Kürzeste Wege I

Algorithmen für verteilte Systeme

Sebastian Forster

Universität Salzburg

Problemstellung

Single-Source Shortest Paths (SSSP)

Ziel: Berechne Distanz $\text{dist}(s, v)$ für jeden Knoten v und gegebenen Startknoten s

- Jeder Knoten weiß initial, ob er der Startknoten ist oder nicht
- Am Ende kennt jeder Knoten v seine Distanz $\text{dist}(s, v)$

Problemstellung

Single-Source Shortest Paths (SSSP)

Ziel: Berechne Distanz $\text{dist}(s, v)$ für jeden Knoten v und gegebenen Startknoten s

- Jeder Knoten weiß initial, ob er der Startknoten ist oder nicht
- Am Ende kennt jeder Knoten v seine Distanz $\text{dist}(s, v)$

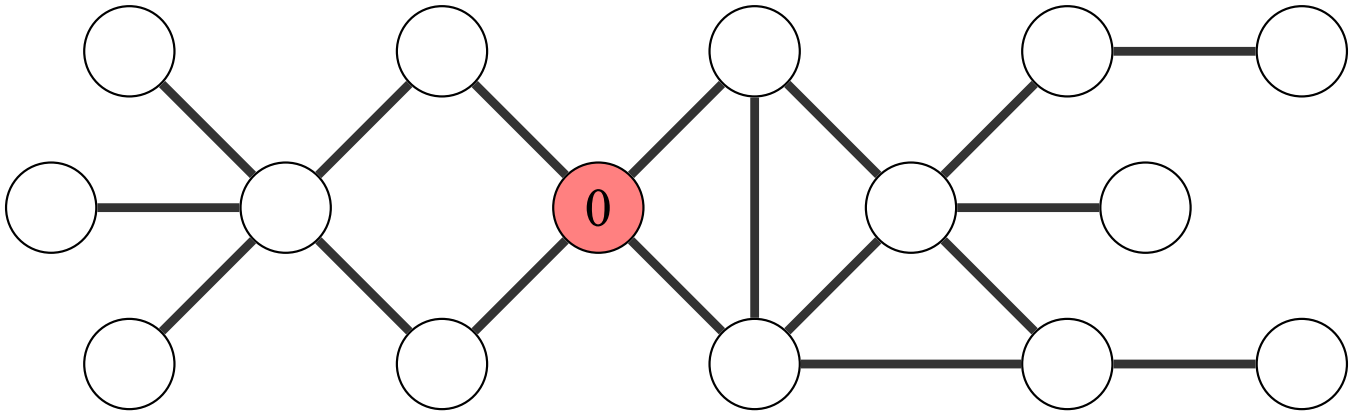
All-Pairs Shortest Paths (APSP)

Ziel: Berechne Distanz $\text{dist}(u, v)$ für jedes Paar von Knoten u und v

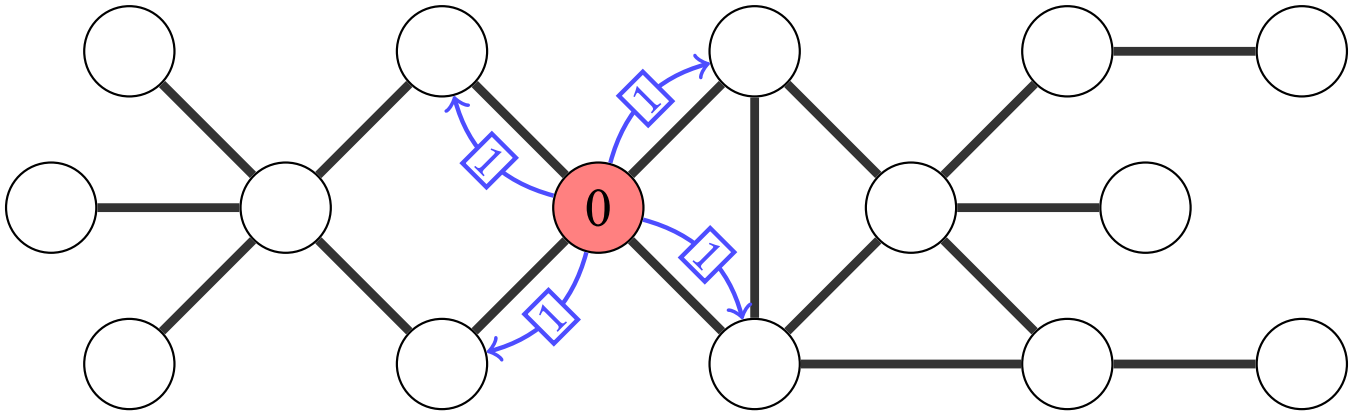
- Am Ende kennt jeder Knoten v für jeden anderen Knoten u die Distanz $\text{dist}(u, v)$

