Macchine di Turing non-deterministiche: equivalenza

28 aprile 2023

MdT non deterministica

Definizione (Macchina di Turing non deterministica)

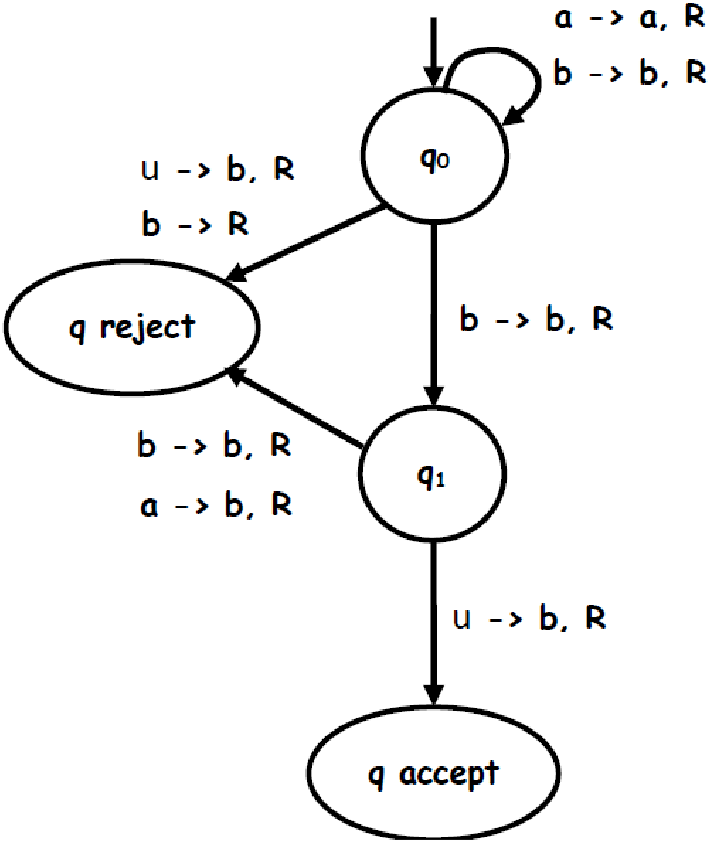
Una Macchina di Turing **non deterministica** *è una settupla* $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ *dove:*

- $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{accept}, q_{reject}$ *sono definiti come in una MdT deterministica*
- *la funzione di transizione* δ *è definita al modo seguente:*

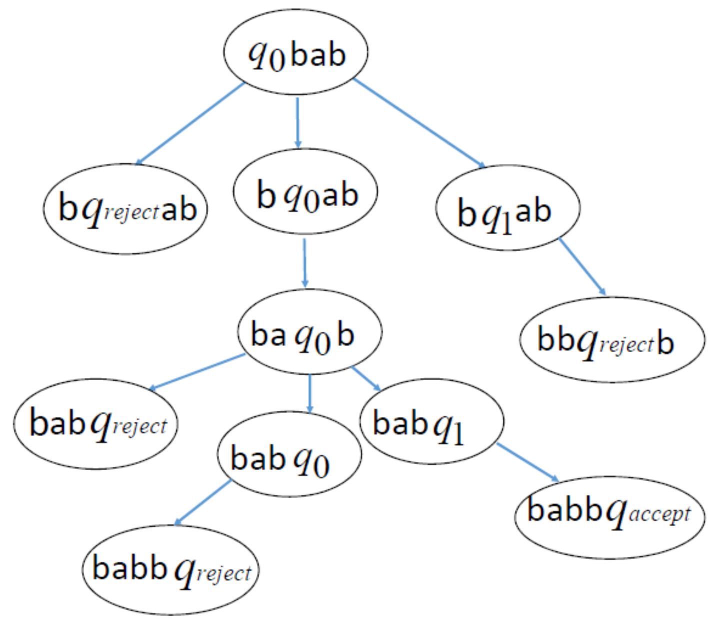
$$\delta : (Q \setminus \{q_{accept}, q_{reject}\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$$

Nota: Se δ(*q*, *a*) è l'insieme vuoto, la macchina si muove nello stato q_{reject} e si ferma.

