Teilräume und Linearkombination

- **Definition (Untervektorraum)**
  Sei V ein Vektorraum. Eine nicht leere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Untervektorraum (Teilraum) von V, wenn gilt:

  (1) $\forall x, y \in U : \qquad x + y \in U$
  (2) $\forall x \in U, \forall \lambda \in K : \qquad \lambda x \in U.$

- **Eigenschaften**
  Sei U ein Teilraum von V. Dann bildet U bezüglich der in V gegebenen Vektoraddition $(+)$ und Skalarmultiplikation $(\cdot)$ einen Vektorraum.

  Beweis

  - Abgeschlossenheit bezüglich $+, \cdot$ ist nach Definition in U gegeben.
  - Da U nicht leer ist, gibt es ein $x \in U \Rightarrow 0 \overset{(\text{Abgeschlossenheit } \cdot)}{=} 0 \cdot x \in U$ und 0 ist neutrales Element in U.
  - Sei $x \in U \Rightarrow (-1) \cdot x = -x \in U$.
  - Die restlichen Axiome eines Vektorraums gelten, da sie auch in V gelten.

- Beispiel

  Sei $Ax = 0$ mit $A \in M(m \times n)$ ein homogenes lineares Gleichungssystem. Dann ist $\text{LÖS}(A)$ ein Teilraum von $\mathbb{R}^n$.

  $\text{LÖS}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$.

  - Klar, $\text{LÖS}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$.
  - $0 \in \mathbb{R}^n$ ist die triviale Lösung von $Ax = 0 \Rightarrow 0 \in \text{LÖS}(A)$
  - Abgeschlossenheit bezüglich $+, \cdot$:

    Seien $x, y \in \text{LÖS}(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

    Ist $x + y \in \text{LÖS}(A)$? Ist also $A(x + y) = 0$?

    $A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$

    Ist $\lambda x \in \text{LÖS}(A)$? Ist also $A(\lambda x) = 0$?

    $A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda \cdot 0 = 0$

- Beispiel
  Sei V ein Vektorraum.
  V und $\{0\}$ sind Teilräume von V (triviale Teilräume).

- Beispiel

Sei $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist eine Funktion}\}$
$U = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p \text{ ist ein Polynom vom Grad} \leq n\}$.

Angenommen
$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \qquad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$
$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n \qquad b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$,

$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n$
$\Rightarrow p + q \in U$.
Es gilt ebenso: $p \in U$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda p \in U$

$\Rightarrow U$ ist ein Teilraum von V.

- **Definition (Bild, Kern)**
  Seien V, W Vektorräume und $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann heißt
  $$\mathrm{Im}(T) = \{T(x) \mid \forall x \in V\} = \{y \in W \mid \exists x \in V \text{ mit } T(x) = y\}$$
  das Bild von T und
  $$\mathrm{Ker}(T) = \{x \in V \mid T(x) = 0\}$$
  heißt der Kern von T. (Englisch: Im(age), Ker(nel).)

- **Eigenschaften**
  Sind V, W Vektorräume und T linear, dann gilt:
  (a) $\mathrm{Im}(T)$ ist ein Teilraum von W
  (b) $\mathrm{Ker}(T)$ ist ein Teilraum von V.

Beweis

(a) (i)

$$\underset{(V \text{ Vektorraum})}{T(0_V)} \overset{\text{bewiesen}}{=} 0_W \Rightarrow 0_W \in \mathrm{Im}(T) \Rightarrow \mathrm{Im}(T) \neq \emptyset \text{ (also nicht leer)}$$

(ii)

Seien $y_1,\ y_2 \in \mathrm{Im}(T)$

$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in V$ mit $T(x_1) = y_1, T(x_2) = y_2$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 = T(x_1) + T(x_2) \overset{\text{linear}}{=} T(\underbrace{x_1 + x_2}_{\substack{\in V \\ (V \text{ ist Vektorraum})}}) \in \mathrm{Im}(T).$$

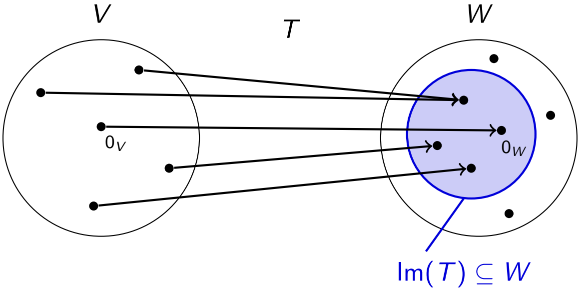
(iii)

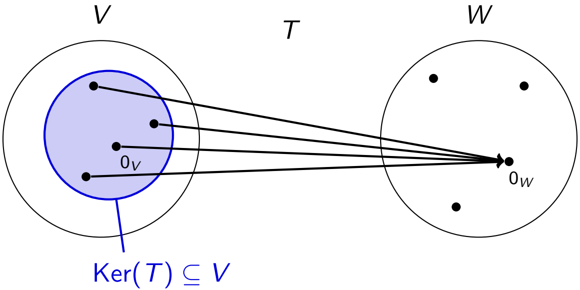
Seien $y \in \mathrm{Im}(T),\ \lambda \in K$

$\Rightarrow \exists x \in V$ mit $T(x) = y$

$$\Rightarrow \lambda y = \lambda T(x) \overset{\text{linear}}{=} T(\underbrace{\lambda x}_{\substack{\in V \\ (V \text{ ist Vektorraum})}}) \in \mathrm{Im}(T).$$

Die Veranschaulichung





(b) (i)

$T(0_V) \stackrel{\text{siehe (a)(i)}}{=} 0_W \Rightarrow 0_V \in \operatorname{Ker}(T) \Rightarrow \operatorname{Ker}(T) \neq \emptyset$ (also nicht leer)

(ii)

Seien $x_1, x_2 \in \operatorname{Ker}(T)$, d. h. $T(x_1) = 0_W, T(x_2) = 0_W$

$\Rightarrow T(x_1 + x_2) \stackrel{\text{linear}}{=} T(x_1) + T(x_2) = 0_W + 0_W = 0_W$

$\Rightarrow x_1 + x_2 \in \operatorname{Ker}(T)$.

(iii)

Sei $x \in \operatorname{Ker}(T), \lambda \in K$

$\Rightarrow T(\lambda x) \stackrel{\text{linear}}{=} \lambda T(x) = \lambda \cdot 0_W = 0_W \Rightarrow \lambda x \in \operatorname{Ker}(T)$.

- Bemerkung (zur Eigenschaft (b))

  Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear
  $\Rightarrow$ existiert eindeutig die Matrix $A \in M(m \times n)$
  mit $\qquad F_A = T \qquad F_A : x \mapsto Ax$
  also ♪ $T(x) = Ax$
  (bereits bewiesen: Satz Korrespondenz lineare Abbildung $\to$ Matrix).

  Aus (b) folgt dann

$$\mathrm{Ker}(T) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid T(x) = 0\} =$$
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} = \text{LÖS}(A, 0) = \text{LÖS}(A).$$

- Eigenschaft

  Seien U_1, U_2 zwei Teilräume von V.
  Dann ist $U_1 \cap U_2$ ein Teilraum von V.

  Beweis

  Seien $x, y \in U_1 \cap U_2, \;\; \lambda \in K$.
  Dann gilt: $x, y \in U_1 \quad$ und $\quad x, y \in U_2$

  $\Rightarrow x + y \in U_1, \lambda x \in U_1 \quad$ und $\quad x + y \in U_2, \quad \lambda x \in U_2$
  $\Rightarrow x + y \in U_1 \cap U_2, \quad \lambda x \in U_1 \cap U_2$.

- Definition (Linearkombination)
  Sei V ein Vektorraum.
  Seien $x_1, x_2, \ldots, x_r \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in K$.

(a) Dann heißt

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_r x_r$$

eine Linearkombination von $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

(b) Die Menge aller Linearkombinationen von $x_1, x_2, \ldots, x_r$

$$\mathrm{LIN}\{x_1, x_2, \ldots, x_r\} = \{x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_r x_r \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in K\}$$

heißt die lineare Hülle von $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

- Beispiel (lineare Hülle)

Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Dann ist $\mathrm{LIN}\{x\} = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \mid \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

eine Gerade in $\mathbb{R}^n$.

(Für $\lambda = 0$ ist $\lambda x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, also die Gerade geht durch den Ursprung.)

- Beispiel (lineare Hülle)

$$\text{Sei } V = \mathbb{R}^3, \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Dann ist } \mathrm{LIN}\{x_1, x_2\} = \left\{ \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} \quad = \quad x\text{-}y\text{-Ebene.}$$

- Eigenschaft

Seien V ein Vektorraum und $x_1, x_2, \ldots, x_r \in V$. Dann gilt:

(1) $\text{LIN}\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ ist ein Teilraum von V

(2) $\text{LIN}\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ ist der kleinste Teilraum von V, der die Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_r$ enthält, d. h. wenn U ein Teilraum von V ist mit $x_1, x_2, \ldots, x_r \in U$, dann ist $\text{LIN}\{x_1, x_2, \ldots, x_r\} \subseteq U$.

Beweis

(1) (i)

Klarerweise sind

$x_1, x_2, \ldots, x_r \in \text{LIN}\{x_1, x_2, \ldots, x_r\} \Rightarrow \text{LIN}$ ist nicht leer

(z.B. $x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_r \in \text{LIN}\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$

für $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$).

(ii)
Seien $x, y \in \mathrm{LIN}\{x_1, x_2, \ldots, x_r\} \Rightarrow$
$x = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_r x_r \qquad \mu_i \in K \;\; i = 1, 2, \ldots, r$
$y = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_r x_r \qquad \gamma_i \in K \;\; i = 1, 2, \ldots, r$
$\Rightarrow$ $x + y = (\underbrace{\mu_1 + \gamma_1}_{\in K})x_1 + \ldots + (\underbrace{\mu_r + \gamma_r}_{\in K})x_r \Rightarrow$
$x + y \in \mathrm{LIN}\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$.

(iii)
Für $x \in \mathrm{LIN}\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ und $\lambda \in K$ gilt:
$\lambda x = \lambda(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_r x_r) = \lambda\mu_1 x_1 + \lambda\mu_2 x_2 + \ldots + \lambda\mu_r x_r$
$\Rightarrow \lambda x \in \mathrm{LIN}\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$.

(2) Sei U ein Teilraum von V mit $x_1, x_2, \ldots, x_r \in U$.
Dann $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_r x_r \in U \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in K \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathrm{LIN}\{x_1, x_2, \ldots, x_r\} \subseteq U$

Die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems, wenn $m > n$

Das LGS $Ax = b$ mit $A \in M(m \times n), b \in \mathbb{R}^m$ und $m > n$
(d. h. es handelt sich um das sogenannte overdetermined LGS).

b sollte als Linearkombination von n Spalten dargestellt werden. Da $b \in \mathbb{R}^m$ ist und $n < m$, ist das eher unwahrscheinlich, solange b nicht in der $\text{LIN}\{a_1, \ldots, a_n\}$ liegt (a_i : Spalte i von A).

Anders:

- Für ein overdetermined System gibt es normalerweise keine Lösung im üblichen Sinne.
- Stattdessen minimieren wir den Abstand zwischen der linken und der rechten Seite des LGS, d. h. wir suchen das Minimum des Residuums $r = Ax - b$ als Funktion von x.

- Im Least Squares Verfahren ist die Lösung der Vektor x, für welchen $||b - Ax||_2$ minimal ist.

  Da wir hier keine Lösung im exakten Sinne bekommen, wird das Least Squares Problem als $Ax \cong b$ formuliert.

  Mit diesem unterschiedlichen Konzept für die Lösung werden auch die Kriterien für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung unterschiedlich sein zu denen, die für den Fall $m \leq n$ gelten.

  Es gilt:
- $Ax \cong b$ ist immer lösbar, d. h. das LGS $Ax = b$ hat immer eine Lösung im Sinne von Least Squares.
- Diese Lösung ist eindeutig, wenn $\mathrm{rg}(A) = n$.
- Wenn $\mathrm{rg}(A) < n$, dann gibt es unendlich viele Lösungen.

- Beispiel 1 $\quad b \in \text{LIN}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \underline{\text{rg}(A) = n}$

  unüblicher Fall: $\underline{\text{rg}(A, b) = n}$

  Die Lösung ist gleich wie die exakte Lösung

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} b = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 \\ \Rightarrow b \in \text{LIN}\{a_1, a_2\} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right. \begin{array}{c} \text{-2 -3} \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -5 & -10 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_2 = 2; x_1 + 2x_2 = 5 \Rightarrow x_1 = 1 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Also $\text{rg}(A) = \text{rg}(A, b)$ (weil $b \in \text{LIN}\{a_1, a_2\}$) und $\text{rg}(A) = n$
$\Rightarrow$ einzige Lösung im Sinne des LGS.

- Beispiel 2 $\quad \mathrm{rg}(A) = n, \quad b \notin \mathrm{LIN}\{a_1, a_2\} \Rightarrow \mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A, b)$

  Eindeutige Lösung (im Least Squares-Sinne) (also $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A, b)$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/9 \\ 4/9 \end{bmatrix} \circledast$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/9 \\ 4/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/9 \\ 8/9 \\ 2/9 \end{bmatrix}$$

$$b - Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2/9 \\ 8/9 \\ 2/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/9 \\ 1/9 \\ -2/9 \end{bmatrix} \qquad ||b - Ax||_2 = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

⊛ Lösung im Least Squares-Sinne mittels
Normal Equations-Verfahren

$$A^T A x = A^T b$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{array} \;\; {}^{-1} \qquad \begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 9/2 & 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 4/9 \\ x_1 = -2/9 \end{array}$$

- Beispiel 3 $\quad \mathrm{rg}(A) < n,\ b \notin \mathrm{LIN}\{a_1, a_2\}$, d. h. $\mathrm{rg}(A, b) \neq \mathrm{rg}(A)$
  unendlich viele Lösungen (im Least Squares-Sinne)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_1 = 1/3 - 2x_2 \quad \overset{\circledast}{\Rightarrow}$$

unendlich viele Lösungen

$\mathrm{rg}(A) = 1 < n = 2 \quad b \notin \mathrm{LIN}\{a_1, a_2\}$

$\circledast$ Normal Equations-Verfahren

$A^T A x = A^T b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \qquad A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 12 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1/3 \\ 6 & 12 & 2 \end{array} \ \text{-6} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow x_1 + 2x_2 = \frac{1}{3}$$

Basis und Dimension

- Definition (Vektorraum endlich erzeugt)
  Ein Vektorraum V heißt endlich erzeugt,
  wenn es $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ gibt mit
  $$V = \mathrm{LIN}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$
  Unser Ziel:
  Wir suchen eine möglichst kleine Menge (Basis)
  $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \quad \text{mit} \quad \mathrm{LIN}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = V.$

Warum?
Ist $T : V \to W$ linear und $V = \mathrm{LIN}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
Dann gilt $\forall x \in V$

$$\begin{aligned} T(x) = T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) = \\ \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2) + \ldots + \lambda_n T(x_n) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ um $T(x)$ zu berechnen, genügt es, T an den endlich vielen festen Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu kennen.

D. h. um $T(x)$ zu berechnen für ein beliebiges $x \in V = \mathrm{LIN}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$,
genügt es $T(x_1), \ldots, T(x_n)$,
d. h. die Bilder der Vektoren der Basis zu kennen.