Ungewichtete Graphen

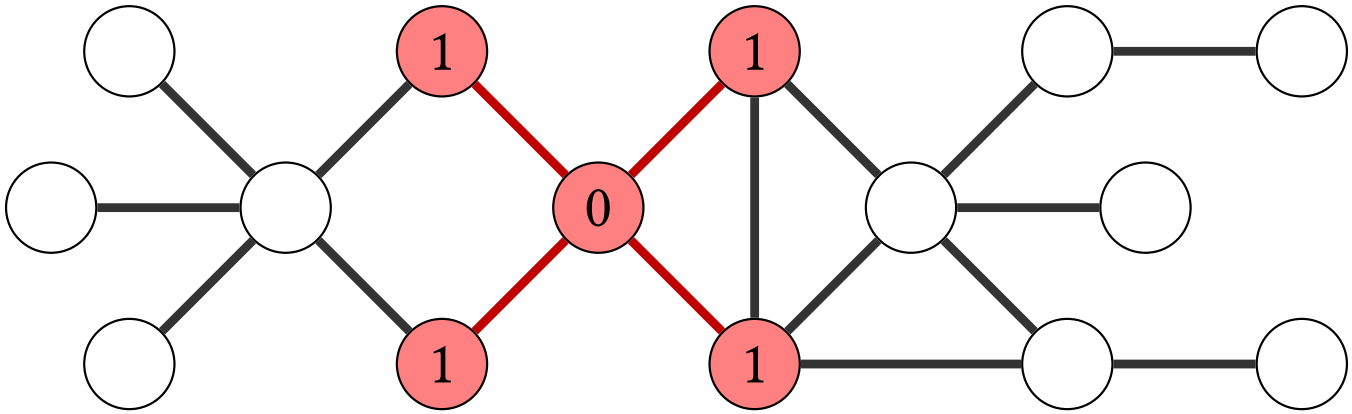
Wiederholung: Breitensuche



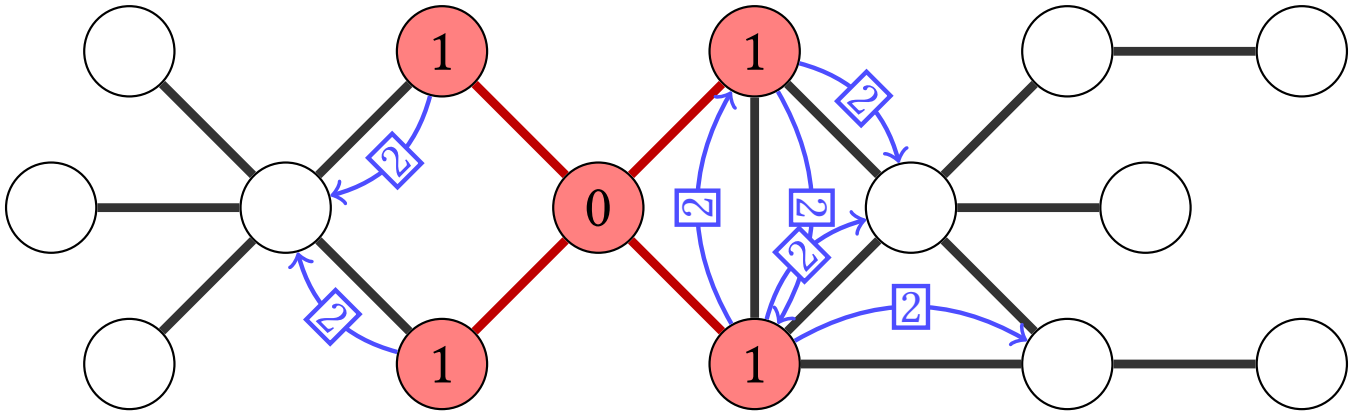
Wiederholung: Breitensuche



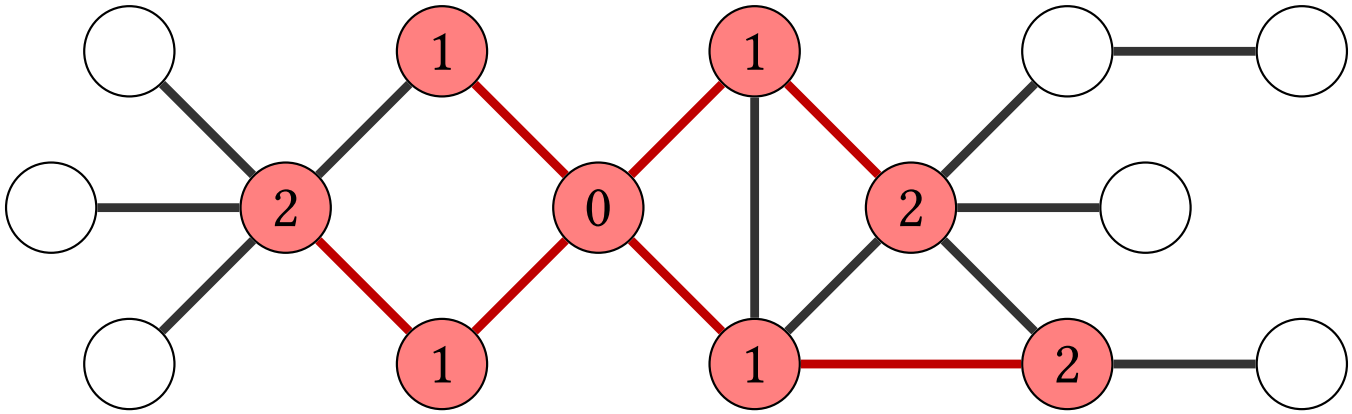
Wiederholung: Breitensuche



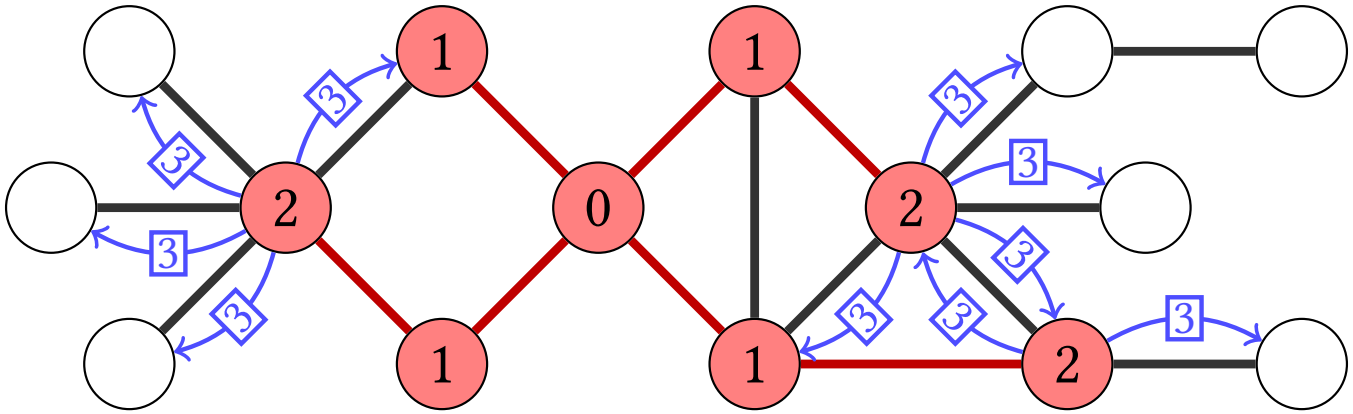
Wiederholung: Breitensuche



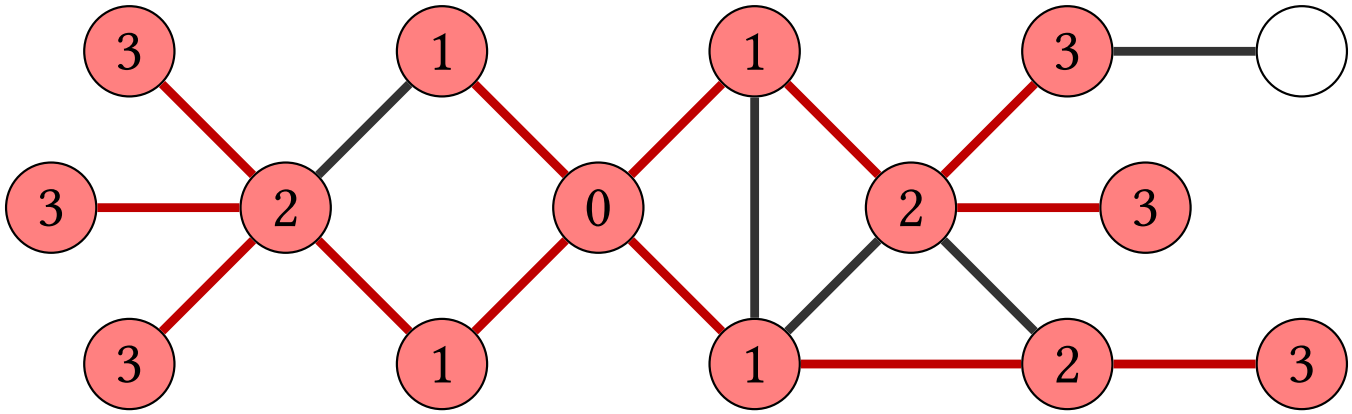
Wiederholung: Breitensuche



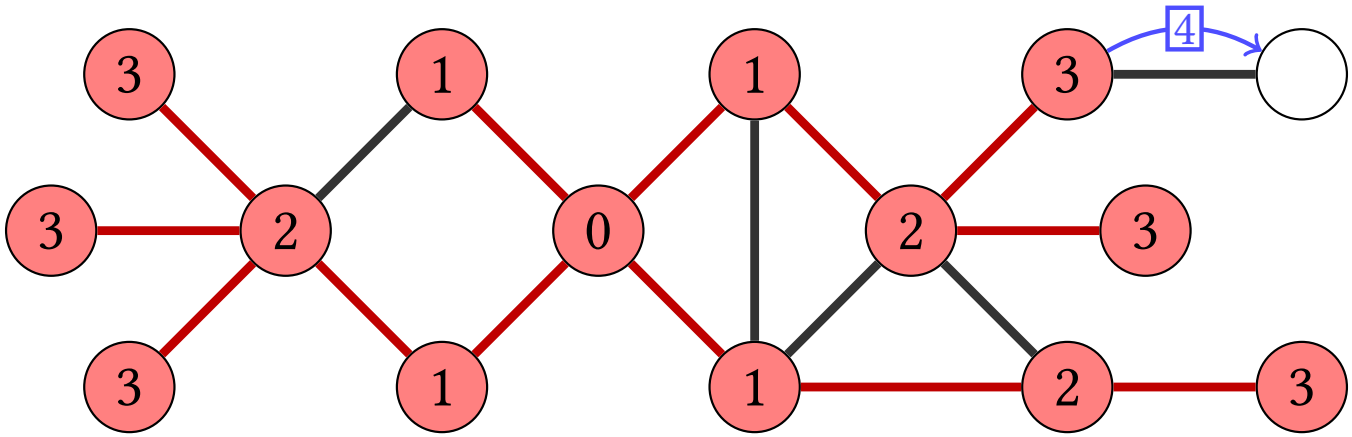
Wiederholung: Breitensuche



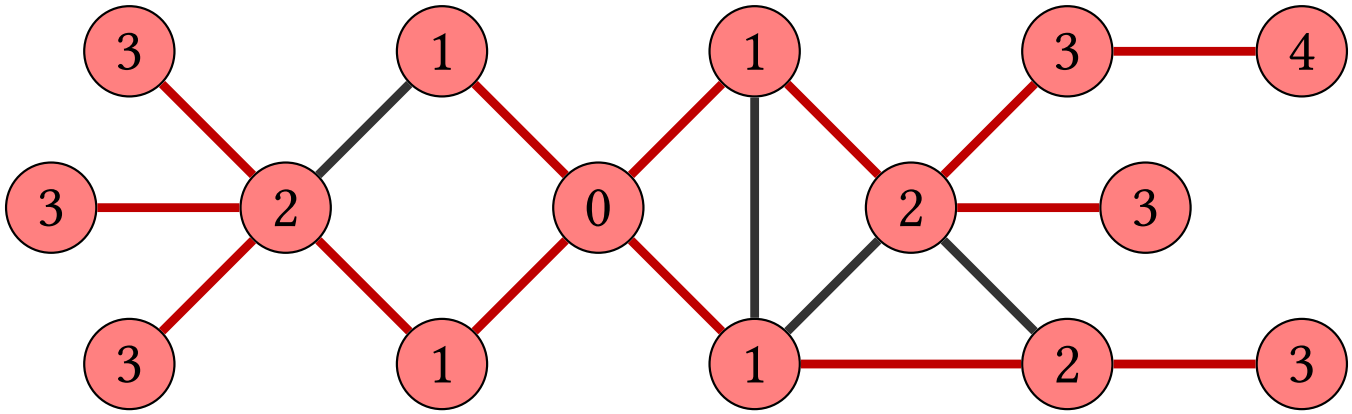
Wiederholung: Breitensuche



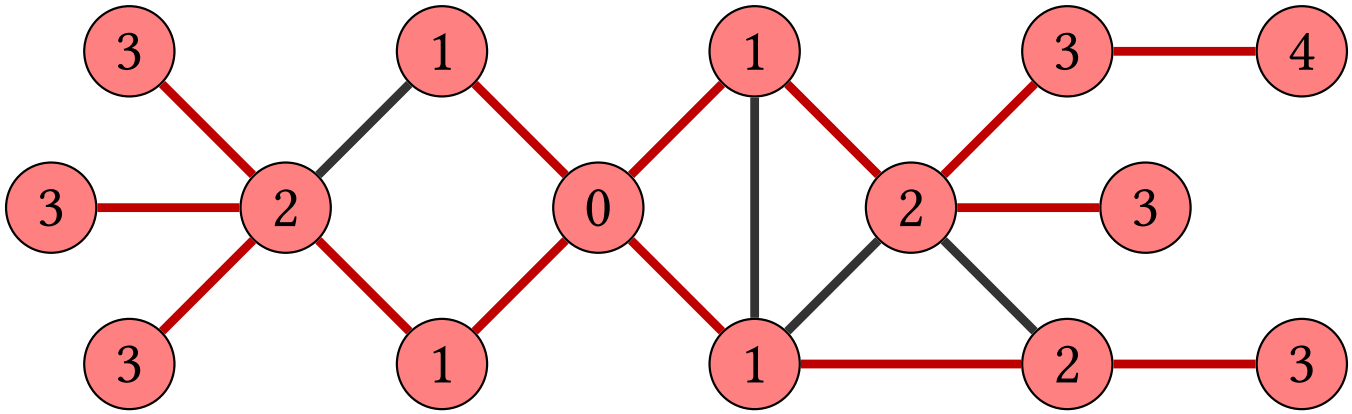
Wiederholung: Breitensuche



Wiederholung: Breitensuche



Wiederholung: Breitensuche



Theorem

Im CONGEST Modell kann das SSSP Problem für ungewichtete Graphen in $O(D)$ Runden gelöst werden.

All-Pairs Shortest Paths

Idee: Führe Breitensuche für jeden Knoten aus

All-Pairs Shortest Paths

Idee: Führe Breitensuche für jeden Knoten aus

Naive Umsetzung:

- Congestion Constraint verhindert parallele Ausführung
- $O(nD)$ Runden

All-Pairs Shortest Paths

Idee: Führe Breitensuche für jeden Knoten aus

Naive Umsetzung:

- Congestion Constraint verhindert parallele Ausführung
- $O(nD)$ Runden

Effizienterer Algorithmus: Parallelisierung durch Randomisierung

Parallelisierung durch Random Delay

Ziel: Führe Breitensuche für $k = |U|$ verschiedene Startknoten aus

Parallelisierung durch Random Delay

Ziel: Führe Breitensuche für $k = |U|$ verschiedene Startknoten aus

Idee: Nutze aus, dass in Breitensuche jeder Knoten höchstens einmal sendet

Parallelisierung durch Random Delay

Ziel: Führe Breitensuche für $k = |U|$ verschiedene Startknoten aus

Idee: Nutze aus, dass in Breitensuche jeder Knoten höchstens einmal sendet

Random Delay Algorithmus:

- Jeder Startknoten s_i wählt uniform zufälliges $\delta_i \in \{0, \ldots, k-1\}$

Parallelisierung durch Random Delay

Ziel: Führe Breitensuche für $k = |U|$ verschiedene Startknoten aus

