

# **Lezioni di Ricerca Operativa**

Corso di Laurea in Informatica

Università di Salerno

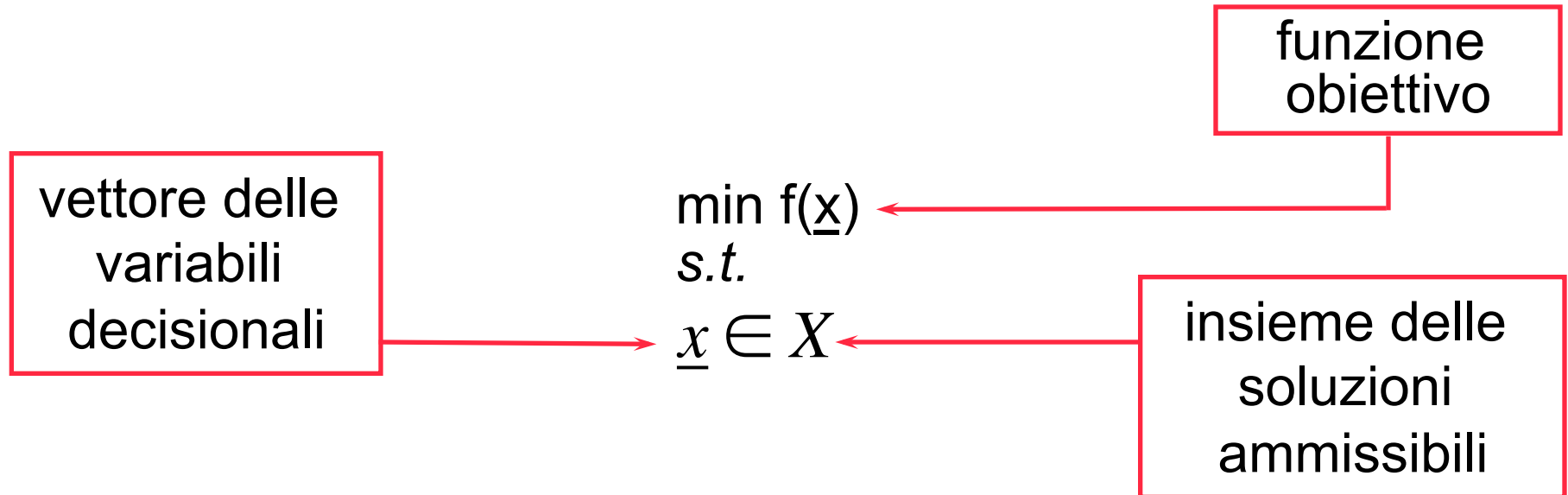
## **Lezione n° 4**

- Problemi di Programmazione Matematica
- Problemi Lineari e Problemi Lineari Interi
- Forma Canonica. Forma Standard

R. Cerulli – F. Carrabs

# Problema di Ottimizzazione

Data una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un **problema di Ottimizzazione** (PO) può essere formulato come:



Quindi un problema di Ottimizzazione consiste nel determinare, se esiste, un punto di minimo della funzione  $f$  tra i punti dell'insieme  $X$ .

# Problemi di Programmazione Matematica

Quando l'insieme delle soluzioni ammissibili di un problema di ottimizzazione viene espresso attraverso un sistema di equazioni e disequazioni, tale problema prende il nome di **problema di Programmazione Matematica (PM)**.

i-esimo  
vincolo del  
sistema

$$\begin{array}{ll} \min f(\underline{x}) \\ \text{s.t.} \\ g_i(\underline{x}) \geq b_i & i=1, \dots, m \end{array}$$

i-esima  
componente  
del vettore dei  
termini noti

# Problemi di Programmazione Lineare

Un problema di PM è **lineare** quando:

- la funzione obiettivo è lineare:  $f(\underline{x}) = \underline{c}^T \underline{x}$
- l'insieme  $X$  è espresso in termini di relazioni (uguaglianze e disuguaglianze) lineari

$$\begin{array}{ll} \min & f(\underline{x}) \\ \text{s.t.} & \\ & g_i(\underline{x}) \geq b_i \quad i=1, \dots, m \end{array}$$

## Forma esplicita

$$\begin{array}{llllll} \min & c_1 x_1 & + & c_2 x_2 & + \dots + & c_n x_n \\ \text{s.t.} & a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + \dots + & a_{1n} x_n & \geq & b_1 \\ & a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + \dots + & a_{2n} x_n & \geq & b_2 \\ & a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + \dots + & a_{mn} x_n & \geq & b_m \end{array}$$

