Esercizi su Formulazione, Dualitá, Sensitivitá, Scarti Complemntari

1. Un'azienda produce tre tipi di elettrodomestici: lavatrici, frigoriferi e forni. Per produrre una lavatrice occorrono 9 ore di lavorazione sulla macchina M1 e 8 ore di lavorazione sulla macchina M2; mentre per produrre un frigorifero occorrono 11 ore di lavorazione sulla macchina M2; infine per produrre un forno occorrono 4 ore sulla macchina M1 e 6 sulla macchina M2. La macchina M1 è disponibile per 137 ore settimanali, mentre la macchina M2 è disponibile per 149 ore settimanali. Il numero di forni prodotti non può essere superiore alla somma dei frigoriferi e delle lavatrici prodotte. Tuttavia devono essere prodotti almeno 20 forni. Inoltre la differenza tra il numero di lavatrici e frigoriferi prodotti deve essere uguale a 5. Il guadagno ottenuto dalla vendita di una lavatrice è di 375 euro, quello ottenuto per un frigorifero è 320 euro e quello per un forno è 170 euro. Si vuole conoscere la quantità di lavatrici, frigoriferi e forni da produrre settimanalmente per massimizzare il guadagno totale nel rispetto dei vincoli di produzione.

   a) **Si formuli il corrispondente modello di programmazione lineare (n.b. non risolvere il problema);**

   b) **Si scriva il duale del modello costruito al punto 1.**

1*a*) **Soluzione:**
Per prima cosa dobbiamo individuare quali sono le variabili del nostro problema. Poichè bisogna decidere il numero di lavatrici, frigoriferi e forni da produrre, associamo ad ogni tipo di elettrodomestico una variabile distinta: x_1, x_2, x_3 (per semplicità consideriamo le variabili non vincolate ad assumere un valore intero).

$$\max \quad 375x_1 + 320x_2 + 170x_3$$

$$\begin{aligned}
9x_1 + 4x_3 &\leq 137 \\
8x_1 + 11x_2 + 6x_3 &\leq 149 \\
x_3 &\leq x_1 + x_2 \\
x_3 &\geq 20 \\
x_1 - x_2 &= 5 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

1*b*) **Soluzione:**
Per poter facilmente calcolare il duale dobbiamo innanzitutto scrivere le forme di riferimento:

$$(P) \quad \begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad (D) \quad \begin{aligned} \max\ & b^T w \\ & A^T w \leq c \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	
w_1	9	0	4	137
w_2	8	11	6	149
w_3	-1	-1	1	0
w_4	0	0	1	20
w_5	1	-1	0	5
	375	320	170	

Una volta ricavata la tabella è facile ottenere il problema duale.

$$\min \quad 137w_1 + 149w_2 + 20w_4 + 5w_5$$

$$\begin{aligned} 9w_1 + 8w_2 - w_3 + w_5 &\geq 375 \\ 11w_2 - w_3 - w_5 &\geq 320 \\ 4w_1 + 6w_2 + w_3 + w_4 &\geq 170 \\ w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0, w_4 \leq 0, w_5 &\; n.v. \end{aligned}$$

2. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{array}{ccc} max \; -x_1 + 3/2x_2 & & -min \; x_1 - 3/2x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 & \xrightarrow{STANDARD} & -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -1/2x_1 + x_2 \leq 5 & & -1/2x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

a) **Si determini analiticamente il range di variabilità dei coefficienti di costo che lasci invariata la base ottima B={2,1};**

b) **Determinare gli intervalli di variabilità di ognuno dei termini noti affinché il punto di ottimo non cambi;**

c) **Moltiplicare i termini noti per k e calcolare tutti i valori di k che rendono la base B={2,4} ammissibile e ottima.**

d) **Moltiplicare il coefficienti di costo della variabile x_1 ed i termini noti per k e calcolare tutti i valori di k che rendono la base B={2,4} ammissibile e ottima.**

e) **Determinare la soluzione duale corrispondente al vertice ottimo.**

2a) Soluzione:

Data la base B={2,1} calcoliamo l'inversa A_B^{-1} e verifichiamo, tramite i valori dei coefficienti di costo ridotto, che sia effettivamente ottima.

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad\qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x_B = A_B^{-1} * \underline{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$z_3 - c_3 = [-\tfrac{3}{2}\ 1] \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = [-\tfrac{1}{2}\ \ -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -\tfrac{1}{2} < 0$$

$$z_4 - c_4 = [-\tfrac{3}{2}\ 1] \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = [-\tfrac{1}{2}\ \ -1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -1 < 0$$

Poichè tutti i coefficienti di costo ridotto sono negativi la base è ottima.

Il punto di ottimo è $(2,6)$ e $x_B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ (fare attenzione perchè la prima componente è associata alla variabile x_2).

Per stabilire di quanto si può variare un coefficiente di costo c_k senza cambiare la base ottima bisogna innanzitutto distinguere due casi:

- x_k fuori base.
  In questo caso c_B non cambia e quindi anche $z_j = c_B A_B^{-1} a_j$ rimane inalterato $\forall j \in N$. Solo $z_k - c_k$ viene sostituito da $z_k - c'_k$. Possiamo quindi scrivere: $z_k - c'_k = z_k - c_k + c_k - c'_k \leq 0$ affinchè la base ottima non cambi.

