Analisi del tempo di esecuzione di algoritmi con le notazioni asintotiche

Mercoledì 9 marzo 2022

- Punto della situazione
  - Cos'è un algoritmo
  - Tempo di esecuzione T(n)
  - Analisi di algoritmi: analisi asintotica di T(n)
  - Notazioni asintotiche
- Argomento di oggi
  - Analisi del tempo di esecuzione di un algoritmo con le notazioni asintotiche
- Motivazioni
  - Confrontare tempi di esecuzione di algoritmi fra loro o con funzioni standard (lineare, polinomiale, esponenziale…)

Notazioni asintotiche

Nell'analisi **asintotica** analizziamo T(n)

1. A meno di costanti moltiplicative (**perché non quantificabili**)
2. Asintoticamente (per considerare input di taglia arbitrariamente grande, quindi in numero infinito)

Le notazioni asintotiche:

$$O,\ \Omega,\ \Theta,\ o,\ \omega$$

ci permetteranno il **confronto** tra funzioni, mantenendo queste caratteristiche.

Idea di fondo: $O,\ \Omega\ ,\ \Theta,\ o,\ \omega$ rappresentano rispettivamente

$$\leq\ ,\ \geq\ ,\ =,\ <,\ >$$

in un'analisi asintotica

Analisi di T(n)

Analizzare il tempo di esecuzione T(n) di un algoritmo significherà dimostrare che:

$T(n) = \Theta(f(n))$ se possibile

oppure

delimitare T(n) in un intervallo:

$T(n) = O(f(n))$ e $T(n) = \Omega(g(n))$
(nel caso in cui il caso peggiore sia diverso dal caso migliore).

Limitazioni più utilizzate

Scaletta:
Man mano che si scende troviamo funzioni che crescono **più** velocemente (in senso stretto):

ogni funzione f(n) della scaletta è
f(n)=o(g(n))
per ogni funzione che sta più in basso.

Quindi potremo utilizzare (negli esercizi) che per queste funzioni standard:

$f(n) \leq c\, g(n)$ per qualsiasi valore di c, ci possa servire, da un opportuno n_c in poi.

Espressione O	nome
$O(1)$	costante
$O(\log \log n)$	$\log \log$
$O(\log n)$	logaritmico
$O(\sqrt[c]{n}),\ c > 1$	sublineare
$O(n)$	lineare
$O(n \log n)$	$n \log n$
$O(n^2)$	quadratico
$O(n^3)$	cubico
$O(n^k)\ (k \geq 1)$	polinomiale
$O(a^n)\ (a > 1)$	esponenziale
$O(n!)$	fattoriale

Asymptotic Bounds for Some Common Functions

- Polynomials. $a_0 + a_1 n + \ldots + a_d n^d$ is $\Theta(n^d)$ if $a_d > 0$.

- Polynomial time. Running time is $O(n^d)$ for some constant d independent of the input size n.

- Logarithms. $\log_a n = \Theta(\log_b n)$ for any constants a, b > 0.

  ↑ can avoid specifying the base

- Logarithms. For every $x > 0$, $\log n = o(n^x)$.

  ↑ log grows slower than every polynomial

- Exponentials. For every $r > 1$ and every $d > 0$, $n^d = o(r^n)$.

  ↑ every exponential grows faster than every polynomial

Più in dettaglio

Informalmente….

- Un esponenziale cresce più velocemente di qualsiasi polinomio

- Un polinomio cresce più velocemente di qualsiasi potenza di logaritmo

Più precisamente:

$n^d = o(r^n)$ per ogni d>0 e r>1

$log_b\, n^k = o(n^d)$
per ogni k, d>0 e b>1

E ancora

Informalmente….

- Nel confronto fra esponenziali conta la base
- Nel confronto fra polinomi conta il grado
- Nel confronto fra logaritmi … la base non conta

Per esempio:

$$2^n = o(3^n)$$

$$n^2 = o(n^3)$$

$$\log_{10} n = \log_2 n \, (\log_{10} 2) = \Theta(\log_2 n)$$

Polinomi vs logaritmi

Un polinomio cresce più velocemente di qualsiasi potenza di logaritmo.
Per esempio:

- Proviamo che

$$\log_2 n = O(n).$$

Lo proveremo con $c=1$ e $n_0=1$, cioè $\log_2 n \leq n, \quad \forall n \geq 1$

Occorre provare che $\exists c, n_0 \ : \ \log_2 n \leq cn \quad \forall n \geq n_0$

Per induzione su n: Per $n = 1$ abbiamo $\log_2 1 = 0 \leq 1$.

