Epidemische Informationsausbreitung I

Algorithmen für verteilte Systeme

Sebastian Forster

Universität Salzburg

Informationsausbreitung in Point-to-Point-Netzwerken

Point-to-Point Netzwerke:

- Jeder Knoten kann pro Runde nur mit jeweils einem anderen Knoten eine Verbindung herstellen

Informationsausbreitung in Point-to-Point-Netzwerken

Point-to-Point Netzwerke:

- Jeder Knoten kann pro Runde nur mit jeweils einem anderen Knoten eine Verbindung herstellen
- Bandbreitenbeschränkung: Mit jeder hergestellte Verbindung kann nur eine Nachricht beschränkter Größe gesendet bzw. empfangen werden.

Informationsausbreitung in Point-to-Point-Netzwerken

Point-to-Point Netzwerke:

- Jeder Knoten kann pro Runde nur mit jeweils einem anderen Knoten eine Verbindung herstellen
- Bandbreitenbeschränkung: Mit jeder hergestellte Verbindung kann nur eine Nachricht beschränkter Größe gesendet bzw. empfangen werden.
- Modelliert insbesondere Ende-zu-Ende-Verbindungen über niedere Netzwerkschichten

Informationsausbreitung in Point-to-Point-Netzwerken

Point-to-Point Netzwerke:

- Jeder Knoten kann pro Runde nur mit jeweils einem anderen Knoten eine Verbindung herstellen
- Bandbreitenbeschränkung: Mit jeder hergestellte Verbindung kann nur eine Nachricht beschränkter Größe gesendet bzw. empfangen werden.
- Modelliert insbesondere Ende-zu-Ende-Verbindungen über niedere Netzwerkschichten

Zentrale Fragestellung: Effiziente Verbreitung einer Information an alle Knoten des Netzwerks

Informationsausbreitung in Point-to-Point-Netzwerken

Point-to-Point Netzwerke:

- Jeder Knoten kann pro Runde nur mit jeweils einem anderen Knoten eine Verbindung herstellen
- Bandbreitenbeschränkung: Mit jeder hergestellte Verbindung kann nur eine Nachricht beschränkter Größe gesendet bzw. empfangen werden.
- Modelliert insbesondere Ende-zu-Ende-Verbindungen über niedere Netzwerkschichten

Zentrale Fragestellung: Effiziente Verbreitung einer Information an alle Knoten des Netzwerks

Broadcast durch „Flooding“ nicht möglich!

Informationsausbreitung in Point-to-Point-Netzwerken

Point-to-Point Netzwerke:

- Jeder Knoten kann pro Runde nur mit jeweils einem anderen Knoten eine Verbindung herstellen
- Bandbreitenbeschränkung: Mit jeder hergestellte Verbindung kann nur eine Nachricht beschränkter Größe gesendet bzw. empfangen werden.
- Modelliert insbesondere Ende-zu-Ende-Verbindungen über niedere Netzwerkschichten

Zentrale Fragestellung: Effiziente Verbreitung einer Information an alle Knoten des Netzwerks

Broadcast durch „Flooding“ nicht möglich!

Motivation:

- Replizierte Datenbanken in Peer-to-Peer-Netzwerken
- Gleicher Datenbestand an allen Knoten, der konsistent gehalten wird
- Neue Information eines Knotens wird an alle anderen Knoten verteilt

Phone-Call-Modell

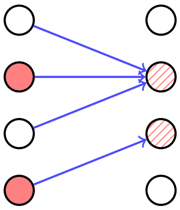
- Netzwerkstruktur: vollständiger Graph mit n Knoten

Phone-Call-Modell

- Netzwerkstruktur: vollständiger Graph mit n Knoten
- Kommunikation findet in synchronen Runden statt
- In jeder Runde kann jeder Knoten einen anderen Knoten anrufen

Phone-Call-Modell

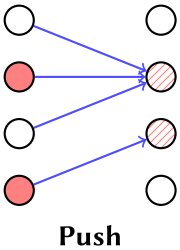
- Netzwerkstruktur: vollständiger Graph mit n Knoten
- Kommunikation findet in synchronen Runden statt
- In jeder Runde kann jeder Knoten einen anderen Knoten anrufen
- Drei Kommunikationsmodelle:
  1. **Push:** Der Anrufer informiert den Angerufenen

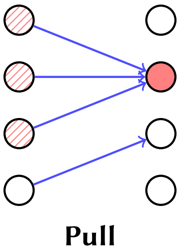


Push

Phone-Call-Modell

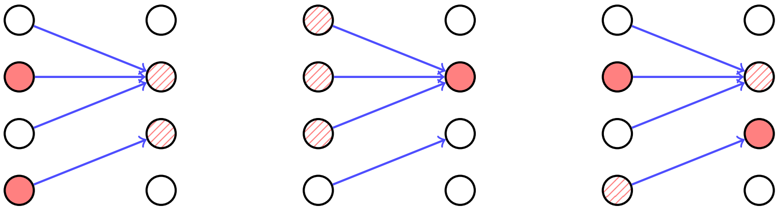
- Netzwerkstruktur: vollständiger Graph mit n Knoten
- Kommunikation findet in synchronen Runden statt
- In jeder Runde kann jeder Knoten einen anderen Knoten anrufen
- Drei Kommunikationsmodelle:
  1. **Push:** Der Anrufer informiert den Angerufenen
  2. **Pull:** Der Angerufene informiert den Anrufer





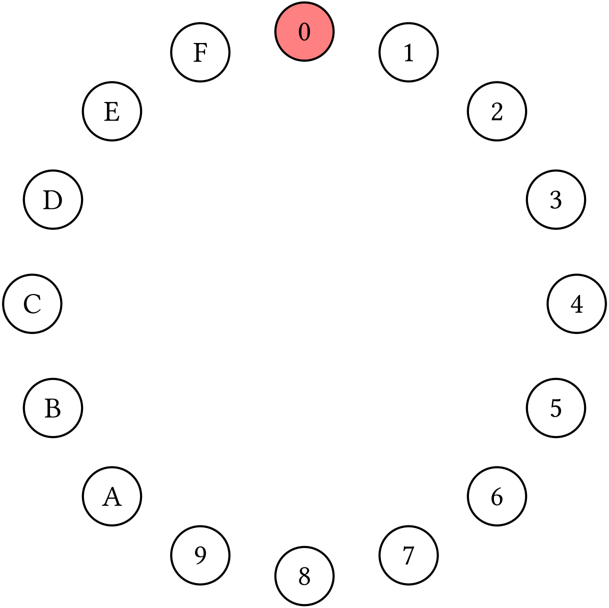
Phone-Call-Modell

- Netzwerkstruktur: vollständiger Graph mit n Knoten
- Kommunikation findet in synchronen Runden statt
- In jeder Runde kann jeder Knoten einen anderen Knoten anrufen
- Drei Kommunikationsmodelle:
    1. **Push:** Der Anrufer informiert den Angerufenen
    2. **Pull:** Der Angerufene informiert den Anrufer
    3. **Push & Pull:** Kombination von Push und Pull

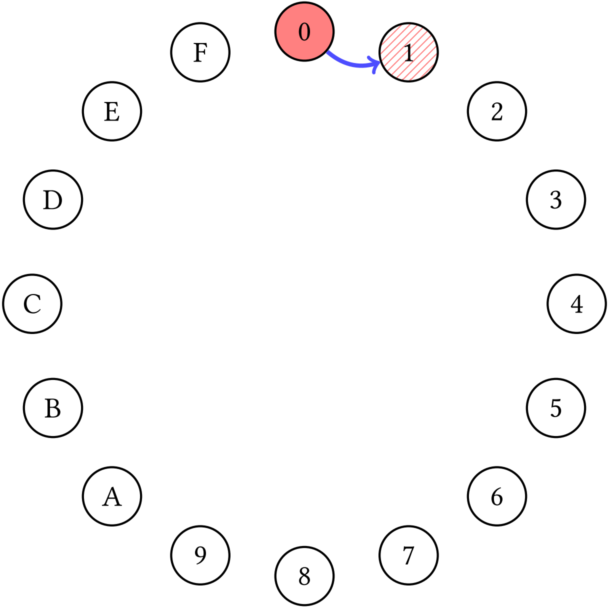


Push **Pull** **Push & Pull**

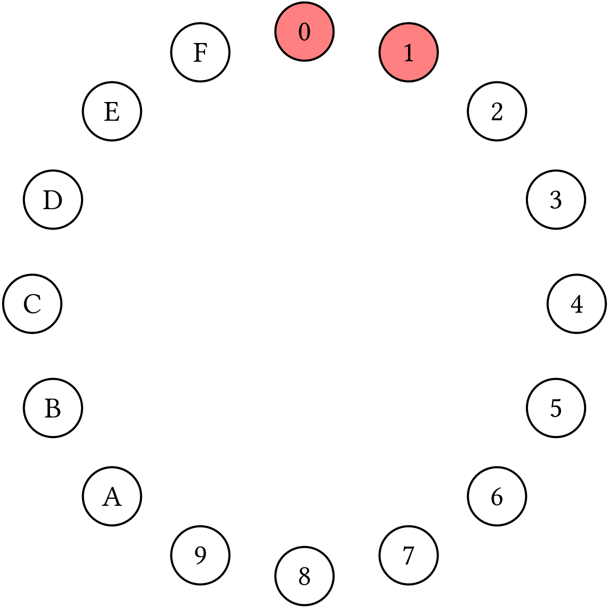
Beispiel: Deterministischer Push-Algorithmus



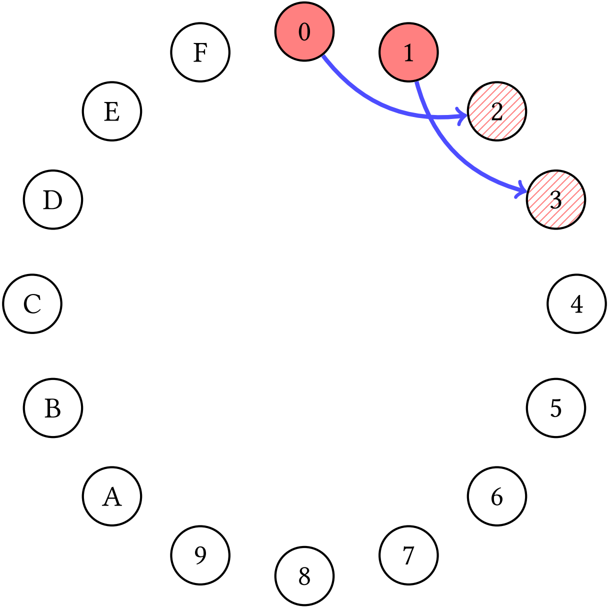
Beispiel: Deterministischer Push-Algorithmus



