2.1 Introduzione

In questo capitolo introduciamo il concetto di

probabilità di un evento

e quindi mostriamo come le probabilità possano essere calcolate in certe situazioni.

Preliminarmente avremo però bisogno di definire i concetti di

spazio campionario

e di

evento di un esperimento.

2.2 Spazio campionario ed eventi

Chiameremo *esperimento* qualunque fenomeno il cui risultato non possa essere previsto con certezza. Sebbene l'esito dell'esperimento non sia noto a priori, supponiamo che l'insieme di tutti i possibili esiti lo sia. Definiamo questo insieme *spazio campionario* dell'esperimento e lo denotiamo con S; i suoi elementi sono detti *eventi elementari*.

Esempio. Nell'esperimento che consiste nel lancio di 2 dadi, lo spazio campionario consiste di $D'_{6,2} = 6^2 = 36$ elementi:

$$S = \{(i,j) : i,j = 1,2,3,4,5,6\},$$

dove (i,j) indica che il primo dado mostra il numero i e l'altro dado il numero j.

Esempio. Se l'esito dell'esperimento è l'ordine di arrivo di una competizione sportiva con n partecipanti, lo spazio campionario consiste di $n!$ elementi:

$$S = \{\text{tutte le } n! \text{ permutazioni di } (1,2,\ldots,n)\}$$

$$= \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \{1,2,\ldots,n\}\ \forall i,\ \omega_i \neq \omega_j\ \forall i \neq j\}$$

Esempio. Se l'esperimento consiste nel lanciare successivamente n monete, lo spazio campionario è costituito da $D'_{2,n} = 2^n$ elementi:

$$S = \{\omega_1\omega_2\cdots\omega_n : \forall i,\ \omega_i \in \{c,t\}\}; \qquad (S \text{ è finito})$$

$$\text{per } n = 3: \qquad S = \{ccc, cct, ctc, ctt, tcc, tct, ttc, ttt\}$$

Esempio. Un esperimento consiste nel lanciare ripetutamente una moneta. Consideriamo come esito dell'esperimento il numero d'ordine del lancio in cui compare testa per la prima volta. Lo spazio campionario è l'insieme degli interi non negativi:

$$S = \{n : n = 1, 2, \ldots\} \qquad (S \text{ è infinito numerabile})$$

Esempio. Se l'esperimento consiste nel misurare il tempo di vita di un dispositivo elettronico, lo spazio campionario consiste nell'insieme dei numeri reali non negativi:

$$S = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x < \infty\} \qquad (S \text{ è infinito non numerabile})$$

Un sottoinsieme A dello spazio campionario sarà detto *evento*. Un evento è quindi un insieme di possibili esiti di un esperimento. Se l'esito di un esperimento è contenuto in A, diremo che l'evento A si è verificato.

Esempio. Nell'esperimento del lancio di 2 dadi, l'evento

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

si verifica quando la somma dei 2 dadi è 7.

Esempio. Nell'esperimento del lancio di 3 monete, l'evento

$$A = \{ccc, cct, ctc, ctt\}$$

si verifica quando al primo lancio esce croce.

Esempio. Nell'esperimento che consiste nel misurare il tempo di vita di un dispositivo elettronico, l'evento

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 5\}$$

si verifica quando il dispositivo dura 5 ore o meno.

Operazioni tra eventi

• Dati due eventi A e B, definiamo il nuovo evento $A \cup B$, detto *unione* di A e B, formato da tutti gli esiti dell'esperimento che stanno in A o in B o in entrambi.

• Analogamente, dati due eventi A e B, definiamo il nuovo evento $A \cap B$, detto *intersezione* di A e B, formato da tutti gli esiti dell'esperimento che sono sia in A che in B. (Talora $A \cap B$ si indica con AB).

• Per ogni evento A definiamo il nuovo evento $\overline{A}$, detto *complementare* di A, formato da tutti gli esiti dell'esperimento che non sono in A. (Talvolta $\overline{A}$ si indica con A^c).

Esempio. Nell'esperimento del lancio di 2 monete, con $S = \{cc, ct, tc, tt\}$, se

$$A = \{cc, ct\} = \{\text{croce al primo lancio}\},$$

$$B = \{cc, tt\} = \{\text{nei due lanci si ha lo stesso risultato}\},$$

si ha

$$A \cup B = \{cc, ct, tt\}, \qquad A \cap B = \{cc\}, \qquad \overline{A} = \{tc, tt\}, \qquad \overline{B} = \{ct, tc\}.$$

• Il risultato di qualunque esperimento appartiene certamente allo spazio campione; pertanto S viene detto *evento certo*.

• Un evento si dice *impossibile*, e si indica con $\emptyset$, se non contiene esiti dell'esperimento. ($\emptyset$ corrisponde all'insieme vuoto).

• Due eventi A e B si dicono *incompatibili* se $A \cap B = \emptyset$.

• $A_1, A_2, \ldots$ si dicono *a due a due incompatibili* se $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$.

• Più eventi (in numero finito o infinito) si dicono *necessari* se la loro unione è S.

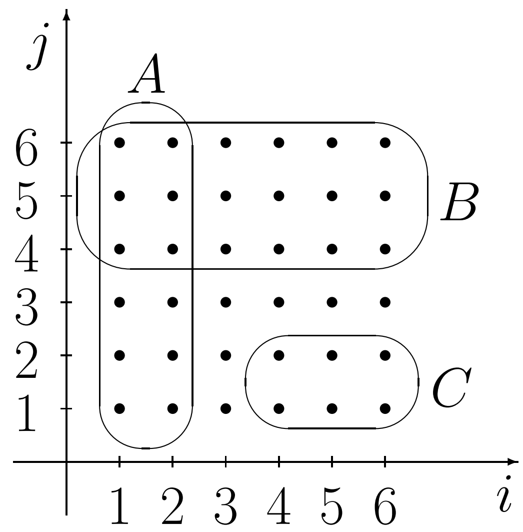
• Gli eventi $A_1, A_2, \ldots$ costituiscono una *partizione* di S se sono necessari e a due a due incompatibili.