- Definition (Lineare (Un-)Abhängigkeit)
  Sei V ein Vektorraum.

  (a) Die Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_k$ heißen linear abhängig, wenn es Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in K$ gibt, die nicht alle 0 sind, sodass

$$0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k$$

Also: 0 lässt sich als nicht triviale Linearkombination von $x_1, x_2, \ldots, x_k$ darstellen.

  (b) $x_1, x_2, \ldots, x_k$ heißen linear unabhängig, wenn sie **nicht** linear abhängig sind, d. h.
  wenn $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k = 0$,
  dann $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Also: 0 lässt sich nur als triviale Linearkombination von $x_1, x_2, \ldots, x_k$ darstellen.

- Eigenschaft

  Sei V ein Vektorraum und $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$.

  (a) $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sind linear abhängig $\Leftrightarrow$ mindestens eines dieser Elemente (Vektoren) x_i ist eine Linearkombination der anderen,
  d. h. $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k$

  (b) $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ keiner dieser Vektoren ist eine Linearkombination der anderen.

Beweis

(a) $\Rightarrow$

Angenommen, dass $x_1, x_2, \ldots, x_k$ linear abhängig sind.
$\Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ mit $\lambda_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Sei dieses λ_1 (Umordnung laut Kommutativgesetz möglich).
Aus L. A. $\Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k = 0$ und für $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow$

$x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} x_k \Rightarrow$ x_1 ist eine Linearkombination der anderen Vektoren.

$\Leftarrow$

Angenommen, x_i ist eine Linearkombination der anderen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei diese

$$x_1 = \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k$$

$\Rightarrow 0 = \underbrace{(-1)}_{\neq 0} x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k \Rightarrow$

$x_1, x_2, \ldots, x_k$ sind linear abhängig.

(b)

Da (b) die Negation von (a) ist, ist der Beweis analog zu (a).

- Beispiel Lineare Abhängigkeit

$$V = \mathbb{R}^2. \qquad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wir berechnen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ aus $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

Lösung des LGS laut Gauss-Algorithmus

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)\mathrm{II} + \mathrm{I} = \mathrm{I}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \mu_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mu_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ unendlich viele nicht-null-Lösungen für$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$\Rightarrow x_1, x_2, x_3$ sind linear abhängig

- Beispiel Lineare Unabhängigkeit

$$V \in \mathbb{R}^3 \qquad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aus der Formel $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$, d. h. aus

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

folgt das LGS für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\left.\begin{array}{rrrl} \lambda_1 + & & \lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & & = 0 \\ & -\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_1 = 0$$

$\Rightarrow$ Die Vektoren x_1, x_2, x_3 sind linear unabhängig.

- Lineare (Un-)Abhängigkeit (Veranschaulichung)

  $V = \mathbb{R}^2$

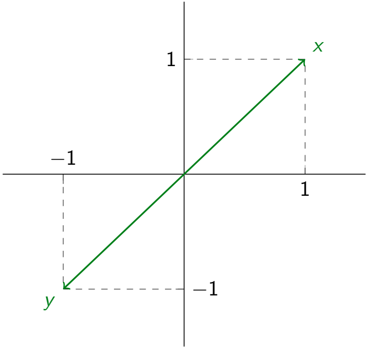
- Lineare Abhängigkeit

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$a \cdot x + b \cdot y = 0$$

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a - b = 0 \Rightarrow \\ a = b \end{array}$$

$\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow x, y$ sind linear abhängig.



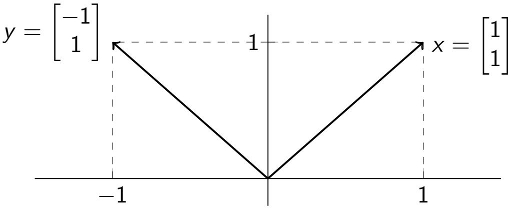
x, y : liegen auf der gleichen Gerade
(können also nicht den ganzen $\mathbb{R}^2$ aufspannen)

- Lineare Unabhängigkeit

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad a \cdot x + b \cdot y = 0$$

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} a - b = 0 \\ a + b = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow a = b = 0$$

$\Rightarrow x, y$ sind linear unabhängig.



x, y spannen $\mathbb{R}^2$ auf

- Beispiel Lineare Unabhängigkeit

$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad | f \text{ Funktion } \}$

mit $\begin{array}{l} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \end{array}$

Sei $f_1, f_2 \in V$ mit $f_1(x) = x \quad f_2(x) = x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lll} & \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0 \Rightarrow & \\ & (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = 0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow & \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow & \lambda_1 x + \lambda_2 (x^2 + 1) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow & \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_2 = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Sei $x = 0 : \lambda_1 0 + \lambda_2 0 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Sei $x = 1 : \lambda_1 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow f_1, f_2$ sind linear unabhängig.

- **Definition (Basis)**

  Sei V ein Vektorraum. Das $n-$Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von Vektoren aus V heißt Basis von V, wenn gilt:

  (1) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind linear unabhängig
  (2) $\mathrm{LIN}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = V$.

- **Beispiel (Basis von $\mathbb{R}^n$)**

  Sei $V = \mathbb{R}^n$. Dann heißt $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ mit

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

  die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$.

(1) $e_1, e_2, \dots, e_n$ sind linear unabhängig

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

(2) $\mathrm{LIN}\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \mathbb{R}^n$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ fix und beliebig $\Rightarrow$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots x_n e_n.$$

Satz

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist eine Basis von $V \Leftrightarrow \forall x \in V$ gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$, sodass

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n.$$

Definition (Koordinatenvektor)

Der Vektor $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ aus dem obigen Satz heißt der Koordinatenvektor des Vektors x bezüglich der Basis $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Beweis

$\Rightarrow$ Da $\text{LIN}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = V$, folgt:
$\forall x \in V \; \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in K$ mit

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n.$$

- Noch zu zeigen ist: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sind eindeutig.
  Sei $\mathrm{x} = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_n x_n$ eine weitere Darstellung von x.

$\Rightarrow$ $(\lambda_1 - \mu_1)x_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)x_n = 0$
Da $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linear unabhängig sind, folgt:
$(\lambda_1 - \mu_1) = \ldots = (\lambda_n - \mu_n) = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_n = \mu_n$.
$\Rightarrow$ Die Eindeutigkeit der Darstellung ist bewiesen.

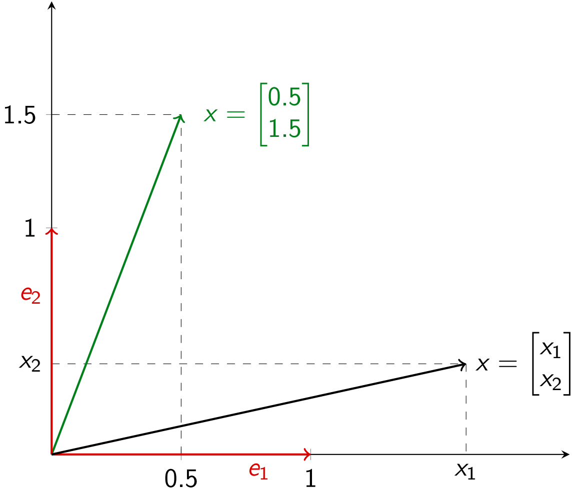
$\Leftarrow$

- Dass $\mathrm{LIN}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = V$ ist, ist offensichtlich.
- Beweis, dass $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linear unabhängig ist:

Sei $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$.
Da $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$, folgt aus der Eindeutigkeit der Darstellung des Vektors 0, dass $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$.

$\Rightarrow x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind linear unabhängig, also ist $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Basis.

- Basis und Koordinatenvektor (Veranschaulichung)
  $V = \mathbb{R}^2$
- Fall 1 $\quad$ $\text{Basis} = \{e_1, e_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$



Sei $x \in \mathbb{R}^2$ beliebig aber fix.

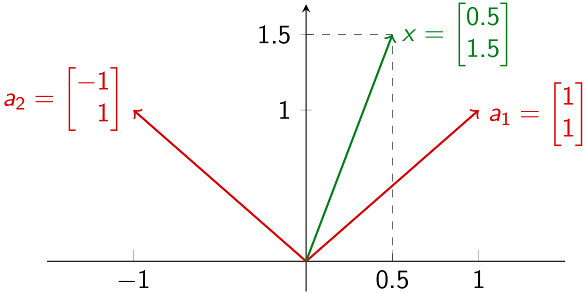
Dann $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2$.

Also ist jedes $x \in \mathbb{R}^2$ eindeutig darstellbar

als Linearkombination von $\{e_1, e_2\}$.

Seine Koordinaten sind $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

- Fall 2 $\quad \text{Basis} = \{a_1, a_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$



(1) a_1, a_2 : linear unabhängig

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0 \qquad \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_1 = -\lambda_2 \end{matrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

(2) $\mathrm{LIN}\{a_1, a_2\} = \mathbb{R}^2$

Sei $x \in \mathbb{R}^2$ beliebig aber fix.

Dann $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 a_1 + c_2 a_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 - c_2 \\ x_2 &= c_1 + c_2 \end{aligned} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2c_1 \Rightarrow c_1 = \tfrac{x_1+x_2}{2}$$

$$c_2 = c_1 - x_1 = \tfrac{x_1+x_2}{2} - x_1 = \tfrac{x_2-x_1}{2}.$$

Also ist jedes $x \in \mathbb{R}^2$ eindeutig darstellbar als Linearkombination von $\{a_1, a_2\}$.

Konkret für $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$:

In der Basis $\{e_1, e_2\}$ sind seine Koordinaten $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$.

In der Basis $\{a_1, a_2\}$ sind seine Koordinaten $c_1 = \frac{1.5+0.5}{2}$ und $c_1 = \frac{1.5-0.5}{2} = \frac{1}{2}$,

also $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$. Also unterschiedliche Koordinaten-Darstellung für den selben Vektor.

- Eigenschaft

Sei $A \in M(m \times n)$ mit den n Spaltenvektoren $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $a_1, a_2, \dots, a_n$ sind linear unabhängig
(b) Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$.

Beweis

Sei $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und betrachte

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{bmatrix} =$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

$\Rightarrow$ $Ax = 0$ gilt bei linear unabhängigen Spalten nur für $x = 0$.

Also dann gilt

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = 0.$$

Zum Beweis zurück:

(a) $\Rightarrow$ (b)

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ linear unabhängig $\Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \Rightarrow x = 0.$

(b) $\Rightarrow$ (a)

Sei $x = 0$, also $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$
die einzige Lösung von $Ax = 0$.
$\Rightarrow$ 0 kann nur als triviale Linearkombination
von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dargestellt werden.
$\Rightarrow a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind linear unabhängig.

Also (a) $\Leftrightarrow$ (b).

- Beispiel (Lineare Abhängigkeit)

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix},\ a_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Man löst $Ax = 0$.
(Man muss nicht die erweiterte Matrix (A, b) mit $b = 0$ nehmen, weil alle Umformungen die Nullspalte unverändert lassen.)

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -1 & 5 & 11 \\ 2 & 4 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I}={}^1\!/_3\mathrm{I}} \begin{bmatrix} 1 & -{}^2\!/_3 & 2 \\ -1 & 5 & 11 \\ 2 & 4 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-2)\mathrm{I}+\mathrm{III}=\mathrm{III}]{\mathrm{I}+\mathrm{II}=\mathrm{II}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -{}^2\!/_3 & 2 \\ 0 & {}^{13}\!/_3 & 13 \\ 0 & {}^{16}\!/_3 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{3}{16}\mathrm{III}=\mathrm{III}]{\frac{3}{13}\mathrm{II}=\mathrm{II}} \begin{bmatrix} 1 & -{}^2\!/_3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\mathrm{II}+\mathrm{III}=\mathrm{III}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -{}^2\!/_3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{3}\mathrm{II}+\mathrm{I}=\mathrm{I}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$$\text{LÖS}(A,0) = \text{LÖS}(A) = \text{LIN}\left\{\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \left\{ x \;\middle|\; x = \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\} \neq \{0\}.$$

Nach dem obigen Satz (da $Ax = 0$ nicht nur die triviale Lösung hat)
$\Rightarrow a_1, a_2, a_3$ sind linear abhängig.

Probe

Sei $\lambda = 1 \Rightarrow \lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = 1.$

$$\overset{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 =}{-4a_1 - 3a_2 + a_3} = \begin{bmatrix} -12 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -15 \\ -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Also sind a_1, a_2, a_3 linear abhängig.

- Beispiel (Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems)

  Sei $Ax = 0$ mit $A \in M(m \times n)$ ein homogenes LGS.

$$A \to \hat{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & \hat{a}_{1,r+1} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \hat{a}_{r,r+1} & \dots & \hat{a}_{rn} \\ \hline & 0 & & & 0 & \end{array}\right]$$

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} -\hat{a}_{1,r+1} \\ \vdots \\ -\hat{a}_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots \quad, \mu_{n-r} = \begin{bmatrix} -\hat{a}_{1n} \\ \vdots \\ -\hat{a}_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(A, 0) \to (\hat{A}, 0) \Rightarrow \text{LÖS}(A, 0) = \text{LÖS}(A) =$

$$= \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x = \lambda_1 \mu_1 + \ldots + \lambda_{n-r} \mu_{n-r} \right\}$$

Dabei setzen wir $\lambda_1 = x_{r+1}, \ldots, \lambda_{n-r} = x_n$.

$\Rightarrow$ Die Darstellung $x = \lambda_1 \mu_1 + \ldots + \lambda_{n-r} \mu_{n-r}$ ist daher eindeutig.

$\Rightarrow$ $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-r})$ ist eine Basis von $\text{LÖS}(A)$.

Bemerkung

Sei $A \in M(m \times n)$. Ist $\mathrm{rg}(A) < n$, so hat das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ mindestens eine Lösung mit $x \neq 0$.

- **Beweis**

  Sei A mit $\mathrm{rg}(A) = r \Rightarrow$

$$A \to \hat{A} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad r \quad & \quad n-r \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ \\ m-r \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & \hat{a}_{1,r+1} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \hat{a}_{r,r+1} & \cdots & \hat{a}_{rn} \\ \hline & 0 & & & 0 & \end{array}\right] \end{array}$$

  Da $r < n$, also $r + 1 \leq n$, folgt:

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} -\hat{a}_{1,r+1} \\ \vdots \\ -\hat{a}_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

  . Also hat $Ax = 0$ **mindestens eine** nicht-null-Lösung.

Eigenschaft

Sei V ein Vektorraum und seien $w_1, w_2, \dots, w_m \in V$ mit $\mathrm{LIN}\{w_1, w_2, \dots, w_m\} = V$.
Dann gilt:
Sind $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ linear unabhängig, so folgt $k \leq m$.

Beweis

Da $V = \mathrm{LIN}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, folgt für $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$:

$$\triangle \qquad v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad \forall j = 1, 2, \dots, k.$$

Betrachten wir die Matrix $A = (a_{ij}) \in M(m \times k)$, wobei die Spalte j den Koeffizienten a_{ij} für den Vektor v_j entspricht (laut $\triangle$).

$\bigtriangledown$ Beweis durch Widerspruch, also angenommen, dass $k > m$.

Da $\mathrm{rg}(A) \leq m$ (A hat m Zeilen, daher hat $\tilde{A}$ (Halbdiagonalform) höchstens m nicht-null-Zeilen), dann folgt aus $\bigtriangledown$, dass $k > \mathrm{rg}(A)$.

