Traccia 7/01/2016

lunedì 17 maggio 2021 14:00

Esercizio 2 Sette terminali numerati di un sistema interattivo sono collegati da una linea di comunicazione ad un computer centrale. Di questi, esattamente quattro sono pronti a trasmettere un messaggio (stato **ON**), e la distribuzione di tali quattro terminali tra i sette è uniforme. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di terminali interrogati (in ordine dal n.1 al n.7) prima di trovare il primo terminale nello stato **ON**.

(i) Ricavare la distribuzione di probabilità di X.

(ii) Determinare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.

(iii) Calcolare valore medio e varianza di X.

(iv) Posto $Y = 1/X$, determinare $E(Y)$.

$$7 \text{ terminali} \begin{cases} 4 \text{ stato ON} \\ 3 \text{ stato OFF} \end{cases}$$

$$X \in \{1, 2, 3, 4\}$$

(i) $P(X = 1) = \frac{4}{7}$

$$P(X = 2) = \frac{\cancel{3}^{\,1}}{7} \cdot \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{6}\,\cancel{2}} = \frac{2}{7}$$

(ii) $F(x) = \underline{P}(X \leq x)$

Per $\underline{\underline{x < 1}}$, $F(x) = \underline{P}(X \leq x) = 0$

Per $1 \leq x < 2$, $F(x) = \underline{P}(X \leq x) = \underline{P}(X = 1) = \frac{4}{7}$

Per $2 \leq x < 3$, $F(x) = \underline{P}(X \leq x) = \underline{P}(X=1) + \underline{P}(X=2)$

$$= \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

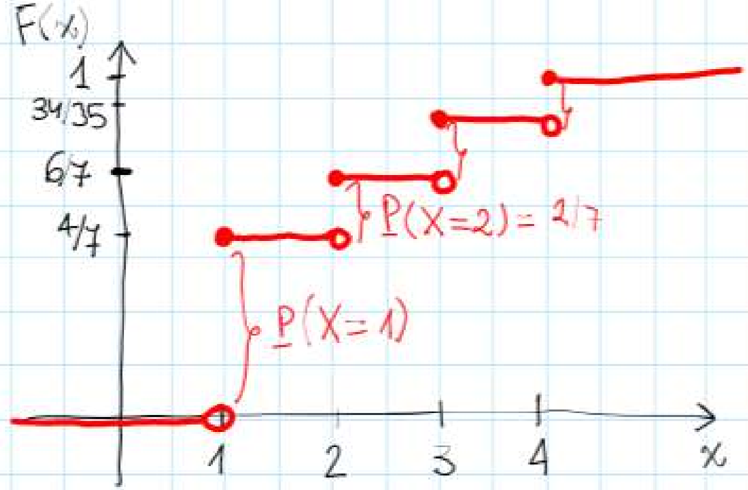
Per $3 \leq x < 4$, $F(x) = \underline{P}(X \leq x) = \underline{P}(X=1) + \underline{P}(X=2) + \underline{P}(X=3)$

$$= \frac{6}{7} + \frac{4}{35} = \frac{34}{35}$$

Per $x \geq 4$, $F(x) = \underline{P}(X \leq x) = 1$

Quindi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 4/7, & 1 \leq x < 2 \\ 6/7, & 2 \leq x < 3 \\ 34/35, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$



(iv) $\quad Y = \frac{1}{X}$ $\qquad Y \in \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right\}$

$\frac{1}{1} \to 4/7$, $\frac{1}{2} \to 2/7$, $\frac{1}{3} \to 4/35$, $\frac{1}{4} \to 1/35$

$\cancel{E(Y) = \frac{1}{E(X)}}$ **NO**

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{35} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{35} = \frac{319}{420}$$

Esercizio variabili aleatorie discrete num1

lunedì 17 maggio 2021 14:49

Esercizio 3 Un esperimento consiste nel generare a caso vettori booleani di lunghezza n, dove ogni elemento assume con uguale probabilità valore 0 ed 1 indipendentemente dagli altri. Sia X la variabile aleatoria che rappresenta la lunghezza minima del vettore affinché contenga lo 0.

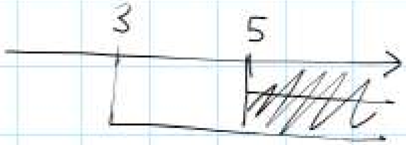
(i) Determinare la densità discreta $P(X = x)$.
(ii) Calcolare $E(X)$ e $Var(X)$.
(iii) Valutare la probabilità condizionata $P(X > 5 \mid X > 3)$.

$$X \sim Geom\left(\frac{1}{2}\right)$$

(i) $$P(X = x) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \frac{1}{2^x} \qquad x = 1, 2, 3, 4, \dots$$

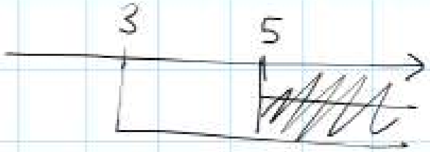
(ii) $$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{1/2} = 2 \qquad Var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1 - 1/2}{1/4} = \frac{1/2}{1/4} = 2$$

