CAPITOLO 2 – Assiomi della probabilità

2.1 Introduzione

In questo capitolo introduciamo il concetto di

probabilità di un evento

e quindi mostriamo come le probabilità possano essere calcolate in certe situazioni.

Preliminarmente avremo però bisogno di definire i concetti di

spazio campionario

e di

evento di un esperimento.

2.2 Spazio campionario ed eventi

Chiameremo *esperimento* qualunque fenomeno il cui risultato non possa essere previsto con certezza. Sebbene l'esito dell'esperimento non sia noto a priori, supponiamo che l'insieme di tutti i possibili esiti lo sia. Definiamo questo insieme *spazio campionario* dell'esperimento e lo denotiamo con S; i suoi elementi sono detti *eventi elementari*.

Esempio. Nell'esperimento che consiste nel lancio di 2 dadi, lo spazio campionario consiste di $D'_{6,2} = 6^2 = 36$ elementi:

$$S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

dove (i, j) indica che il primo dado mostra il numero i e l'altro dado il numero j.

Esempio. Se l'esito dell'esperimento è l'ordine di arrivo di una competizione sportiva con n partecipanti, lo spazio campionario consiste di $n!$ elementi:

$$S = \{\text{tutte le } n! \text{ permutazioni di } (1, 2, \ldots, n)\}$$

$$= \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ \forall i,\ \omega_i \neq \omega_j\ \forall i \neq j\}$$

Esempio. Se l'esperimento consiste nel lanciare successivamente n monete, lo spazio campionario è costituito da $D'_{2,n} = 2^n$ elementi:

$$S = \{\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n : \forall i,\ \omega_i \in \{c, t\}\}; \qquad (S \text{ è finito})$$

$$\text{per } n = 3: \qquad S = \{ccc, cct, ctc, ctt, tcc, tct, ttc, ttt\}$$

Esempio. Un esperimento consiste nel lanciare ripetutamente una moneta. Consideriamo come esito dell'esperimento il numero d'ordine del lancio in cui compare testa per la prima volta. Lo spazio campionario è l'insieme degli interi non negativi:

$$S = \{n : n = 1, 2, \ldots\} \qquad (S \text{ è infinito numerabile})$$

Esempio. Se l'esperimento consiste nel misurare il tempo di vita di un dispositivo elettronico, lo spazio campionario consiste nell'insieme dei numeri reali non negativi:

$$S = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < \infty\} \qquad (S \text{ è infinito non numerabile})$$

Un sottoinsieme A dello spazio campionario sarà detto *evento*. Un evento è quindi un insieme di possibili esiti di un esperimento. Se l'esito di un esperimento è contenuto in A, diremo che l'evento A si è verificato.

Esempio. Nell'esperimento del lancio di 2 dadi, l'evento

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

si verifica quando la somma dei 2 dadi è 7.

Esempio. Nell'esperimento del lancio di 3 monete, l'evento

$$A = \{ccc, cct, ctc, ctt\}$$

si verifica quando al primo lancio esce croce.

Esempio. Nell'esperimento che consiste nel misurare il tempo di vita di un dispositivo elettronico, l'evento

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 5\}$$

si verifica quando il dispositivo dura 5 ore o meno.

Operazioni tra eventi

• Dati due eventi A e B, definiamo il nuovo evento $A \cup B$, detto *unione* di A e B, formato da tutti gli esiti dell'esperimento che stanno in A o in B o in entrambi.

• Analogamente, dati due eventi A e B, definiamo il nuovo evento $A \cap B$, detto *intersezione* di A e B, formato da tutti gli esiti dell'esperimento che sono sia in A che in B. (Talora $A \cap B$ si indica con AB).

• Per ogni evento A definiamo il nuovo evento $\overline{A}$, detto *complementare* di A, formato da tutti gli esiti dell'esperimento che non sono in A. (Talvolta $\overline{A}$ si indica con A^c).