Aus der obigen Bemerkung folgt, dass $Ax = 0$ mindestens eine nicht triviale Lösung hat. Sei diese Lösung:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k,$$ wobei nicht alle Komponenten gleich null sind.

Betrachte die Linearkombination

$$\circledast \quad x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_k v_k = \sum_{j=1}^{k} x_j v_j = \sum_{j=1}^{k} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \right)}_{(= 0, \text{ weil es die } i\text{-te Zeile von } Ax = 0 \text{ ist})} w_i = \sum_{i=1}^{m} 0 \cdot w_i = 0.$$

Nach Voraussetzung sind $v_1, v_2, \ldots, v_k$ linear unabhängig, dann muss aus $\circledast$ folgen: $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$.

Das ist aber ein Widerspruch zu ♠, daher auch ein Widerspruch zur Annahme $k > m$ $\triangledown$, welche ♠ zur Folge hat. Also gilt $k \leq m$.

Satz Invarianz der Basislänge

Besitzt ein Vektorraum V eine Basis, dann haben alle Basen von V gleich viele Elemente.

- Beweis

  Seien $(v_1, \dots, v_k)$ und $(w_1, \dots, w_m)$ Basen von V.

$\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_k$ sind linear unabhängig und $\mathrm{LIN}\{w_1, \dots, w_m\} = V$.

$\overset{\text{Eigenschaft}}{\Rightarrow} \quad k \leq m$

Andererseits gilt auch $\mathrm{LIN}\{v_1, \dots, v_k\} = V$ und $w_1, \dots, w_m$ sind linear unabhängig.

$\overset{\text{Eigenschaft}}{\Rightarrow} \quad k \geq m$

$\Rightarrow \quad k = m.$

Definition (Dimension)

Besitzt ein Vektorraum V eine Basis, so heißt die eindeutig bestimmte Anzahl der Basiselemente die Dimension von V, bzw. $\dim(V)$.

Also

- Ist $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V \Rightarrow \dim(V) = n$.
- $\dim(\{0\}) = 0$.
- Besitzt V keine Basis, dann definieren wir $\dim(V) = \infty$.

Satz (Basisauswahlsatz)

Sei V endlich erzeugt, also $V = \text{LIN}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$.
Dann erhält man durch Weglassen geeigneter Elemente von $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ eine Basis von V.

Beweis

$V = \text{LIN}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$

Sind $v_1, v_2, \dots, v_m$ linear unabhängig $\Rightarrow$ Basis.
Sind $v_1, v_2, \dots, v_m$ linear abhängig, dann gibt es ein v_i, das eine Linearkombination der anderen v_j ist.
Wir lassen dieses v_i weg und es gilt immer noch

$$V = \text{LIN}\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m\}.$$

Sind $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m$ linear unabhängig $\Rightarrow$ Basis,
sonst Verfahren so lange fortsetzen, bis man eine linear unabhängige Teilmenge von $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ erhält.

Diese spannt immer noch V auf und ist somit eine Basis von V.

Satz (Basisergänzungssatz)

Sei V endlich erzeugt und seien $v_1, v_2, \ldots, v_k$ linear unabhängige Vektoren von V.
Dann lassen sich $v_1, v_2, \ldots, v_k$ zu einer Basis ergänzen, d. h. es gibt
$v_{k+1}, \ldots, v_{k+l} \qquad (l \geq 0)$,
sodass $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}$ eine Basis von V bilden.

Beweis

- Falls $\mathrm{LIN}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = V \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ Basis ist durch $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ gegeben.
- Sonst gibt es ein $v_{k+1} \in V$ mit $v_{k+1} \overset{\circledast}{\notin} \mathrm{LIN}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.

  Wir zeigen, dass $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$ linear unabhängig sind:
  Sei $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0$.

- Angenommen $\lambda_{k+1} \neq 0$
  (Also Widerspruch zu $\circledast$: Wir nehmen an, dass diese linear abhängig sind.)

$\Rightarrow v_{k+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{k+1}} v_1 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} v_k$
(Also v_{k+1} ist eine Linearkombination von $v_1, \ldots, v_k$.)

$\Rightarrow v_{k+1} \in \mathrm{LIN}\{v_1, \ldots, v_k\}$.
Widerspruch zur Annahme $\circledast$ und auch Widerspruch zur Annahme 🔔.

$\Rightarrow \lambda_{k+1} = 0 \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$.
Da $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind $\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.
Da auch $\lambda_{k+1} = 0$, folgt, dass $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$ linear unabhängig sind.
(also gilt $\circledast$)

Da V endlich erzeugt ist, also $V = \mathrm{LIN}\{w_1, \ldots, w_n\}$,
folgt aus der Eigenschaft $k + 1 \leq n$.

Ist $\mathrm{LIN}\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}\} = V \Rightarrow (v_1, \ldots, v_{k+1})$ ist die Basis, sonst gibt es ein v_{k+2}, sodass $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}$ linear unabhängig sind und $k + 2 \leq n$.

Nach spätestens $n - k$ Schritten ist man fertig, da nicht mehr als n Vektoren linear unabhängig sein können.

Korollar 1

Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine Basis.

Beweis

Basisauswahlsatz oder Basisergänzungssatz

Korollar 2

Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = k$.
Seien $v_1, \dots, v_k \in V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $v_1, \dots, v_k$ ist eine Basis von V

(b) $\mathrm{LIN}\{v_1, \dots, v_k\} = V$

(c) $v_1, \dots, v_k$ sind linear unabhängig.

Beweis

- (a) $\Rightarrow$ (b) (a) $\Rightarrow$ (c) (Definition der Basis)
- (b) $\Rightarrow$ (a)
  Nach dem Basisauswahlsatz kann man von $\{v_1, \ldots, v_k\}$
  $l \geq 0$ Vektoren weglassen und erhält eine Basis von V.
  Nach der Invarianz der Basislänge muss diese Basis (laut 🔔) aus $\dim(V) = k$ Elementen bestehen $\Rightarrow l = 0$ und
  $\Rightarrow v_1, v_2, \ldots, v_k$ ist eine Basis von V.
- (c) $\Rightarrow$ (a)
  Nach dem Basisergänzungssatz gibt es $l \geq 0$ Vektoren, sodass $v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_{k+l}$ eine Basis bildet.
  Nach der Invarianz der Basislänge, d. h. $\dim(V) = k$, muss wieder $l = 0$ gelten.
  $\Rightarrow v_1, v_2, \ldots, v_k$ ist eine Basis von V.
- (b) $\Rightarrow$ (c) und (c) $\Rightarrow$ (b) können analog gezeigt werden.

Korollar 3

Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = k$. Sei weiters U ein Teilraum. Dann sind äquivalent:

(a) $U = V$

(b) $\dim(U) = \dim(V)$.

Beweis

(a) $\Rightarrow$ (b) ist offensichtlich.

(b) $\Rightarrow$ (a)
Sei $v_1, \ldots, v_k$ eine Basis von U.
Da $U \subseteq V$, folgt, dass $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ und $v_1, v_2, \ldots, v_k$ linear unabhängig in V sind.
Da $\dim(V) = k$, folgt aus Korollar 2 (dort: (c) $\Rightarrow$ (a)), dass $v_1, v_2, \ldots, v_k$ eine Basis von V ist $\Rightarrow$

$$V = \mathrm{LIN}\{v_1, \ldots, v_k\} = U.$$

Inverse Matrix

- Definition (Invertierbare Matrix)

  Eine $n \times n$ -Matrix A heißt invertierbar, wenn:
  $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $F_A(x) = Ax \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
  bijektiv ist.

  (Also: Zu **jedem** $b = Ax \in \mathbb{R}^n$ $\exists$ **genau ein** x, sodass die **Gleichung** gilt.)

- Eigenschaft

  $A \in M(n \times n)$ ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $\text{rg}(A) = n$.

Beweis

Es ist uns bekannt, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) = n \quad &\Leftrightarrow \quad Ax = b \text{ hat eine eindeutige Lösung für alle } b \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \quad \forall b \in \mathbb{R}^n \quad \exists!\, x \in \mathbb{R}^n : F_A(x) = b \\ &\Leftrightarrow \quad F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ ist bijektiv} \\ &\Leftrightarrow \quad A \text{ ist invertierbar.} \end{aligned}$$

- ## Bemerkung

Sei $F : M \to N$ bijektiv. Dann gibt es eine Umkehrabbildung $F^{-1} : N \to M$ mit

$$F^{-1}[F(x)] = x \quad \forall x \in M$$

und

$$F[F^{-1}(y)] = y \quad \forall y \in N.$$

Also:

$$F^{-1} \circ F = I_M \quad \text{[Identitätsabbildung auf M]}$$
$$F \circ F^{-1} = I_N \quad \text{[Identitätsabbildung auf N].}$$

- Eigenschaft

  Sei V ein Vektorraum mit $T : V \to V$ bijektiv und linear.
  Dann ist $T^{-1} : V \to V$ auch bijektiv und linear.

  Beweis

  Bijektivität von T^{-1} ist offensichtlich.

  Linearität von T^{-1}:
  Seien $y_1, y_2, \in V \Rightarrow \exists!\, x_1, x_2 \in V$ mit
  $T(x_1) = y_1,\ T(x_2) = y_2$ ($\Rightarrow T^{-1}$ bijektiv)
  $\Rightarrow T^{-1}(y_1 + y_2) = T^{-1}(T(x_1) + T(x_2)) \overset{T \text{ linear}}{=}$
  $= T^{-1}(T(x_1 + x_2)) = x_1 + x_2 = T^{-1}(y_1) + T^{-1}(y_2)$.
  Analog kann die zweite Eigenschaft für die Linearität von T^{-1}, d. h.
  $T^{-1}(\lambda y) = \lambda T^{-1}(y)$ gezeigt werden.

Die Definition gibt an, dass A invertierbar ist, wenn

$F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und bijektiv ist.

Dann folgt aus der Eigenschaft, dass

$F_A^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und bijektiv ist, also $\exists!\, A^{-1} \in M(n \times n)$ mit

$F_{A^{-1}} = F_A^{-1}$ ($F_{A^{-1}}$ ist die Abbildung $x \to A^{-1}x$).

Da $F_A \circ F_A^{-1} = I_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow F_A \circ F_{A^{-1}} = I_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow$

$$F_A \circ F_{A^{-1}}(x) = I_{\mathbb{R}^n}(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$$

$$F_A(A^{-1}x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$$

$\Rightarrow AA^{-1}x = x.$

Sei $E = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$ die $n \times n$-Einheitsmatrix.

$\Rightarrow Ex = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

(laut ♠) $AA^{-1}x = Ex \Rightarrow AA^{-1} = E$

und ebenso $A^{-1}A = E$, weil:

$$F_A^{-1} \circ F_A = I_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow F_{A^{-1}} \circ F_A = I_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow F_{A^{-1}} \circ F_A(x) = I_{\mathbb{R}^n}(x)$$

$$\Rightarrow F_{A^{-1}}(Ax) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow A^{-1}Ax = x$$

A^{-1} heißt die zu A inverse Matrix

Anmerkung (zum zukünftigen Stoff: darstellende Matrix)

Die Spalte i der inversen Matrix A^{-1} ist die Darstellung von e_i zur Basis $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, wobei a_i, $i = 1, \ldots, n$ Spalte i von Matrix A ist.

- **Berechnung von A^{-1}**

  Wir bezeichnen die Spaltenvektoren von A^{-1} mit $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Also gesucht ist:

  $$A^{-1} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

  Da $AA^{-1} = E$, folgt $Aa_i = e_i$ für alle a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

  Da $\mathrm{rg}(A) = n$, ist $Ax = e_i$ eindeutig lösbar $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$.

  Also a_i ist die eindeutige Lösung von
  $$Ax = e_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

  Die n LGS sind simultan lösbar, indem man rechts zu A die Einheitsvektoren $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (im Schema für die Berechnung der Gaussnormalform) nebeneinander schreibt.

Also wir betrachten das Schema

$$\left[\begin{array}{c|c} A & e_1\, e_2 \ldots e_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & & 0 \\ & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ A & \vdots & \vdots & & \\ & 0 & 0 & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & 0 & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & a_1\, a_2\, \ldots\, a_n \\ 0 & & & 1 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} E & A^{-1} \end{array}\right]$$

- Beispiel $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c} \qquad\quad A \qquad\qquad\qquad\quad E \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\xrightarrow[\text{IV}-\text{I}=\text{IV}]{\text{II}-\text{I}=\text{II}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{II}+\text{III}=\text{III}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{III}+\text{IV}=\text{IV}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[{}^{1}\!/_{2}\text{IV}=\text{IV}]{\text{I}-\text{III}=\text{I} \quad \text{II}-\text{III}=\text{II}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{III}-\text{IV}=\text{III}]{\text{II}+\text{IV}=\text{II}}$$

$$\begin{array}{cc} \quad E & \quad A^{-1} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Probe: $AA^{-1} = E$

$A^{-1}A = E$

Darstellende Matrix einer linearen Abbildung zwischen zwei Vektorräumen bezüglich ihrer Basen

Annahmen

- Seien V, W zwei Vektorräume über demselben Körper K, wobei $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$.
- Seien $B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $B_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ zwei Basen von V bzw. W und weiters seien $E_V = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $E_W = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ die entsprechenden kanonischen Basen.
- Sei T eine lineare Abbildung.

Es gibt dann für jedes $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in V$ jeweils zwei Darstellungen:

$v_{\{E_V\}} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$ (in der Basis E_V) und
$v_{\{B_V\}} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$ (in der Basis B_V).

Analog gibt es zwei Darstellungen $w_{\{E_W\}}$ und $w_{\{B_W\}}$ (für jedes $w \in W$).

Anmerkung 1 (Notation zur Einheitsbasis)

Um die Schreibweise zu vereinfachen, wird für die Bezeichnung von Vektoren in der kanonischen Basis deren Bezeichnung weggelassen, d. h. statt $v_{\{E_V\}}$, $w_{\{E_W\}}$ wird einfach v bzw. w geschrieben.
Analog, statt $T(v_{\{E_V\}})_{\{E_W\}}$ wird $T(v)$ geschrieben.

Anmerkung 2 (Notation zur Basis B_v)

Für einen Vektor $v \in V$, eine Basis $B_v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ in V und eine lineare Abbildung $T : V \to V$ wird der transformierte Vektor $T(v)$ in der Basis B_V als $[T(v)]_{\{B_V\}}$ bezeichnet.

- Also $[T(v)]_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{\{B_V\}} = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \cdots + y_n v_n$ sodass

$$[T(v)]_{\{B_V\}} = T(v). \quad (\star)$$

($T(v)$ liegt in der kanonischen Basis vor – siehe Anmerkung 1.)

- Hingegen bezeichnet $T(v)_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{\{B_V\}} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$

die Darstellung von $T(v) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ in der Basis B_v.

- Für $B_V \neq E_V$ gilt $T(v) \neq T(v)_{\{B_V\}}$ und laut $(\star)$ auch $[T(v)]_{\{B_V\}} \neq T(v)_{\{B_V\}}$.

Beispiel (zu Anmerkung 1 und 2)

Seien $B_V = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$,

$$T : V \to V \quad T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Dann

$$T(v) = T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ und}$$

$$[T(v)]_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_{\{B_V\}}, \text{ sodass}$$

$$T(v) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = y_1 v_1 + y_2 v_2 = y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Laut ($\star$) sollte $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow y_1 = 2, y_2 = 2 \Rightarrow$

$$T(v) = [T(v)]_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- Hingegen, $T(v)_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{\{B_V\}} = 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

- Also $T(v) = [T(v)]_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = T(v)_{\{B_V\}}$.

