17

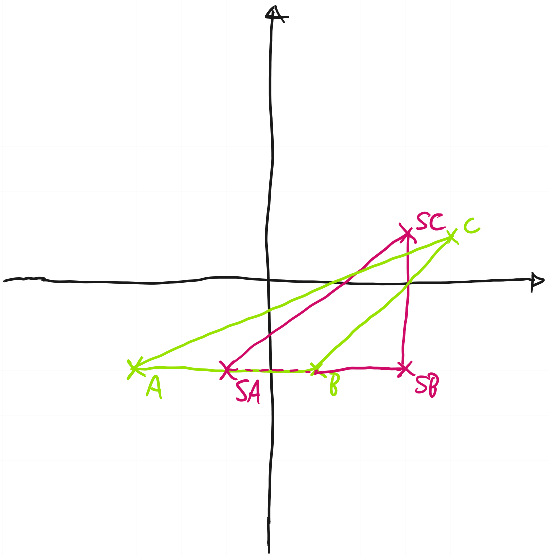
$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$SA = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$SB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$SC = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(S) = 1 \cdot 1 - 0(-1) = 1$$



Flächeninhalt von $SA\,SB\,SC$: $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

$\det(S) = 1 \Rightarrow$ Flächeninhalt von $ABC = 6$

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}.$$

Also $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}$

18

$$A = \begin{pmatrix} 5/7 & 6/7 \\ 4/7 & -5/7 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5/7\,x \\ 4/7\,x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6/7\,y \\ -5/7\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5/7\,x + 6/7\,y \\ 4/7\,x - 5/7\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

LGS: $-2/7\,x + 6/7\,y = 0$

$4/7\,x - 12/7\,y = 0$

Matrix: $\begin{pmatrix} -2/7 & 6/7 & 0 \\ 4/7 & -12/7 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge: $\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5/7 & 6/7 \\ 4/7 & -5/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/7 & 6/7 \\ 4/7 & -5/7 \end{pmatrix}$$

$$5/7\begin{pmatrix} 5/7 \\ 4/7 \end{pmatrix} + 4/7\begin{pmatrix} 6/7 \\ -5/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/49 \\ 20/49 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24/49 \\ -20/49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$6/7\begin{pmatrix} 5/7 \\ 4/7 \end{pmatrix} - 5/7\begin{pmatrix} 6/7 \\ -5/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30/7 \\ 24/7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -30/7 \\ 25/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^2: f_A(f_A(x)) = x$$

$$f_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5/7\,x + 6/7\,y \\ 4/7\,x - 5/7\,y \end{pmatrix}$$

19

$$r_\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix}$$

z.Z: $r_\varphi(\lambda a) = \lambda r_\varphi(a)$

$$r_\varphi\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = r_\varphi\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda x\cos\varphi - \lambda y\sin\varphi \\ \lambda x\sin\varphi + \lambda y\cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$= \left(\begin{matrix} \lambda \\ \lambda \end{matrix}\begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix}\right)$$
$$= \lambda \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$= \lambda r_\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

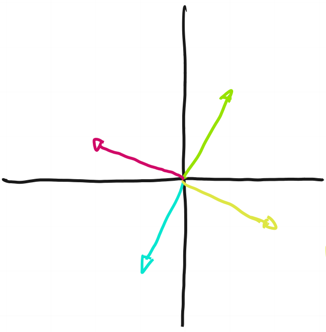
z.Z: $r_\varphi(a+b) = r_\varphi(a) + r_\varphi(b)$

$$r_\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = r_\varphi\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (x_1+x_2)\cos\varphi - (y_1+y_2)\sin\varphi \\ (x_1+x_2)\sin\varphi + (y_1+y_2)\cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1\cos\varphi + x_2\cos\varphi - y_1\sin\varphi - y_2\sin\varphi \\ x_1\sin\varphi + x_2\sin\varphi + y_1\sin\varphi + y_2\sin\varphi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi - y_2\sin\varphi \\ x_1\sin\varphi + y_1\sin\varphi + x_2\sin\varphi + y_2\sin\varphi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi \\ x_1\sin\varphi + y_1\sin\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2\cos\varphi - y_2\sin\varphi \\ x_2\sin\varphi + y_2\sin\varphi \end{pmatrix}$$
$$= r_\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + r_\varphi\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r_\varphi$ ist linear

$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\cos\pi = -1 \quad \sin\pi = 0$



$P := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$r_{\pi/2}(P) = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 - 2\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$r_\pi(P) = \begin{pmatrix} -1\cdot 1 - 2\cdot 0 \\ 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$r_{\frac{3\pi}{2}}(P) = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 - 2\cdot(-1) \\ (-1)\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

r_φ ist Rotation um φ Radianten.

20 Die Matrix ist ablesbar:

$$A_{r_\varphi} := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Dann ist die Matrix von $r_\beta \circ r_\alpha$

$$A_{r_\beta} A_{r_\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\overset{\prime}{=} \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha & -\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha & -\sin\beta\sin\alpha + \cos\beta\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\beta+\alpha) & -(\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha) \\ \sin(\beta+\alpha) & \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\beta+\alpha) & -\sin(\beta+\alpha) \\ \sin(\beta+\alpha) & \cos(\beta+\alpha) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die Komposition von zwei Rotationen um β bzw. α Radianten ist die Rotation um $(\beta+\alpha)$ Radianten.