Proseminar

Digitale Rechenanlagen

WS 17/18

Übungszettel 3

14. Ein Code besteht aus drei Zeichen aus dem bekannten Alphabet $a, \ldots, z$, wobei korrekte Codewörter jene sind, in denen niemals zwei Mitlaute (Alphabet ohne a, e, i, o, u) zweimal direkt hintereinander stehen. Wieviele mögliche und wieviele korrekte Codewörter gibt es?

15. Der Golomb-Rice-Code mit Parameter M ist folgendermaßen definiert:

$$c(n) = 0^q 1 r_{l-1} \ldots r_0, \quad l = \log_2 M, \quad q = \lfloor n/M \rfloor, \quad r = n - qM, \quad r_k = \begin{cases} 0 & \lfloor r2^{-k} \rfloor \text{gerade} \\ 1 & \lfloor r2^{-k} \rfloor \text{ungerade} \end{cases}$$

Beispiel: für $M = 2$ ist $c(5) = 0011$. Bestimmen Sie die Codewörter und deren Länge für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 10, 20$ und $M = 1, 2, 4$.

16. Ein Codewort eines 1-aus-n Code besteht aus n Bits, wobei genau ein Bit 1 ist (die anderen 0). Wie groß ist bei diesem Code die Wahrscheinlichkeit, dass ein fehlerhaftes Codewort nicht erkannt wird (unter der Annahme einer konstanten Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_b). Berechnen Sie das Ergebnis allgemein und speziell für $n = 10$ und $p_b = 10^{-9}$.

17. Wir betrachten binäre Codewörter der Länge n, die mit einem *parity bit* zur Fehlererkennung versehen werden. Ein Codewort hat also dann die Länge $n + 1$. Ein realistischer Fehlerfall sind *Burstfehler*, wobei ein *Burst* eine Anzahl b von aufeinanderfolgenden Bits kippt.

    a. Für welche Burstlängen b genügt das parity bit zur Fehlererkennung?
    b. Wieviele verschiedene Fehlerfälle gibt es für eine Burstlänge b auf einem Codewort?
    c. Ein Burst habe die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{r^b}$, wobei $r > 1$ ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Codewort von **einem** Burst verändert wird?

18. Eine Nachricht A mit der Wahrscheinlichkeit p_A hat definitionsgemäß den Informationsgehalt $\mathcal{I}_A = -ld\ p_A$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{I}_A$ folgende Kriterien erfüllt:

$$\mathcal{I}_A \geq 0 \quad mit \quad 0 \leq p_A \leq 1, \qquad \lim_{p_A \to 1} \mathcal{I}_A = 0, \qquad \mathcal{I}_A > \mathcal{I}_B \Leftrightarrow p_A < p_B$$