Idee: Nutze aus, dass in Breitensuche jeder Knoten höchstens einmal sendet

Random Delay Algorithmus:

- Jeder Startknoten s_i wählt uniform zufälliges $\delta_i \in \{0, \ldots, k-1\}$
- Knoten s_i startet Instanz des Algorithmus mit Verzögerung δ_i

Parallelisierung durch Random Delay

Ziel: Führe Breitensuche für $k = |U|$ verschiedene Startknoten aus

Idee: Nutze aus, dass in Breitensuche jeder Knoten höchstens einmal sendet

Random Delay Algorithmus:

- Jeder Startknoten s_i wählt uniform zufälliges $\delta_i \in \{0, \ldots, k-1\}$
- Knoten s_i startet Instanz des Algorithmus mit Verzögerung δ_i

Lemma

Der Random Delay Algorithmus berechnet einen Breitensuchbaum für jeden Knoten in U in $O(k + D)$ Runden und benötigt Bandbreite $O(\log^2 n)$ mit hoher Wahrscheinlichkeit.

Parallelisierung durch Random Delay

Ziel: Führe Breitensuche für $k = |U|$ verschiedene Startknoten aus

Idee: Nutze aus, dass in Breitensuche jeder Knoten höchstens einmal sendet

Random Delay Algorithmus:

- Jeder Startknoten s_i wählt uniform zufälliges $\delta_i \in \{0, \ldots, k-1\}$
- Knoten s_i startet Instanz des Algorithmus mit Verzögerung δ_i

Lemma

Der Random Delay Algorithmus berechnet einen Breitensuchbaum für jeden Knoten in U in $O(k + D)$ Runden und benötigt Bandbreite $O(\log^2 n)$ mit hoher Wahrscheinlichkeit.

Simulation mit Nachrichtengröße $O(\log n)$: $\Longrightarrow O((k + D) \log n)$ Runden

Parallelisierung durch Random Delay

Ziel: Führe Breitensuche für $k = |U|$ verschiedene Startknoten aus

Idee: Nutze aus, dass in Breitensuche jeder Knoten höchstens einmal sendet

Random Delay Algorithmus:

- Jeder Startknoten s_i wählt uniform zufälliges $\delta_i \in \{0, \ldots, k-1\}$
- Knoten s_i startet Instanz des Algorithmus mit Verzögerung δ_i

Lemma

Der Random Delay Algorithmus berechnet einen Breitensuchbaum für jeden Knoten in U in $O(k + D)$ Runden und benötigt Bandbreite $O(\log^2 n)$ mit hoher Wahrscheinlichkeit.

