Proseminar

Lineare Algebra f. Informatik

SoSe 2020

Übungszettel 9

Hinweis: Abgabefrist Übungszettel 9 und Ausgabe Übungszettel 10: Do 28.05.2020

36. Im $\mathbb{R}^4$ ist eine Ebene $E:\ x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 7 \\ 25 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -8 \\ -20 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und eine Hyperebene $H:\ 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 = -3$ gegeben. Berechnen Sie den Schnitt $E \cap H$.

37. Zeigen Sie, dass
$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$
ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ definiert.

38. Im $\mathbb{R}^n$ sei
$$\|x\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}\ .$$
Beweisen Sie, dass es sich hierbei um eine Norm handelt.

39. Zeigen Sie, dass folgende Vektoren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ bilden:
$$a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad c = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad d = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Berechnen Sie außerdem die Koordinaten des Punktes $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ bezüglich der Orthonormalbasis (a, b, c, d).

40. Mit dem Gram-Schmidt-Verfahren soll eine Orthonormalbasis von $U \subseteq \mathbb{R}^4$ bestimmt werden:
$$U = \mathrm{LIN}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$
Überprüfen Sie dazu zuerst, dass die drei Vektoren linear unabhängig sind und wenden Sie anschließend das Orthonormalisierungsverfahren an.