Lezioni di Ricerca Operativa

Corso di Laurea in Informatica

Università degli Studi di Salerno

Lezione n° 13

Teoria della dualità:

- Coppia di Problemi Primale/Duale
- Regole di Trasformazione
- Teorema debole della dualità

R. Cerulli – F. Carrabs

Teoria della Dualità

Ad ogni problema di PL (Primale) è associato un problema Duale

(n variabili, m vincoli)

Problema Primale (P)

$$\min \quad c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

$$s.t.$$

$$a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \geq b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \geq b_m$$

$$\underline{x} \geq 0$$

(m variabili, n vincoli)

Problema Duale (D)

$$\max \; b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m$$

$$s.t.$$

$$a_{11} w_1 + \cdots + a_{m1} w_m \leq c_1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n} w_1 + \cdots + a_{mn} w_m \leq c_n$$

$$\underline{w} \geq 0$$

Il problema D ha tante variabili quanti sono i vincoli di P e tanti vincoli quante sono le variabili di P.

Teoria della Dualità

$$\min \ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

$$s.t.$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3$$

$$\underline{x} \geq 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
w_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\
w_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\
w_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\
\hline
 & c_1 & c_2 & c_3 &
\end{array}$$

$$\max \ \mathrm{b}_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3$$

$$s.t$$

$$a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3 \leq c_1$$

$$a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3 \leq c_2$$

$$a_{13}w_1 + a_{23}w_2 + a_{33}w_3 \leq c_3$$

$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0$$

Problema Primale (P)

$$\min \quad c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

$$s.t.$$

$$a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \geq b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \geq b_m$$

$$\underline{x} \geq 0$$

Problema Duale (D)

$$\max \quad b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m$$

$$s.t.$$

$$a_{11} w_1 + \cdots + a_{m1} w_m \leq c_1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n} w_1 + \cdots + a_{mn} w_m \leq c_n$$

$$\underline{w} \geq 0$$

In forma matriciale:

$$(P) \qquad \min \quad \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} \geq \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\underline{x} \in \mathbf{R}^n$$

$$(D) \qquad \max \quad \underline{b}^T \underline{w}$$

$$A^T \underline{w} \leq \underline{c}$$

$$\underline{w} \geq \underline{0}$$

$$\underline{w} \in \mathbf{R}^m$$

Teoria della Dualità

$$\min \ 3x_1 + 4x_2$$

$$s.t.$$

$$2x_1 + 1/2\,x_2 \geq 3$$

$$4x_1 + x_2 \geq 2$$

$$1/5\,x_1 \geq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

	x_1	x_2	
w_1	2	1/2	3
w_2	4	1	2
w_3	1/5	0	7
	3	4	

$$\max \ 3w_1 + 2w_2 + 7w_3$$

$$s.t$$

$$2w_1 + 4w_2 + 1/5\,w_3 \leq 3$$

$$1/2\,w_1 + w_2 \leq 4$$

$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0$$

Duale del problema duale

$$
(P)\quad \max \quad \underline{b}^T \underline{w}
$$
$$
A^T \underline{w} \le \underline{c}
$$
$$
\underline{w} \ge \underline{0}
$$
$$
\underline{w} \in \mathbf{R}^m
$$

$$
-\min \quad -\underline{b}^T \underline{w}
$$
$$
-A^T \underline{w} \ge -\underline{c}
$$
$$
\underline{w} \ge \underline{0}
$$
$$
\underline{w} \in \mathbf{R}^m
$$

Il **duale** di questo problema è:

	$\underline{w}$	
$\underline{x}$	$-A^T$	$-\underline{c}^T$
	$-\underline{b}^T$	

$$
-\max \quad -\underline{c}^T \underline{x}
$$
$$
-A\underline{x} \le -\underline{b}
$$
$$
\underline{x} \ge \underline{0}
$$
$$
\underline{x} \in \mathbf{R}^n
$$

$$
(D)\quad \min \quad \underline{c}^T \underline{x}
$$
$$
A\underline{x} \ge \underline{b}
$$
$$
\underline{x} \ge \underline{0}
$$
$$
\underline{x} \in \mathbf{R}^n
$$

Il duale del problema duale è il problema primale.

