$\boxed{12}$ $$\begin{pmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix}}_{\text{offset}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}4 & -0{,}1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \text{offset} + A \cdot \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

mittelgrau:

$$\begin{pmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{pmatrix} \approx \text{offset} + A \cdot \begin{pmatrix} 128 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}4 & -0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 128 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}3 \cdot 128 + 0{,}6 \cdot 128 + 0{,}1 \cdot 128 \\ -0{,}2 \cdot 128 + (-0{,}3) \cdot 128 + 0{,}5 \cdot 128 \\ 0{,}5 \cdot 128 + (-0{,}4) \cdot 128 + (-0{,}1) \cdot 128 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (0{,}3+0{,}6+0{,}1) \cdot 128 \\ (-0{,}2-0{,}3+0{,}5) \cdot 128 \\ (0{,}5-0{,}4-0{,}1) \cdot 128 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot 128 \\ 0 \cdot 128 \\ 0 \cdot 128 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 128 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+128 \\ 128+0 \\ 128+0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 128 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix}}}$$

mittlere Luminanz, mittlere Chrominanz (rot und blau)

blau:

$$\begin{pmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{pmatrix} \approx \text{offset} + A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}4 & -0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}3 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 255 \\ -0{,}2 \cdot 0 + (-0{,}3) \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 255 \\ 0{,}5 \cdot 0 + (-0{,}4) \cdot 0 + (-0{,}1) \cdot 255 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 + 0 + 0{,}1 \cdot 255 \\ 0 + 0 + 0{,}5 \cdot 255 \\ 0 + 0 + (-0{,}1) \cdot 255 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25{,}5 \\ 127{,}5 \\ -25{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25{,}5 \\ 255{,}5 \\ 102{,}5 \end{pmatrix} \approx \underline{\underline{\begin{pmatrix} 25 \\ 255 \\ 102 \end{pmatrix}}} \quad \text{(abgerundet)}$$

geringe Luminanz, maximale Chrominanz blau, etwas weniger als mittlere Chrominanz rot

12. Fortsetzung:

cyan:

$$\begin{pmatrix} Y \\ Cr \\ Cb \end{pmatrix} \approx offset + A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 255 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ -0,2 & -0,3 & 0,5 \\ 0,5 & -0,4 & -0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 255 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,3 \cdot 0 + 0,6 \cdot 255 + 0,1 \cdot 255 \\ -0,2 \cdot 0 + (-0,3) \cdot 255 + 0,5 \cdot 255 \\ 0,5 \cdot 0 + (-0,4) \cdot 255 + (-0,1) \cdot 255 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,7 \cdot 255 \\ 0,2 \cdot 255 \\ -0,5 \cdot 255 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 178,5 \\ 51 \\ -127,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 178,5 \\ 179 \\ 0,5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 178 \\ 179 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(abgerundet)

relativ hohe Luminanz und Chrominanz blau, minimale Chrominanz rot

schwarz:

$$\begin{pmatrix} Y \\ Cr \\ Cb \end{pmatrix} \approx offset + A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix}$$

minimale Luminanz, mittlere Chrominanz (rot und blau)

gelb:

$$\begin{pmatrix} Y \\ Cr \\ Cb \end{pmatrix} \approx offset + A \cdot \begin{pmatrix} 255 \\ 255 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,9 \cdot 255 \\ -0,5 \cdot 255 \\ 0,1 \cdot 255 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 229,5 \\ -127,5 \\ 25,5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 229,5 \\ 0,5 \\ 153,5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 229 \\ 0 \\ 153 \end{pmatrix}$$

(abgerundet)

hohe Luminanz, minimale Chrominanz blau, etwas mehr als mittlere Chrominanz rot

weiß:

$$\begin{pmatrix} Y \\ Cr \\ Cb \end{pmatrix} \approx offset + A \cdot \begin{pmatrix} 255 \\ 255 \\ 255 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 255 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix}$$

maximale Luminanz, mittlere Chrominanz (rot und blau)