Esempio – M_1



Albero delle computazioni per bab



$$\delta(q_0, b) = \{(q_0, b, R), (q_1, b, R), (q_{reject}, b, R)\}$$

MdT non deterministica

Sia N una macchina di Turing non deterministica e sia w una stringa.

- N accetta w se e solo se esiste almeno una computazione $q_0 w \to^* u q_{accept} v$, dove $q_0 w$ è la configurazione iniziale di N con input w e $u q_{accept} v$ è una configurazione di accettazione. L'albero delle computazioni di N su w contiene almeno una foglia con stato q_{accept}.

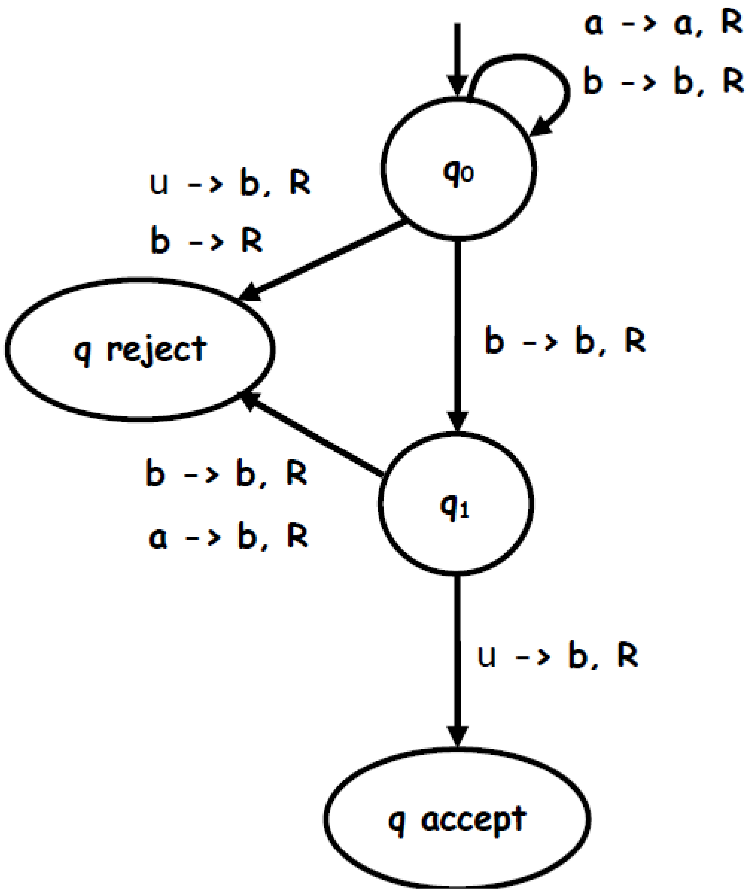
- N rifiuta w se e solo se ogni computazione dalla configurazione iniziale $q_0 w$ con input w termina in una configurazione di rifiuto. L'albero delle computazioni di N su w è finito e tutte le foglie sono configurazioni con stato q_{reject}.

Definizione

Sia $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ una MdT non deterministica. Il linguaggio $L(N)$ riconosciuto da N, è l'insieme:

$$L(N) = \{w \in \Sigma^* \mid \textit{esiste una computazione } q_0 w \to^* u q_{accept} v, \; u, v \in \Gamma^*\}$$

Esempio – M_1



$$L(M_1) = \{wb \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

Equivalenza

Teorema

Per ogni macchina di Turing non deterministica N esiste una macchina di Turing deterministica D equivalente ad N, cioè tale che $L(N) = L(D)$.

Idea della prova

- Ogni computazione di N deriva da una sequenza di scelte che D deve riprodurre.