In generale, per $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \log_2(n+1) &\leq \log_2(n+n) = \log_2(2n) \\ &= \log_2 2 + \log_2 n = 1 + \log n \\ &\leq 1 + n \text{ (per ipotesi induttiva)} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi provato che

$$\log n \leq n \quad \forall n \geq 1 \Longrightarrow \boxed{\log n = O(n)}$$

Domanda

Per questo genere di esercizi:

a cosa serve la calcolatrice?

Suggerimento:
ricorda che $f(n) = O(g(n))$ significa $f(n) \leq c\, g(n)$ **per ogni** $n \geq n_0$
cioè per un numero **infinito** di valori di n.

QUINDI: NON basta dimostrare che $f(n) \leq c\, g(n)$ per qualche costante c, per esempio che:
$f(1) \leq c\, g(1)$, $f(2) \leq c\, g(2)$, … , $f(10.000) \leq c\, g(10.000)$.

Perché potrebbe essere invece
$f(n) \geq c\, g(n)$ **per ogni** $n \geq 10.001$.

Nella pratica

Per stabilire l'ordine di crescita di una funzione basterà tenere ben presente la «scaletta» e alcune proprietà delle notazioni asintotiche.

Properties

- Transitivity

  (analoga ad a $\leq$b e b $\leq$c allora a $\leq$c per i numeri)

  - If f = O(g) and g = O(h) then f = O(h).
  - If f = Ω(g) and g = Ω(h) then f = Ω(h).
  - If f = Θ(g) and g = Θ(h) then f = Θ(h).

- Additivity.
  - If f = O(h) and g = O(h) then f + g = O(h).
  - If f = Ω(h) and g = Ω(h) then f + g = Ω(h).
  - If f = Θ(h) and g = Θ(h) then f + g = Θ(h).

  (Attenzione: l'analoga per i numeri sarebbe
  "se a $\leq$c e b $\leq$c allora a+b $\leq$c", che non è vera!!)

Transitività: dimostrazione

Se f = O(g) e g = O(h) allora f = O(h)

Ipotesi:

esistono costanti $c, n_0 > 0$ tali che per ogni $n \geq n_0$ si ha $f(n) \leq c \cdot g(n)$

esistono costanti $c', n'_0 > 0$ tali che per ogni $n \geq n'_0$ si ha $g(n) \leq c' \cdot h(n)$

Tesi (Dobbiamo mostrare che):

esistono costanti $c'', n''_0 > 0$ tali che per ogni $n \geq n''_0$ si ha $f(n) \leq c'' \cdot h(n)$

Quanto valgono c'', n''_0 ?

$f(n) \leq c \cdot g(n) \leq c \cdot c' \cdot h(n)$ per ogni $n \geq n_0$ e $n \geq n'_0$

$c'' = c \cdot c'$

$n''_0 = \max \{n_0, n'_0\}$

Additività: dimostrazione

Se f = O(h) e g = O(h) allora f + g = O(h)

Ipotesi:

esistono costanti $c, n_0 > 0$ tali che per ogni $n \geq n_0$ si ha $f(n) \leq c \cdot h(n)$

esistono costanti $c', n'_0 > 0$ tali che per ogni $n \geq n'_0$ si ha $g(n) \leq c' \cdot h(n)$

Tesi (Dobbiamo mostrare che):

esistono costanti $c'', n''_0 > 0$ tali che per ogni $n \geq n''_0$ si ha $f(n)+g(n) \leq c'' \cdot h(n)$

Quanto valgono c'', n''_0 ?

$f(n)+g(n) \leq c \cdot h(n) + c' \cdot h(n) = (c+c') h(n)$ per ogni $n \geq n_0$ e $n \geq n'_0$

$c'' = c + c'$

$n''_0 = \max \{n_0, n'_0\}$

Due regole fondamentali

Nel determinare l'ordine di crescita asintotica di una funzione

1. Possiamo trascurare i termini additivi di ordine inferiore
2. Possiamo trascurare le costanti moltiplicative

ATTENZIONE!
Le regole NON servono però per determinare esplicitamente le costanti c ed n_0.

Prima regola

«Possiamo trascurare i termini additivi di ordine inferiore»

Cosa significa formalmente?