Definition

Die darstellende Matrix $D_{\{B_V \underrightarrow{\,} B_W\}}$ der linearen Abbildung $T \equiv T_{V \to W} : V \to W$ bezüglich der Basen B_V und B_W ist

$$(1) \quad D_{\{B_V \underrightarrow{\,} B_W\}} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_{\{B_W\}} & \dots & [T(v_n)]_{\{B_W\}} \\ | & & | \end{bmatrix}.$$

Anders:

$$\text{Die Spalte } d_i = \begin{bmatrix} d_{1i} \\ d_{2i} \\ \vdots \\ d_{mi} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

der darstellenden Matrix ist das Bild des i-ten Basisvektors $v_i \in B_v$ bezüglich der Basis B_W.

Dann gilt für $\forall\, v \in V$

(2) $D_{\{B_V \underset{\longrightarrow}{} B_W\}}\,[v]_{\{B_V\}} = [T(v)]_{\{B_W\}} \equiv [T_{V\to W}(v)]_{\{B_W\}}\,.$

Also bildet diese Matrix jeden Vektor $v \in V$ (dargestellt bezüglich der Basis B_V) auf $T(v) = w \in W$ (dargestellt bezüglich der Basis B_W) ab.

Anders:

Die Multiplikation eines n-Vektors $v \in V$ (dargestellt bezüglich der Basis B_V) mit der darstellenden $m \times n$-Matrix $D_{\{B_V \underset{\longrightarrow}{} B_W\}}$ ergibt die Koordinaten des m-Vektors $w = T(v)$ bezüglich der Basis B_W.

Analogie zur Definition für $T \equiv T_{W \to V}$

Die darstellende Matrix $D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}}$ der linearen Abbildung $T \equiv T_{W \to V}$ bezüglich der Basen $B_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ und $B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist

$$(3) \quad D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}} = \Big[[T(w_1)]_{\{B_V\}} \; [T(w_2)]_{\{B_V\}} \; \ldots \; [T(w_m)]_{\{B_V\}} \Big] .$$

Dann gilt für $\forall\, w \in W$

$$(4) \quad D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}} [w]_{\{B_W\}} = [T(w)]_{\{B_V\}} \equiv [T_{W \to V}(w)]_{\{B_V\}} .$$

- Berechnung der i-ten Spalte

$$d_i = \begin{bmatrix} d_{1i} \\ d_{2i} \\ \vdots \\ d_{mi} \end{bmatrix} = [T(v_i)]_{\{B_W\}}, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ \text{der Matrix } D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}} :$$

$$v_{i_{\{E_V\}}} \equiv v_i = \begin{bmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ \vdots \\ v_{ni} \end{bmatrix} = v_{1i}e_1 + v_{2i}e_2 + \cdots + v_{ni}e_n$$

$$[T(v_i)]_{\{E_W\}} \equiv T(v_i) = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{mi} \end{bmatrix} = x_{1i}e_1 + x_{2i}e_2 + \cdots + x_{mi}e_m \quad \text{(i)}$$

$$[T(v_i)]_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} d_{1i} \\ d_{2i} \\ \vdots \\ d_{mi} \end{bmatrix}_{\{B_W\}} = d_{1i}w_1 + d_{2i}w_2 + \cdots + d_{mi}w_m$$

$$= d_{1i} \begin{array}{c} w_1 \\ \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{m1} \end{bmatrix} \end{array} + d_{2i} \begin{array}{c} w_2 \\ \begin{bmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ \vdots \\ w_{m2} \end{bmatrix} \end{array} + \cdots + d_{mi} \begin{array}{c} w_m \\ \begin{bmatrix} w_{1m} \\ w_{2m} \\ \vdots \\ w_{mm} \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{(ii)}$$

Da laut $(\star)$ $[T(v_i)]_{\{E_W\}}$ und $[T(v_i)]_{\{B_W\}}$ zwei Darstellungen des **gleichen Vektors** $T(v_i)$ sind, muss gelten, dass die Koordinaten von (i) und (ii) **gleich sind**.

$\Rightarrow$

Die unbekannten Elemente d_{ji}, $j = 1, 2, \ldots, m$ der i-ten Spalte von $D_{\{B_V B_W\}}$ bekommt man dann aus der Lösung des linearen Gleichungssystems der Größe $m \times m$

$$\begin{array}{rcccc} x_{1i} = & w_{11}d_{1i} + w_{12}d_{2i} + & \ldots & + w_{1m}d_{mi} \\ x_{2i} = & w_{21}d_{1i} + w_{22}d_{2i} + & \ldots & + w_{2m}d_{mi} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{mi} = & w_{m1}d_{1i} + w_{m2}d_{2i} + & \ldots & + w_{mm}d_{mi} \end{array} .$$

- Beispiel 1 (Allgemeinfall für $T \equiv T_{V \to W}$)
- Sei $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^3 \Rightarrow n = 2, m = 3.$

$$B_V = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$B_W = \{w_1, w_2, w_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Sei $T_{V \to W} \equiv T : T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 3x + y \\ x + 2y \end{bmatrix}$ die gegebene lineare Abbildung.

- Gesucht ist die darstellende Matrix $D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}}$.

Laut (1) sollte

$$D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}} = \Big[[T(v_1)]_{\{B_W\}} \; [T(v_2)]_{\{B_W\}} \Big] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{bmatrix}.$$

$$T(v_1) = T\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\cdot 4+1\\3\cdot 4+1\\4+2\cdot 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\13\\6\end{bmatrix} = 9e_1 + 13e_2 + 6e_3$$

$$T(v_2) = T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\cdot 1+0\\3\cdot 1+0\\1\cdot 1+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix} = 2e_1 + 3e_2 + e_3$$

$$[T(v_1)]_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix}d_{11}\\d_{21}\\d_{31}\end{bmatrix} = d_{11}w_1 + d_{21}w_2 + d_{31}w_3 =$$

$$= d_{11}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + d_{21}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + d_{31}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Also ist das LGS für die erste Spalte von $D_{\underrightarrow{\{B_V B_W\}}}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} \boxed{9} &=& \boxed{1}\cdot d_{11} + \boxed{1}\cdot d_{21} + \boxed{1}\cdot d_{31} \\ 13 &=& d_{11} + d_{21} \\ 6 &=& d_{11} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcr} d_{11} &=& 6 \\ d_{21} &=& 7 \\ d_{31} &=& -4 \end{array}$$

$$[T(v_2)]_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= d_{12}w_1 + d_{22}w_2 + d_{32}w_3 = d_{12}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + d_{22}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d_{32}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = d_{12} + d_{22} + d_{32} \\ 3 = d_{12} + d_{22} \\ 1 = d_{12} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcr} d_{12} &=& 1 \\ d_{22} &=& 2 \\ d_{32} &=& -1 \end{array}$$

Also ist dann $D_{\underrightarrow{\{B_V B_W\}}} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$

- Sei weiters $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in V$.

  Gesucht ist $[T(v)]_{\{B_W\}}$. Laut (2) soll gelten

  $$D_{\underset{\longrightarrow}{\{B_V B_W\}}} [v]_{\{B_V\}} = [T(v)]_{\{B_W\}} \,.\ (*)$$

$$[v]_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\{B_V\}} = x_1 v_1 + x_2 v_2 = x_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Weil gelten soll, dass $v = [v]_{\{B_V\}}$, dann

$$\left.\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}\right\} \left.\begin{array}{rl} x_1 = & 3 \\ x_2 = & -10 \end{array}\right\} \Rightarrow [v]_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -10 \end{bmatrix}_{\{B_V\}}.$$

$$T(v) = T \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \\ 3 \cdot 2 + 3 \\ 2 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} = 7e_1 + 9e_2 + 8e_3$$

$$[T(v)]_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}_{\{B_W\}} = y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3 = y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aus $T(v) = [T(v)]_{\{B_W\}}$ folgt

$$\left.\begin{array}{rclclcl} 7 & = & y_1 & + & y_2 & + & y_3 \\ 9 & = & y_1 & + & y_2 & & \\ 8 & = & y_1 & & & & \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcr} y_1 & = & 8 \\ y_2 & = & 1 \\ y_3 & = & -2 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow [T(v)]_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}_{\{B_W\}} .$$

Einsetzen in (*) ergibt

$$D_{\{B_V \underset{\longrightarrow}{} B_W\}} [v]_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -10 \end{bmatrix}_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}_{\{B_W\}} = [T(v)]_{\{B_W\}}$$

und damit ist (2) bestätigt.

- Beispiel 2 (Allgemeinfall für $T \equiv T_{W \to V}$)

  Sei $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$ und

  $$B_v = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

  $$B_W = \{w_1, w_2, w_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

  Sei weiters $T_{W \to V} \equiv T : T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y - z \end{bmatrix}.$

- Laut (3) ist dann die darstellende Matrix

  $$D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}} = \left[[T(w_1)]_{\{B_V\}} \, [T(w_2)]_{\{B_V\}} \, [T(w_3)]_{\{B_V\}} \right].$$

$$T\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1\\1-1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_{\{B_V\}}=x\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x+y\\x\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}4x+y&=2\\x&=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_{\{B_V\}}=\begin{bmatrix}-1\\6\end{bmatrix}_{\{B_V\}}.$$

$$T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_{\{B_V\}}\Rightarrow\begin{bmatrix}4x+y\\x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_{\{B_V\}}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}_{\{B_V\}}$$

$$T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_{\{B_V\}}\Rightarrow\begin{bmatrix}4x+y\\x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_{\{B_V\}}=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}_{\{B_V\}}$$

Daher ist

$$D_{\{B_W \underset{\longrightarrow}{} B_V\}}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\6&2&-3\end{bmatrix}.$$

- Sei $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$.

  Dann sollte laut (4) gelten

$$D_{\{B_W \underset{\longrightarrow}{} B_V\}} [w]_{\{B_W\}} = [T(w)]_{\{B_V\}} \, .$$

$$T(w) = T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\{B_V\}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4x + y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\{B_V\}} .$$

$$[w]_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} x + y + z \\ x + y \\ x \end{bmatrix}$$

$$\text{Aus } w = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\{B_W\}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+z \\ x+y \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\{B_W\}}.$$

Dann

$$D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}}\,[w]_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\{B_V\}}$$

und damit ist (4) bestätigt.

Anmerkung (zum Allgemeinfall)

$$\dim(V) = n \qquad \dim(W) = m$$
$$T_{V\to W} : V \to W \quad T_{W\to V} : W \to V$$

- $D_{\{B_V \underrightarrow{} B_W\}}$ ist eine $m \times n$-Matrix.
- $D_{\{B_W \underrightarrow{} B_V\}}$ ist eine $n \times m$-Matrix.

  Daher:
- $D_{\{B_W \underrightarrow{} B_V\}} D_{\{B_V \underrightarrow{} B_W\}}$ ist eine $n \times n$-Matrix und entspricht folgender Abbildung $V \to V$ für $\forall v \in V$

(5) $D_{\{B_W \underrightarrow{} B_V\}} D_{\{B_V \underrightarrow{} B_W\}} [v]_{\{B_V\}} = [T_{W\to V}(T_{V\to W}(v))]_{\{B_V\}}$.

- $D_{\{B_V \underrightarrow{} B_W\}} D_{\{B_W \underrightarrow{} B_V\}}$ ist eine $m \times m$-Matrix und entspricht folgender Abbildung $W \to W$ für $\forall w \in W$:

(6) $D_{\{B_V \underrightarrow{} B_W\}} D_{\{B_W \underrightarrow{} B_V\}} [w]_{\{B_W\}} = [T_{V\to W}(T_{W\to V}(w))]_{\{B_W\}}$.

Begründung (der Anmerkung zum Allgemeinfall)

- Für (5): $D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}} D_{\underrightarrow{\{B_V B_W\}}} [v]_{\{B_V\}} = [T_{W\to V}(T_{V\to W}(v))]_{\{B_V\}}$

  Laut (2) ist:

  $D_{\underrightarrow{\{B_V B_W\}}} [v]_{\{B_V\}} = [T(v)]_{\{B_W\}} \equiv [T_{V\to W}(v)]_{\{B_W\}}.$

  Multiplikation mit $D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}}$ ergibt:

(a_1) $D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}} D_{\underrightarrow{\{B_V B_W\}}} [v]_{\{B_V\}} = D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}} [T_{V\to W}(v)]_{\{B_W\}}$

  Laut (4) ist:

  $D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}} [w]_{\{B_W\}} = [T(w)]_{\{B_V\}} \equiv [T_{W\to V}(w)]_{\{B_V\}}.$

  Einsetzen $w = T(v) \equiv T_{V\to W}(v)$ ergibt:

(b_1) $D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}} [T_{V\to W}(v)]_{\{B_W\}} = [T_{W\to V}(T_{V\to W}(v))]_{\{B_V\}}$

  Aus der Gleichheit der linken Seite von (a_1) und der rechten Seite von (b_1) ergibt sich (5).

- Für (6): $D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}} D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}} [w]_{\{B_W\}} = [T_{V \to W}(T_{W \to V}(w))]_{\{B_W\}}$
  Laut (4) ist:
  $D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}} [w]_{\{B_W\}} = [T(w)]_{\{B_V\}} \equiv [T_{W \to V}(w)]_{\{B_V\}}$.
  Multiplikation mit $D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}}$ ergibt:

(a_2) $D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}} D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}} [w]_{\{B_W\}} = D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}} [T_{W \to V}(w)]_{\{B_V\}}$

Laut (2) ist:
$D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}} [v]_{\{B_V\}} = [T(v)]_{\{B_W\}} \equiv [T_{V \to W}(v)]_{\{B_W\}}$.
Einsetzen $v = T(w) \equiv T_{W \to V}(w)$ ergibt:

(b_2) $D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}} [T_{W \to V}(w)]_{\{B_V\}} = [T_{V \to W}(T_{W \to V}(w))]_{\{B_W\}}$

Aus der Gleichheit der linken Seite von (a_2) und der rechten Seite von (b_2) folgt die Gültigkeit von (6).

Beispiel (zur Anmerkung Allgemeinfall)

$V = \mathbb{R}^2,\ W = \mathbb{R}^3 \Rightarrow n = 2, m = 3$

$B_V,\ B_W$ wie in Beispiel 1 und Beispiel 2, so wie auch die Abbildungen

$$T_{V\to W} \equiv T : T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 3x+y \\ x+2y \end{bmatrix}$$

$$T_{W\to V} \equiv T : T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y-z \end{bmatrix}$$

Aus Beispiel 1: $D_{\{\underset{\longrightarrow}{B_V B_W}\}} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

Aus Beispiel 2: $D_{\{\underset{\longrightarrow}{B_W B_V}\}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

- Formel (5): $D_{\{B_W \underrightarrow{} B_V\}} D_{\{B_V \underrightarrow{} B_W\}} [v]_{\{B_V\}} = [T_{W\to V}(T_{V\to W}(v))]_{\{B_V\}}$

  Sei $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \in V$.