- x_k in base.
  In questo caso viene modificato c_B e quindi bisogna considerare tutti i coefficienti di costo ridotto. Supponiamo che $c'_{B_k} = c_{B_k} + \delta$. Possiamo quindi scrivere: $(c_B + \delta e_k) A_B^{-1} a_j = z_j - c_j + \delta (A_B^{-1})^k a_j \leq 0$.
  Ricordiamo che $(A_B^{-1})^k$ corrisponde alla $k - ma$ riga della matrice A_B^{-1}
  Per il nostro problema abbiamo: $c_2 = -\frac{3}{2}$ e $c_1 = 1$.
  Cominciamo con il variare il primo coefficiente di costo c_{B_1} (che corrisponde al coefficiente di costo c_2):

  $$z'_3 - c_3 = -\tfrac{1}{2} + \delta [-1\ 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\tfrac{1}{2} - \delta \leq 0 \Rightarrow \delta \geq -\tfrac{1}{2}$$

  $$z'_4 - c_4 = -1 + \delta [-1\ 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 + 2\delta \leq 0 \Rightarrow \delta \leq \tfrac{1}{2}$$

  Quindi per δ compreso tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ la base ottima non cambia. Infatti se poniamo $\delta = -\frac{1}{2}$ abbiamo che $-\frac{3}{2} + (-\frac{1}{2}) = -2$ ossia il nuovo gradiente diventa $[1\ \ -2]$. Le curve di livello hanno quindi un coefficienti angolare pari a $\frac{1}{2}$ come quello del vincolo (b) (le curve di livello si sovrappongono a questo vincolo). Se invece poniamo $\delta = \frac{1}{2}$ il gradiente diventa $[1\ \ -1]$ e il coefficiente angolare delle curve di livello è pari a 1 (come quello del vincolo (a)).

Per quanto riguarda c_{B_2} si effettuano gli stessi passaggi cambiando solo $(A_B^{-1})^k$ da $[-1\ 2]$ a $[-2\ 2]$.

2*b*) Soluzione:
Vediamo come variare una componente del termine noto senza cambiare la base ottima. In questo caso è facile osservare che la condizione di ottimalità non varia al variare di b_k, solo l'ammissibilità è influenzata da questi cambiamenti. In particolare supponiamo di cambiare b_k in $b'_k = b_k + \delta$ abbiamo quindi che $x'_B = A_B^{-1}(b + \delta e_k) = x_B + \delta(A_B^{-1})_k \geq 0$. Abbiamo quindi:
Ricordiamo che $(A_B^{-1})_k$ corrisponde alla $k - ma$ colonna della matrice A_B^{-1}.

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 6 - \delta \geq 0 \\ 2 - 2\delta \geq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \delta \leq 6 \\ \delta \leq 1 \end{array}$$

Quindi scegliendo per δ un valore minore o uguale a 1 la base rimane ammissibile.

2*c*) Soluzione:
Consideriamo il problema in forma standard con i termini noti moltiplicati per k.

$$\begin{aligned} -min\ x_1 - 3/2x_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4k \\ -1/2x_1 + x_2 + x_4 = 5k \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Consideriamo la base $B = \{2, 4\}$ e calcoliamo la sua inversa:

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per prima cosa verifichiamo che la base sia ammissibile.

$$x_B = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4k \\ 5k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4k \\ k \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 4k \geq 0 \\ k \geq 0 \end{array}$$

Quindi per k maggiore o uguale a zero la base sarà sicuramente ammissibile. Non è possibile rendere la base ottima dato che i valori di k influenzano il termine noto ma non i coefficienti di costo della funzione obiettivo.

2*d*) Soluzione:
Consideriamo il problema in forma standard modificato come indicato dalla traccia:

$$
\begin{aligned}
-min\ kx_1 - 3/2x_2 \\
-x_1 + x_2 + x_3 = 4k \\
-1/2x_1 + x_2 + x_4 = 5k \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Per quanto riguarda l'ammissibilità della base $B = \{2, 4\}$ abbiamo precedentemente visto che basta scegliere un k maggiore o uguale a zero per soddisfare questa condizione. Vediamo cosa succede con i coefficienti di costo ridotto:

$z_1 - c_1 = [-\frac{3}{2}\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - k = [-\frac{3}{2}\ 0] \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - k = \frac{3}{2} - k \leq 0 \Rightarrow k \geq \frac{3}{2}$

$z_3 - c_3 = [-\frac{3}{2}\ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -\frac{3}{2} < 0$

Quindi, se $k \geq 3/2$ la base rimane ammissibile e diventa ottima.

2*e*) Soluzione:

Per determinare la soluzione duale corrispondente al vertice ottimo dobbiamo tener presente il teorema della dualità forte che dice: Se uno dei due problemi tra (P) e (D) ammette ottimo finito x^* allora anche l'altro problema ammette ottimo finito w^* e i valori ottimi coincidono ossia $c^T x^* = b^T w^*$. Scomponendo la soluzione ottima x^* in x_B^* e $x_N^* = 0$ abbiamo che $c_B^T x_B^* = w^T b \Rightarrow c_B^T A_B^{-1} b = w^T b \Rightarrow w^T = c_B^T A_B^{-1}$. Nel nostro caso abbiamo quindi:

$w = [-\frac{3}{2}\ 1] \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$