  D simula N provando tutte le possibili scelte che può fare N durante la sua computazione nondeterministica.
- Quindi, per ogni input w, D esplora l'albero delle computazioni di N su w.
- Se D trova lo stato di accettazione su uno qualsiasi dei rami dell'albero, allora D accetta. Altrimenti, la simulazione effettuata da D **non terminerà**.
- Questo assicura che $L(D) = L(N)$.

- Una esplorazione dell'albero tramite visita BFS assicura che, se nell'albero c'è un nodo contenente una configurazione di accettazione, lo scoprirà in un numero finito di passi.

Idea della prova

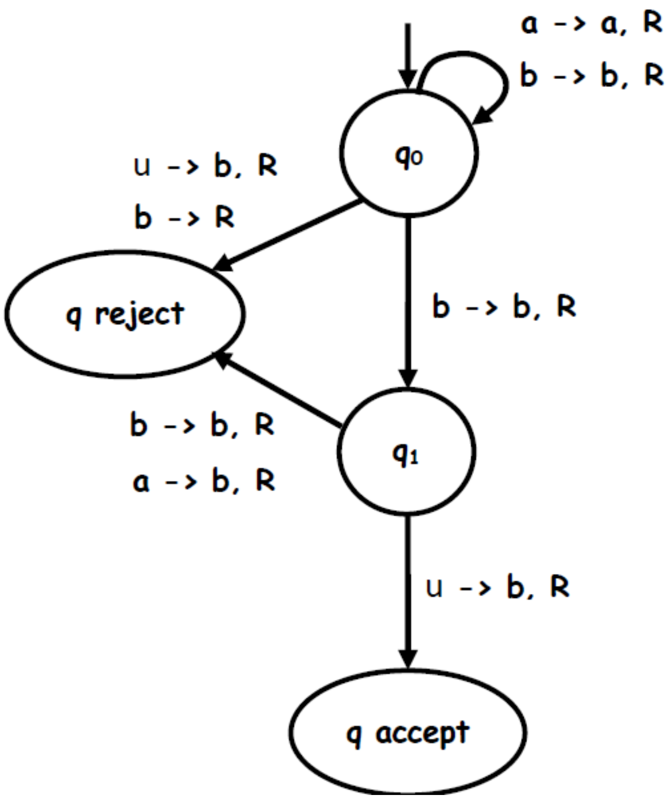
Vogliamo rappresentare le computazioni di N su una stringa w, cioè i cammini nell'albero delle computazioni di N su w mediante una stringa.

Sia $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ una macchina di Turing non deterministica.

Sia B il massimo numero di scelte di N su ogni coppia stato-simbolo.
Ovvero B è il massimo numero di figli che può avere un nodo in un albero delle computazioni.

Denotiamo $\Gamma_B = \{ 1, 2, \dots , B\}$.

Esempio – M_1



B = 3

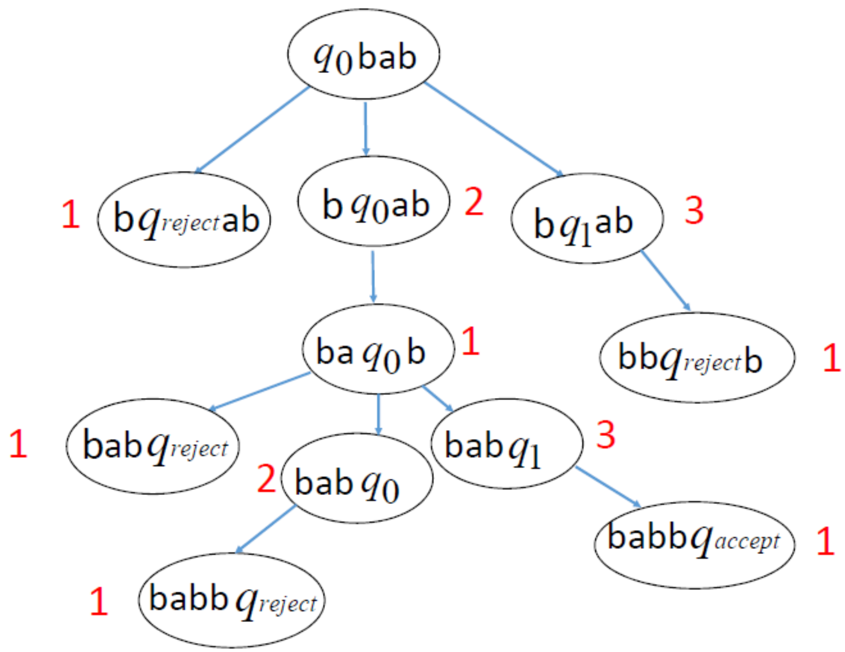
$\delta(q_0, b) = \{(q_0, b, R), (q_1, b, R), (q_{reject}, b, R)\}$.