Duale di un Primale con vincoli di uguaglianza

$$
(P) \qquad \min \quad \underline{c}^T \underline{x}
$$

$$
A\underline{x} = \underline{b}
$$

$$
\underline{x} \geq \underline{0}
$$

$$
\underline{x} \in R^n
$$

Trasformiamo i vincoli di uguaglianza in vincoli di maggiore o uguale come segue:

$A\underline{x} = \underline{b}$ equivale a

$$
\begin{aligned}
&A\underline{x} \geq \underline{b} \\
&A\underline{x} \leq \underline{b} \quad \Rightarrow \quad -A\underline{x} \geq -\underline{b}
\end{aligned}
$$

$$(P) \qquad \min \quad \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} \geq \underline{b}$$

$$-A\underline{x} \geq -\underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\underline{x} \in R^n$$

$$\begin{array}{c|c|c}
 & \underline{x} & \\
\hline
\underline{u} & A & \underline{b} \\
\underline{v} & -A & -\underline{b} \\
\hline
 & \underline{c} &
\end{array}$$

quindi si introducono 2m variabili duali, u e v

$$\max \ (\underline{b}^T \underline{u} - \underline{b}^T \underline{v})$$

$$A^T \underline{u} - A^T \underline{v} \leq \underline{c}$$

$$\underline{u} \geq \underline{0}, \underline{v} \geq \underline{0}$$

$$\underline{u}, \underline{v} \in R^m$$

$$\max \; (\underline{b}^T \underline{u} - \underline{b}^T \underline{v})$$

$$A^T \underline{u} - A^T \underline{v} \leq \underline{c}$$

$$\underline{u} \geq \underline{0}, \; \underline{v} \geq \underline{0}$$

$$\underline{u}, \underline{v} \in R^m$$

e sostituendo $\underline{w} = \underline{u} - \underline{v}$ si ottiene (D)

$$(P) \qquad \min \quad \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\underline{x} \in R^n$$

$$(D) \qquad \max \; \underline{b}^T \underline{w}$$

$$A^T \underline{w} \leq \underline{c}$$

$$\underline{w} \;\; n.v.$$

$$\underline{w} \in R^m$$

Calcolo del problema duale

- Dato un generico problema di PL, sarebbe possibile trasformarlo in uno equivalente in forma canonica di min/max per calcolarne il duale

- In realtà, questo non è necessario, in quanto è **sempre** possibile calcolare **direttamente** il duale del problema dato

Dualità: regole di trasformazione generali

	min		max	
Coefficienti f.o.	$\underline{c}^T$	$\Longleftrightarrow$	$\underline{c}$	Termini noti vincoli
Termini noti vincoli	$\underline{b}$	$\Longleftrightarrow$	$\underline{b}^T$	Coefficienti f.o.
Coefficienti vincoli	A	$\Longleftrightarrow$	A^T	Coefficienti vincoli
i-mo vincolo (*i*=1…m)	$\geq$ $\leq$ $=$	$\Longleftrightarrow$	≥ 0 ≤ 0 n.v.	*i*-ma variabile (*i*=1…m)
j-ma variabile (*j*=1...n)	≥ 0 ≤ 0 n.v.	$\Longleftrightarrow$	$\leq$ $\geq$ $=$	*j*-mo vincolo (*j*=1...n)

Teoria della Dualità

$$\min \ 5x_1 + 3x_2$$

$$s.t.$$

$$x_1 + 4x_2 - 8x_3 \geq 2$$

$$7x_2 + 12x_3 \leq 4$$

$$9x_1 - 8x_2 + x_3 = 7$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

	x_1	x_2	x_3	
w_1	1	4	-8	2
w_2	0	7	12	4
w_3	9	-8	1	7
	5	3	0	

$$\max \ 2w_1 + 4w_2 + 7w_3$$

$$s.t.$$

$$w_1 + 9w_3 \leq 5$$

$$4w_1 + 7w_2 - 8w_3 \leq 3$$

$$-8w_1 + 12w_2 + w_3 \leq 0$$

$$w_1 \geq 0, w_2 \leq 0, w_3 \ \ n.v.$$

La teoria della Dualità è importante perchè:

- le soluzioni di (P) e (D) sono legate tra loro;
- la soluzione ottima del duale è un bound sulla soluzione ottima del primale.
- le soluzioni duali hanno un'interpretazione economica utile per l'analisi di sensitività (post-ottimalità);
- sulla teoria della dualità sono basati algoritmi, quali il Simplesso Duale e l'Algoritmo Primale-Duale, alternativi al Simplesso (Primale) utili per certe classi di problemi;
- può in certi casi essere conveniente risolvere D al posto di P (conviene risolvere il problema con il minor numero di vincoli)