Esempio. Nell'esperimento del lancio di 2 monete, con $S = \{cc, ct, tc, tt\}$, se

$$A = \{cc, ct\} = \{\text{croce al primo lancio}\},$$

$$B = \{cc, tt\} = \{\text{nei due lanci si ha lo stesso risultato}\},$$

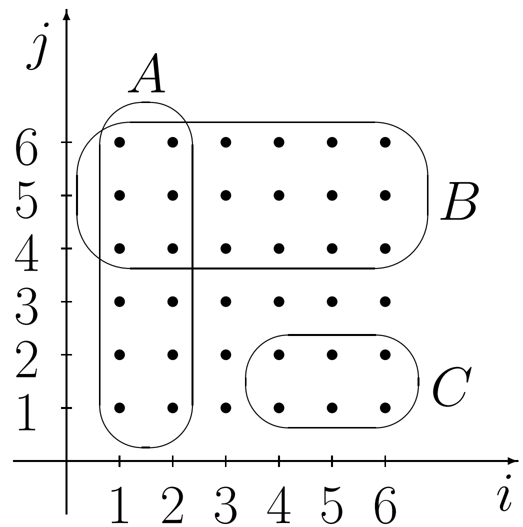
si ha

$$A \cup B = \{cc, ct, tt\}, \qquad A \cap B = \{cc\}, \qquad \overline{A} = \{tc, tt\}, \qquad \overline{B} = \{ct, tc\}.$$

- Il risultato di qualunque esperimento appartiene certamente allo spazio campione; pertanto S viene detto *evento certo*.
- Un evento si dice *impossibile*, e si indica con $\emptyset$, se non contiene esiti dell'esperimento. ($\emptyset$ corrisponde all'insieme vuoto).
- Due eventi A e B si dicono *incompatibili* se $A \cap B = \emptyset$.
- $A_1, A_2, \ldots$ si dicono *a due a due incompatibili* se $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$.
- Più eventi (in numero finito o infinito) si dicono *necessari* se la loro unione è S.
- Gli eventi $A_1, A_2, \ldots$ costituiscono una *partizione* di S se sono necessari e a due a due incompatibili.

Esempio. Nell'esperimento del lancio di due dadi sia

$$A = \{(i,j)\colon i = 1,2;\ j = 1,2,\ldots,6\},$$
$$B = \{(i,j)\colon i = 1,2,\ldots,6;\ j = 4,5,6\},$$
$$C = \{(i,j)\colon i = 4,5,6;\ j = 1,2\}.$$



Si ha $A \cap B = \{(i,j)\colon i = 1,2;\ j = 4,5,6\} \neq \emptyset$,

$$A \cap C = \emptyset, \qquad B \cap C = \emptyset.$$

Esempio. Nell'esperimento dell'estrazione di una biglia da un'urna contenente n biglie numerate da 1 a n, sia $A_k = \{1, 2, \dots, k\}$, per $k = 1, 2, \dots, n$. Gli eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono necessari, ma non incompatibili, essendo

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{1, 2, \dots, n\} \equiv S, \qquad A_i \cap A_j = A_{\min(i,j)} \neq \emptyset.$$

Esempio. Nell'esperimento che consiste nello scegliere a caso un vettore booleano di lunghezza n, indichiamo con A_k l'evento costituito dai vettori aventi esattamente k bit pari a $\mathbf{1}$, per $k = 0, 1, \dots, n$. Gli eventi $A_0, A_1, \dots, A_n$ sono necessari e a due a due incompatibili, e quindi costituiscono una partizione di S. Infatti risulta

$$A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_n = S, \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j,$$

essendo $S = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}\ \forall i\}$ e

$$A_k = \Big\{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in S : \sum_{i=1}^{n} I[\omega_i = \mathbf{1}] = k\Big\},$$

dove $I[P] = 1$ se P è una proposizione vera, e $I[P] = 0$ altrimenti.

- Se $A_1, A_2, \ldots$ sono eventi, si definiscono l'unione e l'intersezione di questi come

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots, \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots;$$

$\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ è l'evento formato da tutti gli esiti che sono compresi in almeno uno degli eventi $A_1, A_2, \ldots$;
$\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ è l'evento formato da tutti gli esiti che sono compresi in tutti gli eventi $A_1, A_2, \ldots$

- Per ogni evento A risulta

$$A \cup \overline{A} = S, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset, \quad A \cup S = S, \quad A \cap S = A, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

- Dati due eventi A e B, se tutti gli esiti di A sono anche in B, allora diciamo che A è contenuto in B, oppure che A implica B, e scriviamo $A \subset B$.
- Se $A \subset B$ e $B \subset A$, diciamo che A e B coincidono, e scriviamo $A = B$.
- Si ha: $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ e $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.
- Risulta $A \subset B$ se e solo se $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Esempio. Sia $S = \{ccc, cct, ctc, ctt, tcc, tct, ttc, ttt\}$ lo spazio campionario nell'esperimento del lancio di 3 monete. Posto

$$A = \{\text{esce sempre testa}\} = \{ttt\},$$

$$B = \{\text{esce almeno una volta testa}\} = \{cct, ctc, ctt, tcc, tct, ttc, ttt\},$$

