$\boxed{25}$ mehrere rechte Seiten gleichzeitig: $(A|b_1|b_2|b_3) =$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -8 & -10 & -10 & -10 \\ 4 & 4 & -4 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & -9 & 4 & 3 & 5 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot\frac{1}{4} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -8 & -10 & -10 & -10 \\ 6 & 7 & -9 & 4 & 3 & 5 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +3\mathrm{I} \\ -6\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -11 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -\mathrm{III}\ (\text{vor Vertausch}) \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -11 & -7 & -7 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -4\mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} -2\mathrm{III} \\ +3\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 12 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

26.

$$f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4:\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} d\\ 2c-d\\ 3a-4c+3d\\ 6a+4b-6c+3d\end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix}4\\2\\3\\8\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\3\\6\end{pmatrix},\quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix},\quad f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\2\\-4\\-6\end{pmatrix},\quad f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$$

Matrix $M_f=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&-1\\3&0&-4&3\\6&4&-6&3\end{pmatrix}$

$f^{-1}(\{v\})=\{x\in\mathbb{R}^4\mid f(x)\in\{v\}\}=\{x\in\mathbb{R}^4\mid M_f\cdot x=v\}$

mit Gauß-Algorithmus <u>ohne</u> Zeilenvertauschungen

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&0&1&4\\0&0&2&-1&2\\3&0&-4&3&3\\6&4&-6&3&8\end{array}\right)\begin{array}{l}\\+\mathrm{I}\\-3\mathrm{I}\\-3\mathrm{I}\end{array}\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&4\\0&0&2&0&6\\0&0&-4&3&-9\\0&4&-6&6&-4\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\cdot\frac{1}{2}\\ \\ \\ \end{array}$$

Spalte I ⇔ IV   Spalten II ⇔ III

$$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&4\\0&1&0&0&3\\0&-4&0&3&-9\\0&-6&4&6&-4\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\+4\mathrm{II}\\+6\mathrm{II}\end{array}\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&4\\0&1&0&0&3\\0&0&0&3&3\\0&0&4&6&14\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\\cdot\frac{1}{3}\\ \\ \end{array}$$

Spalten III ⇔ IV

$$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&4\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&1\\0&0&6&4&14\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\-6\mathrm{III}\end{array}\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&4\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&4&8\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\\cdot\frac{1}{4}\end{array}\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&4\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&2\end{array}\right)$$

Beim Ablesen der Lösung Spaltenvertauschungen <u>„von hinten nach vorne"</u> rückgängig machen, also

$$\begin{pmatrix}4\\3\\1\\2\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathrm{III}\Leftrightarrow\mathrm{IV}}\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathrm{II}\Leftrightarrow\mathrm{III}}\begin{pmatrix}4\\2\\3\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathrm{I}\Leftrightarrow\mathrm{IV}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

$\boxed{26.}$ Fortsetzung

einzige Lösung $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, daher $f^{-1}(\{v\}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

Probe: $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\cdot 3 - 4 \\ 3\cdot 1 - 4\cdot 3 + 3\cdot 4 \\ 6\cdot 1 + 4\cdot 2 - 6\cdot 3 + 3\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = v$

(auch: $M_f \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = v$)

falsch: $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow IV} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \leftrightarrow IV} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \neq v$ ↯

27. Def. Untervektorraum / Teilraum laut VO

Sei V ein Vektorraum über K. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Untervektorraum (Teilraum) von V, wenn gilt:

(1) $\forall x, y \in U: x + y \in U$

(2) $\forall x \in U \; \forall \lambda \in K: \lambda x \in U$

konkret: $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

(0) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in M$, daher ist M nichtleer ($2 \cdot 0 = 0$).