  Dann ist die rechte Seite von (5)

$$T_{V\to W}(v) = T_{V\to W}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 - 2 \\ 3\cdot 1 - 2 \\ 1 - 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$$T_{W\to V}(T_{V\to W}(v)) = T_{W\to V}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1 \\ 0-1-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\{B_V\}} = xv_1 + yv_2 = x\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x+y \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2 \\ y = -7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow [T_{W\to V}(T_{V\to W}(v))]_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}_{\{B_V\}}$$

Die linke Seite von (5):

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\{B_V\}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4x + y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= -2 \\ y &= 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = [v]_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \end{bmatrix}_{\{B_V\}}$$

$$D_{\{\underset{\longrightarrow}{B_W B_V}\}} D_{\{\underset{\longrightarrow}{B_V B_W}\}} [v]_{\{B_V\}} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \end{bmatrix}_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} -10 & -2 \\ 62 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}_{\{B_V\}}$$

Durch die Gleichheit beider Seiten ist die Gültigkeit von (5) gezeigt.

- Formel (6): $D_{\{B_V \underrightarrow{} B_W\}} D_{\{B_W \underrightarrow{} B_V\}} [w]_{\{B_W\}} = [T_{V\to W}(T_{W\to V}(w))]_{\{B_W\}}$

$$\text{Sei } w = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \in W. \text{ Dann ist } [w]_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}_{\{B_W\}} \quad \text{(siehe Beispiel 2).}$$

$$T_{W\to V}(w) = \begin{bmatrix}1+0\\1-0-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \Rightarrow T_{V\to W}(T_{W\to V}(w)) = T_{V\to W}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}_{\{B_W\}} = xw_1 + yw_2 + zw_3 = x\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+y+z\\x+y\\x\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rr} x = & 1 \\ y = & 2 \\ z = & -1 \end{array}\right\} \Rightarrow [T_{V\to W}(T_{W\to V}(w))]_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}_{\{B_W\}}$$

$$D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}} D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}} [w]_{\{B_W\}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}_{\{B_W\}}$$

Damit ist die Gültigkeit von (6) gezeigt.

Spezialfall 1

Anmerkung (zu: Matrix einer linearen Abbildung)

Wiederholung:

Sei $T : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$.
Die dazugehörige Matrix A hat Spalten, die Bilder der Einheitsvektoren sind.

Also

$A = [T(e_1)\ T(e_2)\ \dots\ T(e_n)]$.

Diese Matrix ist ein Spezialfall der darstellenden Matrix.

Fall 1.1

In diesem Fall haben wir
$V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, $T_{V\to W} \equiv T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,
$B_V = E_V = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, B_W = E_W = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

Dies ist ein Sonderfall, wenn beide Basen kanonische Basen sind, weil laut unserer Auslegung (siehe (1)) gilt:

$$
\begin{aligned}
D_{\underrightarrow{\{B_V B_W\}}} = D_{\underrightarrow{\{E_V E_W\}}} = D_{\underrightarrow{\{E_n E_m\}}} &= [[T(e_1)]_{\{E_W\}}\ [T(e_2)]_{\{E_W\}}\ \ldots\ [T(e_n)]_{\{E_W\}}] \\
&= [T(e_1)\ T(e_2)\ \ldots\ T(e_n)] = A\,.
\end{aligned}
$$

Also ist die Matrix A die darstellende Matrix der linearen Abbildung T bezüglich der kanonischen Basen des $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$.

Es gilt (laut (2)) für $\forall v \in V$ (Angabe der Einheitsbasen weggelassen)

$$
D_{\underrightarrow{\{E_V E_W\}}}[v]_{\{E_V\}} = [T(v)]_{\{E_W\}} \Rightarrow D_{\underrightarrow{\{E_V E_W\}}} v = D_{\underrightarrow{\{E_n E_m\}}} v = T(v),
$$

und das ist äquivalent zu $Av = T(v)$.

Beispiel (Fall 1.1) $\quad V = \mathbb{R}^2, \quad W = \mathbb{R}^3$

$$T_{V\to W} \equiv T : T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 3x+y \\ x+2y \end{bmatrix}$$

- $D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}} = D_{\{\underrightarrow{E_2 E_3}\}} = \left[[T(e_1)]_{\{E_3\}} \; [T(e_2)]_{\{E_3\}}\right] =$

$$= \left[T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\; T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix} 2\cdot 1+0 \\ 3\cdot 1+0 \\ 1+2\cdot 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\cdot 0+1 \\ 3\cdot 0+1 \\ 0+2\cdot 1 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Sei $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in V$.

$$D_{\{\underrightarrow{E_2 E_3}\}} v = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$T(v) \equiv T_{V\to W}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2-1 \\ 3\cdot 2-1 \\ 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Fall 1.2

$V = \mathbb{R}^n,\ W = \mathbb{R}^m,\ T_{W\to V} \equiv T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

! T ist anders als im Fall 1.1

$B_V = E_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \equiv \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$B_W = E_m = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \equiv \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$

- Die darstellende Matrix $D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}}$ der linearen Abbildung $T_{W\to V} \equiv T$ ist in diesem Fall

$$D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}} \overset{\substack{B_W = E_W \\ B_V = E_V}}{=} D_{\underrightarrow{\{E_W E_V\}}} \overset{\substack{E_W = E_m \\ E_V = E_n}}{=} D_{\underrightarrow{\{E_m E_n\}}}\,.$$

Laut (3) ist

$$D_{\{B_W \underset{\longrightarrow}{} B_V\}} = [[T(w_1)]_{\{B_V\}} \ [T(w_2)]_{\{B_V\}} \ \dots \ [T(w_m)]_{\{B_V\}}]$$

$\Rightarrow$ für $B_V = E_n$, $B_W = E_m$ und $w_i = e_i$, $i = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} D_{\{E_m \underset{\longrightarrow}{} E_n\}} &= [T(e_1) \ T(e_2) \ \dots \ T(e_m)] \\ &\equiv [T_{W\to V}(e_1), T_{W\to V}(e_2), \dots, T_{W\to V}(e_m)]. \end{aligned}$$

- Dann gilt laut (4) für $\forall w \in W$

$$D_{\{B_W \underset{\longrightarrow}{} B_V\}}[w]_{\{B_W\}} = [T(w)]_{\{B_V\}} \Rightarrow \quad \text{für } B_W = E_m \text{ und } B_V = En$$

$$D_{\{E_m \underset{\longrightarrow}{} E_n\}} w = T(w) \equiv T_{W\to V}(w).$$

Beispiel (Fall 1.2)

$$V = \mathbb{R}^2, \quad W = \mathbb{R}^3$$

$$T_{W\to V} \equiv T : T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y-z \end{bmatrix}$$

- $D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}} = D_{\{\underrightarrow{E_3 E_2}\}} = \left[T(e_1)_{\{E_2\}} \; T(e_2)_{\{E_2\}} \; T(e_3)_{\{E_2\}} \right] =$

$$= \left[T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] =$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 1+0 \\ 1-0-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0+1 \\ 0-1-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0+0 \\ 0-0-1 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Sei $w = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in W = \mathbb{R}^{3}$.

$$D_{\underrightarrow{\{E_3 E_2\}}} w = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$T(w) \equiv T_{W \to V} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 1 \\ 3 - (-1) - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Damit ist die Gültigkeit von (4) für diesen Fall gezeigt.

Anmerkung (zum Spezialfall 1)

$V = \mathbb{R}^n, \quad W = \mathbb{R}^m, \quad T_{V\to W} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad T_{W\to V} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

- $D_{\{\underrightarrow{E_n E_m}\}}$ ist eine $m \times n$-Matrix (Fall 1.1)
- $D_{\{\underrightarrow{E_m E_n}\}}$ ist eine $n \times m$-Matrix (Fall 1.2)
- $D_{\{\underrightarrow{E_m E_n}\}} D_{\{\underrightarrow{E_n E_m}\}}$ ist eine $n \times n$-Matrix
  und entspricht laut (5) folgender Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:
  für $\forall v \in \mathbb{R}^n$ gilt
  $$\begin{aligned} D_{\{\underrightarrow{E_m E_n}\}} D_{\{\underrightarrow{E_n E_m}\}} v &= T_{W\to V}(T_{V\to W}(v)) \\ &\equiv T_{\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n}(T_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m}(v)). \end{aligned}$$
- $D_{\{\underrightarrow{E_n E_m}\}} D_{\{\underrightarrow{E_m E_n}\}}$ ist eine $m \times m$-Matrix
  und entspricht laut (6) folgender Abbildung $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$:
  für $\forall w \in \mathbb{R}^m$ gilt
  $$\begin{aligned} D_{\{\underrightarrow{E_n E_m}\}} D_{\{\underrightarrow{E_m E_n}\}} w &= T_{V\to W}(T_{W\to V}(w)) \\ &\equiv T_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m}(T_{\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n}(w)). \end{aligned}$$

Beispiel (zur Anmerkung zum Spezialfall 1)

Sei $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$ und $B_V = E_2$, $B_W = E_3$.

Fall 1.1

$$T_{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3} : T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 3x + y \\ x + 2y \end{bmatrix}$$

$$D_{\underrightarrow{\{E_n E_m\}}} = D_{\underrightarrow{\{E_2 E_3\}}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Fall 1.2

$$T_{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2} : T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y - z \end{bmatrix}$$

$$D_{\underrightarrow{\{E_m E_n\}}} = D_{\underrightarrow{\{E_3 E_2\}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$D_{\underrightarrow{\{E_m E_n\}}} D_{\underrightarrow{\{E_n E_m\}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$D_{\underrightarrow{\{E_n E_m\}}} D_{\underrightarrow{\{E_m E_n\}}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

- Formel (5):

Sei $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in V = \mathbb{R}^2$.

$$D_{\{\underrightarrow{E_m E_n}\}} D_{\{\underrightarrow{E_n E_m}\}} \, v = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$T_{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2} \left[T_{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3}(v) \right] = T_{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2} \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \\ 3 \cdot 2 + 3 \\ 2 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= T_{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 + 9 \\ 7 - 9 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -10 \end{bmatrix}$$

- Formel (6):

Sei $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in W \in \mathbb{R}^3$.

$$D_{\{\underrightarrow{E_n E_m}\}} D_{\{\underrightarrow{E_m E_n}\}} w = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$T_{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3} \left[T_{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2}(v) \right] = T_{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3} \begin{bmatrix} 0 + 1 \\ 0 - 1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 - 3 \\ 3 \cdot 1 - 3 \\ 1 - 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Spezialfall 2

$$V = W,\ \dim(V) = \dim(W) = n.$$

Fall 2.1

$$T_{V\to W} \equiv T : V \to W$$
$$B_V = \{v_1, v_1, \ldots, v_n\} = E_v = E_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$
$$B_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} = B = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

- Dann ist die darstellende Matrix der linearen Abbildung $T \equiv T_{V\to W}$ bezüglich der Basis B eine $n \times n$-Matrix

$$D_{\underrightarrow{\{B_V B_W\}}} \stackrel{\substack{B_V = E_n \\ B_W = B}}{=} D_{\underrightarrow{\{E_n B\}}} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\overset{(1)}{=} \left[[T(v_1)]_{\{B_W\}}\ [T(v_2)]_{\{B_W\}}\ \dots\ [T(v_n)]_{\{B_W\}}\right] =$$

$$\overset{\substack{v_i=e_i,i=1,\dots,n \\ B_W=B}}{=} \left[[T(e_1)]_{\{B\}}\ [T(e_2)]_{\{B\}}\ \dots\ [T(e_n)]_{\{B\}}\right].$$

Also ist die Spalte

$$d_i = \begin{bmatrix} d_{1i} \\ d_{21} \\ \vdots \\ d_{ni} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

der darstellenden Matrix das Bild des i-ten Basisvektors $e_i \in E_n$ bezüglich der Basis B.

- Dann gilt für alle $v \in V$ $(= W)$

$$\color{red}{D_{\underrightarrow{\{E_n B\}}}}[v]_{\{B_V\}} \overset{B_V = E_n}{=} \color{red}{D_{\underrightarrow{\{E_n B\}}}} v \overset{\color{blue}{(2)}}{=} [T(v)]_{\{B_W\}} \overset{B_W = B}{=} [T(v)]_{\{B\}} \Rightarrow$$

$$\color{red}{D_{\underrightarrow{\{E_n B\}}}} v = [T(v)]_{\{B\}}.$$

Also ergibt das Produkt von v (dargestellt zur kanonischen Basis E_n) mit der darstellenden Matrix $\color{red}{D_{\underrightarrow{\{E_n B\}}}}$ die Koordinaten von $T(v)$ bezüglich der Basis B.

Beispiel Fall 2.1

$$V = W = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim(V) = \dim(W) = 2 \qquad B = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$$T_{V \to W} \equiv T : T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ x - 3y \end{bmatrix} \qquad w_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Dann ist die darstellende Matrix

$$D_{\underrightarrow{\{E_n B\}}} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \left[[T(e_1)]_{\{B\}} \; [T(e_2)]_{\{B\}} \right]$$

$$T(e_1) = T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad [T(e_1)]_{\{B\}} = d_{11} w_1 + d_{21} w_2 \Rightarrow$$

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = d_{11} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + d_{21} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{rl} 2 & = 4d_{11} + d_{21} \\ 1 & = \quad d_{11} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{rl} d_{11} & = 1 \\ d_{21} & = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow [T(e_1)]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}_{\{B\}}$$

$$T(e_2) = T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix} \quad [T(e_2)]_{\{B\}} = d_{12}w_1 + d_{22}w_2 \Rightarrow$$

$$T(e_2) = \begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix} = d_{12}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} + d_{22}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 0 & = & 4d_{12} + d_{22} \\ -3 & = & d_{12} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d_{12} = -3 \\ d_{22} = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow [T(e_2)]_{\{B\}} = \begin{bmatrix}-3\\12\end{bmatrix}_{\{B\}}$$

Also ist $D_{\{\underrightarrow{E_n} B\}} = \begin{bmatrix}1 & -3\\-2 & 12\end{bmatrix}$ die darstellende Matrix der linearen Abbildung T bezüglich der Basis B.

- Sei $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$$T(v) = T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$[T(v)]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}_{\{B\}} = x_2 w_1 + y_2 w_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$T(v) = \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_2 + y_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcr} x_2 & = & -7 \\ y_2 & = & 26 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow [T(v)]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} -7 \\ 26 \end{bmatrix}_{\{B\}}$$

Dann ist

$$D_{\underrightarrow{\{E_n B\}}} v = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 26 \end{bmatrix}_{\{B\}} = [T(v)]_{\{B\}} \equiv [T_{V \to W}(v)]_{\{B\}}.$$

Fall 2.2

$V = W, \dim(V) = \dim(W) = n$, $T_{W\to V} \equiv T : W \to V$.
$B_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} = B$.
$B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = E_W = E_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

- Dann ist die darstellende Matrix der linearen Abbildung bezüglich der Basis B die $n \times n$-Matrix

$$D_{\underset{\longrightarrow}{\{B_W B_V\}}} \overset{\substack{B_W = B \\ B_V = E_n}}{=} D_{\underset{\longrightarrow}{\{BE_n\}}} = \begin{bmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \ldots & d_{nn} \end{bmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$\left[[T(w_1)]_{\{B_V\}}\ [T(w_2)]_{\{B_V\}}\ \ldots\ [T(w_n)]_{\{B_V\}}\right] \overset{B_V = E_n}{=} [T(w_1)\ T(w_2)\ \ldots\ T(w_n)]$$

$$\equiv [T_{W\to V}(w_1)\ T_{W\to V}(w_2)\ \ldots\ T_{W\to V}(w_n)]\,.$$

Also sind die Spalten Bilder von Basisvektoren der Basis B (dargestellt in der kanonischen Basis).

