned}$$

che è la densità di una variabile aleatoria normale di parametri $a\mu + b$ e $a^2\sigma^2$.

Una variabile aleatoria di valore medio 0 e varianza 1 è detta *standard*.

Esempio. Se X è una variabile aleatoria di valore medio μ e varianza σ^2 (con $\sigma > 0$), determinare i valori di a e b tali che $Z = aX + b$ sia standard.

Soluzione. Affinché sia $E(Z) = 0$ e $\mathrm{Var}(Z) = 1$ deve risultare

$$E(aX + b) = a\mu + b = 0, \qquad \mathrm{Var}(aX + b) = a^2\sigma^2 = 1,$$

da cui si ottengono due diverse scelte dei valori di a e b tali che $Z = aX + b$ è standard:

$$(a,\, b) = \left(\frac{1}{\sigma},\, -\frac{\mu}{\sigma}\right), \qquad (a,\, b) = \left(-\frac{1}{\sigma},\, \frac{\mu}{\sigma}\right).$$

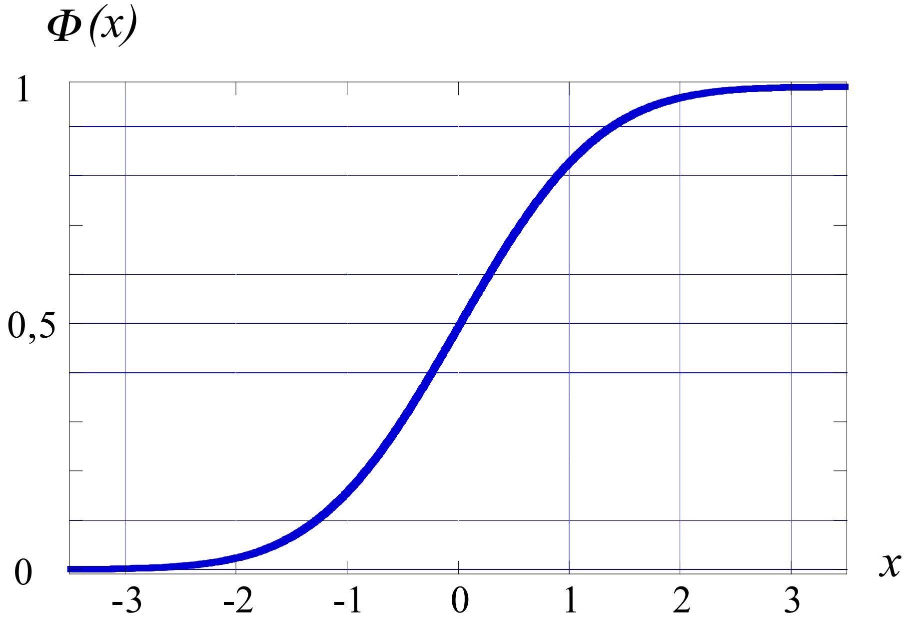
Dai risultati precedenti segue che se X è una variabile normale di parametri μ e σ^2,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad \text{e} \qquad Z' = \frac{\mu - X}{\sigma}$$

sono variabili normali di parametri 0 e 1, ossia sono *variabili normali standard*.

La funzione di distribuzione di una variabile normale standard si indica con $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\, dz, \qquad -\infty < x < \infty.$$



Nella Tabella in Appendice sono dati i valori di $\Phi(x)$ per $x = 0; 0{,}01; 0{,}02; \ldots; 3{,}49$. Per valori negativi di x, tale funzione si può ottenere dalla seguente formula:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Dalla simmetria della densità normale standard $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ segue la relazione di simmetria per $\Phi(x)$:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \qquad -\infty < x < \infty,$$

la quale afferma che se Z è una variabile normale standard allora

$$P(Z \le -x) = P(Z > x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Ricordiamo che se X è una variabile normale di parametri μ e σ^2, allora $Z = (X-\mu)/\sigma$ è una variabile normale standard, e quindi la funzione di distribuzione di X è

$$F_X(x) = P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Ne segue:

$$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X < a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Qui di seguito è riportata una routine in Linguaggio C per il calcolo di $\Phi(x)$:

```
//  File: gaussian_distribution.c
//  Routine(s): Gaussian_Distribution

#include <math.h>              // required for erf() and M_SQRT1_2

//  double Gaussian_Distribution( double x )
//
//  Description:
//  This function returns the probability that a random variable with
//  a standard Normal (Gaussian) distribution has a value less than "x".
//
//  Arguments:
//  double x   Argument of Pr[X < x] where X ~ N(0,1).
//
//  Return Values:
//  The probability of observing a value less than (or equal) to x assuming
//  a normal (Gaussian) distribution with mean 0 and variance 1.
//
//  M_SQRT1_2 = 1/(Ã2)=0.707107     (The inverse of the square root of 2)
//
//  Example:
//  double x, pr;
//
//  pr = Gaussian_Distribution(x);

double Gaussian_Distribution( double x )
{
   return  0.5 * ( 1.0 + erf( M_SQRT1_2 * x ) );
}
```

Esempio. Sia X una variabile aleatoria normale di parametri $\mu = 3$ e $\sigma^2 = 9$. Determinare $P(2 < X < 5)$, $P(X > 0)$, $P(|X-3| > 6)$.