Simulation mit Nachrichtengröße $O(\log n)$: $\Longrightarrow O((k + D) \log n)$ Runden

Theorem

Im CONGEST Modell gibt es einen Monte-Carlo Algorithmus, der mit hoher Wahrscheinlichkeit das APSP Problem in $O(n \log n)$ Runden löst.

Analyse

Lemma

In jeder Runde werden mit hoher Wahrscheinlichkeit für jeden Knoten nur Nachrichten aus $O(\log n)$ Instanzen gleichzeitig gesendet.

Analyse

Lemma

In jeder Runde werden mit hoher Wahrscheinlichkeit für jeden Knoten nur Nachrichten aus $O(\log n)$ Instanzen gleichzeitig gesendet.

Beweis:

$M_{v,i}$: von Knoten v in i-ter Instanz gesendete Nachricht

(Bei Breitensuche gibt es nur eine solche Nachricht)

$r_{v,i}$: Runde, in der $M_{v,i}$ ohne Delay gesendet werden würde

Analyse

Lemma

In jeder Runde werden mit hoher Wahrscheinlichkeit für jeden Knoten nur Nachrichten aus $O(\log n)$ Instanzen gleichzeitig gesendet.

Beweis:

$M_{v,i}$: von Knoten v in i-ter Instanz gesendete Nachricht

(Bei Breitensuche gibt es nur eine solche Nachricht)

$r_{v,i}$: Runde, in der $M_{v,i}$ ohne Delay gesendet werden würde

Fixiere Runde r, Knoten v, Instanz i:

Analyse

Lemma

In jeder Runde werden mit hoher Wahrscheinlichkeit für jeden Knoten nur Nachrichten aus $O(\log n)$ Instanzen gleichzeitig gesendet.

Beweis:

$M_{v,i}$: von Knoten v in i-ter Instanz gesendete Nachricht

(Bei Breitensuche gibt es nur eine solche Nachricht)

$r_{v,i}$: Runde, in der $M_{v,i}$ ohne Delay gesendet werden würde

Fixiere Runde r, Knoten v, Instanz i:

$$\Pr[M_{v,i} \text{ in Runde } r \text{ von } v \text{ gesendet}] \leq \frac{1}{k}$$

(Enspricht Wahrscheinlichkeit, dass $r = \delta_i + r_{v,i}$; hierbei k Möglichkeiten für δ_i)

Analyse

Lemma

In jeder Runde werden mit hoher Wahrscheinlichkeit für jeden Knoten nur Nachrichten aus $O(\log n)$ Instanzen gleichzeitig gesendet.

Beweis:

$M_{v,i}$: von Knoten v in i-ter Instanz gesendete Nachricht

(Bei Breitensuche gibt es nur eine solche Nachricht)

$r_{v,i}$: Runde, in der $M_{v,i}$ ohne Delay gesendet werden würde

Fixiere Runde r, Knoten v, Instanz i:

$$\Pr[M_{v,i} \text{ in Runde } r \text{ von } v \text{ gesendet}] \leq \frac{1}{k}$$

(Enspricht Wahrscheinlichkeit, dass $r = \delta_i + r_{v,i}$; hierbei k Möglichkeiten für δ_i)

Fixiere Runde r, Knoten v, Menge von Nachrichten $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\}$:

Analyse

Lemma

In jeder Runde werden mit hoher Wahrscheinlichkeit für jeden Knoten nur Nachrichten aus $O(\log n)$ Instanzen gleichzeitig gesendet.

Beweis:

$M_{v,i}$: von Knoten v in i-ter Instanz gesendete Nachricht

(Bei Breitensuche gibt es nur eine solche Nachricht)

$r_{v,i}$: Runde, in der $M_{v,i}$ ohne Delay gesendet werden würde

Fixiere Runde r, Knoten v, Instanz i:

$$\Pr[M_{v,i} \text{ in Runde } r \text{ von } v \text{ gesendet}] \leq \frac{1}{k}$$

(Enspricht Wahrscheinlichkeit, dass $r = \delta_i + r_{v,i}$; hierbei k Möglichkeiten für δ_i)

Fixiere Runde r, Knoten v, Menge von Nachrichten $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\}$:

$$\Pr[\text{alle Nachrichten aus } \mathcal{M} \text{ in Runde } r \text{ von } v \text{ gesendet}] \leq \left(\frac{1}{k}\right)^{|\mathcal{M}|}$$

(Unabhängigkeit der Ereignisse, da Delays unabhängig gewählt wurden)

Fortsetzung des Beweises

#Nachrichtenmengen $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\}$ der Größe ℓ: $\leq \binom{k}{\ell}$

(Eine Nachricht pro Instanz)

Fortsetzung des Beweises

#Nachrichtenmengen $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\}$ der Größe ℓ: $\leq \binom{k}{\ell}$

(Eine Nachricht pro Instanz)

$$\Pr\Big[\exists \mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\} \text{ so dass } |\mathcal{M}| \geq \max\{(c+3)\log n, 2e\}$$

$$\text{und alle Nachrichten aus } \mathcal{M} \text{ in Runde } r \text{ von } v \text{ gesendet}\Big]$$

Fortsetzung des Beweises

#Nachrichtenmengen $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\}$ der Größe ℓ: $\leq \binom{k}{\ell}$

(Eine Nachricht pro Instanz)

$$\Pr\Big[\exists \mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\} \text{ so dass } |\mathcal{M}| \geq \max\{(c+3)\log n, 2e\}$$

$$\text{und alle Nachrichten aus } \mathcal{M} \text{ in Runde } r \text{ von } v \text{ gesendet}\Big]$$

$$\leq \sum_{\max\{(c+3)\log n, 2e\} \leq \ell \leq k} \binom{k}{\ell} \left(\frac{1}{k}\right)^{\ell}$$

(Union Bound)

Fortsetzung des Beweises

#Nachrichtenmengen $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\}$ der Größe ℓ: $\leq \binom{k}{\ell}$

(Eine Nachricht pro Instanz)

$$\Pr\Big[\exists \mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\} \text{ so dass } |\mathcal{M}| \geq \max\{(c+3)\log n, 2e\}$$

$$\text{und alle Nachrichten aus } \mathcal{M} \text{ in Runde } r \text{ von } v \text{ gesendet}\Big]$$

$$\leq \sum_{\max\{(c+3)\log n, 2e\} \leq \ell \leq k} \binom{k}{\ell} \left(\frac{1}{k}\right)^{\ell}$$

(Union Bound)

Wegen $\binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^{b}$:

Fortsetzung des Beweises

#Nachrichtenmengen $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\}$ der Größe ℓ: $\leq \binom{k}{\ell}$

(Eine Nachricht pro Instanz)

$$\Pr\left[\exists \mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\} \text{ so dass } |\mathcal{M}| \geq \max\{(c+3)\log n, 2e\}\right.$$
$$\left.\text{und alle Nachrichten aus } \mathcal{M} \text{ in Runde } r \text{ von } v \text{ gesendet}\right]$$
$$\leq \sum_{\max\{(c+3)\log n, 2e\} \leq \ell \leq k} \binom{k}{\ell} \left(\frac{1}{k}\right)^{\ell}$$

(Union Bound)

Wegen $\binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^{b}$:

$$\Pr[\ldots] \leq \sum_{\max\{(c+3)\log n, 2e\} \leq \ell \leq k} \left(\frac{ek}{\ell}\right)^{\ell} \left(\frac{1}{k}\right)^{\ell}$$

Fortsetzung des Beweises

#Nachrichtenmengen $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\}$ der Größe ℓ: $\leq \binom{k}{\ell}$