Esempio. Nell'esperimento del lancio di due dadi sia

$$A = \{(i,j): i = 1,2;\ j = 1,2,\ldots,6\},$$
$$B = \{(i,j): i = 1,2,\ldots,6;\ j = 4,5,6\},$$
$$C = \{(i,j): i = 4,5,6;\ j = 1,2\}.$$

Si ha $A \cap B = \{(i,j): i = 1,2;\ j = 4,5,6\} \neq \emptyset$,

$$A \cap C = \emptyset, \quad B \cap C = \emptyset.$$



Esempio. Nell'esperimento dell'estrazione di una biglia da un'urna contenente n biglie numerate da 1 a n, sia $A_k = \{1, 2, \ldots, k\}$, per $k = 1, 2, \ldots, n$. Gli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono necessari, ma non incompatibili, essendo

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{1, 2, \ldots, n\} \equiv S, \qquad A_i \cap A_j = A_{\min(i,j)} \neq \emptyset.$$

Esempio. Nell'esperimento che consiste nello scegliere a caso un vettore booleano di lunghezza n, indichiamo con A_k l'evento costituito dai vettori aventi esattamente k bit pari a $\mathbf{1}$, per $k = 0, 1, \ldots, n$. Gli eventi $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sono necessari e a due a due incompatibili, e quindi costituiscono una partizione di S. Infatti risulta

$$A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_n = S, \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j,$$

essendo $S = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \ \forall i\}$ e

$$A_k = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in S : \sum_{i=1}^{n} I[\omega_i = \mathbf{1}] = k\},$$

dove $I[P] = 1$ se P è una proposizione vera, e $I[P] = 0$ altrimenti.

- Se $A_1, A_2, \ldots$ sono eventi, si definiscono l'unione e l'intersezione di questi come

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots, \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots;$$

$\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ è l'evento formato da tutti gli esiti che sono compresi in almeno uno degli eventi $A_1, A_2, \ldots$;

$\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ è l'evento formato da tutti gli esiti che sono compresi in tutti gli eventi $A_1, A_2, \ldots$

- Per ogni evento A risulta

$$A \cup \overline{A} = S, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset, \quad A \cup S = S, \quad A \cap S = A, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

- Dati due eventi A e B, se tutti gli esiti di A sono anche in B, allora diciamo che A è contenuto in B, oppure che A implica B, e scriviamo $A \subset B$.
- Se $A \subset B$ e $B \subset A$, diciamo che A e B coincidono, e scriviamo $A = B$.
- Si ha: $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ e $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.
- Risulta $A \subset B$ se e solo se $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Esempio. Sia $S = \{ccc, cct, ctc, ctt, tcc, tct, ttc, ttt\}$ lo spazio campionario nell'esperimento del lancio di 3 monete. Posto

$$A = \{\text{esce sempre testa}\} = \{ttt\},$$

$$B = \{\text{esce almeno una volta testa}\} = \{cct, ctc, ctt, tcc, tct, ttc, ttt\},$$

si ha $A \subset B$, e quindi

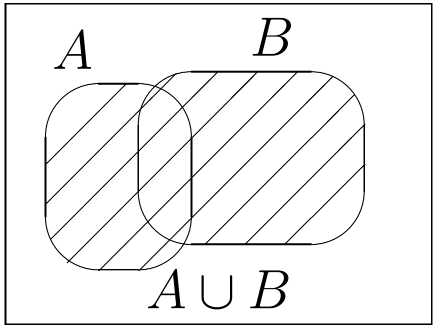
$$\overline{A} = \{\text{esce almeno una volta croce}\} = \{ccc, cct, ctc, ctt, tcc, tct, ttc\},$$

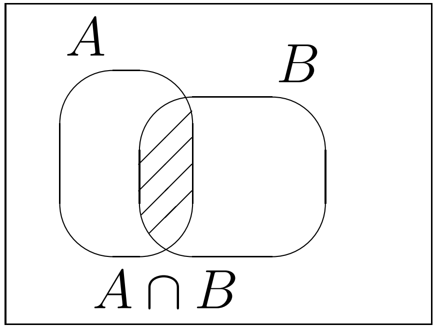
$$\overline{B} = \{\text{esce sempre croce}\} = \{ccc\},$$

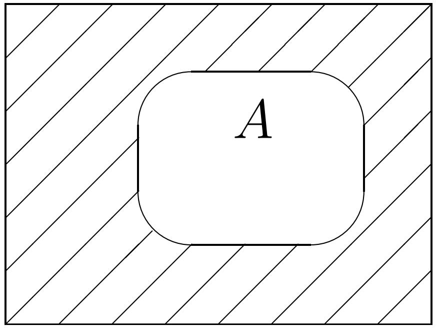
da cui segue $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Esercizio. Mostrare che se $A \subset B$, allora A e $\overline{B}$ sono incompatibili.

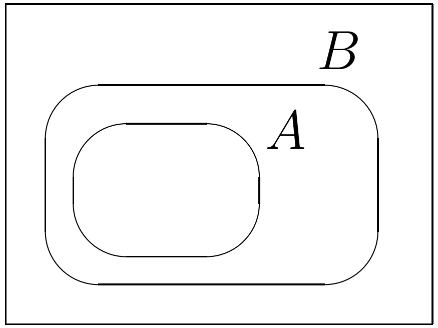
Diagrammi di Venn







$\overline{A}$



$A \subset B$

Proprietà

- commutative:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A;$$

- associative:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

- distribuitive:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

- formule di De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

valide anche per un insieme finito di eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i.$$

Esercizio. Siano A e B eventi distinti; stabilire se le seguenti identità sono vere:

(i) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$;

(ii) $A \cap \overline{B} = \overline{B \cup \overline{A}}$;

(iii) $\overline{A} \cup (A \cap B) = \overline{B \cap \overline{A}}$;

(iv) $A \cup \overline{(A \cup B)} = A \cap \overline{B}$;

(v) $(A \cap B) \cup \overline{(A \cup B)} = (A \cup \overline{B}) \cap (B \cup \overline{A})$.

Soluzione. (i) vera; (ii) vera; (iii) falsa; (iv) falsa; (v) vera.

La classe degli eventi

Abbiamo già visto che un sottoinsieme A dello spazio campionario è detto evento. Più precisamente, la *classe degli eventi* $\mathcal{F}$ è una famiglia di sottoinsiemi di S tale che

(i) $S \in \mathcal{F}$;

(ii) se $A \in \mathcal{F}$ allora $\overline{A} \in \mathcal{F}$;

(iii) se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ allora $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \in \mathcal{F}$.

Da tali proprietà segue che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra (sigma-algebra) di eventi, ed inoltre:

(iv) $\emptyset \in \mathcal{F}$;

(v) se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ allora $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \in \mathcal{F}$.

Esempio. Alcuni esempi di classi degli eventi:

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathcal{S}\}$;
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, \overline{A}, S\}$;
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{cc\}, \{ct\}, \{cc, ct\}, \{tc, tt\}, \{cc, tc, tt\}, \{ct, tc, tt\}, \{cc, ct, tc, tt\}\}$;
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(S)$ (insieme delle parti di S), con $|S| = n$ e $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$.

