Formale Sprachen und Komplexitätstheorie

WS 2019/20

Robert Elsässer

1. Einführung

Definition

Eine *(deterministische 1-Band) Turingmaschine* (DTM) wird beschrieben durch ein 7-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$.

Dabei sind Q, Σ, Γ endliche, nichtleere Mengen und es gilt:

- Σ ist Teilmenge von Γ
- t in $\Sigma \cap \Gamma$ ist das *Blanksymbol* (auch ⊔)
- Q ist die *Zustandsmenge*
- Σ ist das *Eingabealphabet*
- Γ ist das *Bandalphabet*
- q_0 in Q ist der *Startzustand*
- q_{accept} in Q ist der akzeptierende Endzustand
- q_{reject} in Q ist der ablehnende Endzustand
- $\delta: Q \setminus \{q_{accept}, q_{reject}\} \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ ist die (partielle) *Übergangsfunktion*. Sie ist für kein Argument aus $\{q_{accept}, q_{reject}\} \times \Gamma$ definiert.

1. Einführung

Momentaufnahme einer Turingmaschine:

- Bei Bandinschrift uv (dabei beginnt u am linken Ende des Bandes und hinter v stehen nur Blanks)
- Zustand q
- Kopf auf erstem Zeichen von v

$$\text{Konfiguration } C = uqv$$

1. Einführung

Definition

- Eine Sprache L heißt **rekursiv aufzählbar,**
  falls es eine Turingmaschine M gibt, die L *akzeptiert.*
- Eine Sprache L heißt **rekursiv** oder **entscheidbar,**
  falls es eine Turingmaschine M gibt, die L *entscheidet.*

1. Einführung

- Eine Mehrband- oder k-Band Turingmaschine (k-Band DTM) hat k Bänder mit je einem Kopf.
- Die Übergangsfunktion ist dann von der Form $\delta: Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$
- Zu Beginn steht die Eingabe auf Band 1, sonst stehen überall Blanks. Die Arbeitsweise ist analog zu 1-Band-DTMs definiert.

2. Berechenbarkeit

- **Universelle Turingmaschinen**
  - Bislang *special purpose Computer*:
    eine Sprache – eine Turing-Maschine
  - Allgemein programmierbare Turing-Maschinen:
    universelle Turing-Maschinen
  - Erhalten als Eingabe die Beschreibung einer Turingmaschine und simulieren diese Maschine
  - Benötigen dafür eine einheitliche Beschreibung von Turingmaschinen durch sog. *Gödel-Nummern*

2. Berechenbarkeit

Definition Gödelnummern

Sei M eine 1-Band-Turingmaschine mit

$$Q = \{q_0, \dots, q_n\},$$
$$q_{accept} = q_{n-1},$$
$$q_{reject} = q_n.$$

Sei $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = t, D_1 = L, D_2 = R$.

Wir kodieren $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$ durch $0^{i+1}10^j10^{k+1}10^l10^m$.

$Code_r$: Kodierung des r-ten Eintrags für $\delta, 1 \leq r \leq 4(n-1)$

Gödelnummer $\langle M \rangle = 111Code_1 11Code_2 11 \dots 11Code_g 111$

Kurt Gödel

Quelle: www.numbersleuth.org

- Studium an der Universität Wien
- Dozenturen in Wien und Princeton
- Rennomiertester Preis in der theoretischen Informatik wird nach Gödel benannt

2. Berechenbarkeit

$M = \left(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject}\right)$

$\Sigma = \{0,1\}$

$\Gamma = \Sigma \cup \{t\}$

$\delta(q_0, 0) = \left(q_{reject}, 0, R\right)$

$\delta(q_0, 1) = (q_0, 1, R)$

$\delta(q_0, t) = \left(q_{accept}, t, R\right)$

$L = \{1^n \mid n \geq 0\}$

Gödel-Nummer:

$1110101000101001101001010010011010001001000100111$

2. Berechenbarkeit

Definition Universelle Turingmaschine

Eine Turingmaschine M_0 heißt **universell**, falls für jede 1-Band-Turingmaschine M und jedes x aus $\{0,1\}^*$ gilt:

- M_0 gestartet mit $\langle M\rangle x$ hält genau dann, wenn M gestartet mit x hält.
- M_0 akzeptiert $\langle M\rangle x$ genau dann, wenn M das Wort x akzeptiert.

Satz

Es gibt eine universelle 2-Band Turingmaschine.

2. Berechenbarkeit

Die Sprache Gödel:

Sprache $\text{Gödel} \coloneqq \{w \text{ aus } \{0,1\}^* \mid w \text{ ist die Gödel-Nummer einer DTM}\}$

Lemma

Die Sprache Gödel ist entscheidbar.

Die Sprache States:

Sprache $\text{States} \coloneqq \{(\langle M \rangle, d) \mid M \text{ besitzt mindestens } d \text{ Zustände}\}$

Lemma

Die Sprache States ist entscheidbar.

Das Halteproblem

$H \coloneqq \{(\langle M \rangle, x) \mid M \text{ ist DTM, die gestartet mit Eingabe } x \text{ hält}\}$

Satz

Das Halteproblem ist rekursiv aufzählbar.

2. Berechenbarkeit

Die Sprache Useful

$$\text{Useful} \coloneqq \left\{ \begin{matrix} (\langle M \rangle, q) \mid M \text{ ist DTM mit Zustand } q, \text{ und es gibt eine Eingabe } w, \text{ so} \\ \text{dass } M \text{ gestartet mit } w \text{ in den Zustand } q \text{ gerät} \end{matrix} \right\}$$

Satz

Useful ist rekursiv aufzählbar.

Aufzählung von binären Eingabefolgen:

- für alle natürlichen Zahlen i sei $w_i = w$, falls $bin(i) = 1w$
- damit werden alle möglichen w aus $\{0,1\}^*$ aufgezählt

Aufzählung von Turingmaschinen:

M_i ist:

- M_{reject}, falls i keine Gödelnummer ist
- M, falls $bin(i)$ die Gödelnummer der DTM M ist, d.h. $\langle M \rangle = bin(i)$

2. Berechenbarkeit

Die Sprache Diag

$\mathrm{Diag} \coloneqq \{w \text{ in } \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ und die DTM } M_i \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}$

Satz

Die Sprache Diag ist nicht rekursiv aufzählbar.

2. Berechenbarkeit

	M_1	M_2	M_3	… …	M_7	… …	M_i	… …
w_1	na	na	na		na		na	
w_2	na	na	na		na		na	
w_3	na	na	na		na		na	
$\vdots$								
w_7	na	na	na		na		a	
$\vdots$								
w_i	na	na	na		na		a	

Diagonale

Tabelle für Akzeptanz/Nichtakzeptant von DTMs
Quelle: Skript Blömer