Associamo 1 a (q_{reject}, b, R), 2 a (q_0, b, R) e 3 a (q_1, b, R).

Esempio – M_1

$\delta(q_0, b) = \{(q_0, b, R), (q_1, b, R), (q_{reject}, b, R)\}$.

Associamo 1 a (q_{reject}, b, R), 2 a (q_0, b, R) e 3 a (q_1, b, R).

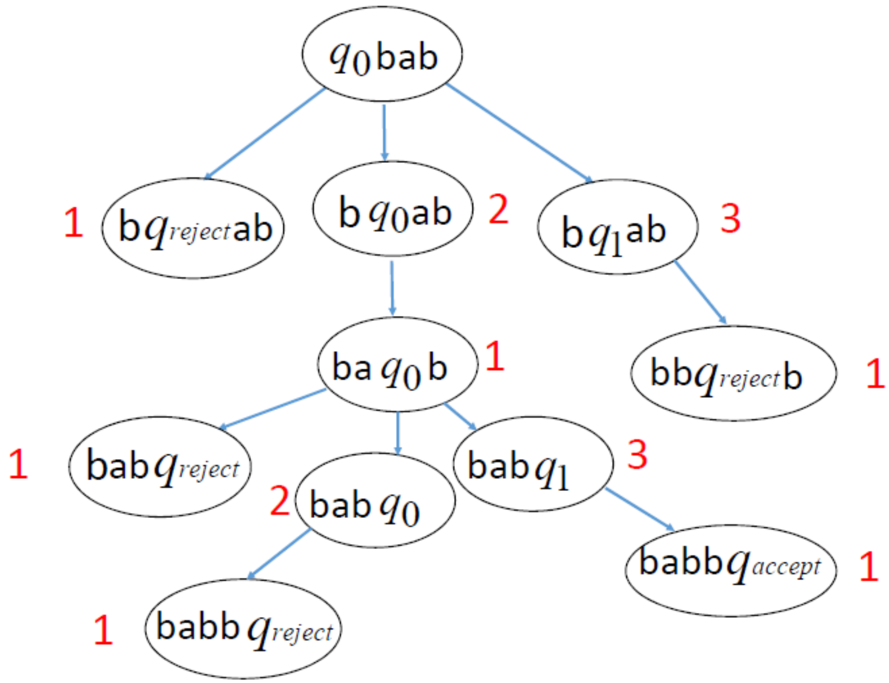


La computazione che mostra che *bab* è accettata.

2131 :

$$q_0 bab \to bq_0 ab \to baq_0 b \to babq_1 \to babbq_{accept}$$

Esempio – M_1



21 : $\quad q_0bab \rightarrow bq_0ab \rightarrow baq_0b$

22, 23 senza sbocco, muore.

L'ordine in cui BFS scopre i nodi di un albero in cui ogni nodo ha B figli è l'ordine radix (o per lunghezza) sulle stringhe in {1, 2, … , B}.

Esempio, B=3:

Epsilon, 1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33, 111, 112, …….

Esercizio

Descrivere una MdT che data una stringa w sull'alfabeto { 1, 2} calcoli la successiva di w nell'ordine radix.

