12

$$\begin{pmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ -0.2 & -0.3 & 0.5 \\ 0.5 & -0.4 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

1. Mittelgrau

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ -0.2 & -0.3 & 0.5 \\ 0.5 & -0.4 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 128 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + 128 \begin{pmatrix} 0.3 \\ -0.2 \\ 0.5 \end{pmatrix} + 128 \begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.3 \\ -0.4 \end{pmatrix} + 128 \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 38.4 \\ -25.6 \\ 64 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 76.8 \\ -38.4 \\ -51.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12.8 \\ 64 \\ -12.8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 128 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix}$$

2. Blau (0, 0, 255)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + 255 \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25.5 \\ 127.5 \\ -25.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25.5 \\ 254.5 \\ 102.5 \end{pmatrix}$$

3. Cyan $(0, 255, 255)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + 255 \begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.3 \\ -0.4 \end{pmatrix} + 255 \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 153 \\ -76.5 \\ -102 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25.5 \\ 127.5 \\ -25.5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 178.5 \\ 179 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

4. Schwarz $(0,0,0)$

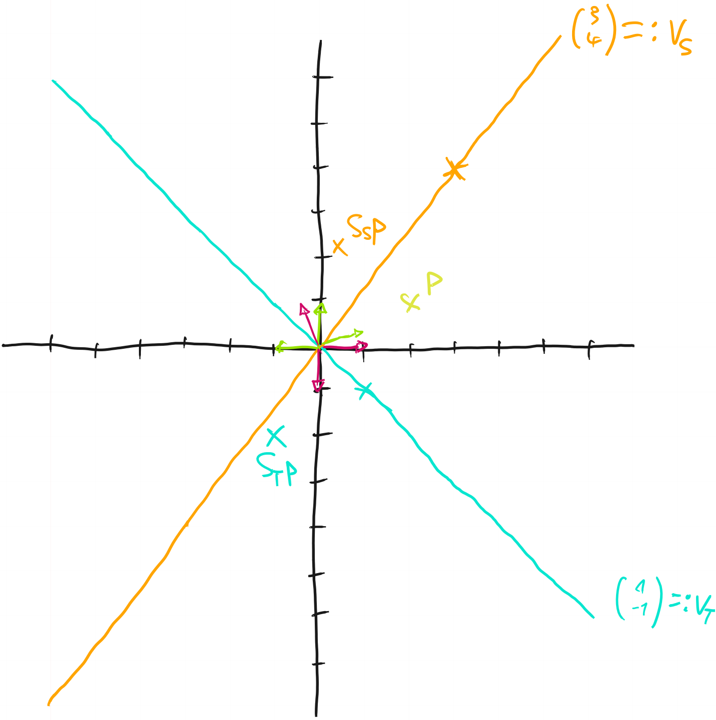
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix}$$

13

$$v_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{1}{x_s^2 + y_s^2} \begin{pmatrix} x_s^2 - y_s^2 & 2x_s y_s \\ 2x_s y_s & y_s^2 - x_s^2 \end{pmatrix}$$

Normalisierung



$$S_S = \frac{1}{3^2+4^2}\begin{pmatrix} 3^2-4^2 & 2\cdot 3\cdot 4 \\ 2\cdot 3\cdot 4 & 4^2-3^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7/25 & 24/25 \\ 24/25 & 7/25 \end{pmatrix}$$

$$S_S P = \begin{pmatrix} -7/25 & 24/25 \\ 24/25 & 7/25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} -7/25 \\ 24/25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24/25 \\ 7/25 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -14/25 \\ 48/25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24/25 \\ 7/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/25 \\ 55/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 11/5 \end{pmatrix}$$

$$S_T = 1/2 \begin{pmatrix} 1^2-(-1)^2 & 2\cdot 1(-1) \\ 2\cdot 1(-1) & (-1)^2-1^2 \end{pmatrix}$$

$$= 1/2 \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{TP} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

14

$$x \times y := \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

z.Z. $\lambda x \times y = \lambda(x \times y)$

$$\lambda x \times y = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \lambda x_2 & \lambda x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \lambda x_3 & \lambda x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x_2 y_3 - \lambda x_3 y_2 \\ \lambda x_3 y_1 - \lambda x_1 y_3 \\ \lambda x_1 y_2 - \lambda x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(x_2y_3 - x_3y_2) \\ \lambda(x_3y_1 - x_1y_3) \\ \lambda(x_1y_2 - x_2y_1) \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda(x \times y)$$

