29

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad c_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

3 beliebige linear unabhängige $v_{1,2,3} \in \mathbb{R}^3$ bilden eine Basis für $\mathbb{R}^3$.

Es ist offensichtlich, dass b keine Linearkombination von a ist (da $a_1 = 0 \Rightarrow Rg((a)) < Rg((a\ b))$)

(a, b, c_1)

Auch offensichtlich aus demselben Grund ist, dass das einzige $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, was für $c_1 = \lambda_1 a + \lambda_2 b$ in Frage kommen kann, -2 ist (da $-8 = 2 \cdot (-4)$)

Also suchen wir nur noch $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 a = c_1 - \lambda_2 b = c_1 + 2b$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -3 \qquad \text{Also: } c_1 = -3a + 2b$$

(a, b, c_2)

$$c_2 - c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad c_2 - (-3a + 2b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - 3a + 2b$$

Also: c_2 ist eine Linearkombination von a und b gdw $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination von a und b ist. Dies ist unmöglich (wieder offensichtlich da $a_1 = 0$)

30

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : b - 2c + d = 0 \right\}$$

Für W:

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : a = d,\ b = 2c \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2y \\ x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \overbrace{}^{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}} \right\} \Rightarrow \text{Basis} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Für U:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \hline \end{array} \hspace{-6em} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc} b & a & c & d \end{array} \hspace{-6em} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \\ d \end{pmatrix} : \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{Basis}: \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$U \cap W$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\leadsto}{\mathrm{III} + 2\,\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\leadsto}{\mathrm{III} : (-3)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\leadsto}{\mathrm{I} + 2\,\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{Basis} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

31

$$U = \mathrm{LIN}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

Wir eliminieren Vektoren, bis es nicht mehr geht;

① $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist nutzlos

② $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Dass $\nexists \lambda \in \mathbb{R}: \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist trivial

Es folgt, dass eine Basis $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$ wäre.

37

$\det(A) = 0 + 2 - 1 + 2 - 1 - 1 = 1$

$\Rightarrow A^{-1}$ existiert

Wir wenden Gauß auf AI_3 an:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{III-2II}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{III-I}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{I-III \\ II+III}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{III\cdot(-1)}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0+2-1 & 0+2-2 & 0-1+1 \\ -1+0+1 & -1+0+2 & 1-0-1 \\ -2+2+0 & -2+2+0 & 2-1-0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$