(1) Seien $a = \begin{pmatrix} x_a \\ 2x_a \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} x_b \\ 2x_b \end{pmatrix} \in M$ beliebig.

$$a + b = \begin{pmatrix} x_a \\ 2x_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ 2x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ 2x_a + 2x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ 2(x_a + x_b) \end{pmatrix} \in M,$$

$(2(x_a + x_b) = 2(x_a + x_b))$

(2) Sei $a = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} \in M$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\lambda a = \lambda \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda(2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ 2(\lambda x) \end{pmatrix} \in M.$$

M ist also ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$.

$N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

(0) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in N$ $(-0 = 0)$, N ist nichtleer.

(1) Seien $a = \begin{pmatrix} x_a \\ -x_a \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} x_b \\ -x_b \end{pmatrix} \in N$ beliebig.

$$a + b = \begin{pmatrix} x_a \\ -x_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ -x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ -x_a + (-x_b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_a + x_b) \\ -(x_a + x_b) \end{pmatrix} \in N.$$

(2) Sei $a = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \in N$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. $\lambda a = \lambda \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda(-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda x) \\ -(\lambda x) \end{pmatrix} \in N.$

N ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$.

27. Fortsetzung $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$, $N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

$$M \cap N = \left\{ a \in \mathbb{R}^2 : a \in M \wedge a \in N \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = 2x \wedge y = -x \right\}$$

(i) $y = 2x$

(ii) $\underline{y = -x}$

(i) in (ii) einsetzen: $-x = 2x$

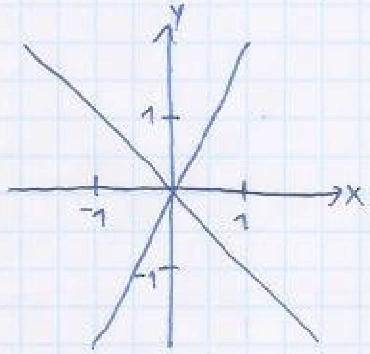
$0 = 3x$

$\underline{\underline{x = 0}} \Rightarrow y = 2x = 2 \cdot 0 = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M \cap N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}}$$ trivialer Teilraum des $\mathbb{R}^2$

geometrisch: M: Gerade durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Steigung 2

N: Gerade durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Steigung -1



$M \cap N$: Schnitt der Geraden, ein Schnittpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(VO: für Teilräume M, N eines Vektorraums V ist $M \cap N$ ein Teilraum von V)

28. Linearkombination

Sei V ein Vektorraum über K. Seien $x_1, x_2, \dots, x_r \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in K$. Dann heißt $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r$ eine Linearkombination (LK) von $x_1, x_2, \dots, x_r$.

$$a = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

c ist eine LK von a und b gdw. es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $c = \lambda_1 a + \lambda_2 b$.

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -2\lambda_1 + 3\lambda_2 &= -7 \\ -5\lambda_1 - 3\lambda_2 &= -7 \\ 6\lambda_1 + 5\lambda_2 &= 7 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & -7 \\ -5 & -3 & -7 \\ 6 & 5 & 7 \end{array}\right) \cdot \tfrac{-1}{2} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ -5 & -3 & -7 \\ 6 & 5 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +5\mathrm{I} \\ -6\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{21}{2} & \frac{21}{2} \\ 0 & 14 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot \frac{-2}{21} \\ \cdot \frac{1}{14} \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +\frac{3}{2}\mathrm{II} \\ \\ -\mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist also lösbar mit $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$.

c ist also eine LK von a und b. $(c = 2a - b)$

Wähle $d = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -7 \\ -5 & -3 & -7 \\ 6 & 5 & 0 \end{array}\right) \cdot \tfrac{-1}{2} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ -5 & -3 & -7 \\ 6 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +5\mathrm{I} \\ -6\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{21}{2} & \frac{21}{2} \\ 0 & 14 & -21 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot \frac{-2}{21} \\ \cdot \frac{1}{7} \end{array} \rightsquigarrow$$

28. Fortsetzung

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} +\frac{3}{2}\,II \\ \\ -2\,II \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{array}\right)$$

<u>nicht</u> lösbar

⇒ d ist keine LK von a und b.

40