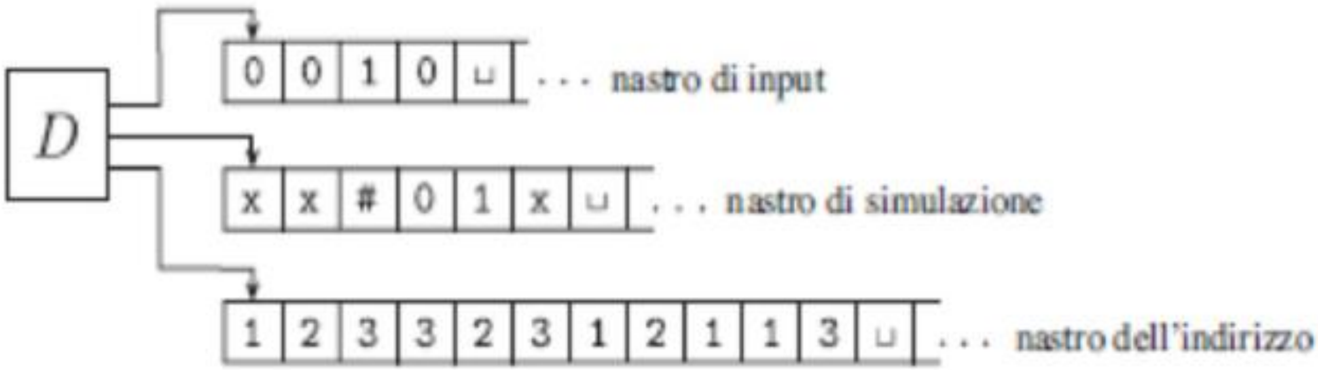
Ordine radix = ordine per lunghezza e a parità di lunghezza ordine numerico secondo 1 < 2.

Esempio

w = 1221 successore di w = 1222

w' = 222 successore di w' = 1111

Idea della prova



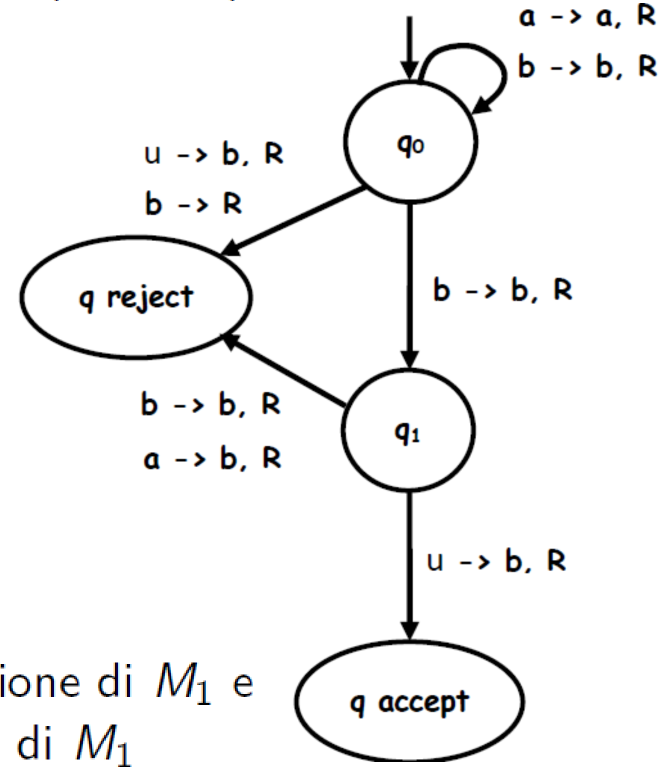
- Sul **primo nastro** è memorizzata la stringa input w (sulla parte più a sinistra) e il contenuto del primo nastro non verrà alterato dalle computazioni di D.
- Sul **secondo nastro** viene eseguita la simulazione di N. Il nastro 2 mantiene una copia del nastro di N corrispondente a qualche diramazione dell'albero delle computazioni.
- Sul **terzo nastro** vengono generate le codifiche delle possibili computazioni di N con input w.