(Eine Nachricht pro Instanz)

$$\Pr\Big[\exists \mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\} \text{ so dass } |\mathcal{M}| \geq \max\{(c+3)\log n, 2e\}$$

$$\text{und alle Nachrichten aus } \mathcal{M} \text{ in Runde } r \text{ von } v \text{ gesendet}\Big]$$

$$\leq \sum_{\max\{(c+3)\log n, 2e\} \leq \ell \leq k} \binom{k}{\ell} \left(\frac{1}{k}\right)^{\ell}$$

(Union Bound)

Wegen $\binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^{b}$:

$$\Pr[\dots] \leq \sum_{\max\{(c+3)\log n, 2e\} \leq \ell \leq k} \left(\frac{ek}{\ell}\right)^{\ell} \left(\frac{1}{k}\right)^{\ell}$$

$$\leq \sum_{\max\{(c+3)\log n, 2e\} \leq \ell \leq k} \left(\frac{e}{\ell}\right)^{\ell}$$

Fortsetzung des Beweises

#Nachrichtenmengen $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\}$ der Größe ℓ: $\leq \binom{k}{\ell}$

(Eine Nachricht pro Instanz)

$$\Pr\Bigg[\exists \mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\} \text{ so dass } |\mathcal{M}| \geq \max\{(c+3)\log n, 2e\}$$

$$\text{und alle Nachrichten aus } \mathcal{M} \text{ in Runde } r \text{ von } v \text{ gesendet}\Bigg]$$

$$\leq \sum_{\max\{(c+3)\log n, 2e\} \leq \ell \leq k} \binom{k}{\ell} \left(\frac{1}{k}\right)^{\ell}$$

(Union Bound)

Wegen $\binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^{b}$:

$$\Pr[\dots] \leq \sum_{\max\{(c+3)\log n, 2e\} \leq \ell \leq k} \left(\frac{ek}{\ell}\right)^{\ell} \left(\frac{1}{k}\right)^{\ell}$$

$$\leq \sum_{\max\{(c+3)\log n, 2e\} \leq \ell \leq k} \left(\frac{e}{\ell}\right)^{\ell} \leq k \left(\frac{1}{2}\right)^{(c+3)\log n}$$

Fortsetzung des Beweises

#Nachrichtenmengen $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\}$ der Größe ℓ: $\leq \binom{k}{\ell}$

(Eine Nachricht pro Instanz)

$$\Pr\Big[\exists \mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\} \text{ so dass } |\mathcal{M}| \geq \max\{(c+3)\log n, 2e\}$$

$$\text{und alle Nachrichten aus } \mathcal{M} \text{ in Runde } r \text{ von } v \text{ gesendet}\Big]$$

$$\leq \sum_{\max\{(c+3)\log n, 2e\} \leq \ell \leq k} \binom{k}{\ell} \left(\frac{1}{k}\right)^{\ell}$$

(Union Bound)

Wegen $\binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^{b}$:

$$\Pr[\dots] \leq \sum_{\max\{(c+3)\log n, 2e\} \leq \ell \leq k} \left(\frac{ek}{\ell}\right)^{\ell} \left(\frac{1}{k}\right)^{\ell}$$

$$\leq \sum_{\max\{(c+3)\log n, 2e\} \leq \ell \leq k} \left(\frac{e}{\ell}\right)^{\ell} \leq k \left(\frac{1}{2}\right)^{(c+3)\log n} = k \cdot \frac{1}{n^{c+3}} \leq \frac{1}{n^{c+2}}$$

Fortsetzung des Beweises

#Nachrichtenmengen $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\}$ der Größe ℓ: $\leq \binom{k}{\ell}$

(Eine Nachricht pro Instanz)

$$\Pr\left[\exists \mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \{M_{v,i}\} \text{ so dass } |\mathcal{M}| \geq \max\{(c+3)\log n, 2e\}\right.$$
$$\left.\text{und alle Nachrichten aus } \mathcal{M} \text{ in Runde } r \text{ von } v \text{ gesendet}\right]$$

$$\leq \sum_{\max\{(c+3)\log n, 2e\} \leq \ell \leq k} \binom{k}{\ell} \left(\frac{1}{k}\right)^{\ell}$$

(Union Bound)

Wegen $\binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^{b}$:

$$\Pr[\dots] \leq \sum_{\max\{(c+3)\log n, 2e\} \leq \ell \leq k} \left(\frac{ek}{\ell}\right)^{\ell} \left(\frac{1}{k}\right)^{\ell}$$

$$\leq \sum_{\max\{(c+3)\log n, 2e\} \leq \ell \leq k} \left(\frac{e}{\ell}\right)^{\ell} \leq k \left(\frac{1}{2}\right)^{(c+3)\log n} = k \cdot \frac{1}{n^{c+3}} \leq \frac{1}{n^{c+2}}$$

$\Rightarrow$ Obere Schranke für alle Knoten und Runden mit Wahrsch. $1 - 1/n^{c}$

Zusammenfassung Random Delay

Wir haben gezeigt:

Lemma

Im CONGEST Modell können $k \leq n$ Instanzen der Breitensuche mit hoher Wahrscheinlichkeit in $O((k + D) \log n)$ Runden ausgeführt werden.

Zusammenfassung Random Delay

Wir haben gezeigt:

Lemma

Im CONGEST Modell können $k \leq n$ Instanzen der Breitensuche mit hoher Wahrscheinlichkeit in $O((k + D) \log n)$ Runden ausgeführt werden.

Verallgemeinerung:

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein Algorithmus im CONGEST Modell, der $R(n) = n^{O(1)}$ Runden benötigt und in dem jeder Knoten in insgesamt $M(n) = n^{O(1)}$ Runden Nachrichten sendet. Dann können $k = n^{O(1)}$ Instanzen von $\mathcal{A}$ mit hoher Wahrscheinlichkeit in $O((R(n) + kM(n)) \log n)$ Runden ausgeführt werden.

Gewichtete Graphen

Modell

Annahmen:

- Jede Kante $e = (u, v)$ hat ein Gewicht $w(u, v)$, das u und v bekannt ist
- Positive, ganzzahlige Kantengewichte von 1 bis W

Modell

Annahmen:

- Jede Kante $e = (u, v)$ hat ein Gewicht $w(u, v)$, das u und v bekannt ist
- Positive, ganzzahlige Kantengewichte von 1 bis W
- Bandbreite $O(\log(nW)) = O(\log n + \log W)$
- Somit: Summe von bis zu n Kantengewichten kann in einer Nachricht gesendet werden

Modell

Annahmen:

- Jede Kante $e = (u, v)$ hat ein Gewicht $w(u, v)$, das u und v bekannt ist
- Positive, ganzzahlige Kantengewichte von 1 bis W
- Bandbreite $O(\log(nW)) = O(\log n + \log W)$
- Somit: Summe von bis zu n Kantengewichten kann in einer Nachricht gesendet werden

Achtung

Kantengewichte repräsentieren Kosten, keine Delays. Direkte Kommunikation mit Nachbarn dauert nur eine Runde.

Modell

Annahmen:

- Jede Kante $e = (u, v)$ hat ein Gewicht $w(u, v)$, das u und v bekannt ist
- Positive, ganzzahlige Kantengewichte von 1 bis W
- Bandbreite $O(\log(nW)) = O(\log n + \log W)$
- Somit: Summe von bis zu n Kantengewichten kann in einer Nachricht gesendet werden

Achtung

Kantengewichte repräsentieren Kosten, keine Delays. Direkte Kommunikation mit Nachbarn dauert nur eine Runde.

Weiterhin bezeichnet D den Durchmesser des *ungewichteten* Netzwerks.

Modell

Annahmen:

- Jede Kante $e = (u, v)$ hat ein Gewicht $w(u, v)$, das u und v bekannt ist
- Positive, ganzzahlige Kantengewichte von 1 bis W
- Bandbreite $O(\log(nW)) = O(\log n + \log W)$
- Somit: Summe von bis zu n Kantengewichten kann in einer Nachricht gesendet werden

Achtung

Kantengewichte repräsentieren Kosten, keine Delays. Direkte Kommunikation mit Nachbarn dauert nur eine Runde.

