AVS Zettel 2

Tuesday, June 9, 2020 17:56

Aufgabe 4

In der Vorlesung haben wir nur Spanner-Konstruktionen für ungerichtete Graphen kennengelernt. Zeigen Sie, dass für *gerichtete* Graphen im Allgemeinen keine nicht-trivialen Spanner existieren, das heißt, dass es für jedes n einen gerichteten Graph mit n Knoten gibt, in dem jeder t-Spanner für $t < n$ mindestens $\Omega(n^2)$ Kanten hat.

Hinweis: Sie müssen nicht davon ausgehen, dass der Ausgangsgraph stark zusammenhängend ist, d. h., es darf Knoten u und v geben, für die es keinen Pfad von u nach v gibt (also $\operatorname{dist}(u, v) = \infty$*).*

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass im CONGEST Modell eine 2-Approximation $\hat{D}$ des (ungewichteten) Durchmessers D des Netzwerks in $O(D)$ Runden bestimmt werden kann. Gesucht ist also eine Zahl $\hat{D}$, so dass $\frac{1}{2}D \leq \hat{D} \leq D$. Sie dürfen davon ausgehen, dass bereits ein Leader bestimmt wurde.

Hinweis: Die Dreiecksungleichung besagt, dass $\operatorname{dist}(u, v) \leq \operatorname{dist}(u, w) + \operatorname{dist}(w, v)$ für alle Knoten u, v und w.

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass im Push-Modell für n Knoten folgendes gilt: Wenn $c' \ln n \leq G(t) \leq \frac{2}{3}n$ für eine passende Konstante c' gilt, dann ist $G(t+1) \leq 0.9 \cdot G(t)$ mit hoher Wahrscheinlichkeit (also mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1 - \frac{1}{n^c}$ für eine vorgegebene Konstante c).

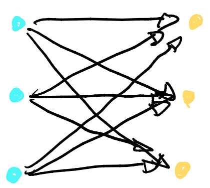
Hinweis: Die Aussage gilt jedenfalls für $c' = 288c$.

Def: t-Spanner: $\operatorname{dist}(u,v)$ wird um maximal Faktor t gestreckt.

4 z.Z: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists G=(V,E)$: Jeder t-Spanner von G mit $t<n$ hat $\Omega(n^2)$ Kanten.

Tipp: $\operatorname{dist}(u,v)=\infty$ ist möglich.

Sei G nach folgendem Muster bipartit:



d.h. $\operatorname{dist}(\bullet,\bullet)=1$ und $\operatorname{dist}(\bullet,\bullet)=\infty$ wo $\bullet$ ein beliebiger blauer Knoten und $\bullet$ ein beliebiger gelbe Knoten ist.

Wird eine Kante zwischen zwei Knoten u, v entfernt, so ist $\operatorname{dist}(u,v)=\infty$.

Somit wäre ein Spanner, der mindestens eine Kante entfernt, ein ∞-Spanner.

$|E| = |V|^2 = n^2$

$\Rightarrow$ Jeder t-Spanner von G mit $t<n<\infty$ hat $\Theta(n^2)=\Omega(n^2)$ viele Kanten

5 Gesucht: 2-Approx. des Durchmessers in $O(D)$, d.h. $\hat{D}$ mit $\frac{1}{2}D \leq \hat{D} \leq D$

Annahme: CONGEST, $\exists$ Leader

Beobachtung: Ein Downcast vom Leader dauert $O(D)$ Runden

Idee: Leader downcasted 1, Knoten addieren 1 bevor sie weitersenden

Blätter upcasten ihren Wert

Innere Knoten upcasten das Maximum (wir berechnen die Exzentrität vom Leader)

z.Z. Resultat ist 2-Approx. des Durchmessers.

$\Leftrightarrow$ Der längste Weg weg von irgendeinem Knoten ℓ ist mind. $D/2$ lang.

$\Leftrightarrow$ $Ecc(\ell) \geq 1/2 \max_{v \in V} \{Ecc(v)\}$

Seien u, v sodass $dist(u,v) = D$.

Dann muss $dist(u,\ell) + dist(\ell,v) \geq dist(u,v)$ (Dreiecksungl.)

W.l.o.g. sei $dist(u,\ell) \geq dist(\ell,v)$. Dann ist $dist(u,\ell) \geq D/2$

Folglich ist auch $Ecc(\ell) \geq D/2$

z.z. $Ecc(\ell) \leq D$: $D := \max_{v \in V} \{Ecc(v)\}$, also muss $Ecc(\ell) \leq D$.

$\Rightarrow$ Der Algorithmus berechnet eine 2-Approx. des Durchmessers.