  Il nastro 3 tiene traccia della posizione di D nell'albero delle computazioni di N.

Descrizione di D:

1. Inizialmente il nastro 1 contiene l'input w e i nastri 2 e 3 contengono solo $\sqcup$. (D inizializza la stringa sul nastro 3 a ϵ.)
2. D copia il contenuto del nastro 1 sul nastro 2.
3. Utilizza il nastro 2 per simulare N con input w sulla ramificazione della sua computazione non deterministica corrispondente alla stringa sul nastro 3, cioè riproduce la successione di scelte del corrispondente cammino (se tale stringa corrisponde a una computazione). Prima di ogni passo di N, consulta il simbolo successivo sul nastro 3 per determinare quale scelta fare tra quelle consentite dalla funzione di transizione di N. Se si raggiunge una configurazione di accettazione, D accetta l'input. Altrimenti (se si raggiunge una configurazione di rifiuto, se la stringa non corrisponde a una computazione, o al termine della simulazione sulla stringa) D passa al passo 4.
4. D genera sul nastro 3 la stringa successiva a quella corrente in ordine radix e torna al passo 2.

Esempio. $M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ è tale che $\delta(q_0, b) = \{(q_0, b, R), (q_1, b, R), (q_{reject}, b, R)\}$. Supponiamo di associare 2 alla scelta (q_0, b, R), 3 alla scelta (q_1, b, R) e 1 alla scelta (q_{reject}, b, R).



Poniamo $D = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, q_{accept}, q'_{reject})$.

Sia p_0 lo stato che corrisponde a q_0 nella simulazione di M_1 e p_1 lo stato che corrisponde a q_1 nella simulazione di M_1 (eventualmente $p_0 = q_0$ e $p_1 = q_1$). Allora

$\delta'(p_0, \sigma, b, 2) = (p_0, \sigma, b, 2, S, R, R)$,

$\delta'(p_0, \sigma, b, 3) = (p_1, \sigma, b, 3, S, R, R)$ e

$\delta'(p_0, \sigma, b, 1) = (q_{reject}, \sigma, b, 1, S, R, R)$, per ogni carattere σ.

Equivalenza

Teorema

Per ogni macchina di Turing non deterministica N esiste una macchina di Turing deterministica D equivalente ad N, cioè tale che $L(N) = L(D)$.

Ricorda:

per ogni MdT multinastro esiste una MdT che riconosce lo stesso linguaggio

Riconoscere

Corollario

Un linguaggio L è Turing riconoscibile se e solo se esiste una macchina di Turing non deterministica N che lo riconosce, cioè tale che $L(N) = L$.

Nota: se L è Turing riconoscibile allora esiste una MdT deterministica

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ che lo riconosce, cioè tale che $L(M) = L$.

È facile vedere che la macchina di Turing non deterministica $M' = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, q_{accept}, q_{reject})$, dove $\delta'(q, \gamma) = \{\delta(q, \gamma)\}$, per ogni $q \in Q$ e $\gamma \in \Gamma$, è tale che $L(M') = L(M) = L$.

Decidere

- Una macchina di Turing non deterministica è un decisore se, per ogni stringa input w, tutte le computazioni a partire da $q_0 w$ terminano in una configurazione di arresto.

- Una macchina di Turing non deterministica N decide L se N è un decisore e $L = L(N)$.

Nota. Sia N una macchina di Turing non deterministica tale che, per ogni input w, N accetta w o N rifiuta w.

N non è necessariamente un decisore.

Una stringa accettata potrebbe avere computazioni che non terminano

Riconoscere e decidere

- Una macchina di Turing non deterministica è un decisore se, per ogni stringa input w, tutte le computazioni a partire da $q_0 w$ terminano in una configurazione di arresto.