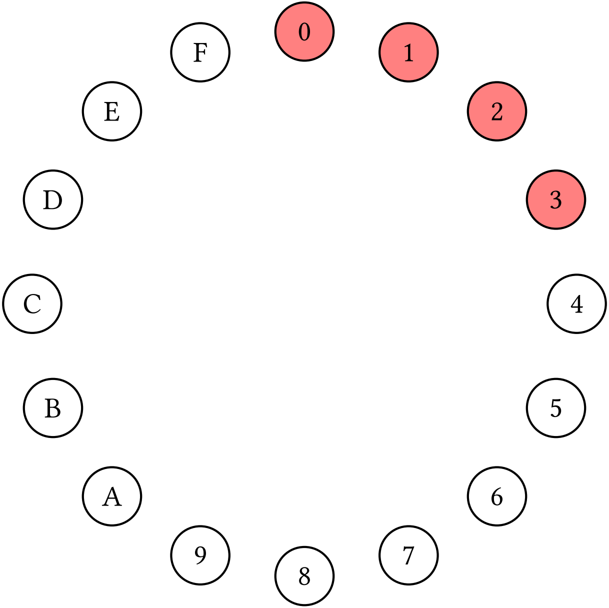
Beispiel: Deterministischer Push-Algorithmus



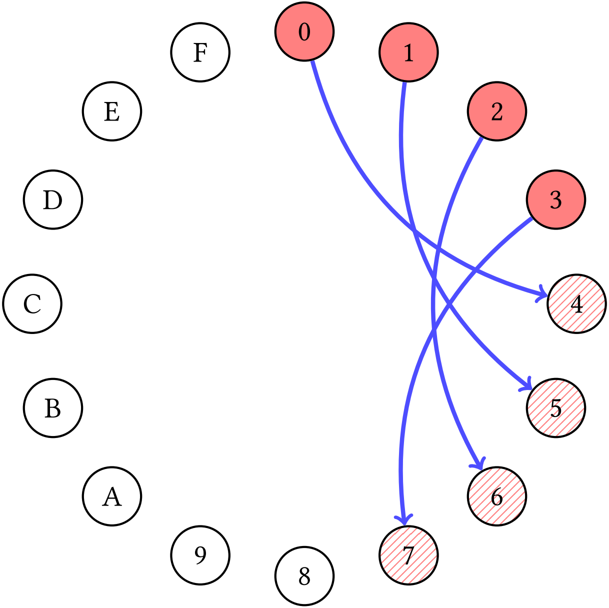
Beispiel: Deterministischer Push-Algorithmus



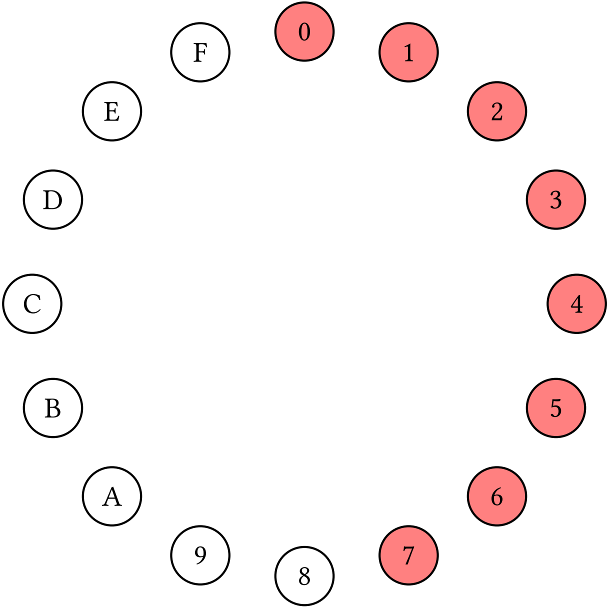
Beispiel: Deterministischer Push-Algorithmus



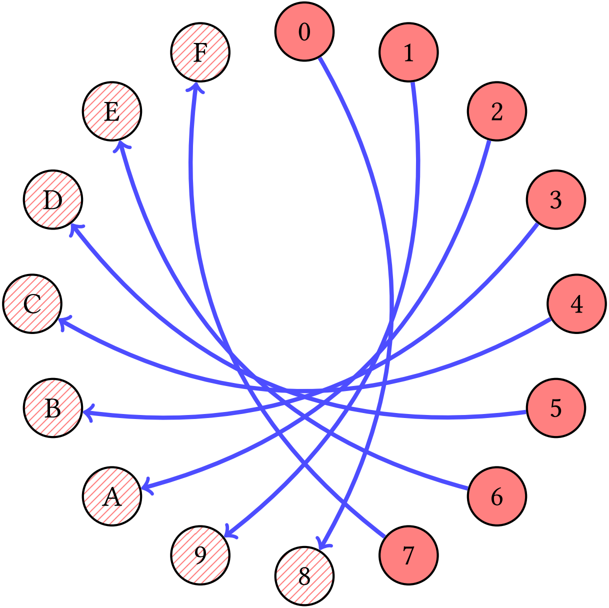
Beispiel: Deterministischer Push-Algorithmus



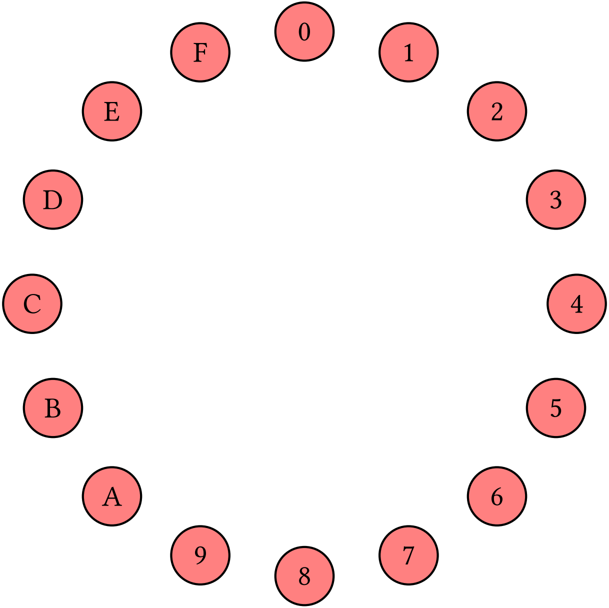
Beispiel: Deterministischer Push-Algorithmus



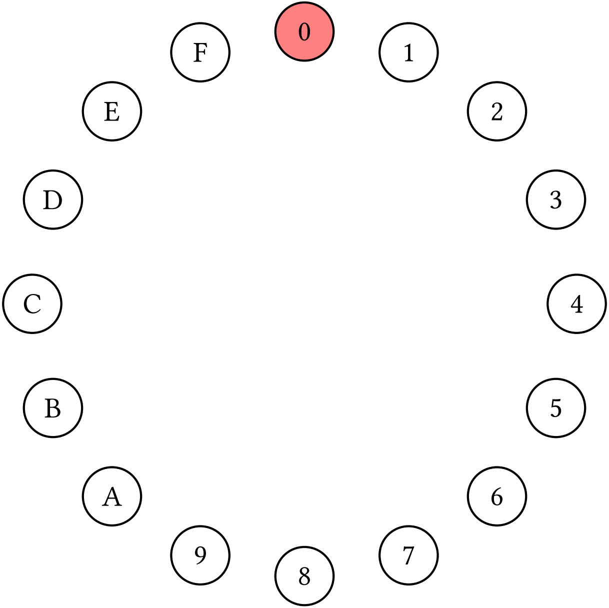
Beispiel: Deterministischer Push-Algorithmus



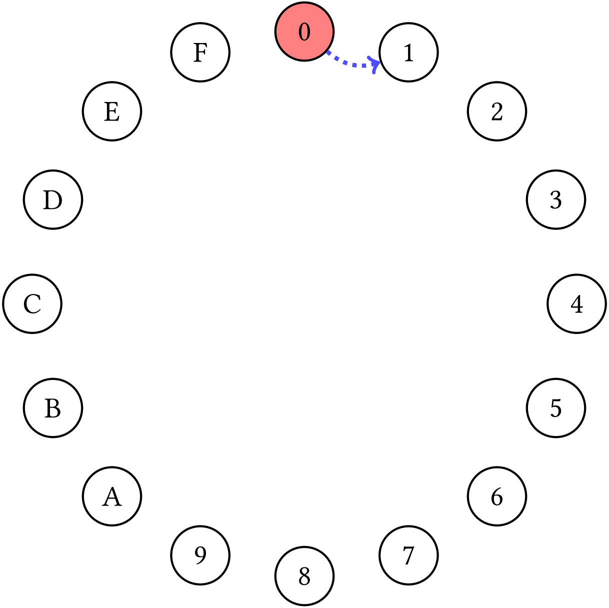
Beispiel: Deterministischer Push-Algorithmus