- Für alle $w \in W$ gilt (laut (4)):

  $D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}}[w]_{\{B_W\}} = [T(w)]_{\{B_V\}} \Rightarrow \text{für } B_W = B, B_V = E_n$

  $D_{\underrightarrow{\{BE_n\}}}[w]_{\{B\}} = T(w) \equiv T_{W \to V}(w).$

  Das Produkt von w (dargestellt zur Basis B) mit der darstellenden Matrix $D_{\underrightarrow{\{BE_n\}}}$ ist gleich dem Bild von w (zur Basis E_n dargestellt) in der Einheitsbasis.

Beispiel Fall 2.2

$$V = W = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim(V) = \dim(W) = 2$$

$$T_{W \to V} \equiv T : T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x + 2y \end{bmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Die darstellende Matrix in diesem Fall ist:

$$\begin{aligned} D_{\underset{\longrightarrow}{\{BE_n\}}} &= [T(w_1)\, T(w_2)] \\ &= \left[T \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \left[\begin{bmatrix} 4 \\ 4 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Sei $w = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \in W = V = \mathbb{R}^2$.

  Laut (4) soll gelten $D_{\{\underrightarrow{BE_n}\}}[w]_{\{B\}} = T(w)$.

  $$[w]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\{B\}} = xw_1 + yw_2 = x \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x + y \\ x \end{bmatrix}$$

  Aus $w = [w]_{\{B\}} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4x + y &= -1 \\ x &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow [w]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \end{bmatrix}_{\{B\}}$

  $$T(w) = T \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

  Durch die Multiplikation mit $D_{\{\underrightarrow{BE_n}\}}$ bekommt man

  $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \end{bmatrix}_{\{B\}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, womit die Gültigkeit von (4) bestätigt ist.

Fall 2.3

$V = W$, $\dim(V) = \dim(W) = n$, $T : V \to V$
$B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = B$
$B_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} = B \quad \Rightarrow \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$

- Dann ist die darstellende Matrix der linearen Abbildung T bezüglich der Basis B die $n \times n$-Matrix

$$D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}} \overset{\substack{B_V = B \\ B_W = B}}{=} D_{\{\underrightarrow{BB}\}} = \begin{bmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \ldots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\overset{(1)}{=} \left[[T(v_1)]_{\{B_W\}} \; [T(v_2)]_{\{B_W\}} \; \ldots \; [T(v_n)]_{\{B_W\}} \right]$$

$$\overset{B_W = B}{=} \left[[T(v_1)]_{\{B\}} \; [T(v_2)]_{\{B\}} \; \ldots \; [T(v_n)]_{\{B\}} \right].$$

Also sind deren Spalten Bilder von Vektoren der Basis B (zur Basis B dargestellt).

- Für alle $v \in V$ gilt:

$$\color{red}{D_{\{\underrightarrow{BB}\}}}[v]_{\{B_V\}} \overset{B_V=B}{=} \color{red}{D_{\{\underrightarrow{BB}\}}}[v]_{\{B\}} \overset{\color{blue}{(2)}}{=} [T(v)]_{\{B_W\}} \overset{B_W=B}{=} [T(v)]_{\{B\}}.$$

Das Produkt von v (dargestellt zur Basis B) mit der darstellenden Matrix $\color{red}{D_{\{\underrightarrow{BB}\}}}$ ist gleich dem Bild von v, welcher zur gleichen Basis B dargestellt ist.

Beispiel (Fall 2.3)

$$V = W = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim(V) = \dim(W) = 2$$

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ x - 3y \end{bmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Die darstellende Matrix:

$$D_{\{\underrightarrow{BB}\}} = \left[[T(v_1)]_{\{B\}} \; [T(v_2)]_{\{B\}} \right]$$

$$T(v_1) = T\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 \\ 4 - 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(v_2) = T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 \\ 1 - 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[T(v_1)]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix}_{\{B\}} = d_{11}v_1 + d_{21}v_2 = d_{11}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + d_{21}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4d_{11} + d_{21} \\ d_{11} \end{bmatrix}$$

Aus $T(v_1) = T(v_1)_{\{B\}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4d_{11} + d_{21} \\ d_{11} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} d_{11} = 1 \\ d_{21} = 4 \end{array}.$

$$[T(v_2)]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{bmatrix} = d_{12}v_1 + d_{22}v_2 = d_{12}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + d_{22}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4d_{12} + d_{22} \\ d_{12} \end{bmatrix}$$

Aus $T(v_2) = T(v_2)_{\{B\}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4d_{12} + d_{22} \\ d_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} d_{12} = 1 \\ d_{22} = -2 \end{array}.$

Also $D_{\{\underrightarrow{BB}\}} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$

- Es soll gelten für $\forall v \in V$:

$$D_{\{\underrightarrow{BB}\}} v_{\{B\}} = [T(v)]_{\{B\}}.$$

Für $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ist $v_{\{B\}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \end{bmatrix}_{\{B\}}$ (siehe Bsp. Fall 2.2).

$[T(v)]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} -7 \\ 26 \end{bmatrix}_{\{B\}}$ (siehe Bsp. Fall 2.1)

Einsetzen von $D_{\{\underrightarrow{BB}\}}$ ergibt $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 26 \end{bmatrix}$, womit die Gültigkeit der Transformation bestätigt ist.

Anmerkung zum Spezialfall 2

$V = W = \mathbb{R}^n \qquad T_{V\to W} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad T_{W\to V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$B_V = E_n \quad B_W = B$

- $D_{\{\underrightarrow{E_n B}\}}$ ist eine $n \times n$-Matrix (Fall 2.1)
- $D_{\{\underrightarrow{B E_n}\}}$ ist eine $n \times n$-Matrix (Fall 2.2)

- $D_{\underrightarrow{\{BE_n\}}}\, D_{\underrightarrow{\{E_nB\}}}$ ist eine $n \times n$-Matrix und entspricht laut (5) folgender Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

  für $\forall v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}}\, D_{\underrightarrow{\{B_V B_W\}}}\, [v]_{\{B_V\}} = [T_{W\to V}(T_{V\to W}(v))]_{\{B_V\}} \xrightarrow[]{\substack{B_V=E_n\\ B_W=B}}$$

$$D_{\underrightarrow{\{BE_n\}}}\, D_{\underrightarrow{\{E_nB\}}}\, v \; = [T_{W\to V}(T_{V\to W}(v))]$$

- $D_{\underrightarrow{\{E_nB\}}}\, D_{\underrightarrow{\{BE_n\}}}$ ist eine $n \times n$-Matrix und entspricht laut (6) folgender Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

  für $\forall w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$D_{\underrightarrow{\{B_V B_W\}}}\, D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}}\, [w]_{\{B_W\}} = [T_{V\to W}(T_{W\to V}(w))]_{\{B_W\}} \xrightarrow[]{\substack{B_V=E_n\\ B_W=B}}$$

$$D_{\underrightarrow{\{E_nB\}}}\, D_{\underrightarrow{\{BE_n\}}}\, [w]_{\{B\}} = [T_{V\to W}(T_{W\to V}(w))]_{\{B\}}$$

Beispiel zur Anmerkung zum Spezialfall 2

Sei $V = W = \mathbb{R}^2$ und $B = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ (wie in den Beispielen zu Fall 2.1 und Fall 2.2).

$$T_{V \to W} \equiv T : T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ x - 3y \end{bmatrix} \text{ (wie im Beispiel Fall 2.1)}$$

$$T_{W \to V} \equiv T : T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x + 2y \end{bmatrix} \text{ (wie im Beispiel Fall 2.2)}$$

Aus Beispiel Fall 2.1: $D_{\underrightarrow{\{E_n B\}}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 12 \end{bmatrix}$

Aus Beispiel Fall 2.2: $D_{\underrightarrow{\{B E_n\}}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

Formel (5)

Für $\forall v \in V = \mathbb{R}^2$

$$D_{\{\underrightarrow{BE_n}\}}\, D_{\{\underrightarrow{E_nB}\}}\, v \; = T_{W\to V}(T_{V\to W}(v))\,.$$

Sei $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \in V$.

Die linke Seite der Gleichung ist:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Die rechte Seite der Gleichung ist:

$$T_{V\to W} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 \\ 4 - 3 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$T_{W\to V} \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 + 2 \cdot 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Also: linke Seite $=$ rechte Seite $\Rightarrow$ Gültigkeit der Formel (5) gezeigt.

Formel (6)

Für $\forall w \in W = \mathbb{R}^2$

$$\color{red}{D_{\{\underrightarrow{E_n B}\}}\ D_{\{\underrightarrow{B E_n}\}}}\, [w]_{\{B\}} = [T_{V \to W}(T_{W \to V}(w))]_{\{B\}} \ .$$

Sei $w = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \in W$.

Dann ist $[w]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \end{bmatrix}_{\{B\}}$ (siehe Beispiel Fall 2.2)

Die linke Seite der Gleichung ist:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \end{bmatrix}_{\{B\}} = \begin{bmatrix} -14 & -2 \\ 64 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \end{bmatrix}_{\{B\}} = \begin{bmatrix} -10 \\ 38 \end{bmatrix}_{\{B\}}$$

Berechnung der rechten Seite:

$$T_{W\to V}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1+2\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{V\to W}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-1-3\cdot 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-10\end{bmatrix}$$

Dann ist die rechte Seite der Gleichung:

$$\begin{bmatrix}-2\\-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_{\{B\}}=x\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x+y\\x\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}x&=-10\\y&=38\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}_{\{B\}}=\begin{bmatrix}-10\\38\end{bmatrix}_{\{B\}}$$

Also: linke Seite = rechte Seite $\Rightarrow$ Gültigkeit der Formel (6) gezeigt.

Spezialfall 3 (Koordinatenwechsel-Matrix von $B_V \to B_W$ und $B_W \to B_V$)

$V = W \Rightarrow \dim(V) = \dim(W) = n$

$T_{V \to W} = T_{W \to V} \equiv T = I_n$

das heißt $\forall v \in V : T(v) = I_n(v) = v$

B_V, B_W: Basen von $V = W$

$B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
$B_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$

Fall 3.1

- Die darstellende Matrix $D_{\underrightarrow{\{B_V B_W\}}}$ für den Koordinatenwechsel von der Basis B_V zur Basis B_W ist:

$$D_{\underrightarrow{\{B_V B_W\}}} \overset{(1)}{=} \left[[T(v_1)]_{\{B_W\}} \; [T(v_2)]_{\{B_W\}} \; \cdots \; [T(v_n)]_{\{B_W\}} \right] =$$

$$\overset{T=I_n}{=} \left[[v_1]_{\{B_W\}} \; [v_2]_{\{B_W\}} \; \cdots \; [v_n]_{\{B_W\}} \right]$$

- Für jeden Vektor $v \in V$ zur Basis B_V gilt:

$$D_{\underrightarrow{\{B_V B_W\}}} [v]_{\{B_V\}} \overset{(2)}{=} [T(v)]_{\{B_W\}} \overset{T=I_n}{=} [v]_{\{B_W\}}$$

Fall 3.2

Analog gilt:

- Die darstellende Matrix $D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}}$ für den Koordinatenwechsel von der Basis B_W zur Basis B_V ist:

$$D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}} \overset{(3)}{=} \left[[T(w_1)]_{\{B_V\}} \; [T(w_2)]_{\{B_V\}} \; \dots \; [T(w_n)]_{\{B_V\}} \right] =$$

$$\overset{T=I_n}{=} \left[[w_1]_{\{B_V\}} \; [w_2]_{\{B_V\}} \; \dots \; [w_n]_{\{B_V\}} \right]$$

- Für jeden Vektor $w \in W$ zur Basis B_W gilt:

$$D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}} [w]_{\{B_W\}} \overset{(4)}{=} [T(w)]_{\{B_V\}} \overset{T=I_n}{=} [w]_{\{B_V\}}$$

Beispiel Fall 3.1

$$V = W = \mathbb{R}^2,\ B_V = \left\{ \overset{v_1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}, \quad B_W = \left\{ \overset{w_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}} \right\}$$

- $D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}} = \begin{bmatrix} [v_1]_{\{B_W\}} & [v_2]_{\{B_W\}} \end{bmatrix}$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix}_{\{B_W\}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = d_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + d_{21} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} - d_{21} \\ d_{11} - 2d_{21} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} d_{11} - d_{21} = 2 \\ d_{11} - 2d_{21} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix}_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{\{B_W\}}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{bmatrix}_{\{B_W\}} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = d_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + d_{22} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{12} - d_{22} \\ d_{12} - 2d_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} d_{12} - d_{22} &= -1 \\ d_{12} - 2d_{22} &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{bmatrix}_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}_{\{B_W\}}$$

Dann ist $D_{\underrightarrow{\{B_V B_W\}}} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

- Sei $[v]_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}_{\{B_V\}}$.

  Dann sollte gelten:

$$[v]_{\{B_W\}} = D_{\underrightarrow{\{B_V B_W\}}} [v]_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \end{bmatrix}_{\{B_W\}}$$

Probe:

$$[v]_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\{B_W\}} = xw_1 + yw_2 = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ x - 2y \end{bmatrix}$$

$$v_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}_{\{B_V\}} = 2v_1 - 4v_2 = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Aus der Gleichheit beider Vektoren folgt:

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ x - 2y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= 8 + y \\ x &= -2 + 2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 18 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

Also $[v]_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \end{bmatrix}_{\{B_W\}}$.

Beispiel Fall 3.2

$$V = W = \mathbb{R}^2,\ B_V = \left\{ \overset{v_1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}, \quad B_W = \left\{ \overset{w_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}} \right\}$$

- $D_{\{\overrightarrow{B_W B_V}\}} = \begin{bmatrix} [w_1]_{\{B_V\}} & [w_2]_{\{B_V\}} \end{bmatrix}$

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix}_{\{B_V\}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = d_{11} v_1 + d_{21} v_2 =$$

$$= d_{11} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + d_{21} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2d_{11} - d_{21} \\ d_{11} + d_{21} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 2d_{11} - d_{21} &= 1 \\ d_{11} + d_{21} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{bmatrix}_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}_{\{B_V\}}$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{bmatrix}_{\{B_V\}} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = d_{12} v_1 + d_{22} v_2 =$$

$$= d_{12} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + d_{22} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2d_{12} - d_{22} \\ d_{12} + d_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 2d_{12} - d_{22} &= -1 \\ d_{12} + d_{22} &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{bmatrix}_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}_{\{B_V\}}$$

Dann ist $D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1 \\ 1/3 & -1 \end{bmatrix}.$

- Sei $[w]_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}_{\{B_W\}}$. Dann sollte gelten:

$$[w]_{\{B_V\}} = D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}} [w]_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1 \\ 1/3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} 16/3 \\ 14/3 \end{bmatrix}_{\{B_V\}}$$

Probe:

$$[w]_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\{B_V\}} = xv_1 + yv_2 = x \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + y \end{bmatrix}$$

$$w_{\{B_W\}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}_{\{B_W\}} = 2w_1 - 4w_2 = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Aus der Gleichheit beider Vektoren folgt:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + y \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x - y &= 6 \\ x + y &= 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 16/3 \\ y &= 14/3 \end{aligned}$$

Also $[w]_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\{B_V\}} = \begin{bmatrix} 16/3 \\ 14/3 \end{bmatrix}_{\{B_V\}}$.

