7

z.Z. $(M, +, \cdot)$ $\quad M = \{A \mid A$ ist reelle $m \times n$-Matrix$\}$

mit $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ $\quad A, B \in M$

$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}, A \in M$

V1 $\forall A, B \in M: A + B \in M$

gilt, da $a + b \in \mathbb{R}$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ($(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper)

und $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $\forall a_{ij} \in A \in M$

V2 $\forall A, B, C \in M: A + (B + C) = (A + B) + C$

gilt analog zu obiger Begründung: $+$ ist assoziativ in $\mathbb{R}$

V3 $\exists O \in M : \forall A \in M : \; O + A = A$

Die Matrix $O = (0)_{i,j=1}^{m,n} \in M$ ist das neutrale Element

V4 $\forall A \in M : \exists -A \in M : \; -A + A = O$

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{m,n}$. Sei $-A = (-a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ Dann

$$-A + A = (-a_{ij} + a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} = (0)_{i,j=1}^{m,n} = O \in M$$

V5 $\forall A, B \in M : \; A + B = B + A$

Addition ist kommutativ in $\mathbb{R} \Rightarrow$ gilt

V6 $\forall \lambda \in \mathbb{R}, A \in M : \lambda A \in M$

$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$. Es gilt $\lambda a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda, a_{ij} \in \mathbb{R}$

Damit ist $\lambda A \in M$

V7 $\forall \lambda \in \mathbb{R}, A, B \in M : \lambda \cdot (A + B) = \lambda A + \lambda B$

Es gilt

$$\begin{aligned} \lambda(A+B) &= \lambda(a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \\ &= (\lambda(a_{ij} + b_{ij}))_{i,j=1}^{m,n} \\ &= (\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \end{aligned}$$

$$= (\lambda a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} + (\lambda b_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$$

$$= \lambda A + \lambda B$$

V8 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, A \in M: \ (\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

$$(\lambda + \mu) \cdot A = ((\lambda + \mu) a_{ij})_{i,j=0}^{m,n}$$

$$= (\lambda a_{ij} + \mu a_{ij})_{i,j=0}^{m,n}$$

$$= \lambda A + \mu A$$

V9 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, A \in M: \ \lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot A) = \lambda (\mu a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$$

$$= (\lambda y a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$$

$$= \lambda y (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$$

$$= (\lambda y) A$$

V10 $\forall A \in M: 1 \cdot A = A$

$$1 \cdot A = 1 (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$$

$$= (1 \cdot a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$$

$$= (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$$

$$= A$$

8

$$\lambda x = \begin{pmatrix} x_1/\lambda \\ x_2/\lambda \end{pmatrix}$$

V1 - V5 beziehen sich nur auf die Vektoraddition und gelten somit.

V6 gilt: Div. ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$

V7 z.Z $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ x,y \in \mathbb{R}^2:\ \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

$$\lambda(x+y) = \lambda\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1/\lambda \\ x_2+y_2/\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1/\lambda + y_1/\lambda \\ x_2/\lambda + y_2/\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda x + \lambda y$$

V8 z.Z. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^2:\ (\lambda+\mu)\cdot x = \lambda x + \mu x$

$$(\lambda+\mu)x = \begin{pmatrix} x_1/\lambda+\mu \\ x_2/\lambda+\mu \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_1/\lambda + x_1/\mu \\ x_2/\lambda + x_2/\mu \end{pmatrix} = \lambda x + \mu x$$

Seien z.B. $\lambda = 2,\ \mu = 2.$ $x_1/\lambda+\mu = x_1/2+2 = x_1/4 \neq x_1 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1}{2} = x_1/\lambda + x_1/\mu$

V8 gilt nicht, somit ist $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ kein Vektorraum.

9

$(V,+,\cdot)$ ist ein Vektorraum über K

z.Z. $\forall \lambda \in K: \lambda \cdot 0 = 0$ (0 ist der Nullvektor)

Sei $\lambda \cdot 0 \neq 0$. Sei $x \in V$

Dann $\lambda x = \lambda(x+0) = \lambda x + \lambda 0 \neq \lambda x$

da nur für den eindeutigen Nullvektor gilt: $x+0=x$

$\hookrightarrow$ seien $0, 0'$ neutrale Elemente der Vektoraddition.

Dann $0 = 0' + 0 = 0 + 0' = 0'$

10

zZ $\lambda x = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0 \vee x = 0)$

$\Leftarrow$ Es gelte $(\lambda = 0 \vee x = 0)$.

Sei $x \neq 0$. Dann muss $\lambda = 0$. Es gilt $\forall x \in V: 0 \cdot x = 0$.

Damit ist $\lambda x = 0$

Sei $x = 0$. Dann gilt per 9: $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \lambda \cdot 0 = 0$ $\lambda x = 0$

$\Rightarrow$ Es gelte $\lambda x = 0$ aber $x \neq 0$, $\lambda \neq 0$

Dann $\lambda x = 0 \quad | \cdot x^{-1}$

$\Leftrightarrow (-\lambda) \lambda x = -\lambda 0$

Nun $0 = -\lambda 0 = (-\lambda)\lambda x = 1 \cdot x = x$

Aber $x \neq 0$.

11

$B = \{0,1\}$ $\quad V = B^3$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

1. $(B,+)$ ist eine abelsche Gruppe

Seien $a,b \in B$ ba.F

Es gilt: $(a+b)+0 = a+(b+0)$

und $\quad (a+b)+1 = \begin{cases} 0 & a+b=1 \\ 1 & a+b=0 \end{cases}$

und $\quad a+(b+1) = \begin{cases} 0 & a=1,\ b=0 \\ 0 & a=0,\ b=1 \\ 1 & a=1,\ b=1 \\ 1 & a=0,\ b=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \} \ a+b=1 \\ \\ \} \ a+b=0 \end{matrix}$

Damit ist $+$ assoziativ.

Das neutrale Element ist 0

Das inverse Element zu $a=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\}$ ist $-a=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\}$

2. $(B\setminus\{0,\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe

$B\setminus\{0\}=\{1\}$. Seien $a,b,c\in B\setminus\{0\}$. Dann $a=b=c=1$

$(1\cdot1)\cdot1=1=1\cdot(1\cdot1) \Rightarrow \cdot$ ist assoziativ

1 ist das neutrale und inverse Element zu 1.

3. $\cdot$ ist distributiv über $+$

Seien $a,b,c \in B$

Ist $a = 0$:

$$0\cdot(b+c) = 0b + 0c = (b+c)\cdot 0 \quad (=0)$$

Ist $a = 1$:

$$1\cdot(b+c) = \begin{cases} 0 & b+c=0 \\ 1 & b+c=1 \end{cases} = 1\cdot b + 1\cdot c = b+c$$

$$(b+c)\cdot 1 = \qquad \text{″}$$

Damit ist $(B, +, \cdot)$ ein Körper

Der 3-dimensionale Standardraum über $\mathbb{B}$ mit

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \qquad \lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \qquad x, y \in \mathbb{B}^3, \ \lambda \in \mathbb{B}$$

ist dann ein Vektorraum.