Se $g = O(f)$ allora $f + g = \Theta(f)$

Ipotesi:

g è di ordine inferiore a f: $g=O(f)$:

esistono costanti $c, n_0 > 0$ tali che per ogni $n \geq n_0$ si ha $g(n) \leq c \cdot f(n)$

Tesi (Dobbiamo mostrare che):

$f + g = O(f)$: dato che $f=O(f)$ e $g=O(f)$ per l'additività: $f+g=O(f)$.

$f + g = \Omega(f)$: esistono c'', $n''_0 > 0$ tali che per ogni $n \geq n''_0$ si ha

$f(n)+g(n) \geq c'' \cdot f(n)$:

$f(n)+g(n) \geq f(n)$ essendo $g(n) \geq 0$; $c''=1$ ed $n''_0 = 0$

Seconda regola

«Possiamo trascurare le costanti moltiplicative»

Cosa significa formalmente?

Per ogni costante $a > 0$ allora $a \cdot f = \Theta(f)$

Ipotesi: $a>0$

Tesi

esistono costanti $c>0$, $n_0 \geq 0$ tali che per ogni $n \geq n_0$ si ha $a \cdot f(n) \leq c \cdot f(n)$

esistono costanti $c'>0$, $n'_0 \geq 0$ tali che per ogni $n \geq n'_0$ si ha $a \cdot f(n) \geq c' \cdot f(n)$

$c = c' = a$

$n_0 = n'_0 = 0$

Per stabilire la crescita di una funzione

Basterà usare:

- La «scaletta»
- Le proprietà di additività e transitività
- Le due regole fondamentali

Tempo di esecuzione

Tempo di esecuzione T(n) è espresso rispetto al numero di operazioni elementari per eseguire l'algoritmo su un input di taglia n

Sono operazioni elementari le operazioni che richiedono tempo costante (= non dipendente dalla taglia n dell'input)

Per esempio: assegnamento, incremento, confronto

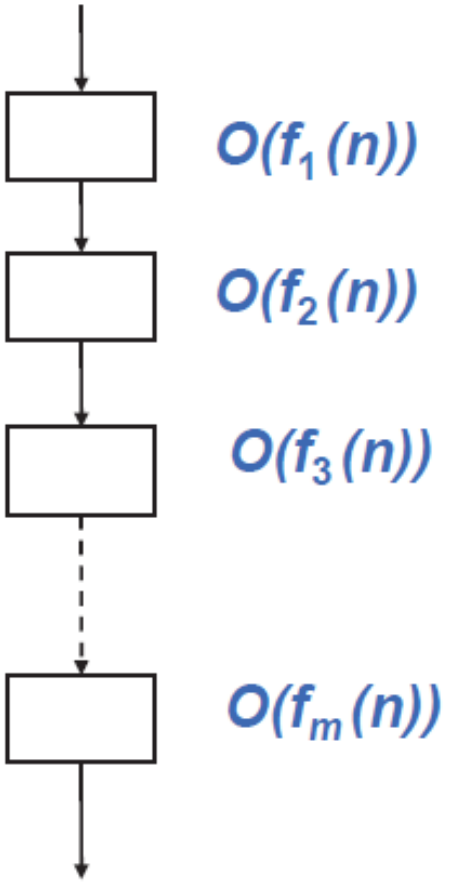
Nelle prossime slides vedremo come l'analisi asintotica può aiutarci nel calcolo del tempo di esecuzione di algoritmi di tipo iterativo (strutturati come for e while)

Operazioni Semplici

- *operazioni aritmetiche (+,*,…)*
- *operazioni logiche(&&, ||,….)*
- *confronti (≤ ,≥ , = ,…)*
- *assegnamenti* (`a = b`) senza chiamate di funzione
- *operazioni di lettura* (`read`)
- *operaioni di controllo* (`break, continue, return`)

