Proposizione. Se X è una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ, allora

$$E(X) = \lambda, \qquad \mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

Dimostrazione. Risulta

$$p(k) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda}{k}\,e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{\lambda}{k}\,p(k-1), \qquad k \geq 1.$$

Quindi si ha $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k\,p(k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} p(k-1)$. Ponendo $j = k-1$ e ricordando che $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} p(j) = 1$ si ottiene $E(X) = \lambda \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} p(j) = \lambda$.

Analogamente, si ha $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^2\,p(k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k\,p(k-1)$. Per $j = k-1$ si ottiene

$E(X^2) = \lambda \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\,p(j) = \lambda\,E(X+1) = \lambda\,[E(X)+1] = \lambda\,(\lambda+1)$, avendo usato la proprietà di linearità. Pertanto, $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda\,(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda$.

Esempio. Le linee di trasmissione $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ hanno velocità di 8 Mbit/sec e 16 Mbit/sec rispettivamente, e sono soggette ad errori con frequenza X_1 e X_2 al minuto, con X_1 e X_2 variabili di Poisson di parametro $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4{,}4$ rispettivamente. Sia $U(X_i) = n_i - 200X_i$ il ricavo dall'uso della linea $\mathcal{L}_i$, $i = 1, 2$, dove n_i è il numero di Mbit trasmessi in un minuto usando tale linea. Stabilire quale linea sia più conveniente.

Soluzione. Ricordando la proprietà di linearità del valor medio, e che $E[X_i] = \lambda_i$, si ottiene che il ricavo atteso è identico per le 2 linee:

$$E[U(X_i)] = E[n_i - 200X_i] = n_i - 200E[X_i] = \begin{cases} 8 \cdot 60 - 200 \cdot 2 = 80, & i = 1 \\ 16 \cdot 60 - 200 \cdot 4{,}4 = 80, & i = 2. \end{cases}$$

Analogamente, usando la proprietà della varianza e $Var[X_i] = \lambda_i$, si ha:

$$Var[U(X_i)] = Var[n_i - 200X_i] = (200)^2 Var[X_i] = \begin{cases} 8 \cdot 10^4, & i = 1 \\ 17{,}6 \cdot 10^4, & i = 2. \end{cases}$$

Essendo $Var[U(X_2)] > Var[U(X_1)]$ si trae che il ricavo dall'uso della linea $\mathcal{L}_2$ presenta maggiore variabilità. Infatti, ad esempio:

$$P[U(X_i) < 0] = P[n_i - 200X_i < 0] = P[X_i > n_i/200] = \begin{cases} P[X_1 > 2{,}4], & i = 1 \\ P[X_2 > 4{,}8], & i = 2. \end{cases}$$

Risulta:

$$P[U(X_1) < 0] = P[X_1 > 2{,}4] = P[X_1 \geq 3] = 1 - P[X_1 = 0] - P[X_1 = 1] - P[X_1 = 2]$$

ossia, ricordando che $\lambda_1 = 2$:

$$P[U(X_1) < 0] = 1 - e^{-\lambda_1}\left(1 + \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{2}\right) = 1 - 5e^{-2} = 0{,}3233.$$

Analogamente, poiché $\lambda_2 = 4{,}4$ si ha

$$P[U(X_2) < 0] = P[X_2 > 4{,}8] = 1 - \sum_{k=0}^{4} P[X_2 = k] = 1 - e^{-4{,}4}\sum_{k=0}^{4}\frac{(4{,}4)^k}{k!} = 0{,}4488.$$

Inoltre, procedendo in modo simile (con $n_1 = 480$ e $n_2 = 960$) si ottiene ad esempio:

$$\begin{aligned} P[U(X_i) > 100] &= P[n_i - 200X_i > 100] = P[X_i < (n_i - 100)/200] \\ &= \begin{cases} P[X_1 < 1{,}9] = P[X_1 \leq 1] = e^{-2}\sum_{k=0}^{1}\frac{(2)^k}{k!} = 0{,}406, & i = 1 \\ P[X_2 < 4{,}3] = P[X_2 \leq 4] = e^{-4{,}4}\sum_{k=0}^{4}\frac{(4{,}4)^k}{k!} = 0{,}5522, & i = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ciò conferma che il ricavo dall'uso della linea $\mathcal{L}_2$ presenta maggiore variabilità.

4.9 Ulteriori distribuzioni di probabilità discrete

La variabile aleatoria geometrica

Supponiamo di ripetere (in condizioni di indipendenza) una prova avente probabilità di successo p, con $0 < p < 1$, fintanto che non si verifica il primo successo. Denotando con X il numero di prove necessarie per ottenere il primo successo, allora

$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Invero, si ha $X = n$ se le prime $n - 1$ prove siano state un insuccesso e l'n-esima prova un successo. La formula si ricava anche per l'ipotesi di indipendenza tra le prove.

Risulta:

$$P(X = n) = (1-p)^{n-1}p > 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} P(X = n) = p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = \frac{p}{1 - (1 - p)} = 1,$$

avendo ricordato che $1 + c + c^2 + c^3 + \ldots = 1/(1 - c)$ se $-1 < c < 1$.
La variabile aleatoria X è detta variabile aleatoria geometrica di parametro p.

Esempio. Un'urna contiene N biglie bianche e M biglie nere. Si estrae a caso una biglia alla volta, con reinserimento, fino a che non esce la prima biglia nera. Calcolare la probabilità che si debbano estrarre (a) esattamente n biglie, (b) più di k biglie.

