(14) z.Z.: TRIANGLE := $\{G \mid G$ ist ein ungerichteter Graph mit 3-Clique$\}$ $\in P$

P ist die Klasse der Sprachen, die von einer DTM in Polynomialzeit entschieden werden können.

⇒ Konstruiere DTM:

- (1) Für jeden Knoten k in G:
  - (1.1) Für jeden Nachbarn n_k von k:
    - (1.1.1) Für jeden Nachbarn n_k' von k:
      - (1.1.1.1) Prüfe, ob n_k und n_k' verbunden sind.
        - (1.1.1.1.1) Wenn ja, ist $G \in$ TRIANGLE
        - (1.1.1.1.2) Wenn nein, fahre fort
- (2) $G \notin$ TRIANGLE

Def. REDUKTION

L' ist reduzierbar auf L ($L' \leq L$) gdw

(1) $\exists f: \{0,1\}^* \to \{0,1\}^* : \forall w \in \{0,1\}^*: w \in L' \Leftrightarrow f(w) \in L$

(2) $\exists$ DTM M: M berechnet f

Gilt $L' \leq L$:
(1) L entscheidbar ⇒ L' entscheidbar
(2) L rekursiv ⇒ L' rekursiv
(3) L' nicht ents. ⇒ L nicht ents.
(4) analog für rekursiv

Formale Sprachen und Komplexitätstheorie
Proseminar

Aufgaben, Woche 7

Zeigen $L \in NP$:

L ist polynomiell verifizierbar.

↳ Ist eine mögl. Lösung gegeben, können wir in Polynomialzeit prüfen, dass diese stimmt?

für **NP-Vollständigkeit:** zusätzlich irgeine NP-vollst. Sprache auf die Sprache reduzieren

Aufgabe 14 Zeigen Sie, dass die folgende Sprache in P liegt:

$$TRIANGLE = \{G \mid G \text{ ist ein ungeichtete Graph mit einer 3-Clique}\}$$

Aufgabe 15 Zeigen Sie, dass die folgende Sprache nicht entscheidbar ist:

$$L := \{<M> \mid M \text{ hält bei Eingabe } 101010\}$$

Aufgabe 16 Zeigen Sie, dass die folgende Sprache in NP liegt:

$$Square = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist die Binärdarstellung einer Quadratzahl}\}.$$

USEFUL $:= \{<M>, q \mid \exists w$, sodass M mit Eingabe w in Zustand q gerät$\}$

rekursiv, nicht entscheidbar

RS_{ent} : entscheidbar in NP

SAT := $\{\varphi \mid \varphi$ ist erfüllbare boolesche Formel$\}$

NP-Vollständig

3SAT := SAT mit 3-KNF, NP-vollst.

Clique := $\{(G,k) \mid G$ hat k-Clique$\}$, NP-vollst

(16) z.z. Square ist polynomiell verifizierbar.

Formale Sprachen und Komplexitätstheorie
Proseminar

Aufgaben, Woche 8

Aufgabe 17 Zeigen Sie, dass die Klasse NP unter Durchschnitt, Vereinigung und Konkatenation abgeschlossen ist. Seien also $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ Sprachen in NP, dann liegen $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cup L_2$ und $L_1 \circ L_2$ in NP.

Aufgabe 18 Bei der Sprache $PARTITION$ sind n natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gegeben. Zu entscheiden ist, ob eine Teilmenge $P \subset \{1, \ldots, n\}$ existiert, so dass

$$\sum_{i \in P} a_i = \sum_{i \notin P} a_i.$$

Zeigen Sie, dass die Sprache in NP liegt.

Aufgabe 19 Ist die Sprache $USEFUL$ auf die Spache RS_{ent} reduzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

Formale Sprachen und Komplexitätstheorie
Proseminar

Aufgaben, Woche 9

~~Aufgabe 20~~ Zeigen Sie, dass die Sprache *Clique* auf die folgende Sprache polynomiell reduzierbar ist:

$$HCLIQUE := \left\{ G \;\middle|\; \begin{array}{c} G \text{ ist ein ungerichteter Graph, } |V| \text{ ist gerade} \\ \text{und } G \text{ besitzt eine Clique der Größe } |V|/2 \end{array} \right\}.$$

Zeigen Sie zudem, dass $HCLIQUE$ in NP liegt.

Aufgabe 21 Kann das Akzeptanzproblem auf 3SAT reduziert werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Formale Sprachen und Komplexitätstheorie
Proseminar

Aufgaben, Woche 10

Aufgabe 22 Zeigen Sie, dass Knotenüberdeckung NP-vollständig ist (Literaturrecherche notwendig).

Aufgabe 23 Sei X eine Menge und S eine Teilmenge der Potenzmenge $P(X)$ von X. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt Repräsentant von S, falls $Y \cap R \neq \emptyset$ für jede Menge $R \in S$.

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$\text{REPRÄSENTANT} := \left\{ (X, S, k) \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Es gibt einen Repräsentanten } Y \subset X \\ \text{von } S \text{, so dass } |Y| \leq k \text{ gilt.} \end{array} \right\}$$

NP-vollständig ist.

Formale Sprachen und Komplexitätstheorie
Proseminar

Aufgaben, Woche 11

Aufgabe 24 Welche Sprache wird mit der folgenden Grammatik erzeugt?

$G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$\begin{array}{lcl} V & = & \{S, A, B\} \\ \Sigma & = & \{a, b, c\} \\ P & = & \left\{ \begin{array}{l} S \to cA \mid bB \\ A \to c \\ B \to aB \mid b \end{array} \right. \end{array}$$

Geben Sie die jeweiligen Ableitungen zu folgenden Wörtern aus $L(G)$ an:

- cc
- $baaaab$

Aufgabe 25 Zeigen Sie, dass jede endliche Spache regulär ist.