(iii) $$P(X > 5 \mid X > 3) = \frac{P(X>5 \cap X>3)}{P(X>3)} = \frac{P(X>5)}{P(X>3)}$$



$$= \frac{1 - P(X \leq 5)}{1 - P(X \leq 3)} = \frac{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} - 1/2^5}{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3}} = \frac{1/32}{1/8}$$

(iii) $P(X>5 \mid X>3) = \dfrac{P(X>5 \cap X>3)}{P(X>3)} = \dfrac{P(X>5)}{P(X>3)}$



$$= \frac{1-P(X\le 5)}{1-P(X<3)} = \frac{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-1/2^5}{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}} = \frac{1/32}{1/8}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$P(X>3+2 \mid X>3) = P(X>2) = 1-P(X\le 2)$$

$$= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Esercizio variabili aleatorie discrete num2

lunedì 17 maggio 2021 15:06

Esercizio 1 Un gioco consiste nel lanciare simultaneamente due dadi non truccati, ciascuno con 3 facce. Sia X la variabile aleatoria che rappresenta il quadrato della somma dei due dadi.

(i) Determinare la densità discreta $P(X = x)$.
(ii) Ricavare $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Determinare $E(X)$ e $Var(X)$.
(iv) Supponiamo di partecipare al gioco pagando la cifra di a euro per guadagnare $5X$. Qual è il valore di a che rende il gioco equo?

(i)

x_1	x_2	$X = (x_1 + x_2)^2$
1	1	4
1	2	9
1	3	16
2	1	9
2	2	16
2	3	25
3	1	16
3	2	25
3	3	36

$X \in \{4, 9, 16, 25, 36\}$

$P(X=4) = \frac{1}{9}$

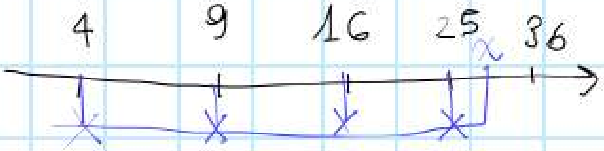
$P(X=9) = \frac{2}{9}$

$P(X=16) = \frac{3}{9}$

$P(X=25) = \frac{2}{9}$

$P(X=36) = 1/9$

(iii)



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 4 \\ 1/9 & \text{per } 4 \leq x < 9 \\ 3/9 & \text{per } 9 \leq x < 16 \\ 6/9 & \text{per } 16 \leq x < 25 \\ 8/9 & \text{per } 25 \leq x < 36 \\ 1 & \text{per } x \geq 36 \end{cases}$$

(iii) $\mathbb{E}(X) = 4 \cdot \frac{1}{9} + 9 \cdot \frac{2}{9} + 16 \cdot \frac{3}{9} + 25 \cdot \frac{2}{9} + 36 \cdot \frac{1}{9} = \frac{52}{3}$

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{788}{9}$ (facendo i calcoli)

(iv) $\mathbb{E}(5X - a) = 0$

$\mathbb{E}(5X - a) = \mathbb{E}(5X) - \mathbb{E}(a) = 5 \cdot \mathbb{E}(X) - a = 0$

$\Rightarrow \quad a = 5 \cdot \mathbb{E}(X) = 5 \cdot \frac{52}{3} \simeq 87$ €

Esercizio variabili aleatorie discrete num3

lunedì 17 maggio 2021 15:34

Esercizio 2 Un gioco consiste nel lanciare a caso 5 biglie in 3 cestini **A**, **B**, **C**, in modo che ogni biglia abbia la stessa probabilità di cadere in **A**, **B** o **C**. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero totale di biglie che cadono in **A**.

(i) Determinare la densità discreta $P(X = x)$.
(ii) Ricavare $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Determinare $E(X)$ e $Var(X)$.
(iv) Qual è la probabilità che in **A** cada almeno una biglia?
(v) Qual è la probabilità che in **A** cada almeno una biglia, sapendo che ne è caduto un numero minore-uguale di 3?

$X \sim Bin\left(5, \frac{1}{3}\right)$

(i) $\underline{P}(X = x) = \binom{5}{x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-x}$ $\quad x = 0, 1, 2, \dots, 5$

(ii) ...

(iii) $\mathbb{E}(X) = 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$Var(X) = 5 \cdot \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$

(iv)

$\underline{P}(X \geq 1) = 1 - \underline{P}(X = 0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{211}{243} \cong 0{,}87$

(ν)

$$\underline{P}(X \geq 1 \mid X \leq 3) = \frac{\underline{P}(X \geq 1 \cap X \leq 3)}{\underline{P}(X \leq 3)} = \frac{\underline{P}(1 \leq X \leq 3)}{\underline{P}(X \leq 3)}$$

$$= \frac{\underline{P}(X=1) + \underline{P}(X=2) + \underline{P}(X=3)}{\underline{P}(X=0) + \dots + \underline{P}(X=3)} = \frac{25}{29}$$