Weiterhin bezeichnet D den Durchmesser des *ungewichteten* Netzwerks.

Notation

$\text{dist}^h(s, v)$ = Länge des kürzesten Wegs von s nach v mit höchstens h Kanten

Bellman-Ford Algorithmus

Initialisierung in Runde 1:

$$\delta_1(v) = \begin{cases} 0 & \text{falls } v = s \\ \infty & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Bellman-Ford Algorithmus

Initialisierung in Runde 1:

$$\delta_1(v) = \begin{cases} 0 & \text{falls } v = s \\ \infty & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Update in Runde $r \geq 2$:

$$\delta_r(v) = \min_{(u,v) \in E} (\delta_{r-1}(u) + w(u,v))$$

Bellman-Ford Algorithmus

Initialisierung in Runde 1:

$$\delta_1(v) = \begin{cases} 0 & \text{falls } v = s \\ \infty & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Update in Runde $r \geq 2$:

$$\delta_r(v) = \min_{(u,v) \in E} (\delta_{r-1}(u) + w(u,v))$$

Invariante

Nach Runde r ist $\delta_r(v) = \text{dist}^{r-1}(s,v)$ (entspricht also der Länge des kürzesten Wegs von s nach v mit höchstens $r-1$ Kanten).

Bellman-Ford Algorithmus

Initialisierung in Runde 1:

$$\delta_1(v) = \begin{cases} 0 & \text{falls } v = s \\ \infty & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Update in Runde $r \geq 2$:

$$\delta_r(v) = \min_{(u,v) \in E} (\delta_{r-1}(u) + w(u,v))$$

Invariante

Nach Runde r ist $\delta_r(v) = \text{dist}^{r-1}(s,v)$ (entspricht also der Länge des kürzesten Wegs von s nach v mit höchstens $r-1$ Kanten).

Korrektheit: Absolut kürzester Weg hat höchstens $n-1$ Kanten

Bellman-Ford Algorithmus

Initialisierung in Runde 1:

$$\delta_1(v) = \begin{cases} 0 & \text{falls } v = s \\ \infty & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Update in Runde $r \geq 2$:

$$\delta_r(v) = \min_{(u,v)\in E} (\delta_{r-1}(u) + w(u,v))$$

Invariante

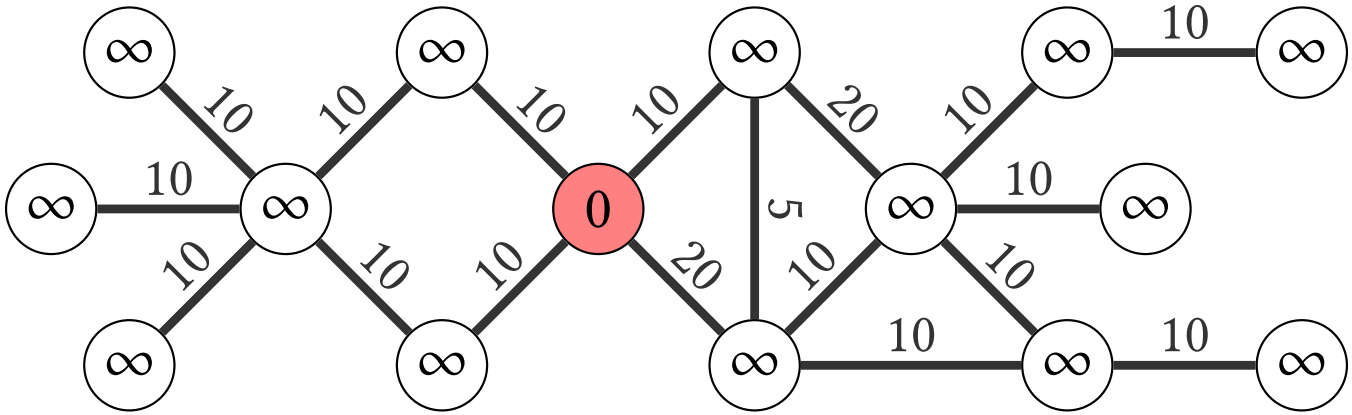
Nach Runde r ist $\delta_r(v) = \text{dist}^{r-1}(s,v)$ (entspricht also der Länge des kürzesten Wegs von s nach v mit höchstens $r-1$ Kanten).

Korrektheit: Absolut kürzester Weg hat höchstens $n-1$ Kanten

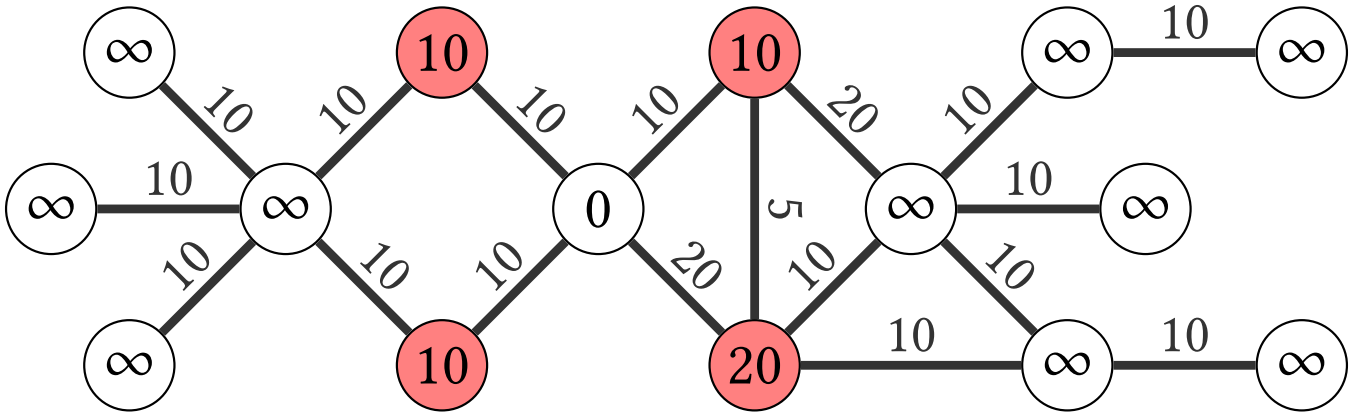
Theorem

Im CONGEST Modell kann das SSSP Problem für gewichtete Graphen in $O(n)$ Runden gelöst werden.

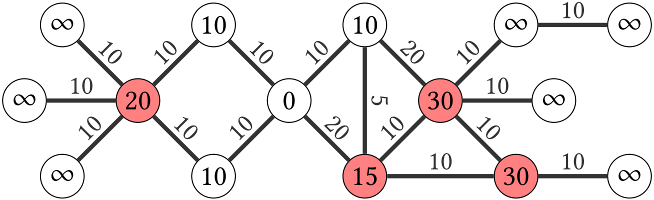
Beispiel



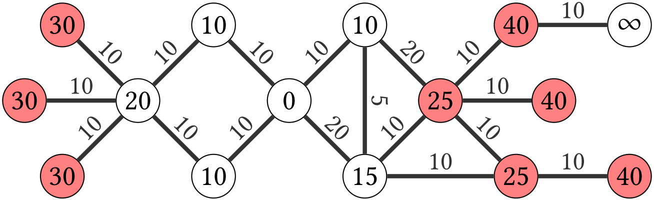
Beispiel


∞
10
10
10
10
10
10
20
10
∞
10
∞
∞
10
∞
10
0
5
∞
10
∞
10
10
10
10
10
10
10
10
10
∞
10
∞
∞
10
20
10
∞
10
∞

