Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica

Università degli Studi di Salerno

Lezione n° 12

Algoritmo del Simplesso:

- Metodo delle 2 Fasi
- Esempio

R. Cerulli – F. Carrabs

Metodo Delle Due Fasi

Dato il seguente problema di PL in forma STANDARD:

$$\min \quad z = \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad (1)$$

$$\underline{x} \geq \underline{0} \qquad (2)$$

$$\underline{x} \in R^n$$

con A(m.n) e $\underline{b} \geq 0$. Supponiamo di volerlo risolvere utilizzando l'algoritmo del simplesso.

Ci occorre una base iniziale

Metodo Delle Due Fasi

Se tra le colonne di A non è presente la matrice Identità non è facile individuare m colonne di A linearmente indipendenti.

Si modifica allora artificialmente il sistema dei vincoli:

$$\min \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad \rightarrow \quad A\underline{x} + I\,\underline{y} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \underline{x} \geq 0, \underline{y} \geq 0$$

con l'aggiunta di una variabile artificiale y_i ad ogni vincolo del sistema. Nel nuovo sistema è presente una matrice identità (associata alle variabili $\underline{y}$).

Metodo Delle Due Fasi

Una soluzione ($\underline{x}$',$\underline{y}$') del nuovo sistema sarà soluzione anche del sistema di partenza se e solo se $\underline{y}$'=0.

Per ottenere una tale soluzione (se esiste) risolviamo il seguente problema di PL.

$$\min \sum_i y_i$$

$$A\underline{x} + I\,\underline{y} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0, \underline{y} \geq 0$$

Metodo Delle Due Fasi

Per risolvere tale problema possiamo utilizzare il simplesso utilizzando come base iniziale le colonne della matrice (A,I) associate alle variabili artificiali $\underline{y}$.

Quindi nella prima fase si risolve il problema:

$$\min g = \sum_i y_i$$

$$A\underline{x} + I\,\underline{y} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0, \underline{y} \geq 0$$

Inizialmente tutte le variab. $\underline{y}$ sono in base mentre tutte le variabili $\underline{x}$ sono fuori base.

Metodo Delle Due Fasi

Alla fine della prima fase possono verificarsi due casi, l'ottimo della F.O:

1) $g^* > 0$ $\Rightarrow$ $A\underline{x}=\underline{b}$ non ammette soluzione. Non si passa alla seconda fase

2) $g^* = 0$ $\Rightarrow$ $A\underline{x}=\underline{b}$ ammette soluzione (a meno di soluzioni degeneri).
   Si passa alla seconda fase: si risolve il problema iniziale utilizzando la base ottima della prima fase come base iniziale della seconda fase.

Metodo Delle Due Fasi: Esempio

$$\begin{aligned} &\min z = -x_1 - 2x_2 \\ &x_1 + x_2 \geq 1 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ &\underline{x} \geq 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\min z = -x_1 - 2x_2 \\ &x_1 + x_2 - x_3 \qquad = 1 \\ &x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 4 \\ &\underline{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Problema della
Prima fase

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\min g = y_1 \\ &x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 1 \\ &x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad = 4 \\ &\underline{x} \geq 0, \underline{y} \geq 0 \end{aligned}$$

Metodo Delle Due Fasi: Esempio

Per uniformità poniamo $y_1 = x_5$.

$$\min g = x_5$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \quad + x_5 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 \quad + x_4 \quad = 4$$

$$\underline{x} \geq 0$$

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \{5,4\} \quad N = \{1,2,3\}$$

Matr. Identità
Base Iniziale

Metodo Delle Due Fasi: Esempio

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{x}_B = A_B^{-1}\underline{b} \Leftrightarrow \underline{x}_B = I\underline{b} \Leftrightarrow \underline{x}_B = \underline{b}$$

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ x_4 \end{bmatrix} = \bar{b} = A_B^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \qquad x_5 = 1, x_4 = 4$$

Test di Ottimalità: calcolo di $z_j - c_j$ per $j \in N$

$$B = \{5,4\} \quad N = \{1,2,3\}$$

$$(z_1 - c_1) = [1 \;\; 0] I \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 1 \qquad (z_2 - c_2) = [1 \;\; 0] I \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 0 = 1$$

$$(z_3 - c_3) = [1 \;\; 0] I \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -1$$

Metodo Delle Due Fasi: Esempio

x_2 entra in base   Quale variabile esce dalla base?