- Una macchina di Turing non deterministica N decide L se N è un decisore e $L = L(N)$.

  Anche per le macchine di Turing non deterministiche sono definite due famiglie di linguaggi:

- i linguaggi L riconosciuti da macchine di Turing non deterministiche;
- i linguaggi L decisi da macchine di Turing non deterministiche.

Esercizio 3.3

L'esercizio 3.3 di [Sipser] chiede di dimostrare il seguente Corollario, supponendo valido il seguente Teorema sugli alberi

Teorema

Se ogni nodo in un albero ha un numero finito di figli e ogni cammino dell'albero ha un numero finito di nodi, allora l'albero ha un numero finito di nodi.

Corollario

Un linguaggio L è decidibile se e solo se esiste una macchina di Turing non deterministica N che lo decide.

Esercizio 3.3

Corollario

Un linguaggio L è decidibile se e solo se esiste una macchina di Turing non deterministica N che lo decide.

Prova

Se un linguaggio L è decidibile, esiste una macchina di Turing deterministica M che è un decisore e che accetta L. M può essere facilmente trasformata in una macchina di Turing non deterministica che decide L.

Viceversa, se un linguaggio L è deciso da una macchina di Turing non deterministica N, definiamo una macchina di Turing deterministica D', modificando la precedente definizione di D come segue.

Descrizione di D':

1. Inizialmente il nastro 1 contiene l'input w e i nastri 2 e 3 contengono solo $\sqcup$. (D' inizializza la stringa sul nastro 3 a ϵ.)
2. D' copia il contenuto del nastro 1 sul nastro 2.
3. Utilizza il nastro 2 per simulare N con input w su una ramificazione della sua computazione non deterministica, riproducendo la successione di scelte del cammino corrispondente alla stringa sul nastro 3 (se tale stringa corrisponde a una computazione). Se si raggiunge una configurazione di accettazione, D' accetta l'input. Altrimenti (se si raggiunge una configurazione di rifiuto, se la stringa non corrisponde a una computazione, o al termine della simulazione sulla stringa) D' passa al passo 4.
4. Rifiuta se tutti i cammini dell'albero delle computazioni di N su w hanno portato a una configurazione di rifiuto. Altrimenti D' passa al passo 5.
5. D' genera sul nastro 3 la stringa successiva a quella corrente in ordine radix e torna al passo 2.

Esercizio 3.3

Possiamo dedurre che D' è un decisore per L.

Se N accetta il suo input w, allora D' troverà un cammino che termina in una configurazione di accettazione e D' accetta w.

Se N rifiuta il suo input w, tutte le sue computazioni su w terminano in una configurazione di rifiuto perché è un decisore. Quindi ciascuno dei cammini ha un numero finito di nodi poiché ogni arco nel cammino rappresenta un passo di una computazione di N su w. Pertanto l'intero albero di computazione di N su w è finito. Quindi, D' si fermerà e rifiuterà quando l'intero albero sarà stato esplorato.

Esercizio 3.3

Nota che la macchina D' deve individuare se tutte le computazioni su w conducono a una configurazione di rifiuto.

Quindi D' deve avere un controllo sulle stringhe che rappresentano codifiche di computazioni su w che terminano in q_{reject}. Se x è una stringa che codifica una tale computazione, D' deve bloccare la generazione di stringhe in ordine radix con prefisso x.

Analogamente, se la stringa x è una stringa non valida, cioè non corrisponde a una computazione, D' deve bloccare la generazione di stringhe in ordine radix con prefisso x.

Varianti equivalenti di MdT

Abbiamo visto alcune varianti di MdT

- MdT con possibilità di S (Stayer)
- MdT multi- nastro
- MdT non deterministiche

E abbiamo dimostrato che sono tutte equivalenti alla MdT.

Altre varianti equivalenti di MdT

- MdT a singola scrittura (Ex. 3.17)
- MdT a nastro doppiamente infinito (ex. 3.18)
- MdT con Reset a sinistra (Ex. 3.19)

Sono tutte equivalenti alla MdT.