$\boxed{13}$ $S = \frac{1}{x_s^2 + y_s^2} \cdot \begin{pmatrix} x_s^2 - y_s^2 & 2x_s y_s \\ 2x_s y_s & y_s^2 - x_s^2 \end{pmatrix}$ mit $v_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\quad S = \frac{1}{1^2 + (-1)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1^2 - (-1)^2 & 2 \cdot 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 \cdot (-1) & (-1)^2 - 1^2 \end{pmatrix} =$

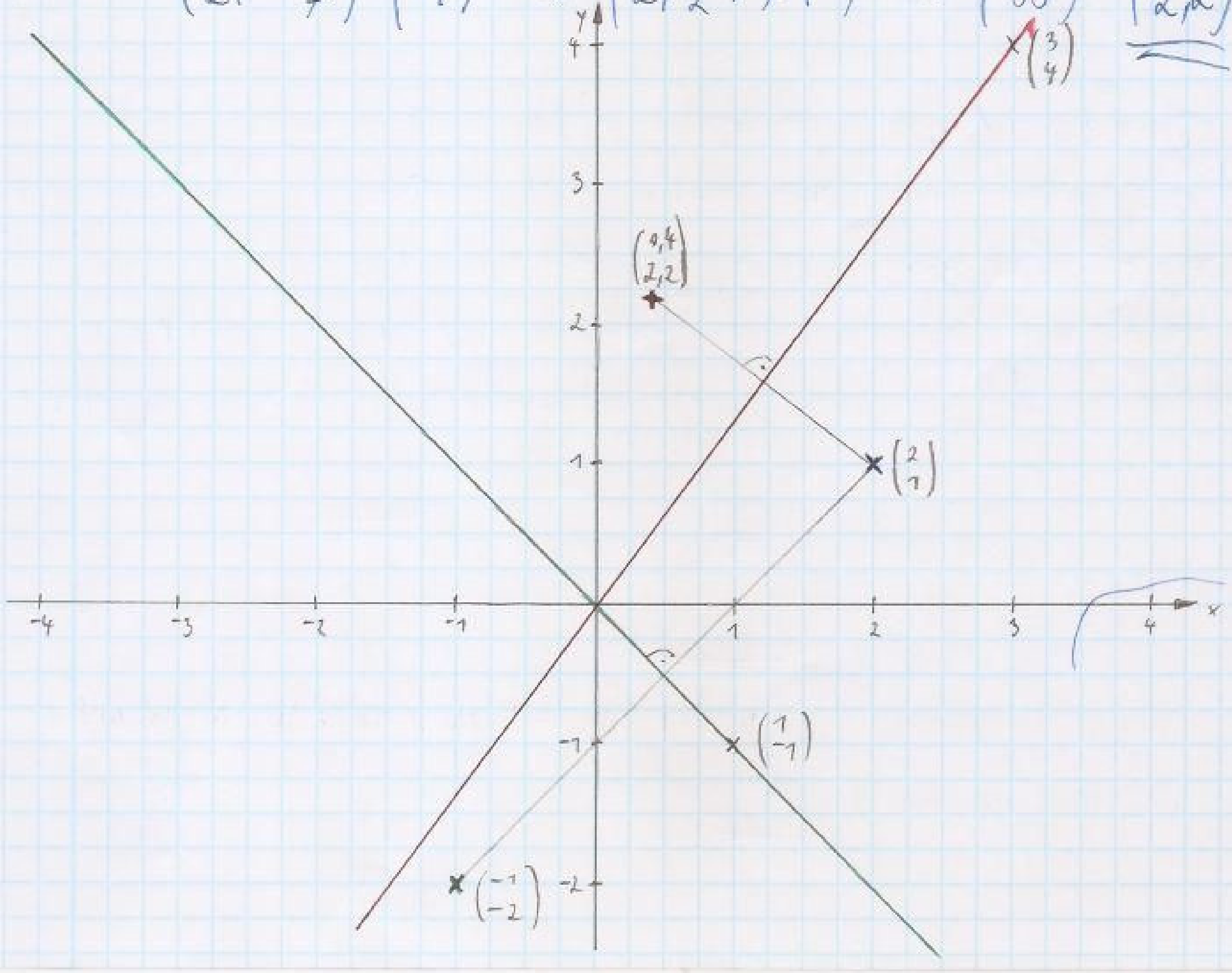
$= \frac{1}{1+1} \cdot \begin{pmatrix} 1-1 & -2 \\ -2 & 1-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$S \cdot p = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ -2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$v_s = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$: $\quad S = \frac{1}{3^2 + 4^2} \cdot \begin{pmatrix} 3^2 - 4^2 & 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 \cdot 4 & 4^2 - 3^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9+16} \cdot \begin{pmatrix} 9-16 & 24 \\ 24 & 16-9 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$