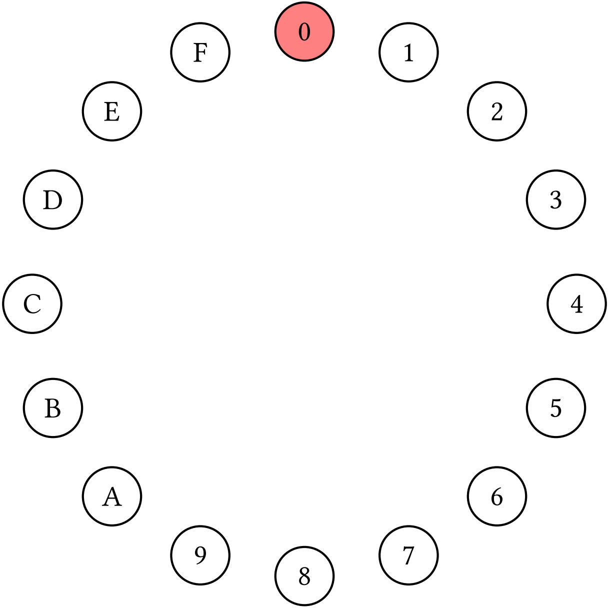
Mangelnde Fehlertoleranz



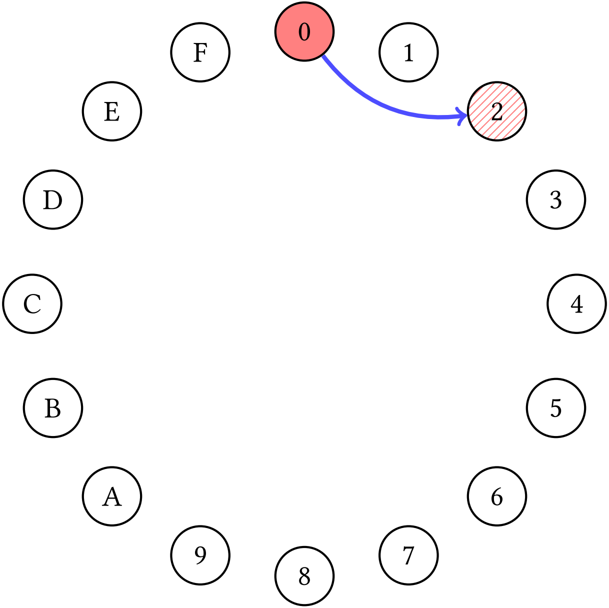
Mangelnde Fehlertoleranz



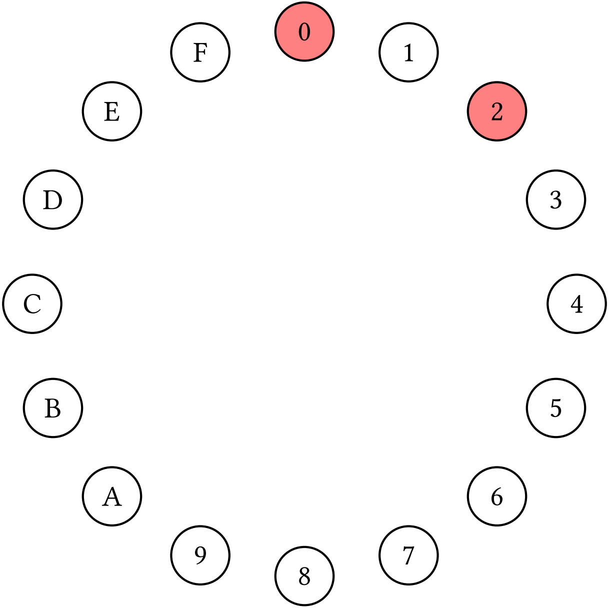
Mangelnde Fehlertoleranz



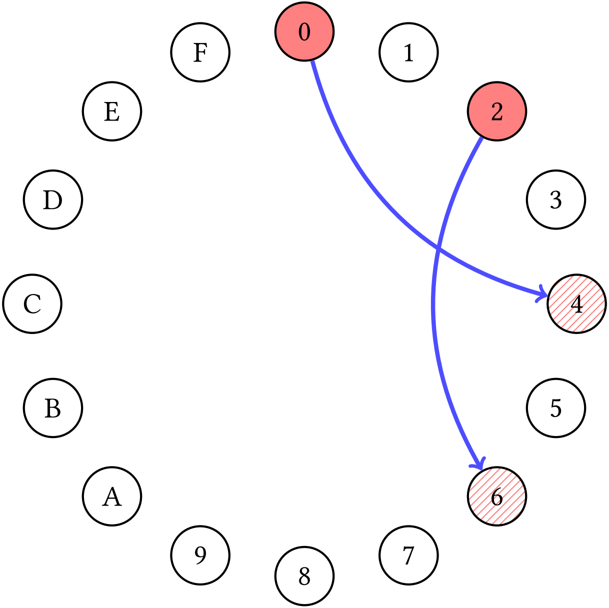
Mangelnde Fehlertoleranz



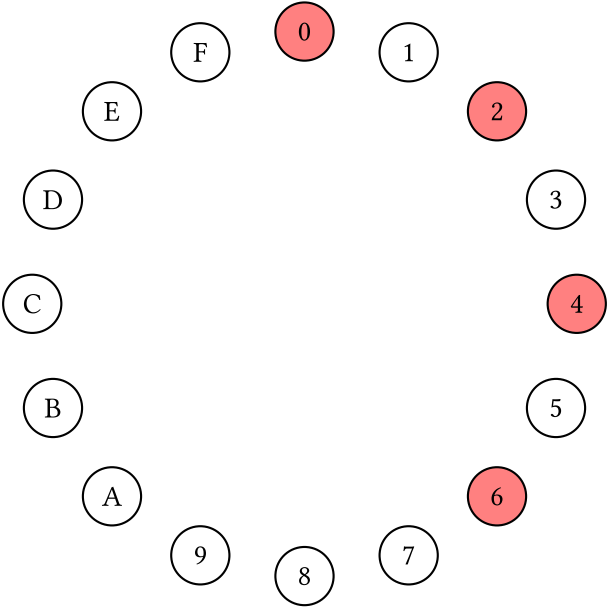
Mangelnde Fehlertoleranz



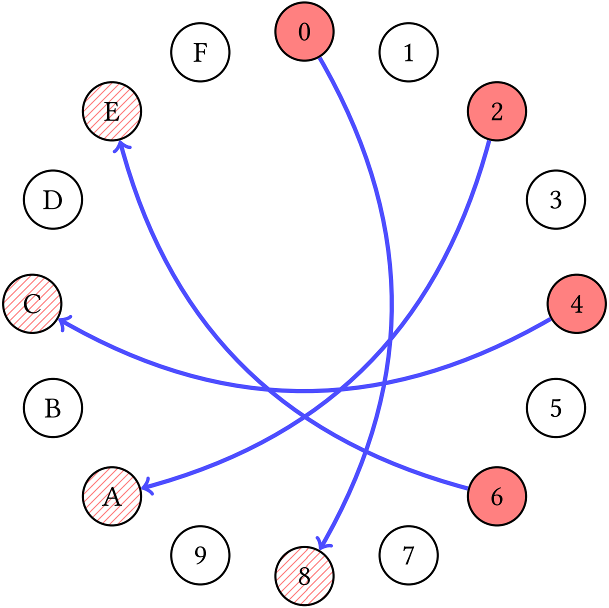
Mangelnde Fehlertoleranz



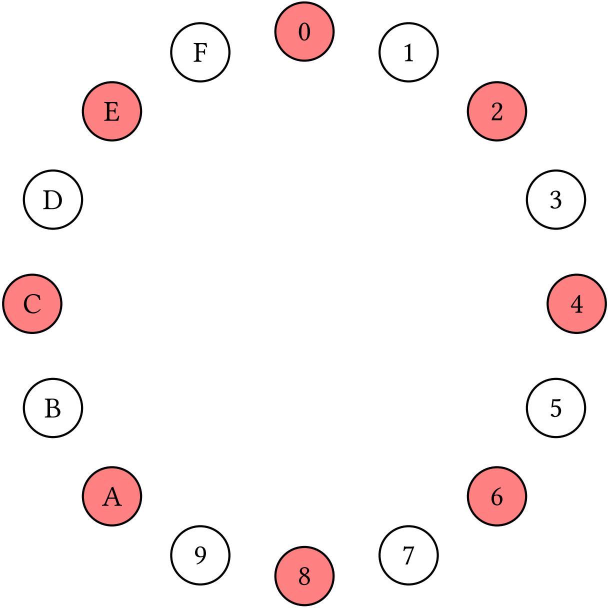
Mangelnde Fehlertoleranz



Mangelnde Fehlertoleranz



Mangelnde Fehlertoleranz



Beobachtungen

Deterministischer Algorithmus:

- Insgesamt $O(n)$ Nachrichten in $O(\log n)$ Runden

Beobachtungen

Deterministischer Algorithmus:

- Insgesamt $O(n)$ Nachrichten in $O(\log n)$ Runden
  Optimal, da jeder Knoten mit einer Nachricht informiert werden muss und sich Anzahl informierter Knoten in jeder Runde bestenfalls verdoppeln kann

Beobachtungen

Deterministischer Algorithmus:

- Insgesamt $O(n)$ Nachrichten in $O(\log n)$ Runden
  Optimal, da jeder Knoten mit einer Nachricht informiert werden muss und sich Anzahl informierter Knoten in jeder Runde bestenfalls verdoppeln kann
- Nachteile:
  1. Keine Fehlertoleranz bei unzuverlässigen Knoten oder Verbindungen

Beobachtungen

Deterministischer Algorithmus:

- Insgesamt $O(n)$ Nachrichten in $O(\log n)$ Runden
  Optimal, da jeder Knoten mit einer Nachricht informiert werden muss und sich Anzahl informierter Knoten in jeder Runde bestenfalls verdoppeln kann
- Nachteile:
  1. Keine Fehlertoleranz bei unzuverlässigen Knoten oder Verbindungen
  2. Jedem Knoten müssen alle anderen Knoten bekannt sein

Beobachtungen

Deterministischer Algorithmus:

- Insgesamt $O(n)$ Nachrichten in $O(\log n)$ Runden

  Optimal, da jeder Knoten mit einer Nachricht informiert werden muss und sich Anzahl informierter Knoten in jeder Runde bestenfalls verdoppeln kann
- Nachteile:
  1. Keine Fehlertoleranz bei unzuverlässigen Knoten oder Verbindungen
  2. Jedem Knoten müssen alle anderen Knoten bekannt sein
  3. Übertragung auf Pull-Modell unklar

Epicast als Ersatz für Broadcast [Demers et al. 87]

Epicast:

- Ausbreitung der Information wie ein Virus oder ein Gerücht

Epicast als Ersatz für Broadcast [Demers et al. 87]

Epicast:

- Ausbreitung der Information wie ein Virus oder ein Gerücht
  Wir bezeichnen Weitergabe der Information als Infektion

Epicast als Ersatz für Broadcast [Demers et al. 87]

Epicast:

- Ausbreitung der Information wie ein Virus oder ein Gerücht
  Wir bezeichnen Weitergabe der Information als Infektion
- Jeder Knoten gibt die Information durch Zufallsauswahl weiter, bis sie allen Knoten bekannt ist

Epicast als Ersatz für Broadcast [Demers et al. 87]

Epicast:

- Ausbreitung der Information wie ein Virus oder ein Gerücht
  Wir bezeichnen Weitergabe der Information als Infektion
- Jeder Knoten gibt die Information durch Zufallsauswahl weiter, bis sie allen Knoten bekannt ist
- Vorteile: schnell, robust, einfach
- Nachteil: Nachrichtenoverhead

Epicast als Ersatz für Broadcast [Demers et al. 87]

Epicast:

- Ausbreitung der Information wie ein Virus oder ein Gerücht
  Wir bezeichnen Weitergabe der Information als Infektion
- Jeder Knoten gibt die Information durch Zufallsauswahl weiter, bis sie allen Knoten bekannt ist
- Vorteile: schnell, robust, einfach
- Nachteil: Nachrichtenoverhead

Random-Phone-Call-Modell:

- In jeder Runde ruft jeder Knoten einen uniform zufällig gewählten Knoten and

Epicast als Ersatz für Broadcast [Demers et al. 87]

Epicast:

- Ausbreitung der Information wie ein Virus oder ein Gerücht
  Wir bezeichnen Weitergabe der Information als Infektion
- Jeder Knoten gibt die Information durch Zufallsauswahl weiter, bis sie allen Knoten bekannt ist
- Vorteile: schnell, robust, einfach
- Nachteil: Nachrichtenoverhead

Random-Phone-Call-Modell:

- In jeder Runde ruft jeder Knoten einen uniform zufällig gewählten Knoten and
- Der Einfachheit halber: Knoten kann auch sich selbst anrufen

Epicast als Ersatz für Broadcast [Demers et al. 87]

Epicast:

- Ausbreitung der Information wie ein Virus oder ein Gerücht
  Wir bezeichnen Weitergabe der Information als Infektion
- Jeder Knoten gibt die Information durch Zufallsauswahl weiter, bis sie allen Knoten bekannt ist
- Vorteile: schnell, robust, einfach
- Nachteil: Nachrichtenoverhead

Random-Phone-Call-Modell:

- In jeder Runde ruft jeder Knoten einen uniform zufällig gewählten Knoten and
- Der Einfachheit halber: Knoten kann auch sich selbst anrufen
- Somit: Knoten u ruft Konten v mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ an

Epicast als Ersatz für Broadcast [Demers et al. 87]

Epicast:

- Ausbreitung der Information wie ein Virus oder ein Gerücht
  Wir bezeichnen Weitergabe der Information als Infektion
- Jeder Knoten gibt die Information durch Zufallsauswahl weiter, bis sie allen Knoten bekannt ist
- Vorteile: schnell, robust, einfach
- Nachteil: Nachrichtenoverhead

Random-Phone-Call-Modell:

- In jeder Runde ruft jeder Knoten einen uniform zufällig gewählten Knoten and
- Der Einfachheit halber: Knoten kann auch sich selbst anrufen
- Somit: Knoten u ruft Konten v mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ an
- Zufallsauswahl ohne explizite Kenntnis der anderen Knoten