$$T(n) = \Theta(1) \Rightarrow T(n) = O(1)$$

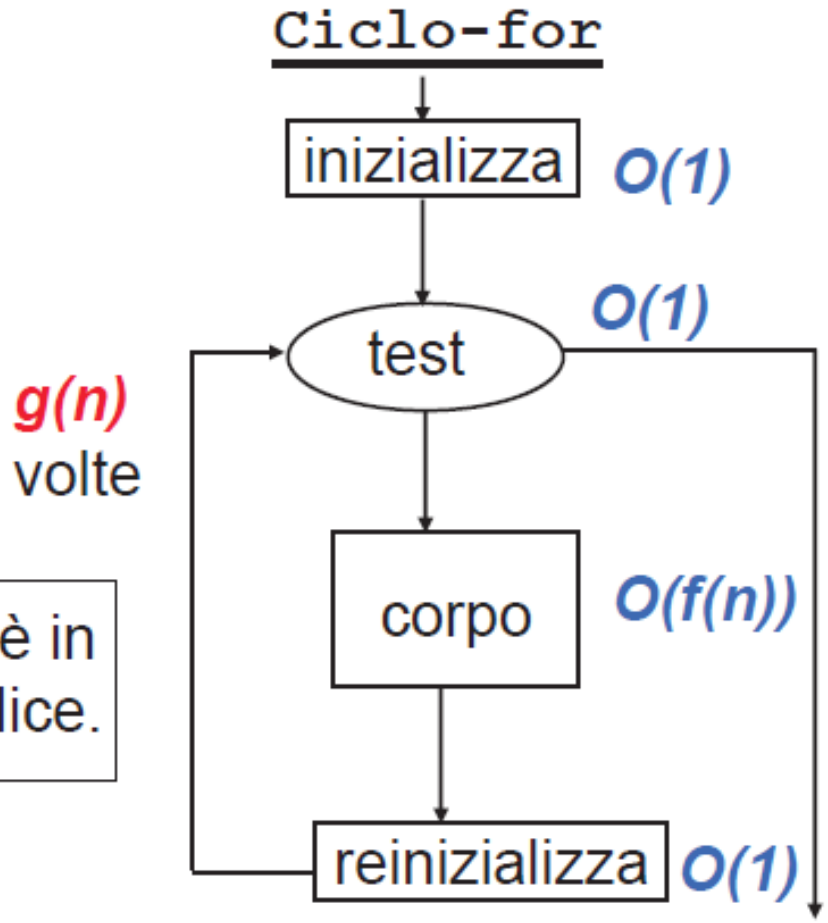
Tempo di esecuzione: blocchi sequenziali



$$O(f_1(n) + f_2(n) + \ldots + f_m(n))$$

$$O\left(\max_{i \in \{1 \ldots m\}} \{f_i(n)\}\right)$$

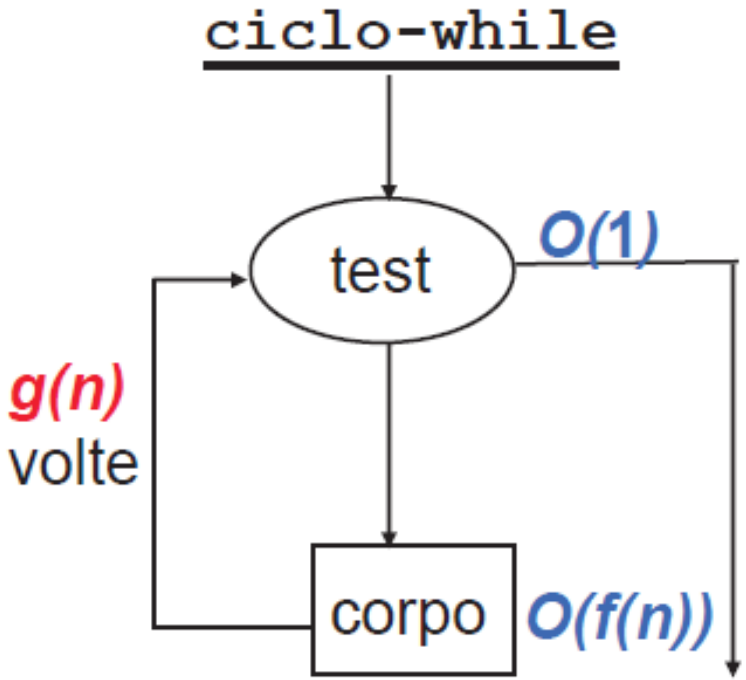
Tempo di esecuzione: ciclo for



stabilire $g(n)$ è in genere semplice.