$S \cdot p = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -7 \cdot 2 + 24 \cdot 1 \\ 24 \cdot 2 + 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 2{,}2 \end{pmatrix}$



PS Lineare Algebra Übungszettel 3

$\boxed{14.}$ Seien V, W Vektorräume über dem Körper K. Eine Abbildung $T: V \to W$ heißt linear, wenn:

(i) $\forall x, y \in V: T(x+y) = T(x) + T(y)$ und

(ii) $\forall x \in V \, \forall \lambda \in K: T(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot T(x)$

Konkret für die Kreuzprodukt-Aufgabe: Sei $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist $T(x) = x \times y = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$.

z.z. T ist linear:

(i) Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

$$T(x+z) = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} x_1 + z_1 \\ x_2 + z_2 \\ x_3 + z_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (x_2+z_2)y_3 - (x_3+z_3)y_2 \\ (x_3+z_3)y_1 - (x_1+z_1)y_3 \\ (x_1+z_1)y_2 - (x_2+z_2)y_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 y_3 + z_2 y_3 - x_3 y_2 - z_3 y_2 \\ x_3 y_1 + z_3 y_1 - x_1 y_3 - z_1 y_3 \\ x_1 y_2 + z_1 y_2 - x_2 y_1 - z_2 y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (z_2 y_3 - z_3 y_2) \\ (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (z_3 y_1 - z_1 y_3) \\ (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (z_1 y_2 - z_2 y_1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 y_3 - z_3 y_2 \\ z_3 y_1 - z_1 y_3 \\ z_1 y_2 - z_2 y_1 \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = T(x) + T(z)$$

(ii) Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$T(\lambda x) = T\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (\lambda x_2) y_3 - (\lambda x_3) y_2 \\ (\lambda x_3) y_1 - (\lambda x_1) y_3 \\ (\lambda x_1) y_2 - (\lambda x_2) y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot (x_2 y_3 - x_3 y_2) \\ \lambda \cdot (x_3 y_1 - x_1 y_3) \\ \lambda \cdot (x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot T(x).$$

$\square$

14. Fortsetzung: Matrix von T: Spalten sind Bilder der Einheitsvektoren

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0y_3 - 0y_2\\ 0y_1 - 1y_3\\ 1y_2 - 0y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-y_3\\y_2\end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1y_3 - 0y_2\\ 0y_1 - 0y_3\\ 0y_2 - 1y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_3\\0\\-y_1\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0y_3 - 1y_2\\ 1y_1 - 0y_3\\ 0y_2 - 0y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y_2\\y_1\\0\end{pmatrix}, \quad M_T = \begin{pmatrix}0 & y_3 & -y_2\\ -y_3 & 0 & y_1\\ y_2 & -y_1 & 0\end{pmatrix}$$

15. $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x+z\\x-z\end{pmatrix}$. T_1 linear?

