$\boxed{36}$ im $\mathbb{R}^4$: Ebene $E: x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 7 \\ 25 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -8 \\ -20 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Hyperebene $H: 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 = -3$. gesucht: $E \cap H$

zuerst: GLS für E nach Vorgangsweise aus der VO: $E: x = p + \lambda v_1 + \mu v_2$

$$C^T = \begin{pmatrix} - v_1 - \\ - v_2 - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 7 & 25 \\ 2 & 6 & -8 & -20 \end{pmatrix}$$

$n = 4,\ k = 2,\ C^T: k \times n = 4 \times 2$

$A^T: n \times (n-k) = 4 \times 2$

Löse $C^T x = 0$ mit Gauß-Algorithmus, rechte Seite $\big|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$ weggelassen

$$\begin{pmatrix} -3 & -9 & 7 & 25 \\ 2 & 6 & -8 & -20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot \frac{1}{2} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -10 \\ -3 & -9 & 7 & 25 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +3\mathrm{I} \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot \frac{-1}{5} \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} +4\mathrm{II} \\ \rightsquigarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SPALTEN II ⇔ III

Lösung: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{a_1} + \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{a_2} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$

(Bei anderem Lösungsweg von $C^T x = 0$ muss die selbe Menge (Ebene) herauskommen, aber die aufspannenden Vektoren a_1, a_2 können anders sein.)

$$A = \begin{pmatrix} - a_1 - \\ - a_2 - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = Ap = A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

GLS für E: $Ax = b$

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &= 7 \\ 6x_1 - x_3 + x_4 &= -4 \end{aligned}$$

$\boxed{36}$ Fortsetzung: Schnitt $E \cap H$: GLS für E plus Zeile für H

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & -6 & 6 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} +III \\ -2III \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & -6 & 6 & 4 \\ 0 & 6 & 11 & -11 & 2 \\ 3 & -3 & -6 & 6 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot\frac{1}{3} \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 11 & -11 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & 6 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot\frac{-1}{2} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -11 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -6II \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & 14 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot\frac{-1}{7} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} +2III \\ -3III \\ \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} +II \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow E \cap H = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; \nu \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{Gerade}$$

$\boxed{37}$ Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Eine Abbildung $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to K$ heißt Skalarprodukt (oder inneres Produkt), wenn gilt:

(1a) $\forall x_1, x_2, y \in V: \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ $\Big\}$ linear im 1. Argument

(1b) $\forall x, y \in V \; \forall \lambda \in K: \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

(2) $\forall x, y \in V: \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ($\overline{}$: konjugiert komplex) symmetrisch

(3) $\forall x \in V: \langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $\Big\}$ positiv definit

2.2. $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ ist ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$

(Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$: $x_1y_1 + x_2y_2$)

(1a) Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ beliebig.

$$\langle x+y, z \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= 2(x_1+y_1)z_1 + (x_1+y_1)z_2 + (x_2+y_2)z_1 + (x_2+y_2)z_2 =$$

$$= (2x_1z_1 + x_1z_2 + x_2z_1 + x_2z_2) + (2y_1z_1 + y_1z_2 + y_2z_1 + y_2z_2) =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \square$$

(1b) Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\langle \lambda x, y \rangle = \left\langle \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= 2\lambda x_1y_1 + \lambda x_1y_2 + \lambda x_2y_1 + \lambda x_2y_2 = \lambda \cdot (2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2) =$$

$$= \lambda \cdot \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle \quad \square$$

(2) Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ beliebig.

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 =$$

$$= 2y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + y_2x_2 = \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle y, x \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \square$$

$\boxed{37}$ Fortsetzung

(3) Sei $x \in \mathbb{R}^2$ beliebig.

$$\langle x, x\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1x_1 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2x_2 =$$

$$= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) = \underbrace{\underbrace{x_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x_1+x_2)^2}_{\geq 0}}_{\geq 0}$$

$$\langle x, x\rangle = 0 \iff x_1^2 = 0 \wedge (x_1+x_2)^2 = 0$$

$$\iff x_1 = 0 \wedge (0+x_2)^2 = 0 \iff x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \iff x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\boxed{38}$ Sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Eine Abbildung $\| \, \|: V \to \mathbb{R}$ heißt Norm, wenn gilt: $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$

(1) $\forall x \in V: \|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ positiv definit

(2) $\forall x \in V \, \forall \lambda \in K: \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ absolut homogen

(3) $\forall x, y \in V: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Dreiecksungleichung

Zeige, dass $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ eine Norm im $\mathbb{R}^n$ ist:

(1) Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ beliebig.

$$\|x\|_\infty = \underbrace{\max\{\underbrace{|x_1|}_{\geq 0}, \dots, \underbrace{|x_n|}_{\geq 0}\}}_{\geq 0}$$

und $= 0 \Leftrightarrow |x_1| = \dots = |x_n| = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) Seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\|\lambda x\|_\infty = \left\| \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\{|\lambda x_1|, \dots, |\lambda x_n|\} =$$

$$= \max\{|\lambda| \cdot |x_1|, \dots, |\lambda| \cdot |x_n|\} = |\lambda| \cdot \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = |\lambda| \cdot \|x\|_\infty$$

(3) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebig

$$\|x+y\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\{|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|\} \leq$$

$\leq$ (Dreiecksungleichung gilt in $\mathbb{R}$) $\leq \max\{|x_1| + |y_1|, \dots, |x_n| + |y_n|\} \leq$