## Forma compatta

$$\begin{array}{ll} \min & \underline{c}^T \underline{x} \\ \text{s.t.} & A \underline{x} \geq \underline{b} \end{array}$$

$$X \rightarrow \{ \underline{x} \in \mathbf{R}^n : A \underline{x} \geq \underline{b} \}$$

$$X \rightarrow \{ \underline{x} \in \mathbf{Z}^n : A \underline{x} \geq \underline{b} \}$$

variabili  $\underline{x}$  continue

**Programmazione Lineare Continua (PL)**

variabili  $\underline{x}$  intere

**Programmazione Lineare Intera (PLI)**

# Esempio

## Forma esplicita

$$\max \quad 500x_1 + 700x_2 + 350x_3 + 400x_4 + 200x_5$$

s.t.

$$8x_1 + 10x_2 + 5x_4 + 7x_5 = 96$$

$$5x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 96$$

$$20x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 20x_5 = 384$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

## Forma compatta

$$\min \quad \underline{c}^T \underline{x}$$

$$\text{s.t.} \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0$$

$$\underline{c}^T = [500 \quad 700 \quad 350 \quad 400 \quad 200] \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 0 & 5 & 7 \\ 5 & 12 & 4 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 96 \\ 96 \\ 384 \end{bmatrix}$$

## Combinazione lineare delle colonne di A

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 20 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 20 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 20 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} x_5 = \begin{bmatrix} 96 \\ 96 \\ 384 \end{bmatrix}$$

# Problemi di Programmazione Lineare

Dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{array}{ll}\min & f(\underline{x}) \\ \text{s.t.} & \\ & g_i(\underline{x}) \geq b_i \quad i=1, \dots, m\end{array}$$

un vettore  $\underline{x}'$  di  $\mathbb{R}^n$ :

- **soddisfa** il vincolo  $g_i(\underline{x}) \geq b_i$  se  $g_i(\underline{x}') \geq b_i$
- **viola** il vincolo  $g_i(\underline{x}) \geq b_i$  se  $g_i(\underline{x}') < b_i$
- **satura** (o rende attivo) il vincolo  $g_i(\underline{x}) \geq b_i$  se  $g_i(\underline{x}') = b_i$

Un vettore  $\underline{x}$  di  $\mathbb{R}^n$  è **soluzione ammissibile** per il problema di PL se e solo se soddisfa tutti i vincoli del problema.

# Soluzioni di un problema di PL

$$\begin{array}{ll}\min & f(\underline{x}) \\ \text{s.t.} & \\ & g_i(\underline{x}) \geq b_i \quad i=1, \dots, m\end{array}$$

Un problema di programmazione lineare risulta:

- **Inammissibile** se la regione ammissibile è vuota ossia  $X=\emptyset$ .
- **Illimitato** (inferiormente) se scelto un qualsiasi scalare  $k$ , esiste sempre un punto  $\underline{x} \in X$  tale che  $f(\underline{x}) < k$ .
- **Ammettere soluzione ottima finita** se esiste un punto  $\underline{x}^* \in X$  tale che  $f(\underline{x}^*) \leq f(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in X$ .

## Esempio 1: Piano di produzione aziendale

Un'azienda produce tre tipi di elettrodomestici: lavatrici, frigoriferi e forni.

Per produrre una lavatrice occorrono 9 ore di lavorazione sulla macchina M1 e 8 ore di lavorazione sulla macchina M2; mentre per produrre un frigorifero occorrono 11 ore di lavorazione sulla macchina M2; infine per produrre un forno occorrono 4 ore sulla macchina M1 e 6 sulla macchina M2.

La macchina M1 è disponibile per 137 ore settimanali, mentre la macchina M2 è disponibile per 149 ore settimanali. Il numero di forni prodotti non può essere superiore alla somma dei frigoriferi e delle lavatrici prodotte. Tuttavia devono essere prodotti almeno 20 forni. Inoltre il numero di lavatrici prodotte non può essere superiore al numero di frigoriferi prodotti per al più 5 unità.

Il guadagno ottenuto dalla vendita di una lavatrice è di 375 euro, quello ottenuto per un frigorifero è 320 euro e quello per un forno è 170 euro. Si vuole conoscere la quantità di lavatrici, frigoriferi e forni da produrre settimanalmente per massimizzare il guadagno totale nel rispetto dei vincoli di produzione.