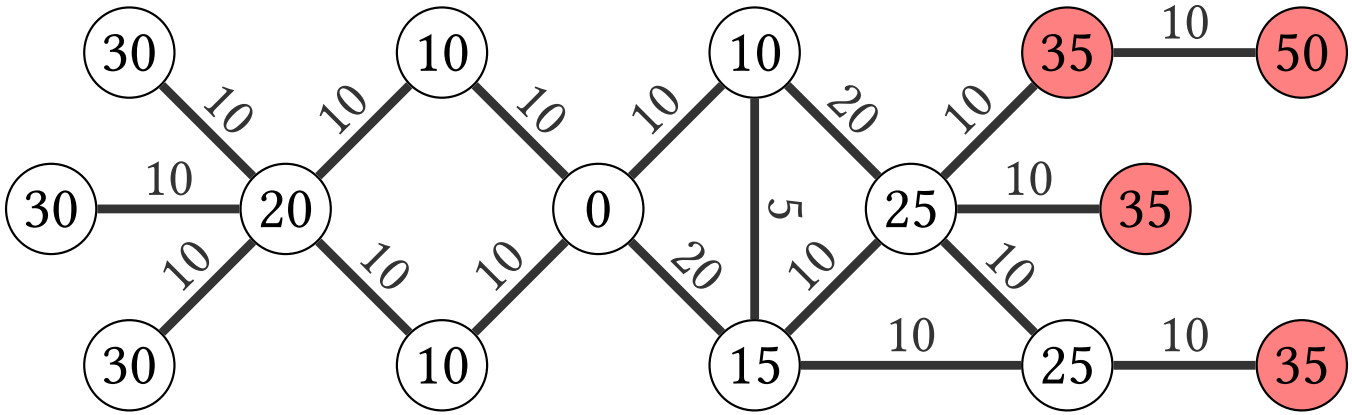
Beispiel


∞
10
∞
10
10
20
10
10
∞
10
10
10
10
∞
0
10
20
10
5
20
10
15
10
30
10
∞
10
10
∞
30
10
∞
10
∞
10
∞

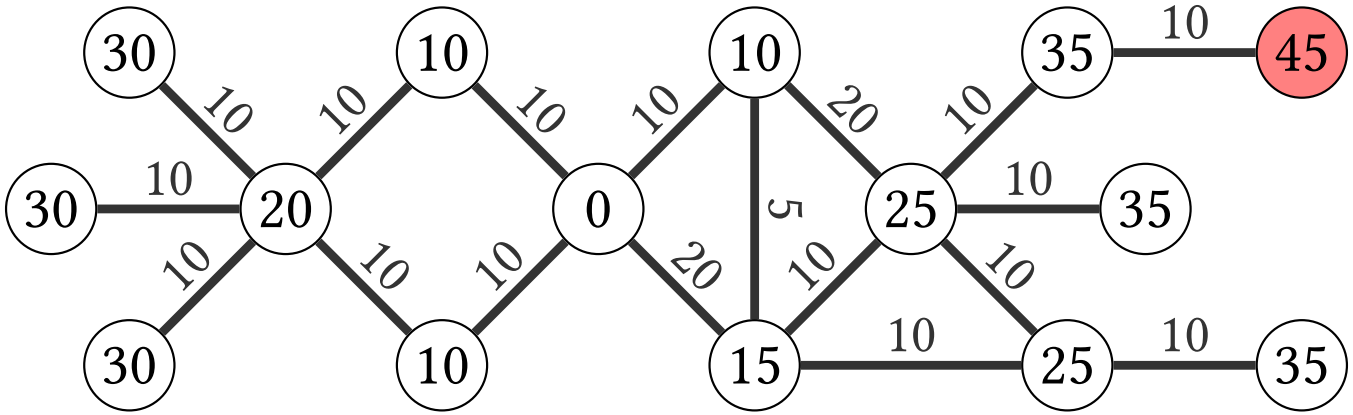
Beispiel


30
30
30
20
10
10
0
10
15
25
25
40
40
40
∞
10
10
10
10
10
10
10
10
10
10
20
5
20
10
10
10
10
10
10
10

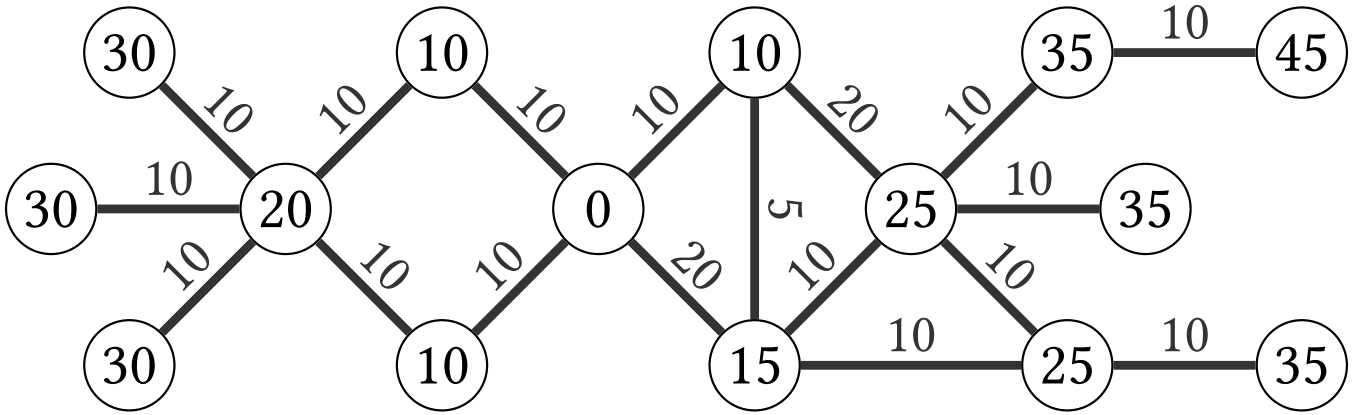
Beispiel


30
10
10
10
10
10
35
10
50
30
10
20
0
5
25
10
35
10
10
10
10
20
10
10
30
10
15
10
25
10
35

Beispiel


30
10
10
10
10
10
35
10
45
30
10
20
10
0
5
20
10
25
10
35
10
10
10
10
10
10
30
10
15
10
25
10
35

Beispiel


30
10
10
10
10
10
35
10
45
30
10
20
10
0
5
20
10
25
10
35
10
10
10
10
10
10
30
10
15
10
25
10
35

All-Pairs Shortest Paths

Idee: Führe SSSP-Algorithmus für jeden Knoten aus

All-Pairs Shortest Paths

Idee: Führe SSSP-Algorithmus für jeden Knoten aus

Umsetzung mit Random-Delay Technik:

- Im Bellman-Ford Algorithmus sendet jeder Knoten in jeder Runde

All-Pairs Shortest Paths

Idee: Führe SSSP-Algorithmus für jeden Knoten aus

Umsetzung mit Random-Delay Technik:

- Im Bellman-Ford Algorithmus sendet jeder Knoten in jeder Runde
- Somit: Laufzeit $O(n^2 \log n)$

All-Pairs Shortest Paths

Idee: Führe SSSP-Algorithmus für jeden Knoten aus

Umsetzung mit Random-Delay Technik:

- Im Bellman-Ford Algorithmus sendet jeder Knoten in jeder Runde
- Somit: Laufzeit $O(n^2 \log n)$
- Nicht besser als naive sequentielle Ausführung mit Laufzeit $O(n^2)$

All-Pairs Shortest Paths

Idee: Führe SSSP-Algorithmus für jeden Knoten aus

Umsetzung mit Random-Delay Technik:

- Im Bellman-Ford Algorithmus sendet jeder Knoten in jeder Runde
- Somit: Laufzeit $O(n^2 \log n)$
- Nicht besser als naive sequentielle Ausführung mit Laufzeit $O(n^2)$

Ziel: SSSP mit geringerer Anzahl an Nachrichten pro Knoten

Gewichtete Breitensuche

Idee: Simuliere gewichteten Graph als ungewichteten Graph, indem jede Kante durch einen Pfad entsprechender Länge ersetzt wird