z.Z. $(a+b) \times y = a \times y + b \times y$

$$(a+b) \times y = \begin{pmatrix} (a_2+b_2)y_3 - (a_3+b_3)y_2 \\ (a_3+b_3)y_1 - (a_1+b_1)y_3 \\ (a_1+b_1)y_2 - (a_2+b_2)y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2y_3 + b_2y_3 - (a_3y_2 + b_3y_2) \\ a_3y_1 + b_3y_1 - (a_1y_3 + b_1y_3) \\ a_1y_2 + b_1y_2 - (a_2y_1 + b_2y_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2y_3 + b_2y_3 - a_3y_2 - b_3y_2 \\ a_3y_1 + b_3y_1 - a_1y_3 - b_1y_3 \\ a_1y_2 + b_1y_2 - a_2y_1 - b_2y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2y_3 - a_3y_2 + b_2y_3 - b_3y_2 \\ a_3y_1 - a_1y_3 + b_3y_1 - b_1y_3 \\ a_1y_2 - a_2y_1 + b_1y_2 - b_2y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_2 y_3 - a_3 y_2) + (b_2 y_3 - b_3 y_2) \\ (a_3 y_1 - a_1 y_3) + (b_3 y_1 - b_1 y_3) \\ (a_1 y_2 - a_2 y_1) + (b_1 y_2 - b_2 y_1) \end{pmatrix}$$

$$= a \times y + b \times y$$

$\Rightarrow$ T ist eine lineare Abbildung.

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -y_3 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = \begin{pmatrix} y_3 \\ 0 \\ -y_1 \end{pmatrix}$$

$$T(e_3) = \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die Matrix, die T repräsentiert, ist

$$\begin{pmatrix} 0 & y_3 & y_2 \\ -y_3 & 0 & y_1 \\ y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix}$$

TS

Für lineare Abbildungen $T: V \to W$ gilt:

① $T(\lambda v) = \lambda T(v)$

② $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

Wir betrachten zunächst T_1. Sei $v \in \mathbb{R}^3$

$$T(\lambda v) = T\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda x + \lambda z \\ \lambda x - \lambda z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(x+z) \\ \lambda(x-z) \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} x+z \\ x-z \end{pmatrix} = \lambda T(v)$$

① gilt

Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$.

$$T(v_1 + v_2) = T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x_1+x_2)+(z_1+z_2) \\ (x_1+x_2)-(z_1+z_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1+x_2+z_1+z_2 \\ x_1+x_2-z_1-z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1+z_1+x_2+z_2 \\ x_1-z_1+x_2-z_2 \end{pmatrix}$$

$$= T(v_1)+T(v_2)$$

(2) gilt

Damit ist T_1 linear.

$$T_1(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_1(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix zu T_1 ist damit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und korrespondiert natürlich zu T_1

T_2: Sei $v \in \mathbb{R}^2$

$$T(\lambda v) = T\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

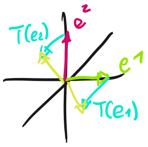
$$= \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\neq \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda 1 \end{pmatrix} = \lambda\, T_2(v)$$

(1) gilt nicht

$\Rightarrow$ T_2 ist nicht linear

$$T_2(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$T_2(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist damit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Abbildung wäre:

$$T(v) = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$$

16

T korrespondiert zu einer Matrix,
Die Skalaren in Matrizen sind Elemente
eines Körpers K

$T(x)$ entspricht einer Matrix-Vektor-Mult.

$$T(x) = A_T x$$

Deren Ergebnis ist wiederum ein Vektor

Gilt $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ so ist $\lambda \in K$

$\Rightarrow$ V, W sind Vektorräume über K

$$x_i \in V, \quad \lambda_i \in K, \quad 1 \leq i \leq s$$

z.Z. $T(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_s x_s) = \lambda_1 T(x_1) + \dots + \lambda_s T(x_s)$

IB $T(\lambda_1 x_1) = \lambda_1 T(x_1)$ da T eine
lineare Transformation ist

IH $T(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_i x_i) = \lambda_1 T(x_1) + \dots + \lambda_i T(x_i)$

IS $i \rightarrow i+1$

$$T(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_i x_i + \lambda_{i+1} x_{i+1})$$

+ ist assoziativ in K $= T((\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_i x_i) + \lambda_{i+1} x_{i+1})$

T ist lineare Transf. $= T(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_i x_i) + T(\lambda_{i+1} x_{i+1})$

IH $= \lambda_1 T(x_1) + \dots + \lambda_i T(x_i) + T(\lambda_{i+1} x_{i+1})$

T ist linear $= \lambda_1 T(x_1) + \dots + \lambda_i T(x_i) + \lambda_{i+1} T(x_{i+1})$

$\blacksquare$