$$T(n) = O(g(n) \times f(n))$$

Tempo di esecuzione: ciclo while

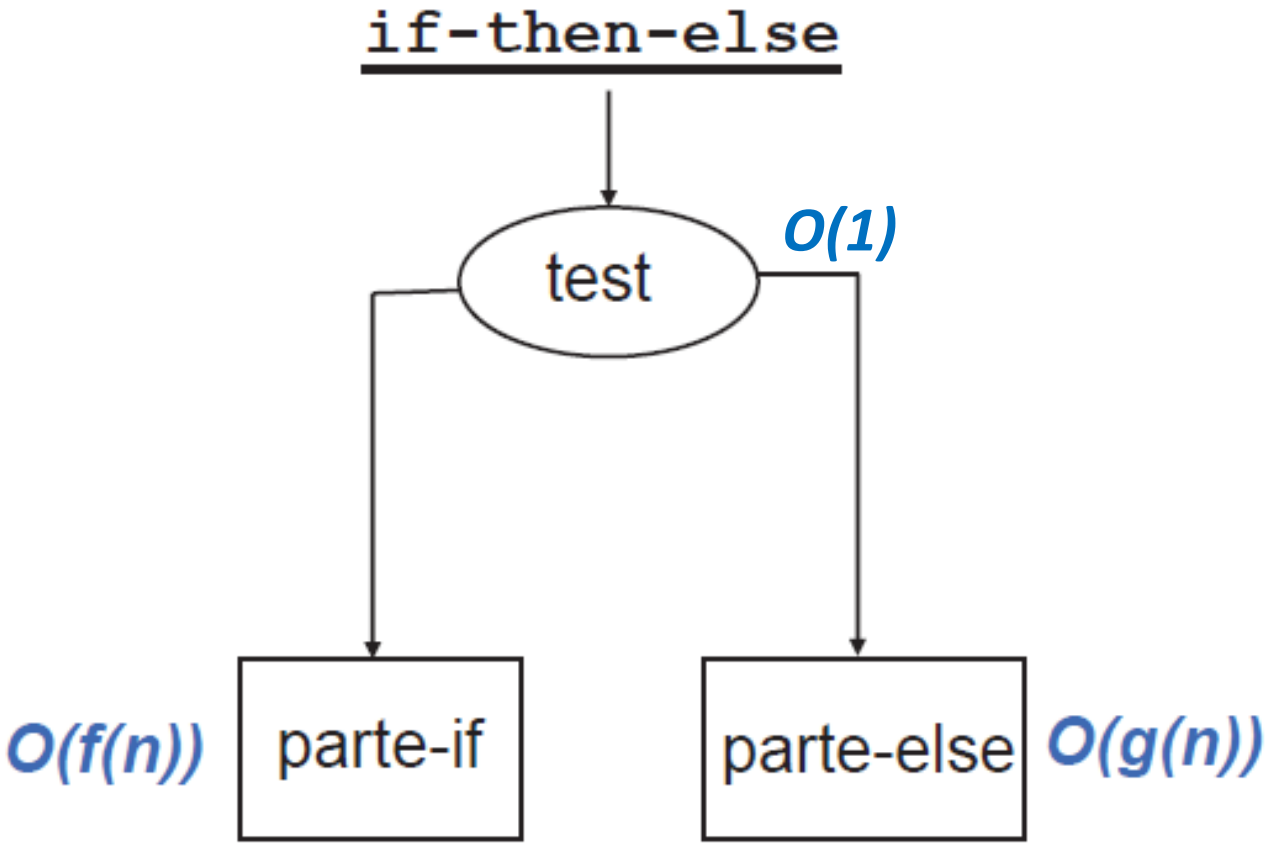


Bisogna stabilire un limite per il numero di iterazioni del ciclo, ***g(n)***.

Può essere necessaria una prova induttiva per ***g(n)***.

$$T(n) = O(g(n) \times f(n))$$

Tempo di esecuzione: If-Then-Else



$$O(\max(f(n), g(n)))$$

Esercizi

Usando la notazione Θ, stimare il numero di volte che la istruzione $x = x + 1$ viene eseguita:

1.
```
for i = 1 to 2n
    x = x + 1
```
$\Theta(n)$

2.
```
for i = 1 to 2n
    for j = 1 to n
        x = x + 1
```
$\Theta(n^2)$

3.
```
for i = 1 to n
    for j = 1 to i
        for k = 1 to j
            x = x + 1
```
Numero di volte in cui eseguo $x = x + 1$ è

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} j = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} \Theta(i^2)$$

$$= \Theta(n^3)$$

Esercizio (continua)

4. $i = n$

while $i \geq 1$ **do**

$x = x + 1,\ i = i/2$

Il **while** è eseguito per $i = n, n/2, n/4, \ldots, n/2^k, \ldots, n/2^t = 1$ cioè per $k = 0, 1, \ldots, t$.