Soluzione. Ponendo $Z = (X-\mu)/\sigma$ si ha:

$$\begin{aligned} P(2 < X < 5) &= P\left(\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right) = P\left(-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) \approx \Phi\big(0{,}67\big) - \big[1 - \Phi\big(0{,}33\big)\big] \\ &= 0{,}7486 - (1 - 0{,}6293) = 0{,}3779 \end{aligned}$$

$$P(X > 0) = P\left(\frac{X-3}{3} > \frac{0-3}{3}\right) = P\left(Z > -1\right) = 1 - \Phi\big(-1\big) = \Phi\big(1\big) = 0{,}8413$$

$$\begin{aligned} P(|X-3| > 6) &= P\big(X > 9\big) + P\big(X < -3\big) \\ &= P\left(\frac{X-3}{3} > \frac{9-3}{3}\right) + P\left(\frac{X-3}{3} < \frac{-3-3}{3}\right) \\ &= P\left(Z > 2\right) + P\left(Z < -2\right) = 1 - \Phi(2) + \Phi(-2) \\ &= 2\big[1 - \Phi\big(2\big)\big] = 2(1 - 0{,}9772) = 0{,}0456 \end{aligned}$$

Esempio. In un test d'esame in cui il punteggio assegnato è una variabile aleatoria normale X di parametri μ e σ^2 viene assegnata la lettera A a chi ha un punteggio superiore a $\mu+\sigma$, B a chi ha un punteggio tra μ e $\mu+\sigma$, C a chi ha un punteggio tra $\mu-\sigma$ e μ, D a chi ha punteggio tra $\mu-2\sigma$ e $\mu-\sigma$, ed E a chi ottiene un punteggio inferiore a $\mu-2\sigma$. Determinare le percentuali dei giudizi A, B, C, D, E.

Soluzione. Dato che

$$P(X>\mu+\sigma)=P\Big(\frac{X-\mu}{\sigma}>1\Big)=1-\Phi\big(1\big)=1-0{,}8413=0{,}1587$$

$$P(\mu<X<\mu+\sigma)=P\Big(0<\frac{X-\mu}{\sigma}<1\Big)=\Phi\big(1\big)-\Phi\big(0\big)=0{,}8413-0{,}5=0{,}3413$$

$$P(\mu-\sigma<X<\mu)=P\Big(-1<\frac{X-\mu}{\sigma}<0\Big)=\Phi\big(0\big)-\Phi\big(-1\big)=0{,}3413$$

$$P(\mu-2\sigma<X<\mu-\sigma)=P\Big(-2<\frac{X-\mu}{\sigma}<-1\Big)=\Phi\big(2\big)-\Phi\big(1\big)=0{,}1359$$

$$P(X<\mu-2\sigma)=P\Big(\frac{X-\mu}{\sigma}<-2\Big)=\Phi\big(-2\big)=1-\Phi\big(2\big)=1-0{,}9772=0{,}0228$$

segue che il 16% otterrà A, il 34% B, il 34% C, il 14% D ed il 2% E.

Esempio. Un bit deve essere trasmesso attraverso un canale soggetto a rumore. Per ridurre la possibilità di errore si invia il valore 2 quando il messaggio è **1** ed il valore -2 quando il messaggio è **0**. Se si spedisce x, allora il valore ricevuto è $R = x + Z$, per $x = \pm 2$, dove Z è una variabile aleatoria normale standard che descrive il rumore del canale. Si determini la probabilità di errore se il valore ricevuto è così decodificato:

$$\text{se } R \geq 0{,}5 \;\; \text{si decodifica } \mathbf{1},$$
$$\text{se } R < 0{,}5 \;\; \text{si decodifica } \mathbf{0}.$$

Soluzione. Si hanno 2 tipi di errore: uno è che il messaggio **1** sia erroneamente interpretato come **0**, l'altro è che **0** sia erroneamente interpretato come **1**. Il primo tipo di errore si realizza se il messaggio è **1** e $R = 2 + Z < 0{,}5$, il secondo si realizza se il messaggio è **0** e $R = -2 + Z \geq 0{,}5$. Posto $p_{\mathbf{k}} = P(\text{errore} \,|\, \text{il messaggio è}\,\mathbf{k})$, si ha

$$p_{\mathbf{1}} = P\big(2 + Z < 0{,}5\big) = P\big(Z < -1{,}5\big) = \Phi\big(-1{,}5\big) = 1 - \Phi\big(1{,}5\big) = 0{,}0668$$
$$p_{\mathbf{0}} = P\big(-2 + Z \geq 0{,}5\big) = P\big(Z \geq 2{,}5\big) = 1 - \Phi\big(2{,}5\big) = 0{,}0062.$$

Quesito. Cosa cambia se nel criterio di decodifica si usa la soglia 0 invece di 0,5?