2.3 Impostazioni frequentista e soggettiva della probabilità

La probabilità di un evento può essere definita in termini della frequenza relativa.

Supponiamo che un esperimento, il cui spazio campionario è S, venga ripetuto varie volte sotto le medesime condizioni. Per ogni evento E dello spazio campionario S, definiamo $n(E)$ come *frequenza assoluta*, ossia il numero di volte che si è verificato E nelle prime n ripetizioni dell'esperimento. Notiamo che risulta $0 \le n(E) \le n$. Allora $P(E)$, la *probabilità* dell'evento E, è definita come

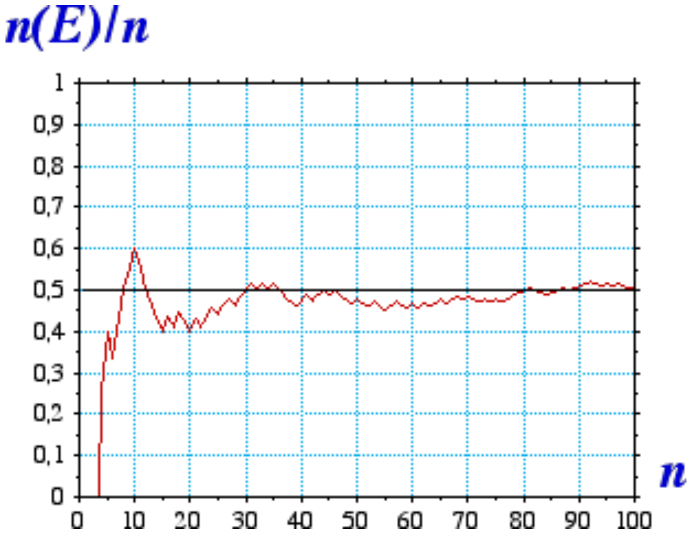
$$P(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(E)}{n}$$

Cioè, $P(E)$ è definita come limite della *frequenza relativa* $n(E)/n$, ossia limite della proporzione del numero di volte che l'evento E si verifica.

Notiamo che $0 \le n(E)/n \le 1$ e $n(S)/n = 1$, pertanto ci si attende che debba risultare $0 \le P(E) \le 1$ e $P(S) = 1$. Inoltre, risulta $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ se $A \cap B = \emptyset$, e quindi in tal caso ci si attende che sia $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Esempio. Lancio di una moneta ripetuto 100 volte; $S = \{c, t\}$; $E = \{t\}$

n	ω_n	$n(E)$	$n(E)/n$
1	c	0	0
2	c	0	0
3	c	0	0
4	t	1	0,25
5	t	2	0,4
6	c	2	0,33
7	t	3	0,43
8	t	4	0,5
9	t	5	0,56
10	t	6	0,6



La definizione

$$P(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(E)}{n}$$

presenta un serio inconveniente:

- come possiamo sapere se $n(E)/n$ converge al limite ad una costante, che sia la stessa per ogni possibile successione di ripetizioni dell'esperimento?

Per esempio, supponiamo che l'esperimento consista nel lancio di una moneta.

- Come possiamo sapere che la proporzione di teste ottenute nei primi n lanci converga ad un valore quando n diventa grande?
- Inoltre, anche sapendo che questa converga, come possiamo sapere che ripetendo altre volte gli esperimenti, otterremo ancora lo stesso limite nella proporzione di teste?

È più ragionevole assumere un insieme di *assiomi* più semplici ed intuitivi per definire la probabilità, che includano le relazioni

$$0 \le P(E) \le 1, \quad P(S) = 1, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ se } A \cap B = \emptyset.$$

Secondo l'impostazione soggettiva la probabilità di un evento è il *grado di fiducia che un individuo ha nel verificarsi dell'evento*.

In questa affermazione la probabilità perde la caratteristica "assoluta" di numero legato intrinsecamente all'evento per dipendere dall'opinione soggettiva dell'osservatore.

Esprimendosi in termini di scommesse la probabilità è *il prezzo che un individuo ritiene equo pagare per ricevere* 1 *se l'evento si verifica e* 0 *se l'evento non si verifica.*

ω = risultato dell'esperimento

$$\begin{cases} \omega \in A & \Rightarrow \quad \text{riceviamo } 1 \\ \omega \in \overline{A} & \Rightarrow \quad \text{riceviamo } 0 \end{cases}$$

Va inoltre imposta la seguente condizione di coerenza:

Le probabilità degli eventi vanno attribuite in modo che non sia possibile ottenere con un insieme di scommesse una vincita certa o una perdita certa.

Chiariamo il ruolo della condizione di coerenza per la probabilità soggettiva.

Sia $P(A)$ la probabilità di un evento A secondo l'impostazione soggettiva. Nel pagare $P(A)$ e nel ricevere 1 oppure 0 si guadagna $1 - P(A)$ oppure $-P(A)$, quindi almeno $-P(A)$ e al massimo $1 - P(A)$. Se $P(A)$ fosse negativa si avrebbe certamente un guadagno positivo, mentre se $P(A)$ fosse maggiore di 1 si avrebbe certamente una perdita, e nei due casi la condizione di coerenza è violata. Si ha quindi $0 \leq P(A) \leq 1$.

Se consideriamo una scommessa su S, paghiamo $P(S)$ per ricevere certamente 1; si ha quindi certamente un guadagno pari a $1 - P(S)$. Se fosse $P(S) < 1$ si avrebbe una vincita certa mentre se fosse $P(S) > 1$ si avrebbe una perdita certa. Per la condizione di coerenza si ricava quindi $P(S) = 1$. Analogamente si può mostrare che nell'impostazione soggettiva si ha $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se $A \cap B = \emptyset$.

L'impostazione soggettiva alla probabilità è sottoposta a varie critiche. Lo schema di scommesse che la descrive è infatti contestabile perché la propensione o l'avversità al rischio cambia da persona a persona e per ogni individuo può variare con le circostanze connesse all'esperimento.

Le considerazioni inerenti l'impostazione frequentista e l'impostazione soggettiva suggeriscono di stabilire certe regole per definire la probabilità che includano le relazioni

$$0 \leq P(E) \leq 1, \quad P(S) = 1, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \ \text{ se } \ A \cap B = \emptyset,$$

anche estendendo l'ultima relazione al caso di successioni di eventi.

2.4 Assiomi della probabilità

Lo *spazio di probabilità* di un esperimento è $(S, \mathcal{F}, P)$, dove S è lo spazio campionario, $\mathcal{F}$ è la classe degli eventi, e $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che per ogni evento A esiste un reale $P(A)$, definito come *probabilità* di A, per cui valgono i seguenti 3 assiomi.

