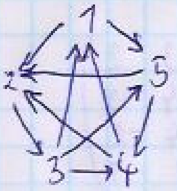
$\boxed{21}$

Graph



Adjazenzmatrix, Anzahl der Wege der Länge 6 von Knoten 3 zu Knoten 5: $\boxed{10}$

und von Knoten 5 zu Knoten 3: 7

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = A^{2+2} = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^6 = A^4 \cdot A^2 &= \\ = A^2 \cdot A^4 &= \end{aligned} \begin{pmatrix} 8 & 10 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 12 & 3 & 7 & 7 \\ 10 & 21 & 12 & 10 & \boxed{10} \\ 7 & 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 10 & 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \text{ weiters } A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^5 = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 7 & 12 & 3 & 7 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{22}$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \\ 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ ges.: } W^TWH \text{ und } WHH^T$$

Rechenoperationen:

Variante 1:

1. W^TW: (4 Multiplikationen + 3 Addition) · 2 Zeilen · 2 Spalten = 28
2. $(W^TW)H$: (2 Mult. + 1 Add.) · 2 Zeilen · 4 Spalten = 24
3. HH^T: $(4+3)\cdot 2\cdot 2 = 28$
4. $W(HH^T)$: $(2+1)\cdot 4\cdot 2 = 24$

gesamt: 104 Operationen (28 + 24 + 28 + 24)

Variante 2:

1. WH: $(2+1)\cdot 4\cdot 4 = 48$
2. $W^T(WH)$: $(4+3)\cdot 2\cdot 4 = 56$
3. nichts: WH bereits berechnet: 0
4. $(WH)H^T$: $(4+3)\cdot 4\cdot 2 = 56$

gesamt: 160 Operationen (48 + 56 + 0 + 56) schlechter als Variante 1

Variante 1a: Variante 1 mit Ausnützung der Symmetrie

1. W^TW: symmetrische 2×2-Matrix ⇒ Element (2,1) = El. (1,2)
   $(4+3)\cdot 2\cdot 2 - (4+3) = 21$ Rechenop. (+ 1 Kopiervorgang)
2. $(W^TW)H$: wie bei Variante 1: $(2+1)\cdot 2\cdot 4 = 24$
3. HH^T: symmetrische 2×2-Matrix, El. (2,1) = El. (1,2):
   $(4+3)\cdot 2\cdot 2 - (4+3) = 21$
4. $W(HH^T)$: wie bei Variante 1: $(2+1)\cdot 4\cdot 2 = 24$

gesamt: 90 Operationen (21 + 24 + 21 + 24)

bei Variante 2 keine Symmetrie, 160 Rechenop. = ca. 78% mehr als bei V. 1a

$\boxed{22}$ Fortsetzung: Berechnung

$$W^T W = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \\ 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 4 \\ 4 & 22 \end{pmatrix}$$

$$(W^T W) H = \begin{pmatrix} 29 & 4 \\ 4 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 124 & -33 & -37 \\ -102 & 60 & -26 & -48 \end{pmatrix}$$

$$HH^T = \begin{pmatrix} 22 & 1 \\ 1 & 34 \end{pmatrix}, \quad W(HH^T) = \begin{pmatrix} 1 & 34 \\ -70 & -139 \\ 42 & -66 \\ -87 & 30 \end{pmatrix}$$

für Variante 1a nicht benötigt:

$$WH = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 & -2 \\ 14 & -20 & 7 & 11 \\ 14 & 4 & 0 & 2 \\ -13 & -14 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

PS Lineare Algebra f. Informatik

$\boxed{23.}$

$$(A,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 8 & 0 & -4 & 6 \\ 3 & -7 & -5 & 6 & 1 \\ -4 & 8 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & -2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} -\frac{1}{2}\cdot I = I \\ \rightsquigarrow \\ -2\cdot I + III = III \\ I + IV = IV \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -5 & 6 & 1 \\ 0 & -8 & 2 & 3 & -10 \\ 0 & 14 & -2 & -6 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{-3I + II = II}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & -8 & 2 & 3 & -10 \\ 0 & 14 & -2 & -6 & 11 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{\frac{1}{5}\cdot II = II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 2 & 3 & -10 \\ 0 & 14 & -2 & -6 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{c} 4II + I = I \\ \longrightarrow \\ 8II + III = III \\ -14II + IV = IV \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & -6 & -17 \end{array}\right) \begin{array}{c} \rightsquigarrow \\ -\frac{1}{6}\cdot III = III \\ 2III + IV = IV \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow rg(A) = 3$

$rg((A,b)) = 4 \neq rg(A)$

<u>nicht</u> lösbar $\qquad (\mathbb{L} = \emptyset)$

$\boxed{24}$

$$(A,b) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & -3 & 9 & 6 \\ -2 & -4 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 12 & 13 \\ -4 & -8 & 2 & -21 & -19 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} -3\text{III} \\ +2\text{III} \\ \\ +4\text{III} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 6 & 27 & 33 \\ 0 & 0 & -6 & -27 & -33 \\ 0 & 0 & 6 & 27 & 33 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{1}{6} \\ +\text{II} \\ -\text{II} \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\text{II} \\ \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & \frac{15}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

SPALTEN $\text{II} \Leftrightarrow \text{III}$

Lösung: (Achtung: Spalten $\text{II} \Leftrightarrow \text{III}$ vertauschen)

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ 0 \\ \frac{11}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} \\ 0 \\ -\frac{9}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} =$$