Si noti che il simbolo «/» indica la divisione intera (che scarta le cifre decimali).

Quindi $t = \lfloor \log_2 n \rfloor$ (dove $\lfloor\ \rfloor$ indica l'arrotondamento all'intero inferiore)

e il numero di volte in cui viene eseguito il **while** è: $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 = \Theta(\log_2 n)$.

Si noti che arrotondamenti del genere NON incidono nell'analisi asintotica:

$\log_2 n$

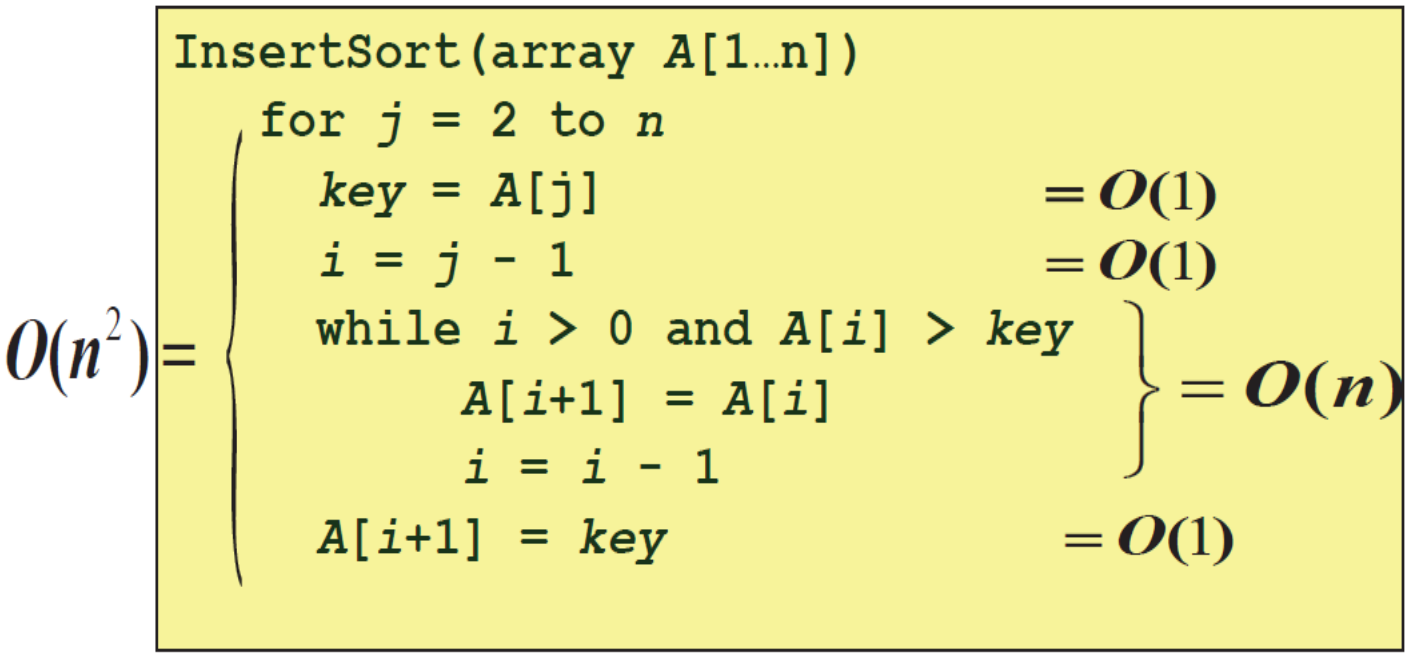
$\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