Epicast als Ersatz für Broadcast [Demers et al. 87]

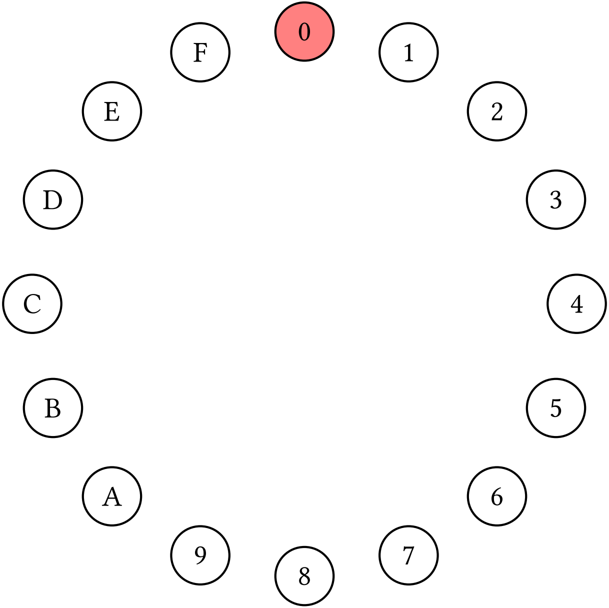
Epicast:

- Ausbreitung der Information wie ein Virus oder ein Gerücht
  Wir bezeichnen Weitergabe der Information als Infektion
- Jeder Knoten gibt die Information durch Zufallsauswahl weiter, bis sie allen Knoten bekannt ist
- Vorteile: schnell, robust, einfach
- Nachteil: Nachrichtenoverhead

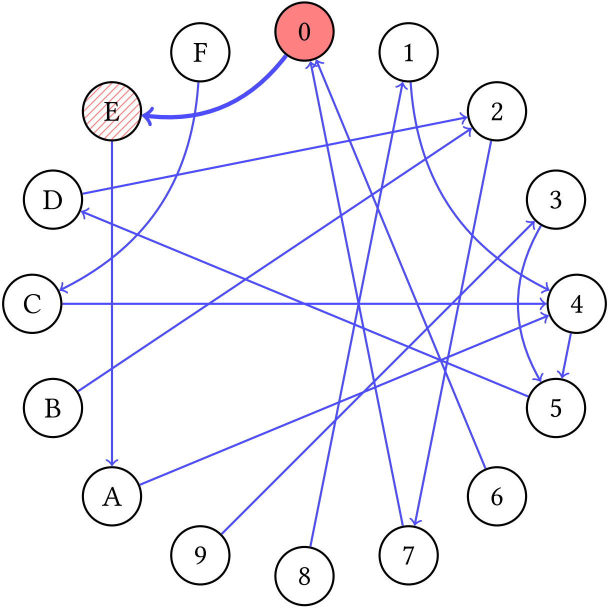
Random-Phone-Call-Modell:

- In jeder Runde ruft jeder Knoten einen uniform zufällig gewählten Knoten and
- Der Einfachheit halber: Knoten kann auch sich selbst anrufen
- Somit: Knoten u ruft Konten v mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ an
- Zufallsauswahl ohne explizite Kenntnis der anderen Knoten
  Zufällige Adressierung wird in vielen Peer-to-Peer-Netzwerken unterstützt