Assioma 1. Per ogni $A \in \mathcal{F}$ si ha

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Assioma 2.

$$P(S) = 1$$

Assioma 3. (Additività numerabile) Per ogni successione di eventi $A_1, A_2, \ldots$ a due a due incompatibili (ossia tali che $A_i \cap A_j = \emptyset$ quando $i \neq j$), si ha

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Proposizione.

$$P(\emptyset) = 0$$

Dimostrazione. Consideriamo una successione di eventi $A_1, A_2, \ldots$, dove $A_1 = S$, $A_2 = A_3 = \ldots = \emptyset$; allora, essendo gli eventi $A_1, A_2, \ldots$ a due a due incompatibili ed essendo

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

dall'Assioma 3 ricaviamo

$$P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset)$$

il che implica $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0$ e quindi

$$P(\emptyset) = 0$$

perciò l'evento impossibile ha probabilità 0 di verificarsi.

Proposizione. (Additività finita) Per ogni collezione finita $A_1, A_2, \ldots, A_n$ di eventi a due a due incompatibili (ossia tali che $A_i \cap A_j = \emptyset$ quando $i \neq j$),

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione $A_1, A_2, \ldots, A_n, \emptyset, \emptyset, \ldots$; essendo gli eventi di tale successione a due a due incompatibili, dall'Assioma 3 segue che

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots$$

Ricordando che $P(\emptyset) = 0$, si ottiene

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

da cui segue la tesi.

Esempio. Nell'esperimento del lancio di una moneta si ha $S = \{t, c\}$; occorre fissare 2 reali p_1 e p_2, in modo che

$$P(\{t\}) = p_1, \qquad P(\{c\}) = p_2.$$

Dall'Assioma 1 segue

$$0 \leq p_1 \leq 1, \qquad 0 \leq p_2 \leq 1.$$

Dall'Assioma 2 e dalla proprietà di additività finita si ha

$$1 = P(S) = P(\{t\} \cup \{c\}) = P(\{t\}) + P(\{c\}) = p_1 + p_2.$$

Ad esempio, se testa e croce si verificano con uguale probabilità avremo

$$P(\{t\}) = \frac{1}{2}, \qquad P(\{c\}) = \frac{1}{2};$$

se invece abbiamo la sensazione che la moneta sia truccata in modo da mostrare testa con probabilità doppia rispetto a quella di croce, avremo

$$P(\{t\}) = \frac{2}{3}, \qquad P(\{c\}) = \frac{1}{3}.$$

Esempio. Nel lancio di un dado, con $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, se supponiamo che le sei facce siano equiprobabili, allora dovremo porre

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

Dalla proprietà di additività finita segue che la probabilità che in lancio del dado si ottenga un numero pari vale

$$P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{2}.$$

Più in generale, se il dado ha n facce, con $S = \{1,2,\ldots,n\}$, e se si suppone che le n facce siano equiprobabili, allora avremo

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \ldots = P(\{n\}) = \frac{1}{n}.$$

La probabilità che in un lancio del dado si ottenga un numero compreso tra 1 e k è

$$P(\{1,2,\ldots,k\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + \ldots + P(\{k\}) = \frac{k}{n}, \qquad (1 \le k \le n).$$

Esempio. Nel gioco della ruota della fortuna viene fatto ruotare a caso una ruota costituita da n settori circolari, con la regola che si vincono v_k euro se la ruota si ferma in corrispondenza del settore k-esimo, avente arco di lunghezza ℓ_k, per $k = 1, 2, \ldots, n$.

È ragionevole supporre che la probabilità che la ruota si fermi in corrispondenza del settore k-esimo sia proporzionale alla lunghezza ℓ_k dell'arco, per $k = 1, 2, \ldots, n$. Detto A_k tale evento, allora gli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono incompatibili e necessari, con

$$P(A_k) = C\,\ell_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Pertanto, usando la proprietà di additività finita si ha

$$1 = P(S) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = C \sum_{k=1}^{n} \ell_k \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_n}.$$

Quindi la probabilità di vincere v_k euro è

$$P(A_k) = \frac{\ell_k}{\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

2.5 Alcune semplici proprietà

Proposizione. Per ogni evento A

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Dimostrazione. Dall'Assioma 2 e dalla proprietà di additività finita, con A e $\overline{A}$ eventi incompatibili, segue

$$1 = P(S) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}),$$

da cui si giunge alla tesi.

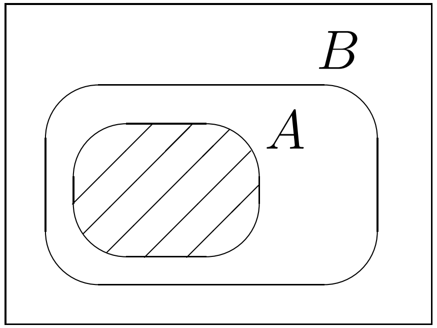
Esempio. Se la probabilità di ottenere 2 volte testa lanciando due monete è $1/4$, allora la probabilità di ottenere al più una volta testa deve essere $3/4$.

Esempio. Se la probabilità di ottenere n volte croce lanciando n monete è $1/2^n$, allora la probabilità di ottenere almeno una volta testa deve essere $1 - 1/2^n$.

Proposizione. Se $A \subset B$, allora

$$P(A) \leq P(B)$$

Dimostrazione. Essendo $A \subset B$, abbiamo che B può essere espresso come $B = A \cup (\overline{A} \cap B)$, con $A \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$.



$A \subset B$

Dalla proprietà di additività finita segue
$P(B) = P(A \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$,
da cui si ha $P(B) \geq P(A)$, essendo $P(\overline{A} \cap B) \geq 0$.

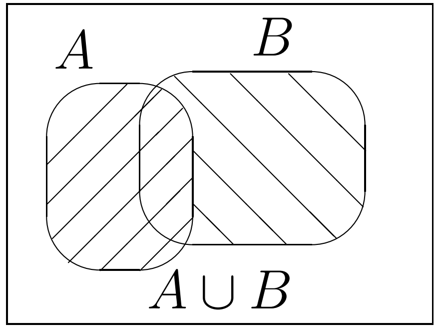
Esempio. Nel lancio di un dado, la probabilità che si ottenga 1 è minore della probabilità che si ottenga un numero dispari. Infatti, $A = \{1\} \subset \{1, 3, 5\} = B$.

Esempio. Nell'esperimento che consiste del lancio di n monete, la probabilità di $A = \{$esce testa 1 volta$\}$ è minore della probabilità di $B = \{$esce testa almeno 1 volta$\}$, essendo $A \subset B$. Infatti risulta $P(A) = n/2^n \leq 1 - 1/2^n = P(B)$.

