Esempio. Un sistema di gestione della posta elettronica riceve un messaggio, che si suppone sia *spam* con probabilità 0,7 e *non spam* con probabilità 0,3. Il sistema effettua un controllo su ogni messaggio ricevuto; se riceve un messaggio *spam* lo valuta come tale con probabilità 0,9 (e lo valuta come *non spam* con probabilità 0,1) mentre se riceve un messaggio *non spam* lo valuta come tale con probabilità 0,8 (e lo valuta come *spam* con probabilità 0,2).

(i) Calcolare la probabilità che il sistema valuti come *spam* il messaggio ricevuto.

(ii) Se il sistema ha valutato come *spam* il messaggio ricevuto, qual è la probabilità che invece sia *non spam*?

(iii) Se il sistema ha valutato come *non spam* il messaggio ricevuto, qual è la probabilità che invece sia *spam*?

Soluzione. Per le ipotesi sull'evento $F = \{\text{il messaggio è } \textit{spam}\}$ si ha

$$P(F) = 0{,}7 \qquad P(\overline{F}) = 0{,}3.$$

Inoltre, posto $E = \{$il sistema valuta come *spam* il messaggio ricevuto$\}$, risulta

$$P(E \,|\, F) = 0{,}9 \qquad P(\overline{E} \,|\, F) = 0{,}1 \qquad P(\overline{E} \,|\, \overline{F}) = 0{,}8 \qquad P(E \,|\, \overline{F}) = 0{,}2.$$

Pertanto, dalla formula delle alternative segue

$$P(E) = P(E \,|\, F)\, P(F) + P(E \,|\, \overline{F})\, P(\overline{F}) = 0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}69.$$

Dalla formula di Bayes si ricavano le probabilità condizionate richieste:

$$P(\overline{F} \,|\, E) = \frac{P(E \,|\, \overline{F})\, P(\overline{F})}{P(E)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}3}{0{,}69} = \frac{0{,}06}{0{,}69} = 0{,}0870$$

e

$$P(F \,|\, \overline{E}) = \frac{P(\overline{E} \,|\, F)\, P(F)}{P(\overline{E})} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}7}{0{,}31} = \frac{0{,}07}{0{,}31} = 0{,}2258.$$

Esempio. Si lanciano a caso n monete non truccate; per ogni moneta che mostra testa si inserisce una biglia nera in un'urna, mentre per ogni croce si inserisce una biglia bianca. Se poi si estrae a caso una biglia dall'urna, qual è la probabilità che sia nera? Se la biglia estratta è nera, qual è la probabilità che nell'urna vi erano k biglie nere?

Soluzione. Sia $E_k = \{\text{esce testa } k \text{ volte}\} = \{\text{nell'urna vi sono } k \text{ biglie nere e } n-k \text{ bianche}\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Tali eventi sono a due a due incompatibili, sono necessari, e $P(E_k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} > 0$. Sia $A = \{\text{la biglia è nera}\}$; per la formula delle alternative si ha

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} P(A|E_k)\, P(E_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1},$$

essendo $\frac{k}{n} \cdot \binom{n}{k} = \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$. Ponendo $r = k-1$, dal teorema del binomio segue

$$P(A) = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} = \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2}.$$

Per ricavare $P(E_k|A)$ facciamo uso della formula di Bayes:

$$P(E_k|A) = \frac{P(A|E_k)\,P(E_k)}{\sum_{i=0}^{n} P(A|E_i)\,P(E_i)} = \frac{\frac{k}{n}\cdot\frac{\binom{n}{k}}{2^n}}{\frac{1}{2}} = \begin{cases} 0 & \text{se } k=0 \\ \frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^{n-1}} & \text{se } k=1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

È facile verificare che la somma delle probabilità $P(E_k|A)$ è unitaria:

$$\sum_{k=0}^{n} P(E_k|A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot 2^{n-1} = 1.$$

3.4 Eventi indipendenti

La probabilità condizionata di E dato F non è generalmente uguale a $P(E)$. In altri termini, la conoscenza della realizzazione dell'evento F modifica in generale la possibilità del realizzarsi o meno di E.

Se $P(E|F) = P(E)$ diciamo che E è indipendente da F. Cioè, E è indipendente da F se la conoscenza della realizzazione di F non cambia la probabilità che si realizzi E.

Se $P(F) > 0$, dalla formula $P(E|F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)}$ si vede che E è indipendente da F se

$$P(E \cap F) = P(E)\, P(F).$$

Tale formula è simmetrica in E ed F, pertanto se $P(E) > 0$ e $P(F) > 0$, l'evento E è indipendente da F se F è indipendente da E e viceversa.

La seguente definizione include anche i casi in cui $P(E) = 0$ oppure $P(F) = 0$.

Definizione. Due eventi E ed F si dicono *indipendenti* se vale

$$P(E \cap F) = P(E)\, P(F).$$

Due eventi che non sono indipendenti si dicono *dipendenti*.

Esempio. Uno studente deve sottoporsi a due test. Con probabilità 0,5 supererà il primo test; con probabilità 0,4 supererà il secondo test; con probabilità 0,3 li supererà entrambi. Gli eventi relativi al superamento dei due test sono indipendenti?

Soluzione. Sia B_i l'evento che lo studente superi il test i-esimo, $i = 1, 2$. Risulta

$$P(B_1 \cap B_2) = 0{,}3 \neq 0{,}2 = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = P(B_1)\, P(B_2),$$

quindi gli eventi B_1 e B_2 sono dipendenti.

Proposizione. Se A e B eventi tali che $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, allora le seguenti uguaglianze sono equivalenti:

(i) $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$,

(ii) $P(A|B) = P(A)$,

(iii) $P(B|A) = P(B)$.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\, P(B)}{P(B)} = P(A).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii):

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B)\, P(B)}{P(A)} = \frac{P(A)\, P(B)}{P(A)} = P(B).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i):

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A) = P(A)\, P(B).$$

Esercizio. Nell'esperimento che consiste nel lancio di n monete non truccate, sia $T_1 = \{\text{esce testa al primo lancio}\}$, $U = \{\text{esce lo stesso risultato negli } n \text{ lanci}\}$, $A = \{\text{esce testa almeno 1 volta}\}$. Mostrare che T_1 e U sono indipendenti, ed inoltre che T_1 e A non sono indipendenti. Mostrare che A e U sono indipendenti se, e solo se, $n = 1$.

Nota. Se per gli eventi A e B risulta $A \subset B$, allora sussiste indipendenza tra i 2 eventi se e solo se $P(A) = 0$ oppure $P(B) = 1$.

Nota. Se $P(A) = 0$ oppure $P(A) = 1$, allora l'evento A è indipendente da qualsiasi altro evento B.