25

$$(A, b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -8 & -10 & -10 & -10 \\ 4 & 4 & -4 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & -9 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{I}+\mathrm{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -12 & -6 & -6 & -6 \\ 4 & 4 & -4 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & -9 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{II}:4}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -12 & -6 & -6 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & -9 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -12 & -6 & -6 & -6 \\ 6 & 7 & -9 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-6\mathrm{I}}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -11 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -11 & -7 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{III}-4\mathrm{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{III}:17}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -3 & -2 & -3 & -1 \\ & & 1 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{I}+\mathrm{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ & 1 & -3 & -2 & -3 & -1 \\ & & 1 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\mathrm{II}+3\mathrm{III} \\ \mathrm{I}-2\mathrm{III}}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -6 & 8 \\ & 1 & 0 & 1 & 12 & 8 \\ & & 1 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_{b_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_{b_2} = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_{b_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

26

Matrix $A_f := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -4 & 3 \\ 6 & 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

Urbild: Lösung von $(A_f, v) := \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & -6 & 3 & 8 \end{array}\right)$

$$\overset{\text{IV}-2\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\text{III}+2\text{II} \\ \text{IV}-\text{II}}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\text{II}+\text{I} \\ \text{III}-\text{I} \\ \text{IV}+2\text{I}}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\text{II}:2 \\ \text{III}:3 \\ \text{IV}:4}}{\rightsquigarrow} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\overset{\substack{\text{I} \leftrightarrow \text{IV}, \\ \text{II} \leftrightarrow \text{III},\ \text{III} \leftrightarrow \text{IV}}}{\rightsquigarrow} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} d & c & a & b & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & & & & 4 \\ & 1 & & & 3 \\ & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} d \\ c \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Überprüfung:

$$A_f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -4 & 3 \\ 6 & 4 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 + 0 + 0 + 4 \\ 0 + 0 + 6 + (-4) \\ 3 + 0 + (-12) + 12 \\ 6 + 8 + (-18) + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

27

$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ $\qquad$ $N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

z.Z: M, N sind Teilräume des $\mathbb{R}^2$ (d.h. abgeschlossen bezgl. Vektoraddition und Skalarmultiplikation)

Seien $a, b \in M$. Dann $\exists\, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ 2b_2 \end{pmatrix}$$

Dann ist $a + b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ 2a_2 + 2b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ 2(a_2 + b_2) \end{pmatrix} \in M.$ (da $\mathbb{R}$ abgeschl. in der Addition ist)

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $\lambda a = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda 2a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ 2(\lambda a_2) \end{pmatrix} \in M.$ (da $\mathbb{R}$ abgeschl. in der Multiplikation ist)

Der Beweis für N ist analog.

$M \cap N$ ist der Schnittpunkt der zwei durch M und N gegebenen Geraden mit den Gleichungen

$$f(x) = 2x$$

$$g(x) = -x$$

Dieser ist offensichtlich der Ursprung.

28

Ist c eine Linearkombination von a und b, so $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $c = \lambda_1 a + \lambda_2 b$, diese Lambda können wir finden, indem wir (a, b, c) lösen:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ -5 & -3 & -7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III+II}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{I+2III \\ II+5III}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 0 & 7 & -7 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{I \leftrightarrow III \\ II:7 \\ III-II}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1$

Probe: $2\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

(und damit keine Linearkombination)

Per Definition orthogonal zu a und b wäre das Kreuzprodukt

$$a \times b = (-5 \cdot 5 - 6 \cdot (-3)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ (-2 \cdot 5 - 6 \cdot 3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ (-2 \cdot (-3) - (-5) \cdot 3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -28 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -28 \\ 21 \end{pmatrix}$$