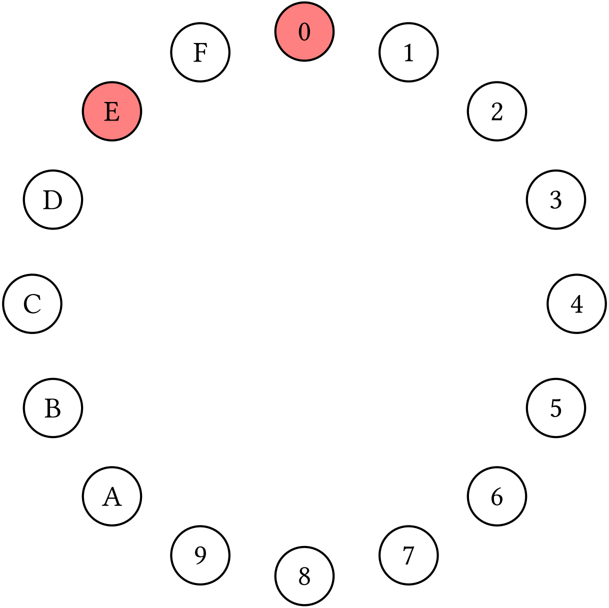
Beispiel Push-Modell



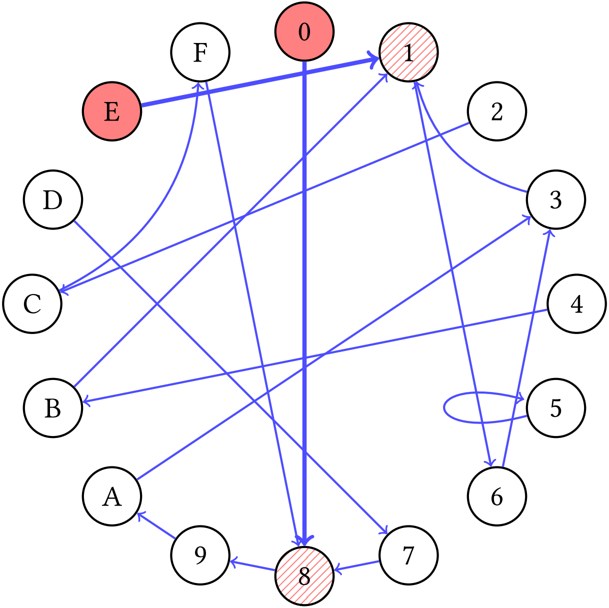
Beispiel Push-Modell



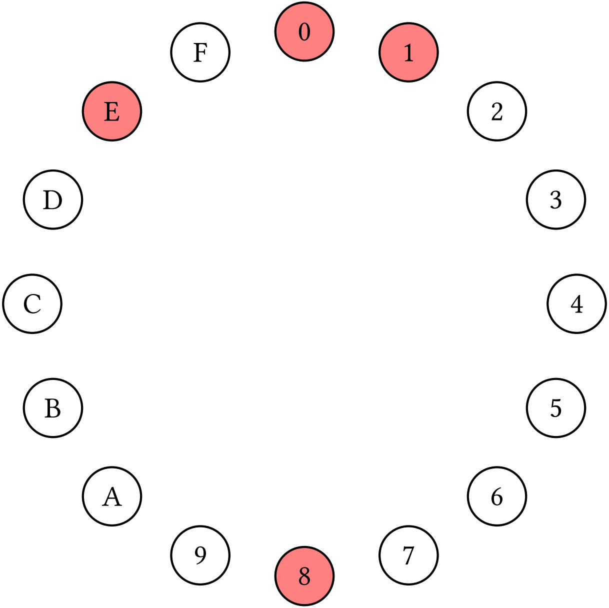
Beispiel Push-Modell



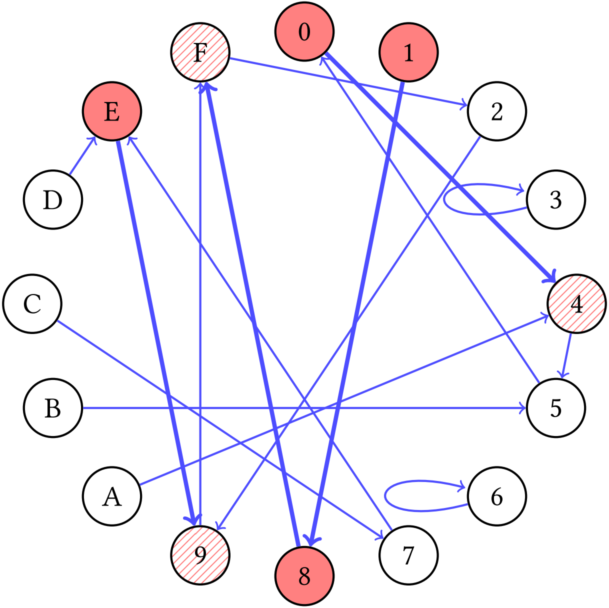
Beispiel Push-Modell



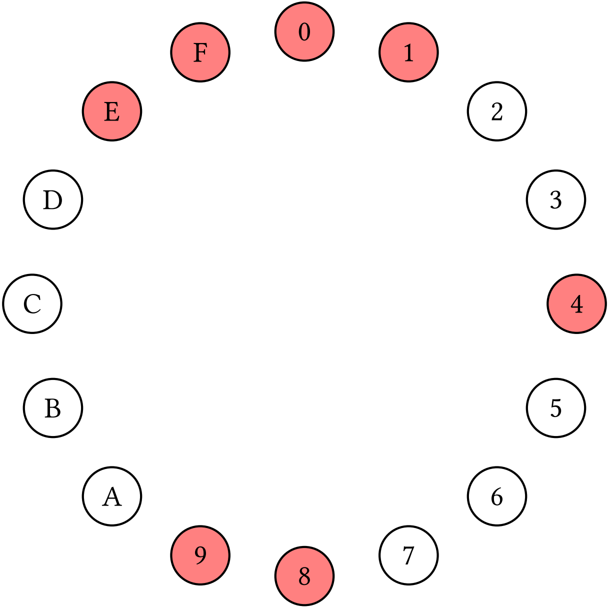
Beispiel Push-Modell



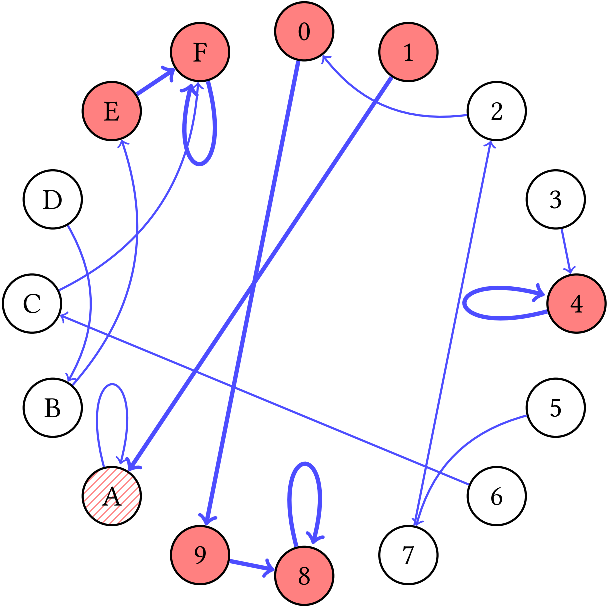
Beispiel Push-Modell



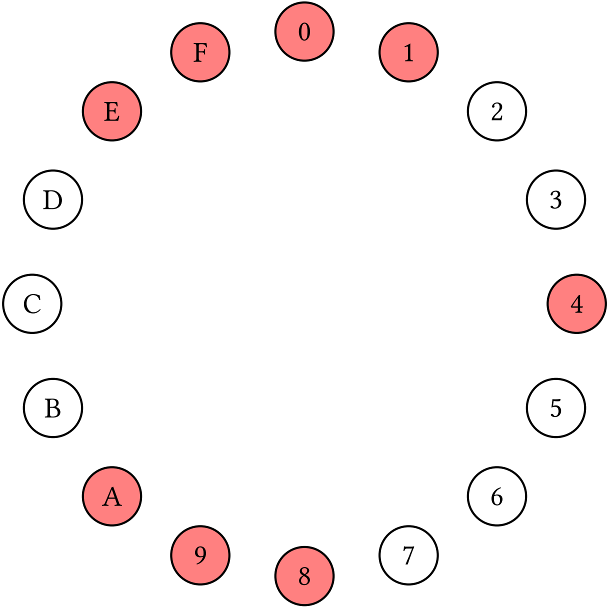
Beispiel Push-Modell



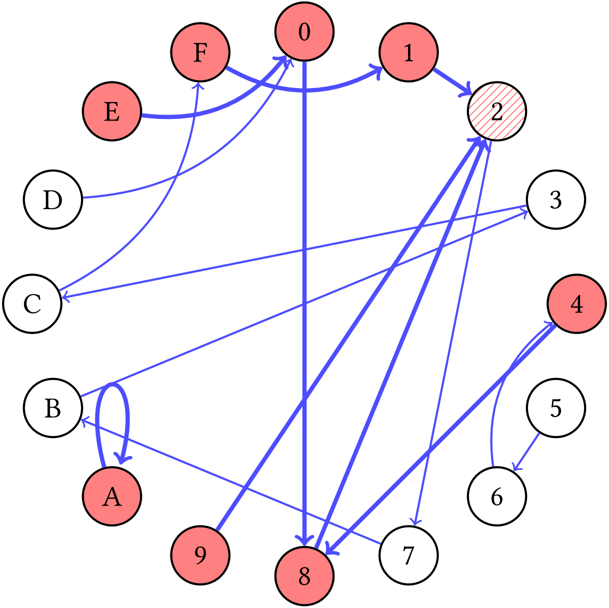
Beispiel Push-Modell



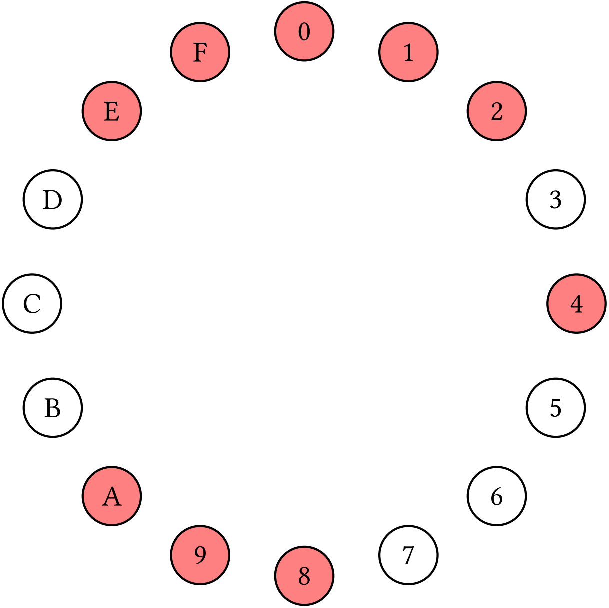
Beispiel Push-Modell



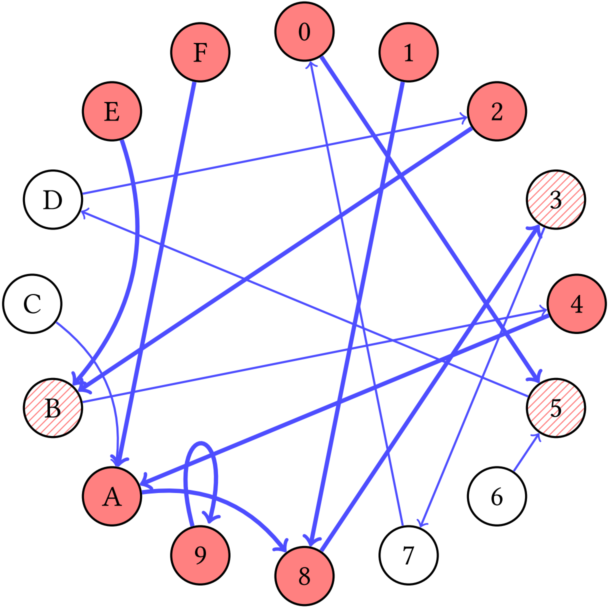
Beispiel Push-Modell



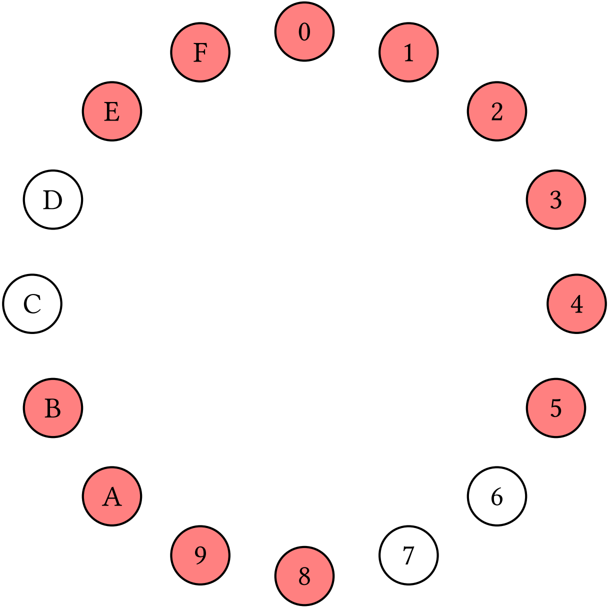
Beispiel Push-Modell



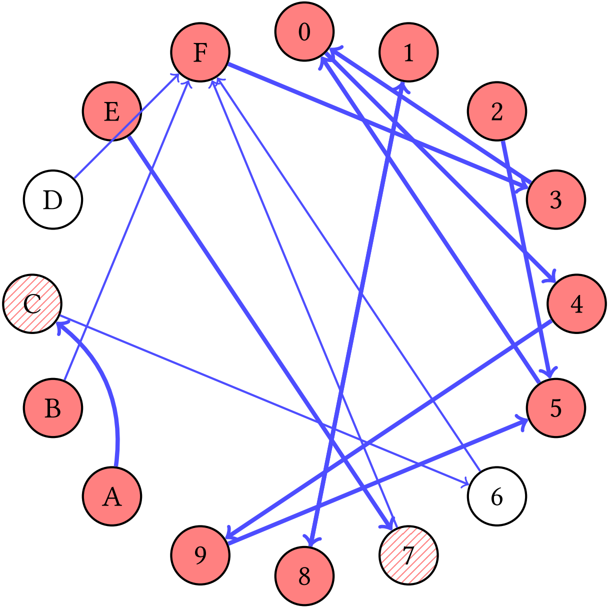
Beispiel Push-Modell



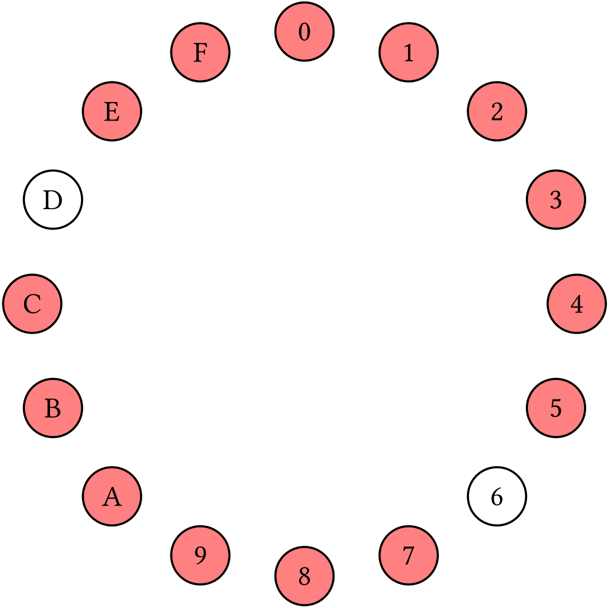
Beispiel Push-Modell



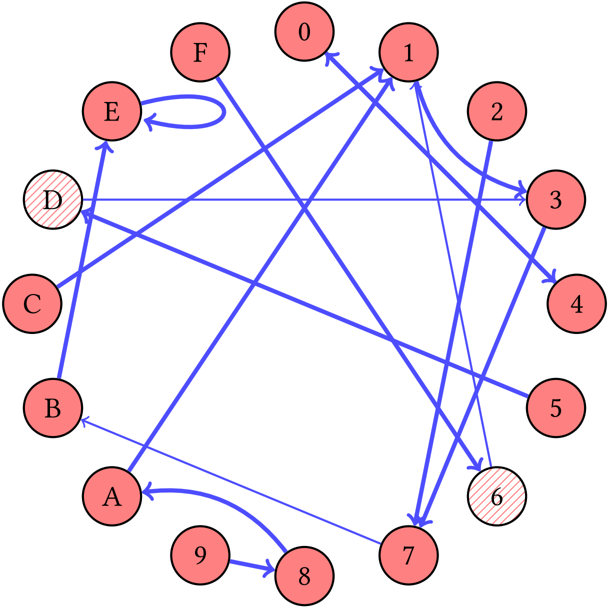
Beispiel Push-Modell



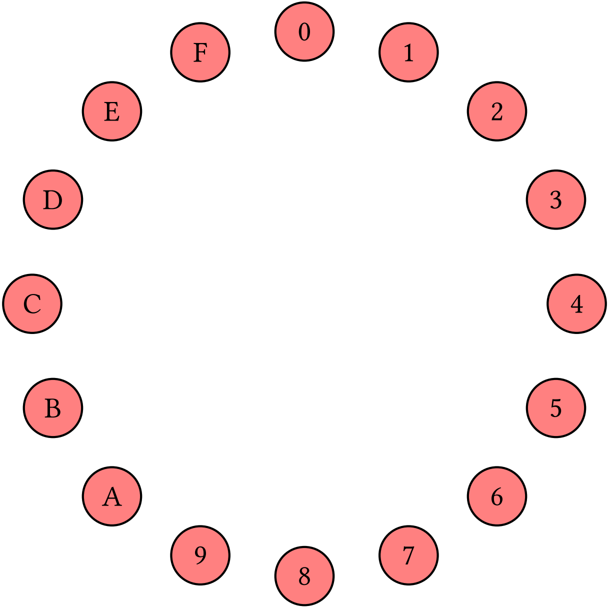
Beispiel Push-Modell



Beispiel Push-Modell



Beispiel Push-Modell



Theoretische Analyse Push-Modell

Frage: Wie lange es dauert bis alle Knoten infiziert sind, wenn anfangs ein Knoten infiziert ist?

Theoretische Analyse Push-Modell

Frage: Wie lange es dauert bis alle Knoten infiziert sind, wenn anfangs ein Knoten infiziert ist?

Theorem ([Frieze/Grimmett '85])

Im Push-Modell sind nach $t = O(\log n)$ *Runden mit hoher Wahrscheinlichkeit alle Knoten infiziert.*

Theoretische Analyse Push-Modell

Frage: Wie lange es dauert bis alle Knoten infiziert sind, wenn anfangs ein Knoten infiziert ist?

Theorem ([Frieze/Grimmett ’85])

Im Push-Modell sind nach $t = O(\log n)$ Runden mit hoher Wahrscheinlichkeit alle Knoten infiziert.