Dagli anni ‘30 (del secolo scorso), quando ancora l’informatica e i computer NON esistevano, quindi indipendentemente da essi, sono stati proposti molti altri modelli di computazione (anche molto differenti dalle MdT).

Calcolabilità

Negli anni ‘30 (del secolo scorso), quando ancora l’informatica e i computer NON esistevano, quindi indipendentemente da essi, alcuni logici , motivati anche dalla lista dei 23 problemi proposti da Hilbert nel 1900, si proposero questo progetto:

Formalizzare in modo esatto la nozione intuitiva di problema e di procedura effettiva di calcolo, così da definire quando un problema è risolvibile o no.

Questo progetto fu realizzato indipendentemente e con una diversa risposta da

- Alan Turing (1936) con il suo modello noto come Macchina di Turing
- Alonso Church (1936) con il λ-calcolo.

Tesi di Church - Turing

Fu dimostrato che le due risposte erano equivalenti, cioè definivano la stessa classe di problemi risolubili. Tutto ciò che poteva essere calcolato con una Macchina di Turing poteva essere calcolato (simulando la MdT) col λ-calcolo, e viceversa.

In seguito, ogni altra ‘’ragionevole" formalizzazione della nozione di procedura effettiva ha condotto agli stessi risultati.

Per questo è possibile parlare di un concetto di "calcolabilità", indipendente dal particolare formalismo.

Tesi di Church-Turing:

Tutto ciò che può essere intuitivamente calcolato tramite una procedura effettiva può essere calcolato con una Macchina di Turing.

Tenendo conto che essa è antecedente alla costruzione dei primi computer, costituì un enorme salto intellettuale.

Tesi di Church - Turing

La Tesi di Church – Turing non è un teorema, non dovrete studiarne la dimostrazione!

Anche perché non è proprio dimostrabile.

Può essere visto come definizione di procedura effettiva / algoritmo.

Questo significa anche che qualsiasi modello di «calcolatore» si possa mai progettare oggi o in futuro, con tutte le risorse e le tecnologie possibili, non potrà che risolvere i problemi risolti con una Macchina di Turing!

Per esempio, anche i ‘’quantum computer’’ obbediscono alla tesi, quindi non possono fornire vantaggi sui computer classici in termini di computabilità. Possono invece fornirli in termini di complessità di tempo.

Per esempio, per la fattorizzazione di interi in numeri primi come dimostrato da Shor nel 1994.

Procedura effettiva = Algoritmo = MdT (e sue varianti)

- Algoritmi per eseguire calcoli in svariati campi erano noti già nell'antichità (esempio: Algoritmo di Euclide per il calcolo del MCD, circa 300 A.C.).
  Turing ha il merito di aver definito in modo formale il concetto di algoritmo.

- L'esigenza nacque a causa di un problema posto da Hilbert, al Congresso internazionale di Matematica del 1900 (Parigi), il decimo di una lista di 23 problemi.
- Il decimo problema di Hilbert si può riformulare come la richiesta di una soluzione algoritmica a un problema relativo ai polinomi.

Il X problema di Hilbert

Nel **1900**, D. Hilbert presentò al Secondo Congresso Internazionale di Matematica a Parigi, una lista di 23 problemi come sfida per il secolo nascente.

Il decimo problema di Hilbert era il seguente:

'' <u>Progettare</u> un processo in base al quale può essere determinato in un numero finito di operazioni se un polinomio a coefficienti interi ha radici intere''

Questo problema fu risolto nel 1970 da Matijasevic che - grazie a risultati precedenti di Davis, Putnam e Robinson – provò che non esiste un algoritmo che risolve tale problema.

Nota: per provare che un problema è risolubile mediante un algoritmo basta esibire l'algoritmo.
Per provare che per un problema non esiste nessun algoritmo che lo risolve, è necessario definire in modo formale la nozione di algoritmo.