Proposizione.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

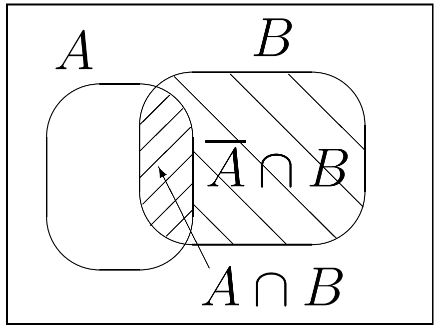
Dimostrazione. Notiamo che $A \cup B$ può essere espresso come unione di due eventi incompatibili A e $\overline{A} \cap B$. Grazie alla proprietà di additività finita otteniamo



$$P(A \cup B) = P(A \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A) + P(\overline{A} \cap B).$$

Inoltre, essendo $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$, con $A \cap B$ e $\overline{A} \cap B$ eventi incompatibili, applicando nuovamente la proprietà di additività finita abbiamo

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$



o, equivalentemente,

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

che completa la dimostrazione.

Esempio. Uno studente deve sottoporsi a due test. Con probabilità 0,5 supererà il primo test; con probabilità 0,4 supererà il secondo test; con probabilità 0,3 li supererà entrambi. Quanto vale la probabilità che non supererà nessuno dei due test?

Soluzione. Sia B_i l'evento che lo studente superi il test i-esimo, $i = 1, 2$. La probabilità che superi almeno un test sarà quindi pari a

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}6.$$

La probabilità che lo studente non supererà nessuno dei due test è dunque

$$P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = P(\overline{B_1 \cup B_2}) = 1 - P(B_1 \cup B_2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$

Esercizio. Dimostrare le seguenti relazioni, per eventi A_1 e A_2 qualsiasi:

$$P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2), \qquad P(A_1 \cap A_2) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1.$$

Esercizio. Mostrare che $P(A_1 \cap A_2) \geq 0{,}8$ e $P(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2) \leq 0{,}2$ sapendo che A_1 e A_2 sono eventi tali che $P(A_1) = 0{,}9$ e $P(A_2) = 0{,}9$.

Proposizione.

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

Dimostrazione. Ricordando che $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$, si ha

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C),$$

e ancora

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C).$$

Per la legge distributiva si ha

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)),$$

da cui segue

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(C)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

ossia la tesi.

Proposizione. Principio di inclusione/esclusione

La probabilità dell'unione di n eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ può esprimersi al seguente modo:

per $n = 2$: $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$;

per $n = 3$:
$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3);$$

in generale:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

La seguente formula esprime in modo compatto il principio di inclusione/esclusione:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}).$$

Il numero di termini a 2° membro è $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} = 2^n - 1$ in quanto la sommatoria $\displaystyle\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r})$ è calcolata per tutti gli $\displaystyle\binom{n}{r}$ possibili modi di scegliere gli r indici $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ dall'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Infatti, i termini a 2° membro sono

$2^n - 1 = 3$ per $n = 2$:
$P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$;

$2^n - 1 = 7$ per $n = 3$:
$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

2.6 Spazi campionari con esiti equiprobabili

In molti esperimenti è naturale assumere che tutti gli esiti dello spazio campionario siano equiprobabili, con S insieme finito: $S = \{1, 2, \ldots, N\}$. Allora si ipotizza che

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \ldots = P(\{N\})$$

il che implica

$$P(\{i\}) = \frac{1}{N}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N,$$

essendo $1 = P(S) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \ldots \cup \{N\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + \ldots + P(\{N\})$.
Per la proprietà di additività avremo perciò che per ogni evento A

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\text{numero di elementi di } A}{\text{numero di elementi di } S} \qquad \text{(definizione classica di probabilità)}$$

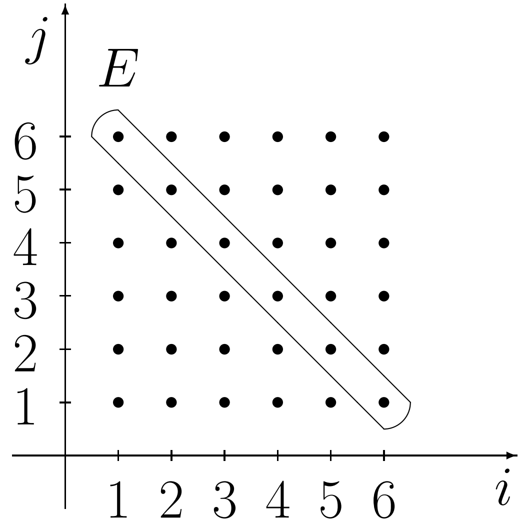
Se assumiamo che tutti gli esiti di un esperimento siano equiprobabili, allora la probabilità di ogni evento A è uguale alla proporzione degli esiti dello spazio campionario contenuti in A (come rapporto di casi favorevoli su casi possibili).

Esempio. Se si lanciano 2 dadi, qual è la probabilità che la somma dei valori sulla faccia superiore sia uguale a 7?

Soluzione. Assumendo che i 36 possibili esiti siano equiprobabili, poiché ci sono 6 possibili esiti che danno come somma 7,

$E = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$,

la probabilità desiderata sarà uguale a $6/36$ ossia $1/6$.



Esempio. Se estraiamo 3 biglie a caso da un'urna che contiene 6 biglie bianche e 5 nere, qual è la probabilità che una sia bianca e le altre due nere?

Soluzione. Se teniamo conto dell'ordine di estrazione e supponiamo che ogni possibile esito dello spazio campionario sia equiprobabile, la probabilità richiesta è

$$\frac{(6 \cdot 5 \cdot 4) + (5 \cdot 6 \cdot 4) + (5 \cdot 4 \cdot 6)}{11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{3 \cdot 120}{990} = \frac{4}{11} = 0{,}3636$$

Esempio. Se estraiamo 3 biglie a caso da un'urna che contiene 6 biglie bianche e 5 nere, qual è la probabilità che una sia bianca e le altre due nere?

Soluzione. Se non teniamo conto dell'ordine di estrazione, la probabilità richiesta è

$$\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{6 \cdot 10}{165} = \frac{4}{11} = 0{,}3636$$

Esempio. Una commissione di 5 persone viene estratta da un gruppo composto di 6 uomini e 9 donne. Se la selezione avviene in modo casuale, qual è la probabilità che la commissione consti di 3 uomini e 2 donne oppure di 2 uomini e 3 donne?