(i) Seien $a = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

$$T_1(a+b) = T_1\left(\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}\right) = T_1\left(\begin{pmatrix}a_x+b_x\\a_y+b_y\\a_z+b_z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}(a_x+b_x)+(a_z+b_z)\\(a_x+b_x)-(a_z+b_z)\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}(a_x+a_z)+(b_x+b_z)\\(a_x-a_z)+(b_x-b_z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_x+a_z\\a_x-a_z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_x+b_z\\b_x-b_z\end{pmatrix} = T_1\left(\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\right) + T_1\left(\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}\right) = T_1(a)+T_1(b).$$

(ii) Seien $a = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$T_1(\lambda a) = T_1\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = T_1\left(\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}(\lambda x)+(\lambda z)\\(\lambda x)-(\lambda z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\cdot(x+z)\\\lambda\cdot(x-z)\end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}x+z\\x-z\end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot T_1\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \lambda\cdot T_1(a).$$

T_1 ist eine lineare Abbildung.

Matrix: $T_1\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1+0\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad T_1\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0+0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$

$$T_1\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0+1\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \quad M_{T_1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$\Rightarrow 2\times 3$-Matrix

Die der Matrix M_{T_1} entsprechende lineare Abbildung ist $F_{M_{T_1}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F_{M_{T_1}}(a) = M_{T_1}\cdot a = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+z\\x-z\end{pmatrix}$$ (für $a = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$) – natürlich $F_{M_{T_1}} = T_1$.

$\boxed{15.}$ Fortsetzung: $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad T_2$ linear?

(i) Seien $a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ beliebig.

$$T_2(a+b) = T_2\left(\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}\right) = T_2\left(\begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2(a) + T_2(b) = T_2\left(\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}\right) + T_2\left(\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ 1 \end{pmatrix} = T_2(a+b)$$

nicht linear

(ii) (nicht mehr notwendig) Seien $a = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$T_2(\lambda a) = T_2\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T_2\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot T_2(a) = \lambda \cdot T_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda \end{pmatrix} \neq T_2(\lambda a) \text{ für } \lambda \neq 1.$$

ebenfalls nicht erfüllt

$$T_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Matrix } M_{„T_2“} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3x2-Matrix

Für $a = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist $M_{„T_2“} \cdot a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y \\ 1 \cdot x + 1 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$

Die der Matrix $M_{„T_2“} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ entsprechende lineare Abbildung ist

$$T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}. \qquad T_2 \neq T_3$$

$\boxed{76}$ $T: V \to W$ linear. Dann gilt: $T(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_s x_s) = \lambda_1 T(x_1) + \ldots + \lambda_s T(x_s)$

Dabei ist V ein Vektorraum über den Körper K, W ein Vektorraum über K (also denselben Körper K), $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$ und $x_1, \ldots, x_s \in V$.

Beweis $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$ $\forall x_1, \ldots, x_s \in V$ mit vollständiger Induktion nach s.

<u>IB (Induktionsbasis)</u>: $s = 1$: $T(\lambda_1 x_1) = \lambda_1 T(x_1)$ da T linear ist.

<u>IS (Induktionsschritt)</u>: $s \to s+1$: Angenommen (IV (Induktionsvoraussetzung))

$$T(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_s x_s) = \lambda_1 T(x_1) + \ldots + \lambda_s T(x_s).$$

$$T(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{s+1} x_{s+1}) = T((\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_s x_s) + \lambda_{s+1} x_{s+1}) \overset{T \text{ linear}}{=}$$

$$= T(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_s x_s) + T(\lambda_{s+1} x_{s+1}) \overset{IV}{=}$$

$$= (\lambda_1 T(x_1) + \ldots + \lambda_s T(x_s)) + T(\lambda_{s+1} x_{s+1}) \overset{T \text{ linear}}{=}$$

$$= \lambda_1 T(x_1) + \ldots + \lambda_s T(x_s) + \lambda_{s+1} T(x_{s+1}). \quad \square$$