Gewichtete Breitensuche

Idee: Simuliere gewichteten Graph als ungewichteten Graph, indem jede Kante durch einen Pfad entsprechender Länge ersetzt wird

Algorithmus: Sobald für Knoten $v \neq s$ die erste Nachricht mit Distanz δ empfangen wurde oder Knoten $v = s$ mit Distanz 0 initialisiert wurde:

- Sei r die aktuelle Runde
- Für jeden Nachbarknoten v: Sende Nachricht mit Distanz $\delta + w(u, v)$ in Runde $r + w(u, v) - 1$ (Empfang durch v in Runde $r + w(u, v)$)

Gewichtete Breitensuche

Idee: Simuliere gewichteten Graph als ungewichteten Graph, indem jede Kante durch einen Pfad entsprechender Länge ersetzt wird

Algorithmus: Sobald für Knoten $v \neq s$ die erste Nachricht mit Distanz δ empfangen wurde oder Knoten $v = s$ mit Distanz 0 initialisiert wurde:

- Sei r die aktuelle Runde
- Für jeden Nachbarknoten v: Sende Nachricht mit Distanz $\delta + w(u, v)$ in Runde $r + w(u, v) - 1$ (Empfang durch v in Runde $r + w(u, v)$)

Invariante

Für jeden Knoten v gilt: Die erste Distanznachricht wird in Runde $\text{dist}(s, v) + 1$ empfangen; sie hat den Inhalt $\text{dist}(s, v)$.

Gewichtete Breitensuche

Idee: Simuliere gewichteten Graph als ungewichteten Graph, indem jede Kante durch einen Pfad entsprechender Länge ersetzt wird

Algorithmus: Sobald für Knoten $v \neq s$ die erste Nachricht mit Distanz δ empfangen wurde oder Knoten $v = s$ mit Distanz 0 initialisiert wurde:

- Sei r die aktuelle Runde
- Für jeden Nachbarknoten v: Sende Nachricht mit Distanz $\delta + w(u, v)$ in Runde $r + w(u, v) - 1$ (Empfang durch v in Runde $r + w(u, v)$)

Invariante

Für jeden Knoten v gilt: Die erste Distanznachricht wird in Runde $\text{dist}(s, v) + 1$ empfangen; sie hat den Inhalt $\text{dist}(s, v)$.

Lemma

In $T + 1$ Runden wird $\text{dist}(s, v)$ für jeden Knoten v mit $\text{dist}(s, v) \leq T$ berechnet, wobei jeder Knoten höchstens einmal Nachrichten sendet.

Gewichtete Breitensuche

Idee: Simuliere gewichteten Graph als ungewichteten Graph, indem jede Kante durch einen Pfad entsprechender Länge ersetzt wird

Algorithmus: Sobald für Knoten $v \neq s$ die erste Nachricht mit Distanz δ empfangen wurde oder Knoten $v = s$ mit Distanz 0 initialisiert wurde:

- Sei r die aktuelle Runde
- Für jeden Nachbarknoten v: Sende Nachricht mit Distanz $\delta + w(u, v)$ in Runde $r + w(u, v) - 1$ (Empfang durch v in Runde $r + w(u, v)$)

Invariante

Für jeden Knoten v gilt: Die erste Distanznachricht wird in Runde $\text{dist}(s, v) + 1$ empfangen; sie hat den Inhalt $\text{dist}(s, v)$.

Lemma

In $T + 1$ Runden wird $\text{dist}(s, v)$ für jeden Knoten v mit $\text{dist}(s, v) \leq T$ berechnet, wobei jeder Knoten höchstens einmal Nachrichten sendet.

Zur Berechnung von $\text{dist}(s, v)$ sind $O(nW)$ Runden ausreichend

Gewichtete Breitensuche

Idee: Simuliere gewichteten Graph als ungewichteten Graph, indem jede Kante durch einen Pfad entsprechender Länge ersetzt wird

Algorithmus: Sobald für Knoten $v \neq s$ die erste Nachricht mit Distanz δ empfangen wurde oder Knoten $v = s$ mit Distanz 0 initialisiert wurde:

- Sei r die aktuelle Runde
- Für jeden Nachbarknoten v: Sende Nachricht mit Distanz $\delta + w(u, v)$ in Runde $r + w(u, v) - 1$ (Empfang durch v in Runde $r + w(u, v)$)

Invariante

Für jeden Knoten v gilt: Die erste Distanznachricht wird in Runde $\text{dist}(s, v) + 1$ empfangen; sie hat den Inhalt $\text{dist}(s, v)$.

Lemma

In $T + 1$ Runden wird $\text{dist}(s, v)$ für jeden Knoten v mit $\text{dist}(s, v) \leq T$ berechnet, wobei jeder Knoten höchstens einmal Nachrichten sendet.

Zur Berechnung von $\text{dist}(s, v)$ sind $O(nW)$ Runden ausreichend

$\rightarrow$ „Pseudopolynomieller“ Algorithmus

All-Pairs Shortest Paths

Mit gewichteter Breitensuche:

Lemma

Im CONGEST Modell kann das SSSP Problem für gewichtete Graphen in $O(nW)$ Runden gelöst werden, wobei jeder Knoten höchstens einmal Nachrichten sendet.

All-Pairs Shortest Paths

Mit gewichteter Breitensuche:

Lemma

Im CONGEST Modell kann das SSSP Problem für gewichtete Graphen in $O(nW)$ Runden gelöst werden, wobei jeder Knoten höchstens einmal Nachrichten sendet.

Erinnerung:

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein Algorithmus im CONGEST Modell, der $R(n) = n^{O(1)}$ Runden benötigt und in dem jeder Knoten in insgesamt $M(n) = n^{O(1)}$ Runden Nachrichten sendet. Dann können $k = n^{O(1)}$ Instanzen von $\mathcal{A}$ mit hoher Wahrscheinlichkeit in $O((R(n) + kM(n)) \log n)$ Runden ausgeführt werden.

All-Pairs Shortest Paths

Mit gewichteter Breitensuche:

Lemma

Im CONGEST Modell kann das SSSP Problem für gewichtete Graphen in $O(nW)$ Runden gelöst werden, wobei jeder Knoten höchstens einmal Nachrichten sendet.

Erinnerung:

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ ein Algorithmus im CONGEST Modell, der $R(n) = n^{O(1)}$ Runden benötigt und in dem jeder Knoten in insgesamt $M(n) = n^{O(1)}$ Runden Nachrichten sendet. Dann können $k = n^{O(1)}$ Instanzen von $\mathcal{A}$ mit hoher Wahrscheinlichkeit in $O((R(n) + kM(n)) \log n)$ Runden ausgeführt werden.

Somit folgt:

Theorem

Im CONGEST Modell gibt es einen Monte-Carlo Algorithmus, der das APSP Problem für gewichtete Graphen mit hoher Wahrscheinlichkeit in $O(nW \log n)$ Runden löst.

Zusammenfassung

- SSSP für ungewichtete Graphen: $O(D)$ Runden
  Breitensuche
- APSP für ungewichtete Graphen: $O(n \log n)$ Runden
  Parallelisierung von Breitensuche mit Random Delay Technik
- SSSP für gewichtete Graphen: $O(n)$ Runden
  Bellman-Ford Algorithmus
- APSP-Approximation für gewichtete Graphen: $O(nW \log n)$ Runden
  Parallelisierung von gewichteter Breitensuche mit Random Delay Technik

Quellen

Literatur:

- Danupon Nanongkai. „Distributed Approximation Algorithms for Weighted Shortest Paths“. In: *Proc. of the Symposium on Theory of Computing (STOC)*. 2014, S. 565–573
- Frank Thomson Leighton, Bruce M. Maggs, Satish Rao. „Packet Routing and Job-Shop Scheduling in O(Congestion + Dilation) Steps“. *Combinatorica* 14(2): 167–186 (1994)