Anmerkungen:

- Mit zusätzlichem Zeitstempel kann überprüft werden, ob mit hoher Wahrscheinlichkeit bereits alle Knoten infiziert sind und Ausbreitung der Information gestoppt werden kann

Theoretische Analyse Push-Modell

Frage: Wie lange es dauert bis alle Knoten infiziert sind, wenn anfangs ein Knoten infiziert ist?

Theorem ([Frieze/Grimmett ’85])

Im Push-Modell sind nach $t = O(\log n)$ Runden mit hoher Wahrscheinlichkeit alle Knoten infiziert.

Anmerkungen:

- Mit zusätzlichem Zeitstempel kann überprüft werden, ob mit hoher Wahrscheinlichkeit bereits alle Knoten infiziert sind und Ausbreitung der Information gestoppt werden kann
- Robustheit:
  - Pro fehlerbehafteter Runde erhöht sich Gesamtzahl benötigter Runden um eins
  - Analyse kann auf Modell mit Infektionswahrscheinlichkeit erweitert werden

Theoretische Analyse Push-Modell

Frage: Wie lange es dauert bis alle Knoten infiziert sind, wenn anfangs ein Knoten infiziert ist?

Theorem ([Frieze/Grimmett '85])

Im Push-Modell sind nach $t = O(\log n)$ Runden mit hoher Wahrscheinlichkeit alle Knoten infiziert.

Anmerkungen:

- Mit zusätzlichem Zeitstempel kann überprüft werden, ob mit hoher Wahrscheinlichkeit bereits alle Knoten infiziert sind und Ausbreitung der Information gestoppt werden kann
- Robustheit:
  - Pro fehlerbehafteter Runde erhöht sich Gesamtzahl benötigter Runden um eins
  - Analyse kann auf Modell mit Infektionswahrscheinlichkeit erweitert werden
- Analyse des Zufallsprozesses auch für andere Graphstrukturen möglich

Notation für Analyse

- n: Anzahl der Knoten
- $I(t)$: Anzahl der infizierten Knoten am Beginn von Runde t
- $G(t)$: Anzahl der gesunden Knoten
- $i(t) = \frac{I(t)}{n}$: relativer Anteil der infizierten Knoten
- $g(t) = \frac{G(t)}{n}$: relativer Anteil der gesunden Knoten

Achtung: Zufallsvariablen

Notation für Analyse

- n: Anzahl der Knoten
- $I(t)$: Anzahl der infizierten Knoten am Beginn von Runde t
- $G(t)$: Anzahl der gesunden Knoten
- $i(t) = \frac{I(t)}{n}$: relativer Anteil der infizierten Knoten
- $g(t) = \frac{G(t)}{n}$: relativer Anteil der gesunden Knoten

Achtung: Zufallsvariablen

Für jede Runde t gilt: $i(t) + g(t) = 1$

Notation für Analyse

- n: Anzahl der Knoten
- $I(t)$: Anzahl der infizierten Knoten am Beginn von Runde t
- $G(t)$: Anzahl der gesunden Knoten
- $i(t) = \frac{I(t)}{n}$: relativer Anteil der infizierten Knoten
- $g(t) = \frac{G(t)}{n}$: relativer Anteil der gesunden Knoten

Achtung: Zufallsvariablen

Für jede Runde t gilt: $i(t) + g(t) = 1$

Ordnung der Knoten im Beweis: Bei der Analyse von Runde t nehmen wir eine beliebige Ordnung der infizierten Knoten an und bezeichen die Knoten mit $1, \ldots, I(t)$

Allgemeine Analyse

Frage

Wie hoch ist $I(t+1)$ in Abhängigkeit von $I(t)$?

Allgemeine Analyse

Frage

Wie hoch ist $I(t+1)$ in Abhängigkeit von $I(t)$?

Analysetrick:

- Anzahl der in Runde t infizierten Knoten ist schwer zu analysieren

Allgemeine Analyse

Frage

Wie hoch ist $I(t+1)$ in Abhängigkeit von $I(t)$?

Analysetrick:

- Anzahl der in Runde t infizierten Knoten ist schwer zu analysieren
- Stattdessen: Systematische Unterschätzung der Anzahl infizierter Knoten, die für unsere Zwecke gut genug ist

Allgemeine Analyse

Frage

Wie hoch ist $I(t+1)$ in Abhängigkeit von $I(t)$?

Analysetrick:

- Anzahl der in Runde t infizierten Knoten ist schwer zu analysieren
- Stattdessen: Systematische Unterschätzung der Anzahl infizierter Knoten, die für unsere Zwecke gut genug ist
- Betrachte nur **kollisionsfreie** Infektionen

Allgemeine Analyse

Frage

Wie hoch ist $I(t+1)$ in Abhängigkeit von $I(t)$?

Analysetrick:

- Anzahl der in Runde t infizierten Knoten ist schwer zu analysieren
- Stattdessen: Systematische Unterschätzung der Anzahl infizierter Knoten, die für unsere Zwecke gut genug ist
- Betrachte nur **kollisionsfreie** Infektionen

Definition

Ein Knoten j führt in Runde t eine kollisionsfreie Infektion durch, wenn

- j am Beginn von Runde t infiziert ist,
- der von j in Runde t angerufene Knoten am Beginn von Runde t gesund ist und
- der von j in Runde t angerufene Knoten in Runde t von keinem anderen infizierten Knoten als j angerufen wird

Allgemeine Analyse

Drei Ereignisse für infizierten Knoten j in Runde t

1. A_j: j ruft bereits infizierten Knoten an
2. B_j: j ruft denselben Knoten an wie ein anderer infizierter Knoten
3. C_j : j führt kollisionsfreie Infektion durch

Allgemeine Analyse

Drei Ereignisse für infizierten Knoten j in Runde t

1. A_j: j ruft bereits infizierten Knoten an
   $\Pr[A_j] = \frac{I(t)}{n} = i(t)$
2. B_j: j ruft denselben Knoten an wie ein anderer infizierter Knoten
3. C_j : j führt kollisionsfreie Infektion durch

Allgemeine Analyse

Drei Ereignisse für infizierten Knoten j in Runde t

1. A_j: j ruft bereits infizierten Knoten an
   $\Pr[A_j] = \frac{I(t)}{n} = i(t)$
2. B_j: j ruft denselben Knoten an wie ein anderer infizierter Knoten
   $\Pr[B_j] \leq \frac{I(t)-1}{n} \leq i(t)$
3. C_j : j führt kollisionsfreie Infektion durch

Allgemeine Analyse

Drei Ereignisse für infizierten Knoten j in Runde t

1. A_j: j ruft bereits infizierten Knoten an
   $\Pr[A_j] = \frac{I(t)}{n} = i(t)$
2. B_j: j ruft denselben Knoten an wie ein anderer infizierter Knoten
   $\Pr[B_j] \leq \frac{I(t)-1}{n} \leq i(t)$
3. C_j : j führt kollisionsfreie Infektion durch
   $\Pr[C_j] \geq 1 - \Pr[A_j \cup B_j] \geq 1 - (\Pr[A_j] + \Pr[B_j]) \geq 1 - 2i(t)$

Allgemeine Analyse

Drei Ereignisse für infizierten Knoten j in Runde t

1. A_j: j ruft bereits infizierten Knoten an
   $\Pr[A_j] = \frac{I(t)}{n} = i(t)$
2. B_j: j ruft denselben Knoten an wie ein anderer infizierter Knoten
   $\Pr[B_j] \leq \frac{I(t)-1}{n} \leq i(t)$
3. C_j : j führt kollisionsfreie Infektion durch
   $\Pr[C_j] \geq 1 - \Pr[A_j \cup B_j] \geq 1 - (\Pr[A_j] + \Pr[B_j]) \geq 1 - 2i(t)$

Definiere Zufallsvariable

$$X_j(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } j \text{ eine kollisionsfreie Infektion durchführt} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Allgemeine Analyse

Drei Ereignisse für infizierten Knoten j in Runde t

1. A_j: j ruft bereits infizierten Knoten an
   $\Pr[A_j] = \frac{I(t)}{n} = i(t)$
2. B_j: j ruft denselben Knoten an wie ein anderer infizierter Knoten
   $\Pr[B_j] \leq \frac{I(t)-1}{n} \leq i(t)$
3. C_j : j führt kollisionsfreie Infektion durch
   $\Pr[C_j] \geq 1 - \Pr[A_j \cup B_j] \geq 1 - (\Pr[A_j] + \Pr[B_j]) \geq 1 - 2i(t)$

Definiere Zufallsvariable

$$X_j(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } j \text{ eine kollisionsfreie Infektion durchführt} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

$\Rightarrow \Pr[X_j(t) = 1] \geq 1 - 2i(t)$

Analyse des Erwartungswerts

Analysiere erwarteten Anstieg für fixes $i(t)$

Analyse des Erwartungswerts

Analysiere erwarteten Anstieg für fixes $i(t)$

$K(t)$: Anzahl der in Runde t kollisionsfrei infizierten Knoten

$$E[K(t)] = E\left[\sum_{j=1}^{I(t)} X_j(t)\right] = \sum_{j=1}^{I(t)} E[X_j(t)] \quad \text{(Linearität des Erwartungswerts)}$$

$$= \sum_{j=1}^{I(t)} \Pr[X_j(t) = 1] \geq \sum_{j=1}^{I(t)} (1 - 2i(t)) = I(t) - 2i(t)I(t)$$

Analyse des Erwartungswerts

Analysiere erwarteten Anstieg für fixes $i(t)$

$K(t)$: Anzahl der in Runde t kollisionsfrei infizierten Knoten

$$E[K(t)] = E\left[\sum_{j=1}^{I(t)} X_j(t)\right] = \sum_{j=1}^{I(t)} E[X_j(t)] \quad \text{(Linearität des Erwartungswerts)}$$

$$= \sum_{j=1}^{I(t)} \Pr[X_j(t) = 1] \geq \sum_{j=1}^{I(t)} (1 - 2i(t)) = I(t) - 2i(t)I(t)$$

Erwartungswert des relativen Anteils infizierter Knoten nach Runde t:

$$E[i(t+1)] \geq E\left[i(t) + \frac{K(t)}{n}\right] = i(t) + \frac{E[K(t)]}{n} \geq i(t) + \frac{I(t) - 2i(t)I(t)}{n}$$

$$= i(t) + i(t) - 2i(t)^2 = 2i(t) - 2i(t)^2$$

Analyse des Erwartungswerts

Analysiere erwarteten Anstieg für fixes $i(t)$

$K(t)$: Anzahl der in Runde t kollisionsfrei infizierten Knoten

$$E[K(t)] = E\left[\sum_{j=1}^{I(t)} X_j(t)\right] = \sum_{j=1}^{I(t)} E[X_j(t)] \quad \text{(Linearität des Erwartungswerts)}$$

$$= \sum_{j=1}^{I(t)} \Pr[X_j(t) = 1] \geq \sum_{j=1}^{I(t)} (1 - 2i(t)) = I(t) - 2i(t)I(t)$$

Erwartungswert des relativen Anteils infizierter Knoten nach Runde t:

$$E[i(t+1)] \geq E\left[i(t) + \frac{K(t)}{n}\right] = i(t) + \frac{E[K(t)]}{n} \geq i(t) + \frac{I(t) - 2i(t)I(t)}{n}$$

$$= i(t) + i(t) - 2i(t)^2 = 2i(t) - 2i(t)^2$$

Intuition für Analyse:

- $2i(t)^2$ anfangs vernachlässigbar
- Annähernd Verdopplung in jeder Runde

Beweisstrategie

Einteilung in zwei Phasen:

1. **Wachstum:** $I(t) \leq \frac{1}{3}n$
   Dauer: $O(\log n)$ Runden
2. **Schrumpfung:** $I(t) > \frac{1}{3}n$
   Dauer: $O(\log n)$ Runden

Gesamtzahl an Runden: $O(\log n)$

In jeder Phase: Garantie mit hoher Wahrscheinlichkeit

Phase 1: Wachstum: $I(t) \leq \frac{n}{3}$

$I(t)$ wächst um Faktor $> \frac{7}{6}$ in jeder Runde mit konstanter Wahrscheinlichkeit

Phase 1: Wachstum: $I(t) \leq \frac{n}{3}$

$I(t)$ wächst um Faktor $> \frac{7}{6}$ in jeder Runde mit konstanter Wahrscheinlichkeit

Chernoff Bound

Seien $X_1, \ldots, X_k$ *unabhängige* binäre Zufallsvariablen mit $\Pr[X_j = 1] = p$ und $\Pr[X_j = 0] = 1 - p$ und $\mu \geq E[\sum_{j=1}^{k} X_j] = pk$. Dann gilt für jedes $\delta \in [0, 1]$:

$$\Pr\left[\sum_{j=1}^{k} X_j \leq (1 - \delta) \cdot \mu\right] \leq \frac{1}{e^{\frac{\delta^2}{2}\mu}}$$

Phase 1: Wachstum: $I(t) \leq \frac{n}{3}$

$I(t)$ wächst um Faktor $> \frac{7}{6}$ in jeder Runde mit konstanter Wahrscheinlichkeit

Chernoff Bound

Seien $X_1, \ldots, X_k$ *unabhängige* binäre Zufallsvariablen mit $\Pr[X_j = 1] = p$ und $\Pr[X_j = 0] = 1 - p$ und $\mu \geq E[\sum_{j=1}^{k} X_j] = pk$. Dann gilt für jedes $\delta \in [0, 1]$:

$$\Pr\left[\sum_{j=1}^{k} X_j \leq (1-\delta) \cdot \mu\right] \leq \frac{1}{e^{\frac{\delta^2}{2}\mu}}$$

$$E[K(t)] = E\left[\sum_{j=1}^{I(t)} X_j(t)\right] \geq I(t) - 2i(t)I(t) \geq I(t) - 2 \cdot \frac{I(t)}{n}\frac{n}{3} = \frac{1}{3}I(t)$$

Phase 1: Wachstum: $I(t) \leq \frac{n}{3}$

$I(t)$ wächst um Faktor $> \frac{7}{6}$ in jeder Runde mit konstanter Wahrscheinlichkeit

Chernoff Bound

Seien $X_1, \ldots, X_k$ *unabhängige* binäre Zufallsvariablen mit $\Pr[X_j = 1] = p$ und $\Pr[X_j = 0] = 1 - p$ und $\mu \geq E[\sum_{j=1}^{k} X_j] = pk$. Dann gilt für jedes $\delta \in [0, 1]$:

$$\Pr\left[\sum_{j=1}^{k} X_j \leq (1-\delta) \cdot \mu\right] \leq \frac{1}{e^{\frac{\delta^2}{2}\mu}}$$

$$E[K(t)] = E\left[\sum_{j=1}^{I(t)} X_j(t)\right] \geq I(t) - 2i(t)I(t) \geq I(t) - 2 \cdot \frac{I(t)}{n}\frac{n}{3} = \frac{1}{3}I(t)$$

Wahrscheinlichkeit, dass $K(t) \leq \frac{1}{6}I(t)$ (Wachstum nicht stark genug):

$$\Pr\left[\sum_{j=1}^{I(t)} X_j(t) \leq \frac{1}{6} \cdot I(t)\right] = \Pr\left[\sum_{j=1}^{I(t)} X_j(t) \leq (1 - \tfrac{1}{2}) \cdot \tfrac{1}{3}I(t)\right]$$

$$\leq \frac{1}{e^{\frac{(\frac{1}{2})^2}{2} \cdot \frac{1}{3}I(t)}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{24}I(t)}} \leq \frac{1}{e^{\frac{1}{24}}}$$

Phase 1: Wachstum (Fortsetzung)

Einteilung in **gute** und **schlechte** Runden:

Phase 1: Wachstum (Fortsetzung)

Einteilung in **gute** und **schlechte** Runden:

- Runde t ist **schlecht** falls $I(t+1) \leq \frac{7}{6} I(t)$

- Runde t ist **gut** falls $I(t+1) > \frac{7}{6} I(t)$

Phase 1: Wachstum (Fortsetzung)

Einteilung in **gute** und **schlechte** Runden:

- Runde t ist **schlecht** falls $I(t+1) \leq \frac{7}{6}I(t)$
  $\Pr[I(t+1) \leq \frac{7}{6}I(t)] \leq \Pr[K(t) \leq \frac{1}{6}I(t)] \leq \frac{1}{e^{\frac{1}{24}}}$
- Runde t ist **gut** falls $I(t+1) > \frac{7}{6}I(t)$

Phase 1: Wachstum (Fortsetzung)

Einteilung in **gute** und **schlechte** Runden:

- Runde t ist **schlecht** falls $I(t+1) \leq \frac{7}{6}I(t)$
  $\Pr[I(t+1) \leq \frac{7}{6}I(t)] \leq \Pr[K(t) \leq \frac{1}{6}I(t)] \leq \frac{1}{e^{\frac{1}{24}}}$
- Runde t ist **gut** falls $I(t+1) > \frac{7}{6}I(t)$
  $\Pr[I(t+1) > \frac{7}{6}I(t)] = 1 - \Pr[I(t+1) \leq \frac{7}{6}I(t)] \geq 1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{24}}} \geq \frac{4}{100}$

Phase 1: Wachstum (Fortsetzung)

Einteilung in **gute** und **schlechte** Runden:

- Runde t ist **schlecht** falls $I(t+1) \leq \frac{7}{6} I(t)$
  $\Pr[I(t+1) \leq \frac{7}{6} I(t)] \leq \Pr[K(t) \leq \frac{1}{6} I(t)] \leq \frac{1}{e^{\frac{1}{24}}}$
- Runde t ist **gut** falls $I(t+1) > \frac{7}{6} I(t)$
  $\Pr[I(t+1) > \frac{7}{6} I(t)] = 1 - \Pr[I(t+1) \leq \frac{7}{6} I(t)] \geq 1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{24}}} \geq \frac{4}{100}$

Analyse:

- Nach höchstens $\log_{7/6} \frac{n}{3}$ guten Runden gilt $I(t) > \frac{1}{3} n$

Phase 1: Wachstum (Fortsetzung)

Einteilung in **gute** und **schlechte** Runden:

- Runde t ist **schlecht** falls $I(t+1) \leq \frac{7}{6} I(t)$
  $\Pr[I(t+1) \leq \frac{7}{6} I(t)] \leq \Pr[K(t) \leq \frac{1}{6} I(t)] \leq \frac{1}{e^{\frac{1}{24}}}$
- Runde t ist **gut** falls $I(t+1) > \frac{7}{6} I(t)$
  $\Pr[I(t+1) > \frac{7}{6} I(t)] = 1 - \Pr[I(t+1) \leq \frac{7}{6} I(t)] \geq 1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{24}}} \geq \frac{4}{100}$

Analyse:

- Nach höchstens $\log_{7/6} \frac{n}{3}$ guten Runden gilt $I(t) > \frac{1}{3} n$
- Erneute Anwendung der Chernoff-Bound: Bei $O(\log n)$ Runden mit hoher Wahrscheinlichkeit $\log_{7/6} \frac{n}{3}$ gute Runden

Phase 1: Wachstum (Fortsetzung)

Einteilung in **gute** und **schlechte** Runden:

- Runde t ist **schlecht** falls $I(t+1) \leq \frac{7}{6}I(t)$
  $\Pr[I(t+1) \leq \frac{7}{6}I(t)] \leq \Pr[K(t) \leq \frac{1}{6}I(t)] \leq \frac{1}{e^{\frac{1}{24}}}$
- Runde t ist **gut** falls $I(t+1) > \frac{7}{6}I(t)$
  $\Pr[I(t+1) > \frac{7}{6}I(t)] = 1 - \Pr[I(t+1) \leq \frac{7}{6}I(t)] \geq 1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{24}}} \geq \frac{4}{100}$

Analyse:

- Nach höchstens $\log_{7/6} \frac{n}{3}$ guten Runden gilt $I(t) > \frac{1}{3}n$
- Erneute Anwendung der Chernoff-Bound: Bei $O(\log n)$ Runden mit hoher Wahrscheinlichkeit $\log_{7/6} \frac{n}{3}$ gute Runden

Somit:

Phase 1 (Wachstum) benötigt mit hoher Wahrscheinlichkeit $O(\log n)$ Runden.

Unabhängigkeit?

Achtung: Chernoff Bound gilt nur für unabhängige Variablen!

Unabhängigkeit?

Achtung: Chernoff Bound gilt nur für unabhängige Variablen!

Aber: $X_j(t)$'s sind nicht unabhängig!

Unabhängigkeit?

Achtung: Chernoff Bound gilt nur für unabhängige Variablen!

Aber: $X_j(t)$'s sind nicht unabhängig!

Beispiel:

- $X_j(t) = 1$ impliziert, dass infizierter Knoten j keine Kollision mit anderem infizierten Knoten j' hat

Unabhängigkeit?

Achtung: Chernoff Bound gilt nur für unabhängige Variablen!

Aber: $X_j(t)$'s sind nicht unabhängig!

Beispiel:

- $X_j(t) = 1$ impliziert, dass infizierter Knoten j keine Kollision mit anderem infizierten Knoten j' hat
- Daher ist für j' die Möglichkeit der Kollision mit Knoten j bereits ausgeschlossen

Unabhängigkeit?

Achtung: Chernoff Bound gilt nur für unabhängige Variablen!

Aber: $X_j(t)$'s sind nicht unabhängig!

Beispiel:

- $X_j(t) = 1$ impliziert, dass infizierter Knoten j keine Kollision mit anderem infizierten Knoten j' hat
- Daher ist für j' die Möglichkeit der Kollision mit Knoten j bereits ausgeschlossen
- Dies „begünstigt", dass $X_{j'}(t) = 1$

Unabhängigkeit?

Achtung: Chernoff Bound gilt nur für unabhängige Variablen!

Aber: $X_j(t)$'s sind nicht unabhängig!

Beispiel:

- $X_j(t) = 1$ impliziert, dass infizierter Knoten j keine Kollision mit anderem infizierten Knoten j' hat
- Daher ist für j' die Möglichkeit der Kollision mit Knoten j bereits ausgeschlossen
- Dies „begünstigt“, dass $X_{j'}(t) = 1$
- Somit: Keine unabhängigen Ereignisse

Unabhängigkeit?

Achtung: Chernoff Bound gilt nur für unabhängige Variablen!