si ha $A \subset B$, e quindi

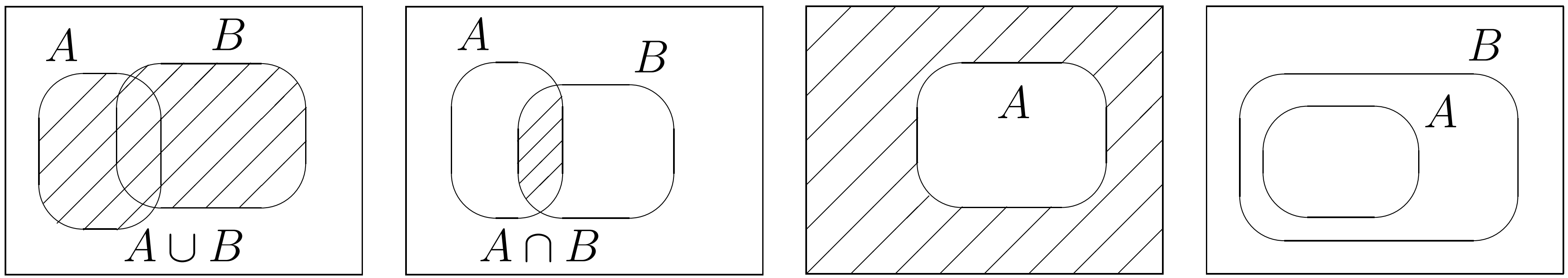
$$\overline{A} = \{\text{esce almeno una volta croce}\} = \{ccc, cct, ctc, ctt, tcc, tct, ttc\},$$

$$\overline{B} = \{\text{esce sempre croce}\} = \{ccc\},$$

da cui segue $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Esercizio. Mostrare che se $A \subset B$, allora A e $\overline{B}$ sono incompatibili.

Diagrammi di Venn



$\overline{A}$ $\qquad$ $A \subset B$

Proprietà

- commutative:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A;$$

- associative:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

- distribuitive:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

- formule di De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

valide anche per un insieme finito di eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i.$$

Esercizio. Siano A e B eventi distinti; stabilire se le seguenti identità sono vere:

(i) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$;

(ii) $A \cap \overline{B} = \overline{B \cup \overline{A}}$;

(iii) $\overline{A} \cup (A \cap B) = \overline{B \cap \overline{A}}$;

(iv) $A \cup \overline{(A \cup B)} = A \cap \overline{B}$;

(v) $(A \cap B) \cup \overline{(A \cup B)} = (A \cup \overline{B}) \cap (B \cup \overline{A})$.

Soluzione. (i) vera; (ii) vera; (iii) falsa; (iv) falsa; (v) vera.

La classe degli eventi

Abbiamo già visto che un sottoinsieme A dello spazio campionario è detto evento. Più precisamente, la *classe degli eventi* $\mathcal{F}$ è una famiglia di sottoinsiemi di S tale che

(i) $S \in \mathcal{F}$;

(ii) se $A \in \mathcal{F}$ allora $\overline{A} \in \mathcal{F}$;

(iii) se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ allora $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \in \mathcal{F}$.

Da tali proprietà segue che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra (sigma-algebra) di eventi, ed inoltre:

(iv) $\emptyset \in \mathcal{F}$;

(v) se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ allora $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \in \mathcal{F}$.

Esempio. Alcuni esempi di classi degli eventi:

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathcal{S}\}$;
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, \overline{A}, S\}$;
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{cc\}, \{ct\}, \{cc, ct\}, \{tc, tt\}, \{cc, tc, tt\}, \{ct, tc, tt\}, \{cc, ct, tc, tt\}\}$;
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(S)$ (insieme delle parti di S), con $|S| = n$ e $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$.

2.3 Impostazioni frequentista e soggettiva della probabilità

La probabilità di un evento può essere definita in termini della frequenza relativa.

Supponiamo che un esperimento, il cui spazio campionario è S, venga ripetuto varie volte sotto le medesime condizioni. Per ogni evento E dello spazio campionario S, definiamo $n(E)$ come *frequenza assoluta*, ossia il numero di volte che si è verificato E nelle prime n ripetizioni dell'esperimento. Notiamo che risulta $0 \leq n(E) \leq n$. Allora $P(E)$, la *probabilità* dell'evento E, è definita come