Soluzione. Ognuna delle $\binom{15}{5}$ combinazioni è estratta in modo equiprobabile, quindi:

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} + \frac{\binom{6}{2}\binom{9}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{20 \cdot 36}{3003} + \frac{15 \cdot 84}{3003} = \frac{240}{1001} + \frac{420}{1001} = \frac{660}{1001} = 0{,}6593.$$

Esempio. Un'urna contiene n biglie, di cui una è bianca. Se estraiamo k biglie una alla volta, in modo tale che a ogni estrazione la probabilità di estrarre una qualunque delle biglie rimanenti sia la stessa, qual è la probabilità che la biglia bianca sia estratta?

Soluzione. Ognuno dei $\binom{n}{k}$ possibili insiemi è estratto in modo equiprobabile, quindi:

$$P(\text{si estrae la biglia bianca}) = \frac{\binom{1}{1}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}}{\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}} = \frac{k}{n}$$

Alternativamente, sia $A_i = \{\text{la biglia bianca si estrae nell'}i\text{-esima estrazione}\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Risulta $P(A_i) = 1/n$ perché ognuna delle n biglie ha uguale probabilità di essere scelta all'i-esima estrazione. Poiché gli eventi A_i sono incompatibili si ha quindi

$$P(\text{si estrae la biglia bianca}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) = \frac{k}{n}$$

Esempio. Da un lotto di $N = 200$ pezzi, costituito da 40 pezzi difettosi e 160 buoni, si estrae a caso un campione di $n = 10$ pezzi.

(a) Qual è la probabilità che il campione estratto abbia la stessa frazione di pezzi difettosi del lotto originario?

(b) Qual è la probabilità che il campione estratto non contenga pezzi difettosi?

(c) Cosa cambia se si raddoppia il numero di pezzi estratti?

Soluzione. (a) Ognuno degli $\binom{N}{n}$ possibili insiemi è estratto in modo equiprobabile. La frazione di pezzi difettosi nel lotto è $p = 40/200 = 1/5$. Quindi, detto A l'evento d'interesse risulta

$$P(A) = \frac{\binom{40}{2}\binom{160}{8}}{\binom{200}{10}} = 0{,}3098$$

cosicché è più probabile che un campione estratto a caso da quel lotto non riproduca esattamente le caratteristiche dell'intero lotto.

(b) La probabilità che il campione non contenga pezzi difettosi è

$$P(E) = \frac{\binom{40}{0}\binom{160}{10}}{\binom{200}{10}} = 0{,}1013.$$

(c) Raddoppiando il numero di elementi del campione diminuisce la probabilità che questo riproduca la stessa frazione di pezzi difettosi, essendo ora

$$P(A) = \frac{\binom{40}{4}\binom{160}{16}}{\binom{200}{20}} = 0{,}2299$$

però diminuisce sensibilmente la probabilità che il campione estratto non contenga pezzi difettosi, poiché

$$P(E) = \frac{\binom{40}{0}\binom{160}{20}}{\binom{200}{20}} = 0{,}0089.$$

Esempio. Supponiamo che $n+m$ biglie, di cui n siano rosse e m blu, vengano disposte in fila in modo casuale, così che ognuna delle $(n+m)!$ possibili disposizioni sia equiprobabile. Se siamo interessati solo alla successione dei colori delle biglie in fila, si provi che tutti i possibili risultati rimangono equiprobabili.

Soluzione. Consideriamo ognuna delle $(n+m)!$ possibili disposizioni ordinate delle biglie: se permutiamo tra loro le biglie rosse e facciamo lo stesso con le blu, la successione dei colori non cambia. Ne segue che ogni successione dei colori corrisponde a $n!\,m!$ differenti disposizioni ordinate delle $n+m$ biglie, così che ogni distribuzione di colori ha probabilità di verificarsi

$$\frac{n!\,m!}{(n+m)!}$$

Ad esempio se $n=m=2$, delle $4!=24$ possibili disposizioni ordinate delle biglie, ci saranno $2!\,2!=4$ distribuzioni che danno la stessa distribuzione di colori; ad esempio

$$r_1, b_1, r_2, b_2, \qquad r_1, b_2, r_2, b_1, \qquad r_2, b_1, r_1, b_2, \qquad r_2, b_2, r_1, b_1.$$

Le 6 distribuzioni di colori distinte saranno: $bbrr$, $brbr$, $brrb$, $rbbr$, $rbrb$, $rrbb$.

Esempio. Nel gioco del lotto si estraggono a caso 5 numeri da un'urna contenente 90 numeri compresi tra 1 e 90. (Le cinquine sono equiprobabili). Se si fissano k numeri distinti compresi tra 1 e 90 qual è la probabilità che questi saranno tra i 5 estratti?

Soluzione. Poiché l'ordine di estrazione qui non è rilevante, lo spazio campionario è l'insieme delle $\binom{90}{5}$ combinazioni semplici di 90 oggetti in 5 classi.

L'evento $A_k = \{\text{i } k \text{ numeri fissati sono tra i 5 estratti}\}$ è costituito dalle sequenze di S che presentano all'interno i k numeri fissati; pertanto la sua cardinalità è pari al numero di combinazioni semplici di $90-k$ oggetti in $5-k$ classi: $\binom{90-k}{5-k}$. Si ha quindi:

$P(A_k)$	$P(A_1)$	$P(A_2)$	$P(A_3)$	$P(A_4)$	$P(A_5)$
$\frac{\binom{90-k}{5-k}}{\binom{90}{5}}$	$\frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{18}$	$\frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{2}{801}$	$\frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{11.748}$	$\frac{\binom{86}{1}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{511.038}$	$\frac{\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{43.949.268}$

Esempio. Da un'urna contenente 3 biglie numerate da 1 a 3 si estraggono casualmente in sequenza le 3 biglie. Diciamo che si ha una concordanza nell'i-esima estrazione se in tale estrazione viene estratta la biglia avente numero i, per $i = 1, 2, 3$. Calcolare la probabilità degli eventi $C_k = \{$si hanno in totale k concordanze$\}$, per $k = 0, 1, 2, 3$.

Soluzione. I possibili risultati dell'esperimento sono le $3! = 6$ permutazioni dei numeri $1, 2, 3$. Poichè gli esiti sono equiprobabili, ognuna di tali sequenze si verifica con probabilità $1/6$. Dalla seguente tabella seguono le probabilità richieste:

esito delle estrazioni	numero di concordanze
1 2 3	3
1 3 2	1
2 1 3	1
2 3 1	0
3 1 2	0
3 2 1	1

$$P(C_0) = \frac{2}{6} \qquad P(C_1) = \frac{3}{6}$$

$$P(C_2) = 0 \qquad P(C_3) = \frac{1}{6}$$

(Notiamo che gli eventi C_0, C_1, C_2, C_3 sono necessari e a 2 a 2 incompatibili.)