Anmerkung zum Spezialfall 3

V=W=$\mathbb{R}^n$ $\quad B_V, B_W$: Basen in $\mathbb{R}^n$

$T_{V\rightarrow W} = T_{W\rightarrow V} \equiv T = I_n$

- $D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}}$ ist eine $n \times n$-Matrix (Fall 3.1)
- $D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}}$ ist eine $n \times n$-Matrix (Fall 3.2)

- $D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}}\ D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}}$ ist eine $n \times n$-Matrix und entspricht laut (5) folgender Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

  für $\forall v \in \mathbb{R}^n$ gilt

  $$D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}}\ D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}}\,[v]_{\{B_V\}} = [T_{W\to V}(T_{V\to W}(v))]_{\{B_V\}} \xRightarrow[T_{V\to W}=I_n]{T_{W\to V}=I_n}$$

  $$D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}}\ D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}}\,[v]_{\{B_V\}} = [v]_{\{B_V\}}$$

  $\Rightarrow$ die Matrizen $D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}}$, $D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}}$ sind zueinander invers.

- $D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}}\ D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}}$ ist eine $n \times n$-Matrix und entspricht laut (6) folgender Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

  für $\forall w \in \mathbb{R}^n$ gilt

  $$D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}}\ D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}}\,[w]_{\{B_W\}} = [T_{V\to W}(T_{W\to V}(w))]_{\{B_W\}} \xRightarrow[T_{W\to V}=I_n]{T_{V\to W}=I_n}$$

  $$D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}}\ D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}}\,[w]_{\{B_W\}} = [w]_{\{B_W\}}$$

  $\Rightarrow$ die Matrizen $D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}}$, $D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}}$ sind zueinander invers.

Beispiel zur Anmerkung zum Spezialfall 3

$V = W = \mathbb{R}^2$

$B_V = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad B_W = \{w_1, w_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

(B_V, B_W gleich wie im Beispiel Fall 3.1 und Fall 3.2)

$T_{V \to W} = T_{W \to V} = I_n \; : \; I_n(v) = v \quad \forall v \in V = W$

Aus Beispiel Fall 3.1: $D_{\underrightarrow{\{B_V B_W\}}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$

Aus Beispiel Fall 3.2: $D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1 \\ 1/3 & -1 \end{bmatrix}.$

Es gilt:

$$D_{\underrightarrow{\{B_V B_W\}}} \, D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1 \\ 1/3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2$$

$$D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}} \, D_{\underrightarrow{\{B_V B_W\}}} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1 \\ 1/3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2$$

Damit ist gezeigt, dass die beiden Matrizen invers zueinander sind.

Spezialfall 4 (Koordinatenwechsel-Matrix von $E \to B$ und $B \to E$)

$$V = W, \quad \dim(V) = \dim(W) = n$$

$$T_{V \to W} = T_{W \to V} \equiv T = I_n$$

das heißt $\forall v \in V : T(v) = I_n(v) = v$

$$B_V = E_V = E_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$
$$B_W = B = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

Fall 4.1

- Die darstellende Matrix $D_{\underrightarrow{\{E_n B\}}}$ für den Koordinatenwechsel von der Basis E_n zur Basis B ist:

$$D_{\underrightarrow{\{B_V B_W\}}} \overset{\substack{B_V=E_n \\ B_W=B}}{=} D_{\underrightarrow{\{E_n B\}}} \overset{(1)}{=} \Big[[T(v_1)]_{\{B_W\}} \ [T(v_2)]_{\{B_W\}} \ \cdots \ [T(v_n)]_{\{B_W\}}\Big]$$

$$\overset{\substack{T=I_n \\ v_i=e_i \ i=1,\ldots,n \\ B_W=B}}{=} \quad = \Big[[e_1]_{\{B\}} \ [e_2]_{\{B\}} \ \cdots \ [e_n]_{\{B\}}\Big]$$

Also sind die Spalten dieser Matrix die Darstellungen von Einheitsvektoren zur Basis B.

- Dann gilt für alle $v \in V$:

$$D_{\{\underrightarrow{E_n B}\}}[v]_{\{B_V\}} \overset{B_V = E_n}{=} D_{\{\underrightarrow{E_n B}\}} v \overset{(2)}{=} [T(v)]_{\{B_W\}} \overset{\substack{T = I_n \\ B_W = B}}{=} [v]_{\{B\}}$$

Anmerkung

- Der Fall 4.1 ist analog zum Fall 2.1 ($T = I_n$).
- Der Fall 4.1 ist analog zum Fall 3.1 ($B_V = E_n$ und $B_W = B$).

Beispiel Fall 4.1

Sei $V = W = \mathbb{R}^2$ und $B_W = B = \left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} w_2 \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$

- Gesucht ist die Koordinatenwechsel-Matrix $D_{\{\underrightarrow{E_n B}\}}$
  Dimension: $n = 2$

$$D_{\{\underrightarrow{E_n B}\}} = \Big[[e_1]_{\{B\}} \; [e_2]_{\{B\}} \Big]$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{array}{c} w_1 \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} + x_2 \begin{array}{c} w_2 \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 3x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 1/3 \\ x_2 = -x_1 = -1/3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad [e_1]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}_{\{B\}}$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 \overset{w_1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}} + x_2 \overset{w_2}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} x_2 &=& 2x_1 \\ 3x_1 &=& 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = 1/3 \\ \Rightarrow x_2 = 2/3 \end{array}$$

$$\Rightarrow [e_2]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}_{\{B\}}$$

Dann ist $D_{\{\underrightarrow{E_n B}\}} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$

- Sei $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$.

  Gesucht ist $[v]_{\{B\}}$.

$$[v]_{\{B\}} = D_{\{\underrightarrow{E_n B}\}} v = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 \\ -1+4 \end{bmatrix}_{\{B\}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}_{\{B\}}$$

Probe:

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\{B\}} = xw_1 + yw_2 = x \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + y \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow x = 3,\ y = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\{B\}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}_{\{B\}}$$

Fall 4.2

Analog gilt:

- Die darstellende Matrix $D_{\{\underrightarrow{BE_n}\}}$ für den Koordinatenwechsel von der Basis B zur Basis E_n ist:

$$D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}} \overset{\substack{B_V=E_n\\ B_W=B}}{=} D_{\{\underrightarrow{BE_n}\}} \overset{(3)}{=} \Big[[T(w_1)]_{\{B_V\}} \; [T(w_2)]_{\{B_V\}} \; \dots \; [T(w_n)]_{\{B_V\}} \Big]$$

$$\overset{\substack{T=I_n\\ B_V=E_n}}{=} [w_1 \;\; w_2 \;\; \dots \;\; w_n]$$

Also sind deren Spalten die Basisvektoren von B.

- Für alle $w \in W$:

$$D_{\{\underrightarrow{BE_n}\}} [w]_{\{B_W\}} \overset{B_W=B}{=} D_{\{\underrightarrow{BE_n}\}} [w]_{\{B\}} \overset{(4)}{=} [T(w)]_{\{B_V\}} \overset{\substack{T=I_n \\ B_V=E_n}}{=} w$$

Das Produkt von w (dargestellt zur Basis B) mit der darstellenden Matrix $D_{\{\underrightarrow{BE_n}\}}$ ist gleich diesem Vektor zur kanonischen Basis E_n.

Anmerkung

- Der Fall 4.2 ist analog zum Fall 2.2 ($T = I_n$).
- Der Fall 4.2 ist analog zum Fall 3.2 ($B_V = E_n$ und $B_W = B$).

Beispiel Fall 4.2

$$V = W = \mathbb{R}^2,\ B_V = E_2,\ B_W = B = \left\{ \overset{w_1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}$$

- Die Koordinatenwechsel-Matrix von B zu E_n ist:

  $$D_{\{\underrightarrow{BE_n}\}} = [w_1\ w_2] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sei $[w]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}_{\{B\}}$.

  Dann ist w zur Basis E_n dargestellt:

  $$w = D_{\{\underrightarrow{BE_n}\}} [w]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}_{\{B\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

  Probe:

  $$[w]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}_{\{B\}} = 3w_1 + 6w_2 = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Anmerkung (Zusammenhang $D_{\underrightarrow{\{E_nB\}}}$ und $D_{\underrightarrow{\{BE_n\}}}$)

Da $D_{\underrightarrow{\{E_nB\}}}$ einen Vektor (in der kanonischen Basis dargestellt) zur Basis B transformiert (Fall 4.1) und $D_{\underrightarrow{\{BE_n\}}}$ den neuen Vektor zur Einheitsbasis zurücktransformiert (Fall 4.2), muss gelten: $D_{\underrightarrow{\{E_nB\}}}\, D_{\underrightarrow{\{BE_n\}}} = E_n$.
(Die Gleichheit folgt direkt auch aus den Formeln (5), (6) für diesen Fall.)

Weil $D_{\underrightarrow{\{BE_n\}}}\,[w_1, w_2 \ldots, w_n]$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix ist (da $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis in V bilden), gilt:

$$D_{\underrightarrow{\{E_nB\}}} = \left[D_{\underrightarrow{\{BE_n\}}}\right]^{-1}.$$

Analog ist $D_{\underrightarrow{\{E_nB\}}}$ invertierbar, daher folgt:

$$D_{\underrightarrow{\{BE_n\}}} = \left[D_{\underrightarrow{\{E_nB\}}}\right]^{-1}.$$

Beispiel zur Anmerkung

$$V = W = \mathbb{R}^2,\ B = \left\{ \overset{w_1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}$$

$$D_{\underrightarrow{\{E_n B\}}} \overset{\text{Bsp. 4.1}}{=} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \qquad D_{\underrightarrow{\{B E_n\}}} \overset{\text{Bsp. 4.2}}{=} [w_1\ w_2] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow D_{\underrightarrow{\{E_n B\}}} D_{\underrightarrow{\{B E_n\}}} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = D_{\underrightarrow{\{B E_n\}}} D_{\underrightarrow{\{E_n B\}}}$$

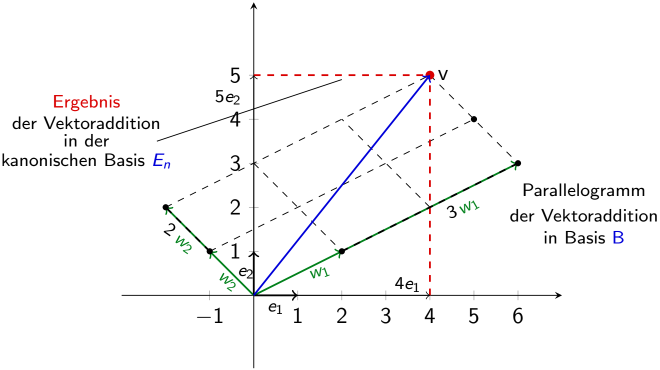
$\Rightarrow$ Die Matrizen $D_{\underrightarrow{\{E_n B\}}}$ (Fall 4.1) und $D_{\underrightarrow{\{B E_n\}}}$ (Fall 4.2) sind invers zueinander.

Koordinatenwechsel – Veranschaulichung

- $E_n \to B$ (Fall 4.1)

$$\text{Sei } B = \{w_1\, w_2\}, \quad w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \; [v]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\{B\}} = ?$$

$$\text{Dann ist} \quad v = x \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\{B\}} = [v]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\{B\}} = 3w_1 + 2w_2$$

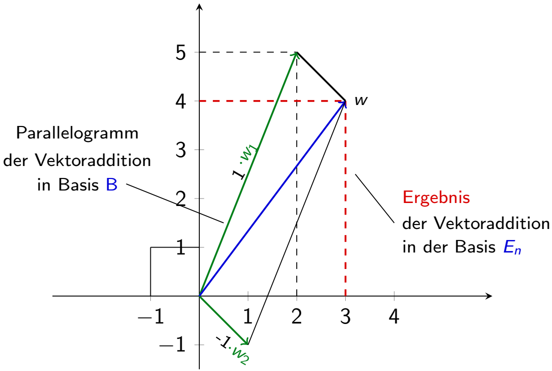


Koordinatenwechsel – Veranschaulichung

- $B \to E_n$ (Fall 4.2)

Sei $B = \{w_1\ w_2\}$, $w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[w]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{\{B\}}$. $\qquad w = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =?$

$$[w]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{\{B\}} = 1w_1 - 1w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = w$$



Zusammenfassung (Darstellende Matrix)

- V, W: Vektorräume über K
- $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$
- T linear
- $B_V = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$: Basis in V
- $B_W = \{w_1, w_2, \dots w_m\}$: Basis in W

Dann ist die darstellende Matrix der linearen Abbildung T bezüglich der Basen B_V und B_W

$$D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}} = \Big[[T(v_1)]_{\{B_W\}} \ [T(v_2)]_{\{B_W\}} \ \dots \ [T(v_n)]_{\{B_W\}} \Big]$$

und es gilt für $\forall v \in V$

$$D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}} [v]_{\{B_V\}} = [T(v)]_{\{B_W\}} \equiv [T_{V \to W}(v)]_{\{B_W\}} \,.$$

Analogie für $T \equiv T_{W \to V}$:

Die darstellende Matrix der linearen Abbildung T bezüglich der Basen B_W und B_V ist

$$D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}} = \Big[[T(w_1)]_{\{B_V\}} \;\; [T(w_2)]_{\{B_V\}} \;\; \cdots \;\; [T(w_m)]_{\{B_V\}} \Big]$$

und es gilt für $\forall w \in W$

$$D_{\underrightarrow{\{B_W B_V\}}} [w]_{\{B_W\}} = [T(w)]_{\{B_V\}} \equiv [T_{W \to V}(w)]_{\{B_V\}} \,.$$

Spezialfall 1

- $V = \mathbb{R}^n, \quad W = \mathbb{R}^m$
- $B_V = E_V = E_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$: kanonische Basis im $\mathbb{R}^n$
- $B_W = E_W = E_m = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$: kanonische Basis im $\mathbb{R}^m$

Fall 1.1

$T \equiv T_{V \to W}$

Die darstellende Matrix der Abbildung T bezüglich der kanonischen Basen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ ist

$$D_{\{\underrightarrow{E_V E_W}\}} \equiv D_{\{\underrightarrow{E_n E_m}\}} = [T(e_1)\ T(e_2) \dots\ T(e_n)]$$

und es gilt für $\forall v \in V = \mathbb{R}^n$

$$D_{\{\underrightarrow{E_n E_m}\}} v = T(v) \equiv T_{V \to W}(v).$$

Fall 1.2

$T \equiv T_{W \to V}$

Die darstellende Matrix der Abbildung T bezüglich der kanonischen Basen in $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ ist

$$D_{\underrightarrow{\{E_W E_V\}}} \equiv D_{\underrightarrow{\{E_m E_n\}}} = [T(e_1)\ T(e_2) \ldots\ T(e_m)]$$

und es gilt für $\forall w \in W = \mathbb{R}^m$

$$D_{\underrightarrow{\{E_m E_n\}}} w = T(w) \equiv T_{W \to V}(w).$$

Spezialfall 2

- $V = W \qquad \dim(V) = \dim(W) = n$
- $B_V = E_V = E_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$
- $B_W = B = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$