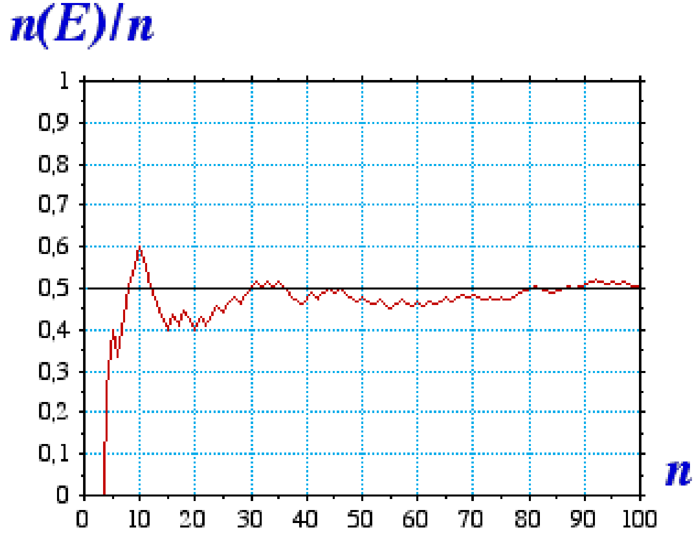
$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(E)}{n}$$

Cioè, $P(E)$ è definita come limite della *frequenza relativa* $n(E)/n$, ossia limite della proporzione del numero di volte che l'evento E si verifica.

Notiamo che $0 \leq n(E)/n \leq 1$ e $n(S)/n = 1$, pertanto ci si attende che debba risultare $0 \leq P(E) \leq 1$ e $P(S) = 1$. Inoltre, risulta $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ se $A \cap B = \emptyset$, e quindi in tal caso ci si attende che sia $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Esempio. Lancio di una moneta ripetuto 100 volte; $S = \{c, t\}$; $E = \{t\}$

n	ω_n	$n(E)$	$n(E)/n$
1	c	0	0
2	c	0	0
3	c	0	0
4	t	1	0,25
5	t	2	0,4
6	c	2	0,33
7	t	3	0,43
8	t	4	0,5
9	t	5	0,56
10	t	6	0,6



La definizione

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(E)}{n}$$

presenta un serio inconveniente:

- come possiamo sapere se $n(E)/n$ converge al limite ad una costante, che sia la stessa per ogni possibile successione di ripetizioni dell'esperimento?

Per esempio, supponiamo che l'esperimento consista nel lancio di una moneta.

- Come possiamo sapere che la proporzione di teste ottenute nei primi n lanci converga ad un valore quando n diventa grande?
- Inoltre, anche sapendo che questa converga, come possiamo sapere che ripetendo altre volte gli esperimenti, otterremo ancora lo stesso limite nella proporzione di teste?

È più ragionevole assumere un insieme di *assiomi* più semplici ed intuitivi per definire la probabilità, che includano le relazioni

$$0 \leq P(E) \leq 1, \quad P(S) = 1, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ se } A \cap B = \emptyset.$$

Secondo l'impostazione soggettiva la probabilità di un evento è il *grado di fiducia che un individuo ha nel verificarsi dell'evento*.

In questa affermazione la probabilità perde la caratteristica "assoluta" di numero legato intrinsecamente all'evento per dipendere dall'opinione soggettiva dell'osservatore.

Esprimendosi in termini di scommesse la probabilità è *il prezzo che un individuo ritiene equo pagare per ricevere* 1 *se l'evento si verifica e* 0 *se l'evento non si verifica.*

ω = risultato dell'esperimento

$$\begin{cases} \omega \in A & \Rightarrow \quad \text{riceviamo } 1 \\ \omega \in \overline{A} & \Rightarrow \quad \text{riceviamo } 0 \end{cases}$$

Va inoltre imposta la seguente condizione di coerenza:

Le probabilità degli eventi vanno attribuite in modo che non sia possibile ottenere con un insieme di scommesse una vincita certa o una perdita certa.

Chiariamo il ruolo della condizione di coerenza per la probabilità soggettiva.

Sia $P(A)$ la probabilità di un evento A secondo l'impostazione soggettiva. Nel pagare $P(A)$ e nel ricevere 1 oppure 0 si guadagna $1 - P(A)$ oppure $-P(A)$, quindi almeno $-P(A)$ e al massimo $1 - P(A)$. Se $P(A)$ fosse negativa si avrebbe certamente un guadagno positivo, mentre se $P(A)$ fosse maggiore di 1 si avrebbe certamente una perdita, e nei due casi la condizione di coerenza è violata. Si ha quindi $0 \leq P(A) \leq 1$.