**a) Si formuli il corrispondente modello di programmazione.**



## Esempio 1: Piano di produzione aziendale

La prima cosa da fare per poter formulare un problema è individuare le variabili decisionali. Poiché il nostro obiettivo è quello di definire il numero di lavatrici, frigoriferi e forni da produrre, associamo ad ogni tipo di elettrodomestico una variabile distinta:

$x_1$  = numero di lavatrici da produrre

$x_2$  = numero di frigoriferi da produrre

$x_3$  = numero di forni da produrre

$$\max \quad 375x_1 + 320x_2 + 170x_3$$

$$9x_1 + 4x_3 \leq 137$$

$$8x_1 + 11x_2 + 6x_3 \leq 149$$

$$x_3 \leq x_1 + x_2$$

$$x_3 \geq 20$$

$$x_1 \leq 5 + x_2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{ intere}$$

# Problemi di Programmazione Lineare: Forma Canonica

Consideriamo un problema di Programmazione Lineare (PL) con  $m$  vincoli ed  $n$  variabili in **Forma Canonica di minimo**:

$$\min z = \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A \underline{x} \geq \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\underline{x} \in R^n$$

- $\underline{x}$  è il vettore  $n \times 1$  delle **variabili decisionali**
- $\underline{c}$  è il vettore  $n \times 1$  dei **coefficienti di costo** della funzione obiettivo
- $\underline{b}$  è il vettore  $m \times 1$  dei **termini noti** dei vincoli
- $A$  è la matrice  $m \times n$  dei coefficienti dei vincoli;  $A = [a_{ij}]$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$

## Problemi di Programmazione Lineare: Forma Standard di minimo

$$\min \quad z = \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A \underline{x} = \underline{b} \quad (1)$$

$$\underline{x} \geq \underline{0} \quad (2)$$

$$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

**Condizione:  $\underline{b} \geq 0$**

- I valori di  $\underline{x}$  che soddisfano i vincoli (1) sono detti **soluzioni** del problema di PL.
- Inoltre, i valori di  $\underline{x}$  che soddisfano anche i vincoli (2) sono detti **soluzioni ammissibili** del problema di PL.

Si assumono soddisfatte le seguenti ipotesi:

- $m < n$
- $m = \text{rango}(A)$

L'ipotesi  $m < n$  (più variabili che vincoli) non rappresenta una perdita di generalità.

E' noto infatti che il sistema di equazioni lineari (1):

- ❑ può ammettere una soluzione unica se  $m = n$
- ❑ può ammettere  $\infty^{n-m}$  soluzioni se  $m < n$

Solo il secondo caso è significativo dal punto di vista dei problemi di ottimizzazione.

## **Definizione 1 (Problemi equivalenti)**

Due problemi di programmazione lineare di minimo (massimo) (P) e (P') sono **equivalenti** se, per ogni soluzione ammissibile di (P), possiamo costruire una soluzione ammissibile di (P') con lo stesso valore e, per ogni soluzione ammissibile di (P'), possiamo costruire una soluzione ammissibile di (P) con lo stesso valore.

## **Osservazione 1**

Se due problemi di programmazione lineare sono equivalenti allora i valori delle rispettive soluzioni ottime coincidono.

## **Osservazione 2**

Qualunque problema di PL può essere trasformato in un problema equivalente in forma canonica o standard.

# Formulazioni equivalenti:

## Funzione Obiettivo

$$\max \quad z = \underline{c}^T \underline{x} \quad \Leftrightarrow \quad - \min \quad -z = -\underline{c}^T \underline{x}$$

Esempio

$$\max \quad z = 3x_1 + 5x_2 \quad \Leftrightarrow \quad - \min \quad -z = -3x_1 - 5x_2$$

## Formulazioni equivalenti:

### Vincoli

$$A\underline{x} \geq \underline{b} \Leftrightarrow -A\underline{x} \leq -\underline{b}$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow \begin{cases} A\underline{x} \leq \underline{b} \\ A\underline{x} \geq \underline{b} \end{cases}$$

## Formulazioni equivalenti:

Vincoli di disuguaglianza in vincoli di uguaglianza

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\geq) b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + (-) x_{n+1} = b_i$$

$x_{n+1}$  = Variabile di **slack** (variabile **fittizia**)

$$x_{n+1} \geq 0$$

$$x_{n+1} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$



## Formulazioni equivalenti:

### Variabili

$$x_j \leq 0 \Leftrightarrow -x_j \geq 0 \Rightarrow x'_j = -x_j$$

$$x_j \text{ non vincolata} \Leftrightarrow x_j = x'_j - x''_j$$

$$\text{Con } x'_j \geq 0 \text{ e } x''_j \geq 0$$

## Esercizio

Scrivere la forma canonica e la forma standard per il seguente problema di programmazione lineare.

$$\max \quad z = x_1 - x_2 - x_3$$

$$-3x_1 - x_2 + x_3 \leq -3$$

$$2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \geq 4$$

$$x_1 - x_3 = 2$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \leq 0$$

$$x_3 \text{ n.v.}$$