Soluzione. Sia X il numero di biglie che si estraggono per ottenere la prima biglia nera. Allora X ha distribuzione geometrica di parametro $p = M/(M+N)$. Quindi

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \qquad P(X=n) &&= (1-p)^{n-1}\, p; \\
&\text{(b)} \qquad P(X>k) &&= p \sum_{n=k+1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = p\,(1-p)^k \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j \\
& &&= p\,(1-p)^k \, \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^k,
\end{aligned}
$$

avendo posto $j = n-k-1$ e avendo ricordato che, per $-1 < c < 1$,

$$\sum_{j=0}^{\infty} c^j = \frac{1}{1-c}.$$

Notiamo che la probabilità $P(X > k) = (1-p)^k$ si può calcolare anche direttamente, poiché la probabilità che siano necessarie più di k prove per ottenere il primo successo è uguale alla probabilità che le prime k prove diano come esito k insuccessi.

Quindi, per una variabile aleatoria geometrica vale $P(X > k) = (1-p)^k$, $k \geq 0$.

Proposizione. (Proprietà di assenza di memoria) Se X è una variabile aleatoria geometrica di parametro p, allora per ogni $k, n \geq 0$ risulta

$$P(X > n + k | X > k) = P(X > n).$$

Dimostrazione. Per ogni $k, n \geq 0$ si ha

$$P(X > n + k | X > k) = \frac{P(\{X > n + k\} \cap \{X > k\})}{P(X > k)} = \frac{P(X > n + k)}{P(X > k)}$$

$$= \frac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^k} = (1-p)^n = P(X > n).$$

Esaminiamo un'interpretazione della proprietà di assenza di memoria: in una sequenza di partite ripetute in condizioni d'indipendenza un giocatore d'azzardo punta ripetutamente su un esito avente probabilità pari a p. Se X denota il tentativo in cui si realizza la vincita per la prima volta, tale variabile aleatoria è geometrica di parametro p.

Pertanto $P(X > n)$ è la probabilità di non realizzare la vincita nei primi n tentativi. Invece, $P(X > n + k | X > k)$ è la probabilità condizionata di non realizzare la vincita nei prossimi n tentativi sapendo che nei primi k tentativi non c'è stata vincita.

La proprietà di assenza di memoria mostra quindi che tali probabilità sono identiche, e pertanto avere informazioni sulle mancate vincite non altera la probabilità di vincita in tentativi successivi. Ne segue, ad esempio, che puntare sui numeri ritardatari nel gioco nel lotto non incrementa la probabilità di vincita.

La proprietà di assenza di memoria può esprimersi anche così: per ogni $k, n \geq 0$ risulta

$$P(X = n+k|X > k) = \frac{P(X = n + k)}{P(X > k)} = \frac{(1-p)^{n+k-1}p}{(1-p)^k} = (1-p)^{n-1}p = P(X = n).$$

Esempio. Si lancia a caso una moneta. Calcolare la probabilità che esca testa per la prima volta dopo il 5^o lancio sapendo che nei primi 3 lanci non esce testa.

Soluzione. Essendo $p = 1/2$, per la proprietà di assenza di memoria si ha:

$$P(X > 5|X > 3) = P(X > 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Proposizione. Se X è una variabile aleatoria geometrica di parametro p, allora

$$E(X) = \frac{1}{p}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Dimostrazione. Posto $q = 1 - p$ abbiamo che:

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, q^{n-1} p = p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dq}(q^n) = p \frac{d}{dq} \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right).$$

Utilizzando l'identità $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ ricaviamo il valore atteso

$$E(X) = p \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{1-q} \right) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Calcoliamo ora il momento del secondo ordine di X:

$$E(X^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2\, q^{n-1} p = p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dq}(nq^n) = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{n=1}^{\infty} nq^n\right) = p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{p}\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}p\right).$$

Ricordando che $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, q^{n-1}p = \dfrac{1}{p}$, si ha

$$E(X^2) = p\frac{d}{dq}\left[\frac{q}{(1-q)^2}\right] = p\left[\frac{(1-q)^2 + 2q(1-q)}{(1-q)^4}\right] = p\left[\frac{1}{p^2} + \frac{2(1-p)}{p^3}\right] = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}.$$

Infine si ottiene la varianza:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

In particolare, se si ripete una serie di prove indipendenti, ognuna con probabilità di successo p, fino a che non si verifica il primo successo, allora il numero atteso di prove è uguale a $1/p$. Ad esempio, per un fissato valore nel lancio di un dado è $p = \frac{1}{6}$ e quindi $E(X) = 6$; per il singolo estratto nel gioco del lotto è $p = \frac{1}{18}$ e quindi $E(X) = 18$.

Esempio. Calcolare la probabilità che una variabile aleatoria geometrica X assuma valore non maggiore del suo valore atteso, se $1/p$ è intero. Valutare tale probabilità quando $p \to 1^-$ e quando $p \to 0^+$.

Soluzione. Ricordando che $E(X) = 1/p$ e che $P(X \leq k) = 1 - (1-p)^k$ si ha

$$P\{X \leq E(X)\} = 1 - (1-p)^{1/p}.$$

Pertanto

$$\lim_{p \to 1^-} P\{X \leq E(X)\} = 1 - \lim_{p \to 1^-} (1-p)^{1/p} = 1,$$

$$\lim_{p \to 0^+} P\{X \leq E(X)\} = 1 - \lim_{p \to 0^+} (1-p)^{1/p} = 1 - \lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632.$$