$\lfloor \log_2 n \rfloor - 1$

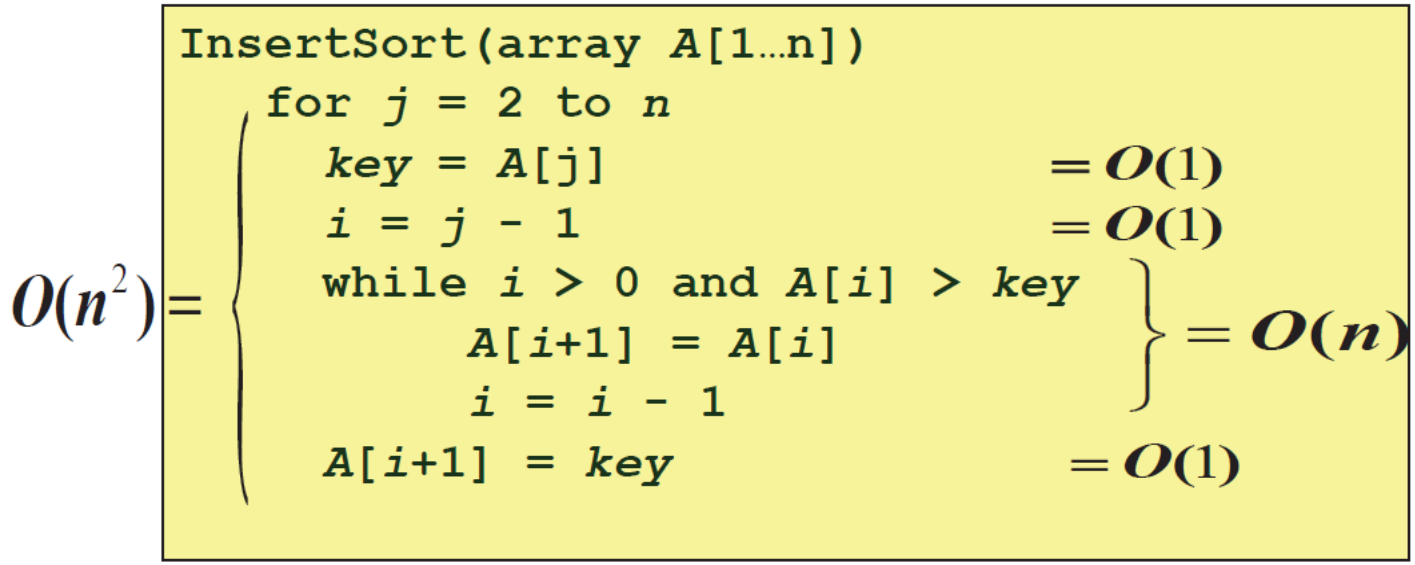
sono tutte funzioni in $\Theta(\log_2 n)$.

Esempio: InsertionSort

Algoritmo di ordinamento di A[1…n] ottenuto mantenendo ad ogni iterazione A[1…j-1] ordinato e inserendovi A[j].



Analisi di InsertionSort



Più precisamente:

Fissato j, il test del while è eseguito un numero di volte fra 1 e j.
Da cui

$$T(n) \leq \sum_{j=2}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1$$

e quindi $T(n) = O(n^2)$. Inoltre $T(n) = \Omega(n)$.

Esercizio 2

Per ciascuna delle seguenti coppie di funzioni $f(n)$ e $g(n)$, dire se $f(n) = O(g(n))$, oppure se $g(n) = O(f(n))$.

- $f(n) = (n^2 - n)/2, \quad g(n) = 6n$
- $f(n) = n + 2\sqrt{n}, \quad g(n) = n^2$
- $f(n) = n + \log n, \quad g(n) = n\sqrt{n}$
- $f(n) = n^2 + 3n, \quad g(n) = n^3$
- $f(n) = n \log n, \quad g(n) = n\sqrt{n}/2$
- $f(n) = n + \log n, \quad g(n) = \sqrt{n}$
- $f(n) = 2(\log n)^2, \quad g(n) = \log n + 1$
- $f(n) = 4n \log n + n, \quad g(n) = (n^2 - n)/2$

svolti

- $f(n) = (n^2 + 2)/(1 + 2^{-n}), \quad g(n) = n + 3$
- $f(n) = n + n\sqrt{n}, \quad g(n) = 4n \log(n^3 + 1)$

Da svolgere

NOTA: Esistono anche funzioni (particolari) non confrontabili tramite O

Esercizio 3

Date le seguenti funzioni

$$\log n^5, n^{\log n}, \log^2 n, 10\sqrt{n}, (\log n)^n, n^n, n \log \sqrt{n},$$
$$n \log^3 n, n^2 \log n, \sqrt{n \log n}, 10 \log \log n, 3 \log n,$$

ordinarle scrivendole da sinistra a destra in modo tale che la funzione $f(n)$ venga posta a sinistra della funzione $g(n)$ se $f(n) = O(g(n))$.

Esercizi «per casa»

- Esercizi dalle slides precedenti
- Es. 3, 4, 5 e 6 di pagg. 67-68 del libro [KT]
- Esercizi sul team: Esercizi_O_2010.pdf