Esempio. Da un'urna contenente 3 biglie numerate da 1 a 3 si estraggono casualmente in sequenza le 3 biglie. Diciamo che si ha una concordanza nell'i-esima estrazione se in tale estrazione viene estratta la biglia avente numero i, per $i = 1, 2, 3$. Calcolare la probabilità che non si abbia concordanza in nessuna estrazione.

Soluzione. I possibili risultati dell'esperimento sono le $3! = 6$ permutazioni dei numeri $1, 2, 3$, ossia $\{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$.

Per $i = 1, 2, 3$ sia $E_i = \{\text{si ha concordanza nell'}i\text{-esima estrazione}\}$. Dobbiamo calcolare

$$P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = P(\overline{E_1 \cup E_2 \cup E_3}) = 1 - P(E_1 \cup E_2 \cup E_3).$$

Osserviamo che

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{2!}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \cap E_3) = P(E_2 \cap E_3) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}, \quad P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{1}{6}.$$

Pertanto

$$P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Esempio. Il problema delle concordanze. Da un'urna che contiene biglie numerate da 1 a n si estraggono casualmente in sequenza le n biglie. Diciamo che si ha una concordanza nell'i-esima estrazione se in tale estrazione viene estratta la biglia avente numero i, per $i = 1, 2, \ldots, n$. Calcolare la probabilità che non si abbia concordanza in nessuna estrazione.

Soluzione. Per $i = 1, 2, \ldots, n$ sia $E_i = \{\text{si ha concordanza nell'}i\text{-esima estrazione}\}$. Pertanto, la probabilità che si abbia almeno una concordanza è

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_r}).$$

Rappresentiamo l'esito dell'esperimento come un vettore $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, dove ω_i denota il numero estratto all'estrazione i-esima. Lo spazio campionario è quindi l'insieme delle $n!$ permutazioni

$$S = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \colon \omega_i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \omega_i \neq \omega_j \text{ per } i \neq j\}.$$

L'evento E_i si verifica se nell'estrazione i-esima si ha concordanza (e non è escluso che si possa avere concordanza in altre estrazioni). Ciò può accadere in $(n-1)!$ modi, perché nell'estrazione i-esima l'esito deve essere il numero i (per avere concordanza), mentre nelle altre estrazioni ci sono $(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,2\cdot 1$ modi per individuare gli esiti dell'esperimento. Si ha pertanto

$$P(E_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n} \quad \text{e analogamente} \quad P(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\ldots\cap E_{i_r})=\frac{(n-r)!}{n!}.$$

Poiché vi sono $\binom{n}{r}$ termini in $\displaystyle\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} P(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\ldots\cap E_{i_r})$, risulta quindi

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} P(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\ldots\cap E_{i_r})=\binom{n}{r}\frac{(n-r)!}{n!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\cdot\frac{(n-r)!}{n!}=\frac{1}{r!}$$

da cui:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} P(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\ldots\cap E_{i_r})=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\frac{1}{r!}.$$

La probabilità che non si abbia concordanza in nessuna estrazione è quindi

$$p_n = P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} E_i}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = 1 - \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r+1}}{r!} = 1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^r}{r!} = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}$$

Notiamo che per n grande la probabilità

$$p_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}$$

può essere approssimata da

$$\mathrm{e}^{-1} = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \approx 0{,}367879$$

(Ricordiamo che $\boxed{\mathrm{e}^x = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{x^r}{r!}}$ per $x \in \mathbb{R}$)

n	p_n
1	0
2	0,5
3	0,333333
4	0,375
5	0,366667
6	0,368056
7	0,367857
8	0,367882
9	0,367879
10	0,367879

Esempio. Nell'esperimento che consiste nel lanciare n volte una moneta non truccata, indicando con t la fuoriuscita di testa e con c di croce, lo spazio campionario è

$$S = \{\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \colon \omega_i \in \{t, c\} \text{ per } 1 \le i \le n\},$$

e le sue 2^n sequenze sono equiprobabili. Per $1 \le k \le n$, calcolare le probabilità di

$T_k = \{\text{al } k\text{-esimo lancio esce testa}\} = \{\underline{\omega} \colon \omega_k = t; \omega_i \in \{t, c\} \text{ per } i \neq k\}$

$A_k = \{\text{nei primi } k \text{ lanci esce testa}\} = \{\underline{\omega} \colon \omega_1 = \ldots = \omega_k = t; \omega_i \in \{t, c\} \text{ per } i > k\}$

$A'_k = \{\text{nei primi } k \text{ lanci esce croce}\} = \{\underline{\omega} \colon \omega_1 = \ldots = \omega_k = c; \omega_i \in \{t, c\} \text{ per } i > k\}$

$B_k = \{\text{esce testa } k \text{ volte}\} = \{\underline{\omega} \colon \sum_{i=1}^{n} I[\omega_i = t] = k\}$ ($I[A] = 1$ se A è vera, 0 senò).

Soluzione. Trattandosi di uno spazio campionario con esiti equiprobabili, si ha

$$P(T_k) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}, \qquad P(A_k) = P(A'_k) = \frac{2^{n-k}}{2^n} = \frac{1}{2^k}, \qquad P(B_k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

Esercizio. Riferendosi all'esercizio precedente, mostrare che gli eventi $B_0, B_1, \ldots, B_n$ sono necessari e incompatibili, ed inoltre che

$$P(T_1 \cap A_k) = \frac{1}{2^k}, \qquad P(T_1 \cup A_k) = \frac{1}{2},$$

$$P(T_1 \cap B_k) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^n}, \qquad P(T_1 \cup B_k) = \frac{1}{2} + \frac{\binom{n-1}{k}}{2^n},$$

$$P(A_k \cap A'_k) = 0, \qquad P(A_k \cup A'_k) = \frac{1}{2^{k-1}},$$

$$P(A_k \cap B_k) = \frac{1}{2^n}, \qquad P(A_k \cup B_k) = \frac{1}{2^k} + \frac{\binom{n}{k}}{2^n} - \frac{1}{2^n},$$

$$P(A'_{k-1} \cup T_k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}, \qquad P(A'_{k-1} \cap T_k) = \frac{1}{2^k}.$$

2.7 La probabilità come funzione di insieme continua

Una successione di eventi $\{E_n, n \geq 1\}$ è detta *successione crescente* se

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \ldots$$

mentre è detta *successione decrescente* se

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \ldots$$

Se $\{E_n, n \geq 1\}$ è una successione crescente di eventi, allora definiamo un nuovo evento, che denotiamo con $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$, nel seguente modo

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

Similmente, se $\{E_n, n \geq 1\}$ è una successione decrescente di eventi, definiamo $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$ come

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

Esempio. Nel lancio di una moneta non truccata, ripetuto indefinitamente, studiare le seguenti successioni di eventi (per $n = 1, 2, \ldots$)

(i) $A_n = \{$esce testa almeno una volta nei primi n lanci$\}$,

(ii) $B_n = \{$nei primi n lanci esce sempre testa$\}$,

(iii) $C_n = \{$esce una sola volta testa nei primi n lanci$\}$.