Se consideriamo una scommessa su S, paghiamo $P(S)$ per ricevere certamente 1; si ha quindi certamente un guadagno pari a $1 - P(S)$. Se fosse $P(S) < 1$ si avrebbe una vincita certa mentre se fosse $P(S) > 1$ si avrebbe una perdita certa. Per la condizione di coerenza si ricava quindi $P(S) = 1$. Analogamente si può mostrare che nell'impostazione soggettiva si ha $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se $A \cap B = \emptyset$.

L'impostazione soggettiva alla probabilità è sottoposta a varie critiche. Lo schema di scommesse che la descrive è infatti contestabile perché la propensione o l'avversità al rischio cambia da persona a persona e per ogni individuo può variare con le circostanze connesse all'esperimento.

Le considerazioni inerenti l'impostazione frequentista e l'impostazione soggettiva suggeriscono di stabilire certe regole per definire la probabilità che includano le relazioni

$$0 \leq P(E) \leq 1, \quad P(S) = 1, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) \ \text{ se } \ A \cap B = \emptyset,$$

anche estendendo l'ultima relazione al caso di successioni di eventi.

2.4 Assiomi della probabilità

Lo *spazio di probabilità* di un esperimento è $(S, \mathcal{F}, P)$, dove S è lo spazio campionario, $\mathcal{F}$ è la classe degli eventi, e $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che per ogni evento A esiste un reale $P(A)$, definito come *probabilità* di A, per cui valgono i seguenti 3 assiomi.

Assioma 1. Per ogni $A \in \mathcal{F}$ si ha

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Assioma 2.

$$P(S) = 1$$

Assioma 3. (Additività numerabile) Per ogni successione di eventi $A_1, A_2, \ldots$ a due a due incompatibili (ossia tali che $A_i \cap A_j = \emptyset$ quando $i \neq j$), si ha

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Proposizione.

$$P(\emptyset) = 0$$

Dimostrazione. Consideriamo una successione di eventi $A_1, A_2, \ldots$, dove $A_1 = S$, $A_2 = A_3 = \ldots = \emptyset$; allora, essendo gli eventi $A_1, A_2, \ldots$ a due a due incompatibili ed essendo

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

dall'Assioma 3 ricaviamo

$$P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset)$$

il che implica $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0$ e quindi

$$P(\emptyset) = 0$$

perciò l'evento impossibile ha probabilità 0 di verificarsi.

Proposizione. (Additività finita) Per ogni collezione finita $A_1, A_2, \dots, A_n$ di eventi a due a due incompatibili (ossia tali che $A_i \cap A_j = \emptyset$ quando $i \neq j$),

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione $A_1, A_2, \dots, A_n, \emptyset, \emptyset, \dots$; essendo gli eventi di tale successione a due a due incompatibili, dall'Assioma 3 segue che

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$$

Ricordando che $P(\emptyset) = 0$, si ottiene

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

da cui segue la tesi.

Esempio. Nell'esperimento del lancio di una moneta si ha $S = \{t, c\}$; occorre fissare 2 reali p_1 e p_2, in modo che

$$P(\{t\}) = p_1, \qquad P(\{c\}) = p_2.$$

Dall'Assioma 1 segue

$$0 \leq p_1 \leq 1, \qquad 0 \leq p_2 \leq 1.$$

Dall'Assioma 2 e dalla proprietà di additività finita si ha

$$1 = P(S) = P(\{t\} \cup \{c\}) = P(\{t\}) + P(\{c\}) = p_1 + p_2.$$

Ad esempio, se testa e croce si verificano con uguale probabilità avremo

$$P(\{t\}) = \frac{1}{2}, \qquad P(\{c\}) = \frac{1}{2};$$

se invece abbiamo la sensazione che la moneta sia truccata in modo da mostrare testa con probabilità doppia rispetto a quella di croce, avremo

$$P(\{t\}) = \frac{2}{3}, \qquad P(\{c\}) = \frac{1}{3}.$$

Esempio. Nel lancio di un dado, con $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, se supponiamo che le sei facce siano equiprobabili, allora dovremo porre

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

Dalla proprietà di additività finita segue che la probabilità che in lancio del dado si ottenga un numero pari vale

$$P(\{2, 4, 6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{2}.$$

Più in generale, se il dado ha n facce, con $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, e se si suppone che le n facce siano equiprobabili, allora avremo

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \ldots = P(\{n\}) = \frac{1}{n}.$$

La probabilità che in un lancio del dado si ottenga un numero compreso tra 1 e k è

$$P(\{1, 2, \ldots, k\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + \ldots + P(\{k\}) = \frac{k}{n}, \qquad (1 \leq k \leq n).$$