UNIVERSITÄT SALZBURG

Proseminar

Lineare Algebra f. Informatik

SoSe 2020

Übungszettel 12

Hinweise: Dies ist der letzte Übungszettel.
Am Do 25.06.2020 14:15 findet der dritte Proseminar-Test statt.

48. Konstruieren Sie eine Matrix A mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$ und jeweils zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

    (Also $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2$ und $Av_3 = \lambda_3 v_3$.)

49. Gegeben ist eine Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

    Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, indem Sie eine invertierbare Matrix P und eine Diagonalmatrix D berechnen sodass $A = PDP^{-1}$.

50. Beweisen Sie, dass für jede 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit Eigenwerten λ_1 und λ_2 gilt:

    - $a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$
    - $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$

48

$\lambda_1 = 1$ $\qquad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = 3$

Sei $S := \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ $\qquad \Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

Sei $A := S \Lambda S^{-1}$

$\hookrightarrow$ S ist invertierbar, da Eigenvektoren linear unabhängig sind

$S \Lambda S^{-1}$ ist die Diagonalisierung von A

$\Rightarrow$ A hat Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

und Eigenvektoren v_1, v_2, v_3

49

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Finde P, D mit $A = PDP^{-1}$

= diagonalization of A

$$|A - \lambda I| = (2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) - (-2)(1-\lambda)$$

$$= \cancel{-2} - \cancel{2\lambda} + \cancel{2\lambda} + 2\lambda^2 + \lambda + \cancel{\lambda^2} - \cancel{\lambda^2} - \lambda^3 \cancel{+2} - 2\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1)$$

$$= -\lambda(\lambda - 1)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 1 \text{ (zweifach)}$$

Löse $Ax = 0$, $(A - I)x = 0$
1 2

1 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$III + I \leadsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$III - II \leadsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$III + 2I \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I}-\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\cdot 0.5 \\ \Rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Sei: } P := \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PDP^{-1} = A \Leftrightarrow PD = AP$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ Av_1 & Av_2 & Av_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & | & | \\ 0 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

50

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{mit Eigenwerten } \lambda_1, \lambda_2$$

z.Z.: 1 $a + d = \lambda_1 + \lambda_2$

2 $(a-d)^2 + 4bc = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= ad - \lambda a - \lambda d + \lambda^2 - bc$$

$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p}{2}^2 - q}$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-(a+d)}{2}\right)^2 - (ad - bc)}$$

$$= \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2 + 2ad + d^2}{4} - \frac{4ad - 4bc}{4}}$$

$$= \frac{a+d \pm \overbrace{\sqrt{a^2 - 2ad + 4bc + d^2}}^{=: X}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{a+d+X}{2} \quad \lambda_2 = \frac{a+d-X}{2} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = a+d \quad 1$$

$$(\lambda_1-\lambda_2)^2=\left(\frac{a+d+\sqrt{a^2-2ad+4bc+d^2}}{2}-\frac{a+d-\sqrt{a^2-2ad+4bc+d^2}}{2}\right)^2$$

$$= a^2-2ad+4bc+d^2$$

$$= (a-d)^2+4bc$$

2