Aber: $X_j(t)$'s sind nicht unabhängig!

Beispiel:

- $X_j(t) = 1$ impliziert, dass infizierter Knoten j keine Kollision mit anderem infizierten Knoten j' hat
- Daher ist für j' die Möglichkeit der Kollision mit Knoten j bereits ausgeschlossen
- Dies „begünstigt", dass $X_{j'}(t) = 1$
- Somit: Keine unabhängigen Ereignisse

Dennoch gilt: Untere Schranke an die Wahrscheinlichkeit von $X_j(t) = 1$ unabhängig vom Ergebnis der anderen Zufallsvariablen

$$\Pr[X_j(t) = 1 \mid X_1(t) = x_1, \ldots, X_{j-1}(t) = x_{j-1}] \geq 1 - 2i(t)$$

Stochastische Dominanz

Lemma (Doerr 2011)

Seien $X_1, \dots, X_k$ ***beliebige*** *binäre Zufallsvariablen und seien* $Y_1, \dots, Y_k$ ***unabhängige*** *binäre Zufallsvariablen. Wenn für alle* j *und alle* $x_1, \dots, x_{j-1} \in \{0, 1\}$ *gilt, dass*

$$\Pr[X_j = 1 \mid X_1 = x_1, \dots, X_{j-1} = x_{j-1}] \geq \Pr[Y_j = 1]$$

dann gilt für alle $T \geq 0$

$$\Pr\left[\sum_{j=1}^{k} X_j \leq T\right] \leq \Pr\left[\sum_{j=1}^{k} Y_j \leq T\right]$$

Stochastische Dominanz

Lemma (Doerr 2011)

Seien $X_1, \ldots, X_k$ ***beliebige*** *binäre Zufallsvariablen und seien* $Y_1, \ldots, Y_k$ ***unabhängige*** *binäre Zufallsvariablen. Wenn für alle* j *und alle* $x_1, \ldots, x_{j-1} \in \{0, 1\}$ *gilt, dass*

$$\Pr[X_j = 1 \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{j-1} = x_{j-1}] \geq \Pr[Y_j = 1]$$

dann gilt für alle $T \geq 0$

$$\Pr\left[\sum_{j=1}^{k} X_j \leq T\right] \leq \Pr\left[\sum_{j=1}^{k} Y_j \leq T\right]$$

Abschätzung von $\Pr\left[\sum_{j=1}^{k} Y_j \leq T\right]$ durch Chernoff Bound

Stochastische Dominanz

Lemma (Doerr 2011)

Seien $X_1, \ldots, X_k$ ***beliebige*** *binäre Zufallsvariablen und seien* $Y_1, \ldots, Y_k$ ***unabhängige*** *binäre Zufallsvariablen. Wenn für alle* j *und alle* $x_1, \ldots, x_{j-1} \in \{0, 1\}$ *gilt, dass*

$$\Pr[X_j = 1 \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{j-1} = x_{j-1}] \geq \Pr[Y_j = 1]$$

dann gilt für alle $T \geq 0$

$$\Pr\left[\sum_{j=1}^{k} X_j \leq T\right] \leq \Pr\left[\sum_{j=1}^{k} Y_j \leq T\right]$$

Abschätzung von $\Pr\left[\sum_{j=1}^{k} Y_j \leq T\right]$ durch Chernoff Bound

Setze $Y_j = 1$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - 2i(t)$ und 0 andernfalls

$$\Pr[X_j = 1 \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{j-1} = x_{j-1}] \geq 1 - 2i(t) = \Pr[Y_j = 1]$$

Schrumpfung: $I(t) > \frac{1}{3}n$

Wechsel der Analyse: **Schrumpfung** gesunder Knoten statt Wachstum infizierter Knoten

Schrumpfung: $I(t) > \frac{1}{3}n$

Wechsel der Analyse: **Schrumpfung** gesunder Knoten statt Wachstum infizierter Knoten

Wahrscheinlichkeit, dass gesunder Knoten nicht infiziert wird: $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)}$

Schrumpfung: $I(t) > \frac{1}{3}n$

Wechsel der Analyse: **Schrumpfung** gesunder Knoten statt Wachstum infizierter Knoten

Wahrscheinlichkeit, dass gesunder Knoten nicht infiziert wird: $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)}$

Obere Schranke:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}n}$$

Schrumpfung: $I(t) > \frac{1}{3}n$

Wechsel der Analyse: **Schrumpfung** gesunder Knoten statt Wachstum infizierter Knoten

Wahrscheinlichkeit, dass gesunder Knoten nicht infiziert wird: $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)}$

Obere Schranke:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}n} = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Schrumpfung: $I(t) > \frac{1}{3}n$

Wechsel der Analyse: **Schrumpfung** gesunder Knoten statt Wachstum infizierter Knoten

Wahrscheinlichkeit, dass gesunder Knoten nicht infiziert wird: $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)}$

Obere Schranke:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}n} = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{3}} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{e^{1/3}}$$

Schrumpfung: $I(t) > \frac{1}{3}n$

Wechsel der Analyse: **Schrumpfung** gesunder Knoten statt Wachstum infizierter Knoten

Wahrscheinlichkeit, dass gesunder Knoten nicht infiziert wird: $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)}$

Obere Schranke:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}n} = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{3}} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{e^{1/3}}$$

Ungleichung: $(1 - \frac{1}{x})^x \leq \frac{1}{e}$ für $x \geq 1$

Schrumpfung: $I(t) > \frac{1}{3}n$

Wechsel der Analyse: **Schrumpfung** gesunder Knoten statt Wachstum infizierter Knoten

Wahrscheinlichkeit, dass gesunder Knoten nicht infiziert wird: $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)}$

Obere Schranke:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}n} = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{3}} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{e^{1/3}}$$

Ungleichung: $(1 - \frac{1}{x})^x \leq \frac{1}{e}$ für $x \geq 1$

Wahrscheinlichkeit, dass (fixierter) gesunder Knoten in $3(c+1)\ln n$ aufeinanderfolgenden Runden nicht infiziert wird (Bernoulli-Experiment):

Schrumpfung: $I(t) > \frac{1}{3}n$

Wechsel der Analyse: **Schrumpfung** gesunder Knoten statt Wachstum infizierter Knoten

Wahrscheinlichkeit, dass gesunder Knoten nicht infiziert wird: $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)}$

Obere Schranke:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}n} = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{3}} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{e^{1/3}}$$

Ungleichung: $(1 - \frac{1}{x})^x \leq \frac{1}{e}$ für $x \geq 1$

Wahrscheinlichkeit, dass (fixierter) gesunder Knoten in $3(c+1)\ln n$ aufeinanderfolgenden Runden nicht infiziert wird (Bernoulli-Experiment):

$$= \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)}\right)^{3(c+1)\ln n}$$

Schrumpfung: $I(t) > \frac{1}{3}n$

Wechsel der Analyse: **Schrumpfung** gesunder Knoten statt Wachstum infizierter Knoten

Wahrscheinlichkeit, dass gesunder Knoten nicht infiziert wird: $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)}$

Obere Schranke:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}n} = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{3}} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{e^{1/3}}$$

Ungleichung: $(1 - \frac{1}{x})^x \leq \frac{1}{e}$ für $x \geq 1$

Wahrscheinlichkeit, dass (fixierter) gesunder Knoten in $3(c+1)\ln n$ aufeinanderfolgenden Runden nicht infiziert wird (Bernoulli-Experiment):

$$= \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)}\right)^{3(c+1)\ln n} \leq \left(\frac{1}{e^{1/3}}\right)^{3(c+1)\ln n}$$

Schrumpfung: $I(t) > \frac{1}{3}n$

Wechsel der Analyse: **Schrumpfung** gesunder Knoten statt Wachstum infizierter Knoten

Wahrscheinlichkeit, dass gesunder Knoten nicht infiziert wird: $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)}$

Obere Schranke:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}n} = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{3}} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{e^{1/3}}$$

Ungleichung: $(1 - \frac{1}{x})^x \leq \frac{1}{e}$ für $x \geq 1$

Wahrscheinlichkeit, dass (fixierter) gesunder Knoten in $3(c+1)\ln n$ aufeinanderfolgenden Runden nicht infiziert wird (Bernoulli-Experiment):

$$= \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{I(t)}\right)^{3(c+1)\ln n} \leq \left(\frac{1}{e^{1/3}}\right)^{3(c+1)\ln n} = \frac{1}{e^{(c+1)\ln n}} = \frac{1}{n^{c+1}}$$

Schrumpfung: $I(t) \geq \frac{1}{3}n$ (Fortsetzung)

Mit **Union Bound**: Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der gesunden Knoten in $3(c+1)\ln n$ aufeinanderfolgenden Runden nicht infiziert wird:

$$\leq n \cdot \frac{1}{n^{c+1}} = \frac{1}{n^c}$$

Schrumpfung: $I(t) \geq \frac{1}{3}n$ (Fortsetzung)

Mit **Union Bound**: Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der gesunden Knoten in $3(c+1)\ln n$ aufeinanderfolgenden Runden nicht infiziert wird:

$$\leq n \cdot \frac{1}{n^{c+1}} = \frac{1}{n^c}$$

Gegenereignis: Jeder gesunde Knoten wird in $3(c+1)\ln n$ aufeinanderfolgenden Runden infiziert

Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - \frac{1}{n^c}$

Schrumpfung: $I(t) \geq \frac{1}{3}n$ (Fortsetzung)

Mit **Union Bound**: Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der gesunden Knoten in $3(c+1)\ln n$ aufeinanderfolgenden Runden nicht infiziert wird:

$$\leq n \cdot \frac{1}{n^{c+1}} = \frac{1}{n^c}$$

Gegenereignis: Jeder gesunde Knoten wird in $3(c+1)\ln n$ aufeinanderfolgenden Runden infiziert

Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - \frac{1}{n^c}$

Somit:

Phase 2 (Schrumpfung) benötigt mit hoher Wahrscheinlichkeit $O(\log n)$ Runden.

Zusammenfassung

Informationsausbreitung im Push-Modell:

1. **Wachstum:** $I(t) \leq \frac{1}{3}n$
   Dauer: $O(\log n)$ Runden mit hoher Wahrscheinlichkeit
2. **Schrumpfung:** $I(t) > \frac{1}{3}n$
   Dauer: $O(\log n)$ Runden mit hoher Wahrscheinlichkeit

Informationsausbreitung im Pull-Modell:

- $O(\log n)$ Runden mit hoher Wahrscheinlichkeit
- Analyse benötigt ähnliche Beweistechniken wie im Push-Modell

Quellen

Der Inhalt dieser Vorlesungseinheit basiert zum Teil auf Vorlesungseinheiten von Robert Elsässer und Christian Schindelhauer.

Literatur:

- Alan J. Demers et al. „Epidemic Algorithms for Replicated Database Maintenance“. *Operating Systems Review* 22(1): 8–32 (1988)
- Benjamin Doerr, Marvin Künnemann. „Tight Analysis of Randomized Rumor Spreading in Complete Graphs“. In: *Proc. of the Workshop on Analytic Algorithmics and Combinatorics (ANALCO)*. 2014, S. 82–91
- Alan M. Frieze, Geoffrey R. Grimmett. „The shortest-path problem for graphs with random arc-lengths“. *Discrete Applied Mathematics* 10(1): 57–77 (1985)