Risultati fondamentali della Teoria della Dualità

Siano dati i problemi

$$(P) \quad \min \quad \underline{c}^T \underline{x} \qquad\qquad (D) \quad \max \quad \underline{b}^T \underline{w}$$

$$A\underline{x} \geq \underline{b} \qquad\qquad A^T \underline{w} \leq \underline{c}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0} \qquad\qquad \underline{w} \geq \underline{0}$$

1. Teorema (debole) della dualità

Siano $\underline{x}$ e $\underline{w}$ soluzioni ammissibili rispettivamente per (P) e (D), allora

$$\underline{c}^T \underline{x} \geq \underline{b}^T \underline{w}$$

Dimostrazione:

$\underline{\hat{x}}$ soluzione $\Rightarrow A\underline{\hat{x}} \ge \underline{b}$

Poichè $\underline{\hat{w}} \ge \underline{0} \Rightarrow \underline{\hat{w}}^T (A\underline{\hat{x}}) \ge \underline{\hat{w}}^T \underline{b} \Rightarrow (A\underline{\hat{x}})^T \underline{\hat{w}} \ge \underline{b}^T \underline{\hat{w}} \Rightarrow \underline{\hat{x}}^T A^T \underline{\hat{w}} \ge \underline{b}^T \underline{\hat{w}}$

Poichè

$\underline{x}\,\underline{y} = \underline{y}^T \underline{x}^T$

Poichè

$(\underline{x}\,\underline{y})^T = \underline{y}^T \underline{x}^T$

$\underline{\hat{w}}$ soluzione $\Rightarrow A^T \underline{\hat{w}} \le \underline{c}$

Poichè $\underline{\hat{x}} \ge \underline{0} \Rightarrow \underline{\hat{x}}^T A^T \underline{\hat{w}} \le \underline{\hat{x}}^T \underline{c}$

Quindi: $\underline{\hat{x}}^T \underline{c} = \underline{c}^T \underline{\hat{x}} \ge \underline{\hat{x}}^T A^T \underline{\hat{w}} \ge \underline{b}^T \underline{\hat{w}}$

Risultati fondamentali della Teoria della Dualità

Corollario 1

Se $\underline{x}$ è una soluzione ammissibile per (P) e $\underline{w}$ una soluzione ammissibile per (D) tali che $\underline{c}^T\underline{x}=\underline{b}^T\underline{w}$ allora $\underline{x}$ e $\underline{w}$ sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che $\underline{x}$ non sia ottimo per (P). Quindi esiste un'altra soluzione ammissibile $\underline{x}^*$ di (P) tale che $\underline{c}^T\underline{x}^* < \underline{c}^T\underline{x}$. Ma poiché per ipotesi $\underline{c}^T\underline{x}=\underline{b}^T\underline{w}$ si ha che $\underline{c}^T\underline{x}^*<\underline{b}^T\underline{w}$. Assurdo perchè va contro la tesi del teorema debole della dualità.

Risultati fondamentali della Teoria della Dualità

Corollario 2

Se il problema primale (P) è illimitato inferiormente allora il duale (D) è inammissibile. Viceversa se il duale (D) è illimitato superiormente il primale (P) è inammissibile.

Dimostrazione.
Supponiamo che il valore ottimo del primale (P) sia $-\infty$ e che il problema duale ammetta una soluzione $\underline{w}$. Dal teorema della dualità debole si ha che $\underline{c}^T\underline{x} \geq \underline{b}^T\underline{w}$ per una qualsiasi soluzione ammissibile x di (P). Questo implica che $\underline{b}^T\underline{w} \leq -\infty$. Assurdo.

Risultati fondamentali della Teoria della Dualità

Il corollario 2 stabilisce che l'illimitatezza di un problema implica l'inammissibilità del suo duale. Tuttavia questa non è una proprietà simmetrica ossia se un problema è inammissibile non è detto che il suo duale sia illimitato. Per esempio:

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \min & -x_1 - x_2 \\
 & & -x_1 + x_2 \geq 1 \\
 & & x_1 - x_2 \geq 1 \\
 & & x_1, x_2 \geq \underline{0}
\end{array}
$$

Calcolare il duale di *(P)* e risolvere entrambi i problemi graficamente