Regola del minimo rapporto:

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ x_4 \end{bmatrix} = \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \underline{y}_2 = A_B^{-1}\underline{a}_2 = I \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\bar{b}_1}{y_{1k}} = \min_{j \in B}\left\{ \frac{\bar{b}_j}{y_{jk}} : y_{jk} > 0 \right\} \Rightarrow x_2 = 1 = \min\{1,2\}$$

x_5 esce dalla base; x_2 entra in base con valore 1

Nuova base: $\mathrm{B} = \{2,4\} \quad \mathrm{N} = \{1,5,3\}$

Metodo Delle Due Fasi: Esempio

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \bar{b} = \mathrm{A}_\mathrm{B}^{-1}\underline{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Test di Ottimalità: calcolo di $z_j - c_j$ per $j \in N$

$$\mathrm{B} = \{2,4\} \quad \mathrm{N} = \{1,5,3\}$$

$$(z_1 - c_1) = [0 \;\; 0]\mathrm{A}_\mathrm{B}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 0 \qquad (z_3 - c_3) = [0 \;\; 0]\mathrm{A}_\mathrm{B}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

$$(z_5 - c_5) = [0 \;\; 0]\mathrm{A}_\mathrm{B}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 = -1$$

Metodo Delle Due Fasi: Esempio

Soluzione Ottima della Prima fase

$$g^* = \underline{c}_B \overline{\underline{b}} \Leftrightarrow \underline{c}_B A_B^{-1} \underline{b}$$

$$g^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

Si può passare alla seconda fase

Si risolve il problema iniziale: utilizzando come base di partenza:

$$\mathrm{B} = \{2,4\} \quad \mathrm{N} = \{1,3\}$$

$$\min z = -x_1 - 2x_2$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

$$\underline{x} \geq 0$$

Metodo Delle Due Fasi: Esempio

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underline{\bar{b}} = \mathrm{A}_\mathrm{B}^{-1}\underline{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Test di Ottimalità: calcolo di $z_j - c_j$ per $j \in N$

$$\mathrm{B} = \{2,4\} \quad \mathrm{N} = \{1,3\}$$

$$(z_1 - c_1) = [-2 \;\; 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = -1$$

$$(z_3 - c_3) = [-2 \;\; 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 2$$

Metodo Delle Due Fasi: Esempio

x_3 entra in base   Quale variabile esce dalla base?

Regola del minimo rapporto:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underline{\bar{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{y}_3 = A_B^{-1}\underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{\bar{b}_2}{y_{2k}} = \min_{j \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_j}{y_{jk}} : y_{jk} > 0 \right\} \Rightarrow x_3 = 1 = \min\{1\}$$

x_4 esce dalla base; x_3 entra in base con valore 1

Nuova base: $\mathrm{B} = \{2,3\} \quad \mathrm{N} = \{1,4\}$

Metodo Delle Due Fasi: Esempio

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{\underline{b}} = \mathrm{A}_{\mathrm{B}}^{-1}\underline{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Test di Ottimalità: calcolo di $z_j - c_j$ per $j \in N$

$$\mathrm{B} = \{2,3\} \quad \mathrm{N} = \{1,4\}$$

$$(z_1 - c_1) = [-2 \;\; 0] \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = -1 + 1 = 0$$

$$(z_4 - c_4) = [-2 \;\; 0] \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -1$$

Metodo Del Big M

Si modifica artificialmente il sistema dei vincoli:

$$\min \underline{c}^T \underline{x} \qquad \min \underline{c}^T \underline{x} + M \,\underline{1}^T \underline{y}$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad \rightarrow \quad A\underline{x} + I\,\underline{y} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \underline{x} \geq 0, \underline{y} \geq 0$$

con l'aggiunta di una variabile artificiale y_i ad ogni vincolo del sistema. Nel nuovo sistema è presente una matrice identità (associata alle variabili $\underline{y}$).

Alla funzione obiettivo originale vengono sommate (nel caso di un problema di minimo) le variabili artificiali moltiplicate per un coefficiente M molto grande.