Soluzione. (i) È facile vedere che $\{A_n, n \geq 1\}$ è una successione crescente di eventi, essendo $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, e risulta

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A = \{\text{esce almeno una volta testa nella sequenza dei lanci}\}.$$

(ii) La successione $\{B_n, n \geq 1\}$ è decrescente, poiché $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$, e quindi il suo limite è:

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = B = \{\text{esce testa in tutti i lanci}\}.$$

(iii) È facile verificare che $\{C_n, n \geq 1\}$ è una successione non monotona. Infatti, se esce una sola volta testa nei primi n lanci non è detto che esca una sola volta testa nei primi $n+1$ lanci, e viceversa.

Proposizione. (Continuità della probabilità) Se $\{E_n, n \geq 1\}$ è una successione di eventi, crescente o decrescente, allora

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n) = P(\lim_{n\to\infty} E_n).$$

Esempio. Nel lancio di una moneta non truccata ripetuto indefinitamente calcolare

$$P(E^{\mathrm{p}}) = P(\{\text{esce testa per la prima volta in un lancio pari}\}),$$

$$P(E^{\mathrm{d}}) = P(\{\text{esce testa per la prima volta in un lancio dispari}\}).$$

Soluzione. Consideriamo la successione di eventi

$$F_k = \{\text{esce testa per la prima volta nel lancio } k\text{-esimo}\}, \qquad k \geq 1.$$

Gli eventi $F_1, F_2, \ldots$ sono incompatibili e, per quanto visto in precedenza, si ha

$$\begin{aligned} P(F_1) &= P(T_1) = \frac{1}{2}, \\ P(F_k) &= P(\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \cdots \cap \overline{T_{k-1}} \cap T_k) = P(A'_{k-1} \cap T_k) = \frac{1}{2^k}, \qquad k \geq 2. \end{aligned}$$

Notiamo che

$$E^{\mathrm{p}} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{2k} = \{\text{esce testa per la prima volta in un lancio pari}\},$$
$$E^{\mathrm{d}} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{2k-1} = \{\text{esce testa per la prima volta in un lancio dispari}\}.$$

Dalla proprietà di additività numerabile e ricordando che $P(F_k) = \dfrac{1}{2^k}$ segue:

$$P(E^{\mathrm{p}}) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} F_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(F_{2k}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k,$$
$$P(E^{\mathrm{d}}) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} F_{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(F_{2k-1}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k-1}} = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

Poiché $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \dfrac{x}{1-x} \quad (-1 < x < 1)}$ si ha $P(E^{\mathrm{p}}) = \dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{3}$ e $P(E^{\mathrm{d}}) = \dfrac{2}{3}$.

È utile sottolineare che sebbene sia

$$P(E^{\mathrm{p}}) + P(E^{\mathrm{d}}) = 1, \qquad E^{\mathrm{p}} \cap E^{\mathrm{d}} = \emptyset,$$

gli eventi E^{p} ed E^{d} non sono tra loro complementari. Infatti introducendo l'evento

$$E_0 = \{\text{non esce mai testa}\},$$

si ha

$$E^{\mathrm{p}} \cup E^{\mathrm{d}} \cup E_0 = S, \qquad \text{con } E^{\mathrm{p}}, E^{\mathrm{d}}, E_0 \text{ incompatibili.}$$

Inoltre, ponendo $A'_k = \{\text{nei primi } k \text{ lanci esce sempre croce}\}$ per $k \geq 1$, la successione $\{A'_1, A'_2, \ldots\}$ è decrescente ed ha come limite l'evento

$$\lim_{k\to\infty} A'_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A'_k = E_0.$$

Pertanto, per la continuità della probabilità, e notando che $P(A'_k) = \dfrac{1}{2^k}$, si ha

$$P(E_0) = P\left(\lim_{k\to\infty} A'_k\right) = \lim_{k\to\infty} P(A'_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0.$$

Esercizi per casa

2.a) Nel lancio di due dadi non truccati, sia $A = \{$il primo dado dà esito 6$\}$ e $B = \{$il secondo dado dà esito diverso da 6$\}$.
(i) Definire lo spazio campionario e determinarne la cardinalità.
(ii) Calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$.

2.b) Un esperimento consiste nel lanciare n volte una moneta equa. Sia $A = \{$negli n lanci si ottiene 2 volte testa$\}$ e $B = \{$negli n lanci si ottiene sempre croce oppure una sola volta testa$\}$.
(i) Definire lo spazio campionario e determinarne la cardinalità.
(ii) Calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup \overline{B})$.

2.c) Un esperimento consiste nell'estrarre a caso k biglie da un'urna contenente n biglie numerate da 1 ad n. Sia $A = \{$la biglia numero 1 viene estratta$\}$ e $B = \{$le biglie numerate da 1 a k vengono estratte$\}$. Calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ e $P(A \cup B)$.

2.d) Da un elenco di 10 impiegati, di cui 6 laureati e 4 diplomati, se ne selezionano 3 a caso.
(i) Calcolare la probabilità che almeno uno degli impiegati selezionati sia diplomato.
(ii) Calcolare la probabilità che gli impiegati selezionati siano tutti diplomati.
(iii) Calcolare la probabilità che tra i 3 impiegati selezionati vi sia un solo diplomato.

2.e) Da un'urna contenente 12 biglie (di cui 3 bianche, 4 rosse e 5 blu), se ne estraggono 3 (senza reinserimento). Calcolare la probabilità che tra le 3 estratte almeno uno dei 3 colori non sia presente.

2.f) Calcolare le seguenti somme:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n!}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-2}}{n!}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-2n-1}$

2.g) Un giocatore di poker ha le seguenti carte: $(A, A, A, K, 2)$; calcolare la probabilità di fare full e la probabilità di fare poker nei seguenti casi:
(i) se cambia il 2;
(ii) se cambia il K e il 2.

2.h) Stabilire quale dei seguenti eventi ha probabilità maggiore:
(i) esce 6 almeno una volta in 4 lanci di un dado;
(ii) esce un doppio 6 almeno una volta in 24 lanci di una coppia di dadi.