Esercizio 4.c

lunedì 10 maggio 2021 13:20

4.c) Vi sono due dadi, di cui uno è truccato, nel senso che le facce del dado sono $\{1, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Se si sceglie a caso uno dei due dadi e lo si lancia 5 volte, sia X il numero di volte che esce 1. Valutare
(i) $P(X \geq 2)$,
(ii) $E(X)$,
(iii) $Var(X)$.

Dado equo

X_e = # volte che esce 1 $\quad (X_e \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$(p$ = prob. di successo in ogni prova $= \frac{1}{6}$ $\qquad X_e \sim Bin(5, 1/6)$

$(n$ = # prove = 5

$$P(X_e = x) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-x} = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{5-x} \quad x \in \{0, 1, \dots, 5\}$$

Dado truccato

X_t = # volte esce 1 $\qquad X_t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad n = 5 \qquad X_t \sim \text{Bin}(5, 1/3)$

$$\underline{P}(X_t = x) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(1-\frac{1}{3}\right)^{5-x} = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} \qquad x \in \{0, 1, \ldots, 5\}$$

$$\underline{P}(X = x) = \underline{P}(\underbrace{X = x \mid De}_{X_e = x}) \cdot \underline{P}(De) + \underline{P}(\underbrace{X = x \mid Dt}_{X_t = x}) \cdot \underline{P}(Dt)$$

$$= \underline{P}(X_e = x) \cdot \frac{1}{2} + \underline{P}(X_t = x) \cdot \frac{1}{2}$$

i) $\underline{P}(X \geq 2) = 1 - \underline{P}(X < 2) = 1 - \underline{P}(X = 0) - \underline{P}(X = 1) = 1 - \frac{461}{1728} - \frac{1895}{5184} = \frac{953}{2592} \cong 0,37$

$$P(X=0) = P(X_e=0)\frac{1}{2} + P(X_t=0)\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot\frac{1}{2} + \binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{5^5}{6^5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2^5}{3^5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{461}{1728}$$

$$P(X=1) = \underbrace{\binom{5}{1}}_{5}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{2} + \underbrace{\binom{5}{1}}_{5}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{2} = \frac{1895}{5184}$$

(ii) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_e)\cdot\frac{1}{2} + \mathbb{E}(X_t)\cdot\frac{1}{2} = 5\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + 5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

(iii) $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))^2\right] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{95}{36} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{155}{144}$

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2\cdot P(X=0) + 1^2\cdot P(X=1) + 2^2 P(X=2) + \dots + 5^2\cdot P(X=5) = \frac{95}{36}$$

$P(X=2) = \frac{635}{2592}$ $\quad P(X=3) = \frac{85}{864}$ $\quad P(X=4) = \frac{115}{5184}$ $\quad P(X=5) = \frac{11}{5184}$

4.d) Giorgio dispone di due monete truccate: la prima fornisce testa con probabilità $\frac{2}{3}$, la seconda con probabilità $\frac{1}{3}$. Fabrizio sceglie a caso una delle due monete e la lancia finché non esce testa.
(i) Qual è la probabilità che la moneta mostri testa per la prima volta al quarto lancio?
(ii) Qual è la probabilità che siano necessari almeno cinque lanci perché la moneta mostri testa per la prima volta?
(iii) Se Fabrizio sceglie la seconda moneta, qual è il numero medio di lanci che deve effettuare affinché la moneta mostri testa per la prima volta?

X = il numero del tentativo in cui esce testa per la 1ª volta

Moneta 1 $\quad p = \frac{2}{3}$

$$X_1 \sim Geom\left(\frac{2}{3}\right) \qquad X_1 \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = x) = (1 - 2/3)^{x-1} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \cdot \frac{2}{3}$$

Moneta 2 $\quad p = 1/3$

$$X_2 \sim Geom\left(\frac{1}{3}\right) \qquad X_2 \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = x) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{3}$$

(i) $\underline{P}(X=4) = \underline{P}(X_1=4)\cdot\frac{1}{2} + \underline{P}(X_2=4)\cdot\frac{1}{2}$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{4-1}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{4-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3^4} + \frac{4}{3^4} = \frac{5}{3^4}$$

(ii) $\underline{P}(X\geq 5) = 1 - \underline{P}(X<5)$

$$= 1 - \left[\underline{P}(X=4) + \underline{P}(X=3) + \underline{P}(X=2) + \underline{P}(X=1)\right]$$

$$= 1 - \frac{5}{3^4} - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} - \frac{1}{2} = \frac{17}{162} \cong 0,10$$

$$\underline{P}(X=3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{3-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{27} + \frac{2}{27} = \frac{1}{9}$$

$$\underline{P}(X=2) = \left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} + \frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{2}{9}$$

$$\underline{P}(X=1) = \left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^0\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(iii) $\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

Esercizio 1 (10 punti)
Un gruppo è costituito da 6 studiosi di cui metà italiani e metà stranieri. Dal gruppo si scelgono a caso 3 individui. Sia X la variabile aleatoria che rappresenta il numero di studiosi italiani nel gruppo scelto.
(i) Determinare $P(X = k)$, $k = 0, 1, 2, 3$; **(ii)** calcolare la probabilità che il numero di studiosi italiani nel gruppo scelto sia maggiore di quello degli stranieri;
(iii) calcolare $E(X)$ e $Var(X)$.

X = # studiosi italiani nel gruppo scelto

$X \sim \text{Ipergeom}(6, 3)$

(i) $P(X=0) = \dfrac{\binom{3}{0}\binom{3}{3}}{\binom{6}{3}} = \dfrac{1}{20}$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot\cancel{3!}}{3!\cdot\cancel{3!}} = \frac{\cancel{6}\cdot5\cdot4}{\cancel{6}} = 20$$

$P(X=1) = \dfrac{\binom{3}{1}\binom{3}{2}}{\binom{6}{3}} = \dfrac{3\cdot 3}{20} = \dfrac{9}{20}$

$P(X=2) = \dfrac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}} = \dfrac{9}{20}$

$$P(X=3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{3}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{20}$$

(ii) $$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{9}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$$

(iii) $$E(X) = \cancel{0 \cdot \frac{1}{20}} + 1 \cdot \frac{9}{20} + 2 \cdot \frac{9}{20} + 3 \cdot \frac{1}{20} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{9}{20} + 2^2 \cdot \frac{9}{20} + 3^2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{54}{20} = \frac{27}{10}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{27}{10} - \frac{9}{4} = \frac{9}{20}$$