Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 7/1/2016

Esercizio 1 La centrale operativa dell'Ufficio di Protezione Civile delle province di Avellino e Salerno può ricevere richieste d'intervento dalle città di Salerno, Avellino, Atripalda e Mercato San Severino. La richiesta d'intervento di ciascuna città è indipendente da quella delle altre. La probabilità che la centrale riceva richieste di intervento (nell'intervallo di tempo di un minuto) dalla città di Salerno è 0,8, da Mercato San Severino 0,3, da Avellino 0,5 ed infine da Atripalda 0,05.
(i) Qual è la probabilità che la richiesta d'intervento arrivi esattamente da una città nell'intervallo di tempo di un minuto?
(ii) Qual è la probabilità che la richiesta d'intervento arrivi da non più di due città nell'intervallo di tempo di un minuto?
(iii) Sapendo che la centrale operativa ha ricevuto la richiesta d'intervento da esattamente una città, qual è la probabilità che sia giunta dalla città di Mercato San Severino?

Esercizio 2 Sette terminali numerati di un sistema interattivo sono collegati da una linea di comunicazione ad un computer centrale. Di questi, esattamente quattro sono pronti a trasmettere un messaggio (stato **ON**), e la distribuzione di tali quattro terminali tra i sette è uniforme. Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di terminali interrogati (in ordine dal n.1 al n.7) prima di trovare il primo terminale nello stato **ON**.
(i) Ricavare la distribuzione di probabilità di X.
(ii) Determinare la funzione di distribuzione $F(x) = P(X \leq x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Calcolare valore medio e varianza di X.
(iv) Posto $Y = 1/X$, determinare $E(Y)$.

Esercizio 3 Si consideri la variabile aleatoria doppia (X, Y) avente la seguente funzione di probabilità congiunta

$x \backslash y$	0	1	2
0	$1/8$	$1/2 - p$	$p - 1/8$
1	0	$1/8$	$2p - 1/8$

(i) Determinare i valori ammissibili di p.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare $Cov(X, Y)$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 27/1/2016

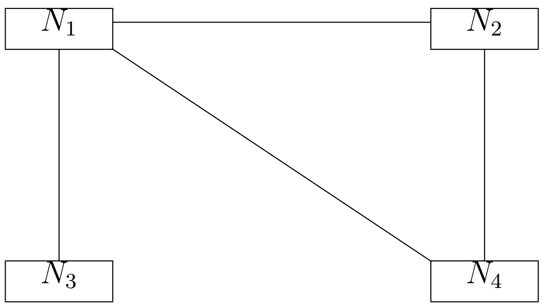
Esercizio 1 Un vettore booleano di lunghezza 6 contiene 3 bit pari a **1** e 3 bit pari a **0**, distribuiti a caso. Un algoritmo esamina i bit del vettore uno per volta, e si ferma in corrispondenza del secondo bit pari a **1**.
(i) Qual è la probabilità che l'algoritmo si fermi al passo k-esimo $(2 \leq k \leq 5)$?
(ii) Qual è la probabilità che il bit successivo al secondo **1** sia pari a **0**, sapendo che l'algoritmo si ferma al passo k-esimo $(2 \leq k \leq 5)$?
(iii) Qual è la probabilità che il bit successivo al secondo **1** sia pari a **0**?

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4}(3-x), & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

(i) Ricavare la densità di probabilità di X, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Determinare il valore atteso $\mu = E(X)$.
(iii) Calcolare $P(X > 1 \,|\, X > 1/2)$.
(iv) Calcolare $P(Z > 1 \,|\, Z > 1/2)$, dove Z è una variabile aleatoria normale standard.

Esercizio 3 Si consideri il seguente grafo, dove ciascuno dei 4 nodi è attivo o non attivo con probabilità 1/2, indipendentemente dagli altri. Sia X il numero di nodi attivi, e sia Y il numero di archi del grafo che insistono su 2 nodi entrambi attivi.



(i) Calcolare la distribuzione congiunta $P(X = x, Y = y)$.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare $P(X = Y)$ e $E[(X - Y)^2]$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 10/2/2016

Esercizio 1 Si consideri una sequenza di n bit casuali, con $n \geq 2$, tali che ognuno indipendentemente dagli altri assuma valore **1** o **0** con probabilità 1/2. Poniamo
$A = \{$almeno 1 bit assume valore **1**$\}$,
$B = \{$i primi 2 bit assumono stesso valore$\}$.
(i) Calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(\overline{A} \cap B)$ e $P(A \cap B)$.
(ii) Stabilire se esiste un valore di $n \geq 2$ per cui A e B sono indipendenti.
(iii) Calcolare $P(A \cup B)$ e $P(\overline{A} \cup B)$.

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua avente funzione densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - c\,x & \text{per } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Derminare il valore della costante c.
(ii) Ricavare la funzione di distribuzione di X, mostrandone l'andamento grafico.
(iii) Determinare $E(X)$.
(iv) Calcolare

$$P\left(X > \frac{1}{4} \,\middle|\, X \leq \frac{1}{2}\right).$$

Esercizio 3 Si consideri l'esperimento che consiste nell'effettuare 3 estrazioni (senza reinserimento) da un'urna contenente 3 biglie bianche e 3 biglie nere. Sia X il numero di volte che esce una biglia nera, e sia Y la variabile aleatoria così definita:

$$Y = \begin{cases} k & \text{se esce una biglia bianca per la prima volta all'estrazione } k\text{-esima} \\ 0 & \text{se non esce mai una biglia bianca.} \end{cases}$$

(i) Ricavare la funzione di probabilità congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.
(ii) Calcolare la covarianza di (X, Y) e commentare il risultato ottenuto. In particolare, cosa si può dire sull'indipendenza di (X, Y)?
(iii) Determinare $P(X = x \,|\, Y = 1)$ per $x = 0, 1, 2, 3$.

Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Fisciano, 5/4/2016

Esercizio 1 Da un'urna che contiene 5 biglie numerate da 1 a 5 si effettuano 3 estrazioni con reinserimento. Denotando con w_1, w_2 e w_3 i numeri estratti,
(i) calcolare la probabilità che sia $w_1 < w_2 < w_3$;
(ii) calcolare la probabilità che sia $w_1 = k$ (per $k = 1, 2, 3$) sapendo che $w_1 < w_2 < w_3$;
(iii) verificare che la somma delle 3 probabilità calcolate al punto (ii) è 1.

Esercizio 2 Sia X una variabile aleatoria continua che descrive il tempo di completamento di una procedura, avente funzione di distribuzione

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(i) Determinare la densità $f(x)$, mostrandone l'andamento grafico.
(ii) Supponiamo che si consegua una vincita pari a $V(X) = X + 1$ se il tempo di completamento della procedura è minore di 1, altrimenti non si vince nulla, ossia $V(X) = 0$. Valutare la vincita attesa $E[V(X)]$.
(iii) Stabilire per quali valori di $x \geq 0$ sussiste la seguente relazione:

$$P(X > 2x \,|\, X > x) \geq P(X > x).$$

Esercizio 3 Nell'esperimento che consiste nel generare a caso una sequenza di 4 bit, sia X il numero di bit pari a **1**, e sia $Y = 1$ se la sequenza è palindroma, $Y = 0$ altrimenti.
(i) Determinare la funzione di probabilità congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.
(ii) Stabilire se X e Y sono indipendenti.
(iii) Calcolare il coefficiente di correlazione di (X, Y).
(iv) Valutare $P(X + Y \leq 1 | X + Y \leq 3)$.