$\leq$ ($|x_i|, |y_i|$ alle nichtnegativ, Eigenschaft max) $\leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} + \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\} =$

$= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

$\square$

Bem.: In beiden Schritten, wo $\leq$ steht ist neben $=$ tatsächlich auch $<$ möglich, Beispiel:

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1+(-3) \end{pmatrix} \right\|_\infty = \underbrace{\max\{\overbrace{|2+1|}^{3}, \dots, \overbrace{|1+(-3)|}^{2}\}}_{3} < \underbrace{\max\{\overbrace{|2|+|1|}^{3}, \dots, \overbrace{|1|+|(-3)|}^{4}\}}_{4}$$

$< \max\{|2|, |1|\} + \max\{|1|, |(-3)|\} = 2 + 3 = 5$

$\boxed{39}$ z.z. (a,b,c,d) ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$; +Koordinaten

$$a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad c = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad d = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$.
$(v_1, \dots, v_n)$ heißt Orthonormalbasis (ONB) von V, wenn gilt
1. $(v_1, \dots, v_n)$ ist ein Orthonormalsystem d.h.

$$\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \quad \text{(OGS - Orthogonalsystem)} \end{cases} \qquad \forall i,j = 1,\dots,n$$

2. $(v_1, \dots, v_n)$ ist eine Basis von V

Es gilt (VO S.200): Wenn $(v_1, \dots, v_n)$ ein OGS mit $v_i \neq 0 \ \forall i = 1, \dots, n$, dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

bei einem ONS gegeben

D.h. wenn (a,b,c,d) ein ONS bilden, sind sie linear unabhängig,
4 l.u. Vektoren im $\mathbb{R}^4$ $\Rightarrow$ Basis also ONB.

Also nur z.z. dass ONS:

$$\langle a,a\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1) = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1$$

$$\langle b,b\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1\cdot1 + 1\cdot1 + (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1)) = 1$$

$$\langle c,c\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1\cdot1 + (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot1) = 1$$

$$\langle d,d\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot((-1)\cdot(-1) + 1\cdot1 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot1) = 1$$

$\boxed{39}$ Fortsetzung

$$\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1)\right) = 0$$

$$\langle a,c\rangle = \langle c,a\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1) + 1\cdot 1\right) = 0$$

$$\langle a,d\rangle = \langle d,a\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 1\right) = 0$$

$$\langle b,c\rangle = \langle c,b\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 1\right) = 0$$

$$\langle b,d\rangle = \langle d,b\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1\cdot(-1) + 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 1\right) = 0$$

$$\langle c,d\rangle = \langle d,c\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1\right) = 0$$

also ONS und ONB

Koordinaten eines (beliebigen) Punktes $x \in \mathbb{R}^4$ bzgl. (a,b,c,d):

$$x_{(a,b,c,d)} = \begin{pmatrix}\langle x,a\rangle\\\langle x,b\rangle\\\langle x,c\rangle\\\langle x,d\rangle\end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$\langle x,a\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\cdot(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$\langle x,b\rangle = \frac{1}{2}\cdot(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$, $\langle x,c\rangle = \frac{1}{2}\cdot(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$,

$\langle x,d\rangle = \frac{1}{2}\cdot(-x_1 + x_2 - x_3 + x_4)$

$$\Rightarrow x_{(a,b,c,d)} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3+x_4\\x_1+x_2-x_3-x_4\\x_1-x_2-x_3+x_4\\-x_1+x_2-x_3+x_4\end{pmatrix}$$

$\boxed{40}$ Gram-Schmidt-Verfahren zur Bestimmung einer ONB von

$$V = \mathrm{LIN}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\2\\-2\\0\end{pmatrix}}_{w_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\3\\3\\7\end{pmatrix}}_{w_3} \right\}$$

erster Schritt: Überprüfung ob w_1, w_2, w_3 linear unabhängig sind

d.h. z.z. $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Bestimme alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0$ mit dem Gauß-Alg.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & \underbrace{0}_{\text{weggelassen}} \end{array}\right) \begin{array}{c}\cdot(-1)\\ \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ +\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{8} \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} +\mathrm{III} \\ \\ \\ +\mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ -\mathrm{III} \\ \\ -3\mathrm{III} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eindeutig lösbar, einzige Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ also l.u.

Gram-Schmidt-Verfahren:

$$v_1 = \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 1^2}} \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = w_2 - \sum_{i=1}^{1} \langle w_2, v_i \rangle v_i = w_2 - \langle w_2, v_1 \rangle v_1 =$$

$$= \begin{pmatrix}0\\2\\-2\\0\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}0\\2\\-2\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0\\2\\-2\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \left(0\cdot(-1) + 2\cdot(-1) + (-2)\cdot 1 + 0 \cdot 1\right) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-2\\0\end{pmatrix} - (-1) \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}}}$$

$\boxed{40}$ Fortsetzung

$$v_2 = \frac{1}{\|\tilde{v}_2\|} \cdot \tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2+1^2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_3 = w_3 - \sum_{i=1}^{2} \langle w_3, v_i \rangle v_i = w_3 - \langle w_3, v_1 \rangle v_1 - \langle w_3, v_2 \rangle v_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot (-1-3+3+7) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot (-1+3-3+7) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \frac{1}{\|\tilde{v}_3\|} \cdot \tilde{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{4^2+3^2+3^2+4^2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ONB: $\left(\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$