Fall 2.1

$T \equiv T_{V \to W}$

Die darstellende Matrix der linearen Abbildung T bezüglich der Basis B ist

$$D_{\{\underrightarrow{E_n B}\}} = \Big[[T(e_1)]_{\{B\}} \; [T(e_2)]_{\{B\}} \cdots \; [T(e_n)]_{\{B\}} \Big]$$

und es gilt für $\forall v \in V$

$$D_{\{\underrightarrow{E_n B}\}} v = [T(v)]_{\{B\}} \equiv [T_{V \to W}(v)]_{\{B\}} \, .$$

Fall 2.2

$T \equiv T_{W \to V}$
Die darstellende Matrix der linearen Abbildung T bezüglich der Basis B ist

$$D_{\{\underrightarrow{BE_n}\}} = [T(w_1)\ T(w_2) \dots\ T(w_n)]$$

und es gilt für $\forall w \in W = V$

$$D_{\{\underrightarrow{BE_n}\}} [w]_{\{B\}} = T(w) \equiv T_{W \to V}(w).$$

Fall 2.3

$T \equiv T_{V \to W}$ wobei $B_V = \{v_1, v_2, \dots v_n\} = B_W$
Die darstellende Matrix der linearen Abbildung T bezüglich der Basis B ist

$$D_{\{\underrightarrow{BB}\}} = \left[[T(v_1)]_{\{B\}}\ [T(v_2)]_{\{B\}} \dots\ [T(v_n)]_{\{B\}} \right]$$

und es gilt für $\forall v \in V$

$$D_{\{\underrightarrow{BB}\}} [v]_{\{B\}} = [T(v)]_{\{B\}} \equiv [T_{V \to W}(v)]_{\{B\}}\,.$$

Spezialfall 3

- $V = W \qquad \dim(V) = \dim(W) = n$
- $T : V \to W : T(v) = v \quad \forall v \in V$
- $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \; B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$: Basen in $V = W$

Fall 3.1

Die Koordinatenwechsel-Matrix von Basis B_V zu B_W ist

$$D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}} = \begin{bmatrix} [v_1]_{\{B_W\}} & [v_2]_{\{B_W\}} & \cdots & [v_n]_{\{B_W\}} \end{bmatrix}$$

und es gilt für $\forall v \in V$

$$D_{\{\underrightarrow{B_V B_W}\}} [v]_{\{B_V\}} = [v]_{\{B_W\}} \,.$$

Fall 3.2

Die Koordinatenwechsel-Matrix von der Basis B_W zur Basis B_V ist

$$D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}} = \left[[w_1]_{\{B_V\}} \; [w_2]_{\{B_V\}} \; \cdots \; [w_n]_{\{B_V\}} \right]$$

und es gilt für $\forall w \in W$

$$D_{\{\underrightarrow{B_W B_V}\}} [w]_{\{B_W\}} = [w]_{\{B_V\}} \, .$$

Spezialfall 4

- $V = W \qquad \dim(V) = \dim(W) = n$
- $T : V \to W : T(v) = v \quad \forall v \in V$
- $B_V = E_V = E_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$
- $B_W = B = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$

Fall 4.1

Die Koordinatenwechsel-Matrix von der kanonischen Basis E_n zur Basis B ist

$$D_{\{\underrightarrow{E_n B}\}} = \begin{bmatrix} [e_1]_{\{B\}} & [e_2]_{\{B\}} & \cdots & [e_n]_{\{B\}} \end{bmatrix}$$

und es gilt für $\forall v \in V$

$$D_{\{\underrightarrow{E_n B}\}} \, v = [v]_{\{B\}} \, .$$

Fall 4.2

Die Koordinatenwechsel-Matrix von der Basis B zur kanonischen Basis E_n ist

$$D_{\{\underrightarrow{BE_n}\}} = [w_1 \; w_2 \; \ldots \; w_n]$$

und es gilt für $\forall w \in W$

$$D_{\{\underrightarrow{BE_n}\}} [w]_{\{B\}} = w.$$

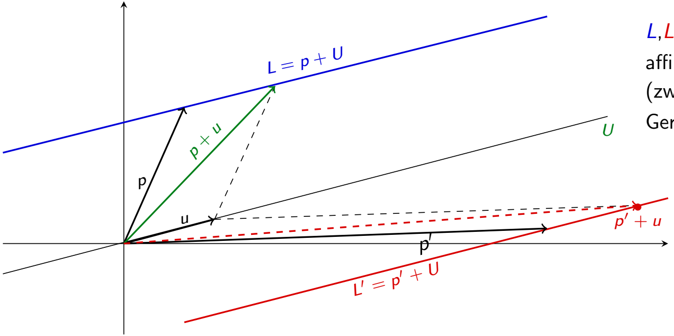
Affine Teilräume

Definition (Affiner Teilraum)
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$L = p + U = \{p + u \,|\, u \in U\}$$

ein affiner Teilraum des $\mathbb{R}^n$.

Beispiel $p \in \mathbb{R}^2,\ u \in \mathbb{R}^2,\ U = LIN\{u\}$



L, L':
affine Teilräume
(zwei parallele
Geraden im $\mathbb{R}^2$)

Affiner Teilraum

Eigenschaft

Der zu einem affinen Teilraum L gehörende lineare Teilraum U ist eindeutig bestimmt.

Beweis

Sei $L = p + U = p + U'$. Zu zeigen ist, dass $U = U'$.

Sei $u \in U \Rightarrow p + u \in p + U = p + U'$.
$\Rightarrow \exists\, u' \in U'$, dass $p + u = p + u'$
$\Rightarrow u = u' \Rightarrow u \in U' \Rightarrow U \subseteq U'$.

Analog kann gezeigt werden, dass $U' \subseteq U \Rightarrow U = U'$.
Damit ist die Eindeutigkeit bewiesen.

Affiner Teilraum

Dimension des affinen Teilraums

Sei $L = p + U$ ein affiner Teilraum des $\mathbb{R}^n$. Dann heißt $\dim(L) = \dim(U)$ die Dimension von L.

Bemerkung

Sei $\{p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ $\qquad p$: Punkt im $\mathbb{R}^n$

$$\underbrace{\{p\}}_{L} \underbrace{=}_{=} \underbrace{p + \{0\}}_{p+U} = \{p + 0 \mid 0 \in \{0\}\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\dim\{p\}}_{\dim(L)} \underbrace{=}_{=} \underbrace{\dim\{0\}}_{\dim(U)} = 0.$$

Also, die Dimension eines Punktes ist 0.

Affiner Teilraum

Eigenschaft

Sei $L = p + U \Rightarrow L = q + U \quad \forall q \in L$.

Also: Bei $L = p + U$ ist der lineare Teilraum U eindeutig bestimmt, jedoch nicht der Punkt p. Man kann jeden Punkt $q \in L$ nehmen.

Beweis

Sei $q \in L = p + U \Rightarrow \exists\, u \in U \ : \ \underline{q = p + u}$ oder $\underline{p = q - u}$.

Wir zeigen $p + U \subseteq q + U$:

Sei $x \in p + U \Rightarrow \exists\, v \in U$, dass $x = \underline{p} + v$

$\Rightarrow x = \underline{(q - u)} + v = q + \underset{\in U}{(v - u)} \in q + U$.

Noch zu zeigen $q + U \subseteq p + U$:

Sei $y \in q + U \Rightarrow \exists\, w \in U$, dass $y = \underline{q} + w$

$\Rightarrow y = \underline{(p + u)} + w = p + \underset{\in U}{(u + w)} \in p + U$.

Satz

Sei $Ax = b$ ein LGS mit $A \in M(n \times n),\ b \in \mathbb{R}^n$.
Dann folgt:

(1) LÖS(A, b) ist entweder leer oder ein affiner Teilraum der Dimension $n - r$, wobei r der Rang von A ist.

(2) LÖS$(A, b) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, b)$.

Beweis

(1) $\text{LÖS}(A, b) \overset{\text{wissen wir}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \hat{b} + \lambda_1\mu_1 + \ldots + \lambda_{n-r}\mu_r\} = \hat{b} + LIN\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-r}\} = \hat{b} + \text{LÖS}(A)$,
wobei $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{\underline{n-r}}\}$ eine Basis von LÖS(A) ist.

Also: LÖS(A, b) ist ein affiner Teilraum $L = p + U$ mit $p = \hat{b}$ und $U = \text{LÖS}(A)$ und nach der Definition ist $\dim(L) = \dim(U) = \dim(\text{LÖS}(A)) = n - r$.

(2) Gaussnormalform

$$(\hat{A}, \hat{b}) = \left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & & & & x & \dots & x & \hat{b}_1 \\ & 1 & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & x & \dots & x & \hat{b}_r \\ \hline & & & & & & & \hat{b}_{r+1} \\ & & & \mathbf{0} & & & & \vdots \\ & & & & & & & \end{array}\right]$$

$\Leftarrow$

Wenn $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, b)$, dann $\hat{b}_{r+1} = \hat{b}_{r+2} = \ldots = \hat{b}_m = 0$ und wir wissen, dass dann $\text{LÖS}(A, b) \neq \emptyset$.

$\Rightarrow$

Wenn $\text{LÖS}(A, b) \neq \emptyset$, dann muss $\hat{b}_{r+1} = \hat{b}_{r+2} = \ldots = \hat{b}_m = 0$ und daraus folgt $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, b)$.

Korollar 1

Sei $Ax = 0$ ein homogenes LGS. Dann gilt:

(1) LÖS(A) ist ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n - \text{rg}(A) = n - r$.

(2) $\dim(\text{Ker}(F_A)) = n - \text{rg}(A) = n - r$.

(3) $\text{rg}(A)$ ist eindeutig bestimmt, also die Zahl r in der Halbdiagonalform ist eindeutig (unabhängig von der Pivotsuche!).

Beweis

(1) Spezialfall des obigen Satzes.

(2) Wir haben bereits bewiesen, dass LÖS(A) $=$ Ker(F_A).

(3) Da $\dim(\text{Ker}(F_A))$ mit $n - \text{rg}(A)$ eindeutig bestimmt ist, folgt aus (2), dass $\text{rg}(A)$ eindeutig ist.

Korollar 2

$Ax = b$, $A \in M(m \times n)$, hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, b) = n$.

Beweis

$Ax = b$ hat eine eindeutige Lösung
$\Leftrightarrow Ax = b$ hat eine partikuläre Lösung und $\text{LÖS}(A) = \{0\}$
$\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A, b) = \mathrm{rg}(A)$ und $\dim(\text{LÖS}(A)) = 0 = n - \mathrm{rg}(A)$ [Korollar 1]
$\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A, b) = \mathrm{rg}(A)$ und $n = \mathrm{rg}(A)$.

Korollar 3

Sei A eine $n \times n$-Matrix.
$Ax = b$ hat eine eindeutige Lösung $\Leftrightarrow$ $\text{rg}(A) = n$ (also unabhängig vom Vektor b).

Beweis

$\text{rg}(A, b) \overset{*}{\leq} n$ bei $n \times n$-LGS
$*$ (weil n Zeilen und daher maximal n nicht-null-Zeilen in der Halbdiagonalform)

$Ax = b$ hat eindeutige Lösung $\Leftrightarrow$
$\overset{\text{Korollar 2}}{\Leftrightarrow} \text{rg}(A) = \text{rg}(A, b) = n$
$\Leftrightarrow n = \text{rg}(A) = \text{rg}(A, b) \overset{*}{\leq} n$
$\Leftrightarrow \text{rg}(A) = n.$

Satz – Dimensionsformel für lineare Abbildungen

Sei $T : V \to W$ linear und V endlichdimensional.

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(V)$.

Beweis

V ist endlichdimensional mit $\dim(V) = n$.

Da $\mathrm{Ker}(T)$ ein Teilraum von V ist, ist auch $\mathrm{Ker}(T)$ endlichdimensional.
Sei $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = k$. Offensichtlich $k \leq n$.

Sei $v_1, v_2, \dots v_k$ eine Basis von $\mathrm{Ker}(T)$.

Dann kann diese Vektorenmenge nach dem Basisergänzungssatz zu einer Basis $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ von V ergänzt werden.

Behauptung

$T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)$ ist eine Basis von $\mathrm{Im}(T)$, also zu zeigen ist:

(1) $\mathrm{LIN}\{T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\} = \mathrm{Im}(T)$

Sei $x \in V$.
Da $v_1, v_2, \ldots, v_n$ Basis von V ist (♠), gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$, sodass $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$.

$\Rightarrow$ für $T(x)$:

$$T(x) = T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n) \overset{T \text{ ist linear}}{=}$$
$$= \lambda_1 \underbrace{T(v_1)}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{T(v_2)}_{=0} + \ldots + \lambda_k \underbrace{T(v_k)}_{=0}$$

da $v_1, \ldots v_k \in \mathrm{Ker}(T)$

$$+\lambda_{k+1} T(v_{k+1}) + \ldots + \lambda_n T(v_n) =$$
$$= \lambda_{k+1} T(v_{k+1}) + \ldots + \lambda_n T(v_n) \in \mathrm{LIN}\{T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\}$$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(T) \subseteq \mathrm{LIN}\{T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\}$.

Natürlich ist $\mathrm{LIN}\{T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\} \subseteq \mathrm{Im}(T)$ (weil $T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n) \in \mathrm{Im}(T)$)

$\Rightarrow \mathrm{Im}(T) = \mathrm{LIN}\{T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)\}$.

(2) $T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)$ sind linear unabhängig.

Sei $\lambda_{k+1} T(v_{k+1}) + \ldots + \lambda_n T(v_n) = 0$.

$\overset{\text{T linear}}{\Rightarrow} T(\lambda_{k+1} v_{k+1} + \lambda_{k+2} v_{k+2} + \ldots + \lambda_n v_n) = 0$.

$\Rightarrow \lambda_{k+1} v_{k+1} + \lambda_{k+2} v_{k+2} + \ldots + \lambda_n v_n \in \operatorname{Ker}(T)$.

Da $v_1, v_2, \ldots, v_k$ Basis von $\operatorname{Ker}(T)$ ist, gibt es $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in K$ mit

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} + \lambda_{k+2} v_{k+2} + \ldots + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k$$

da $v_1, \ldots v_k \in \operatorname{Ker}(T)$, ist auch Linearkombination $\in \operatorname{Ker}(T)$

$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k - \lambda_{k+1} v_{k+1} - \lambda_{k+2} v_{k+2} - \ldots - \lambda_n v_n = 0$.

Da $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, folgt:
$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0 \quad \Rightarrow$ speziell $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$
$\Rightarrow T(v_{k+1}), \ldots, T(v_n)$ sind linear unabhängig.

Daher ist $T(v_{k+1}), T(v_{k+2}), \ldots, T(v_n)$ eine Basis von $\operatorname{Im}(T)$
$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(T)) = n - k = \dim(V) - \dim(\operatorname{Ker}(T))$.

Eigenschaft

Sei $A \in M(m \times n)$ und $F_A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ mit $F_A(x) = Ax \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:
$\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(F_A))$.

Beweis

Aus der Dimensionsformel folgt

$*\underline{\dim(\text{Ker}(F_A))} + \dim(\text{Im}(F_A)) = \dim(\mathbb{R}^n) = n.$

Nach Korollar 1 ist $\dim(\text{Ker}(F_A)) = n - \text{rg}(A)$

$\overset{*}{\Rightarrow} \underline{n - \text{rg}(A)} + \dim(\text{Im}(F_A)) = n$

$\Rightarrow \dim(\text{Im}(F_A)) = \text{rg}(A).$