Strategie:

- Analysiere Reduktion der Anzahl an Kanten im von nicht-terminierten Knoten induzierten Subgraph
- Zeige: In jeder Phase wird die Anzahl der Kanten in Erwartung um (mindestens) die Hälfte reduziert
- Anwendung von Chernoff und Markov Bound: $O(\log n)$ Phasen
  Jede Phase dauert $O(1)$ Runden $\Longrightarrow O(\log n)$ Runden
- Implementierungsdetail: Übertragung von $O(\log n)$ Bits der reellen Zufallszahlen

Big picture

Analysetrick:

- Betrachte jede Kante als zwei gerichtete Kanten
- Systematische Unterschätzung entfernter Kanten erleichtert Analyse

u **dominiert** v ($u \twoheadrightarrow v$) falls

1. $r(u) < r(u')$ für alle Nachbarn u' von u und
2. $r(u) < r(v')$ für alle Nachbarn $v' \neq u$ von v

Idee: Wenn $u \twoheadrightarrow v$, dann terminiert v und ausgehende Kanten von v werden aus Subgraph nicht-terminierter Knoten entfernt

$$\Pr[u \twoheadrightarrow v] \geq \frac{1}{\deg(u) + \deg(v)}$$

diese Definition ist ausreichend gut

Begründung:

- Anzahl Knoten in Nachbarschaften von u und v: $\leq \deg(u) + \deg(v)$
- Zufallszahlen $r(\cdot)$ induzieren uniform zufällige Permutation von V
- Wahrscheinlichkeit dass u erster in Permutation ist: $1/\#$Knoten

F: Menge ungerichteter Kanten am Beginn der aktuellen Phase
X: Zufallsvariable für Anzahl entfernter *gerichteter* Kanten

$X_{(u \twoheadrightarrow v)}$ = # ausgehender Kanten von v, die wegen $u \twoheadrightarrow v$ entfernt werden

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ex}[X] &\geq \sum_{\{u,v\} \in F} \left(\mathrm{Ex}[X_{(u \twoheadrightarrow v)}] + \mathrm{Ex}[X_{(v \twoheadrightarrow u)}]\right) \\
&= \sum_{\{u,v\} \in F} \left(\Pr[X_{(u \twoheadrightarrow v)}] \cdot \deg(v) + \Pr[X_{(v \twoheadrightarrow u)}] \cdot \deg(u)\right) \\
&\geq \sum_{\{u,v\} \in E} \left(\frac{\deg(v)}{\deg(u) + \deg(v)} + \frac{\deg(u)}{\deg(v) + \deg(u)}\right) \\
&= \sum_{\{u,v\} \in F} 1 = |F|
\end{aligned}$$

#entfernte gerichteten Kanten ist nach unten abschätzbar: der incident nodes durch Wslkeit, dass einer den anderen dominiert

→ es werden in jeder Runde erwartet $|F|$ viele gerichtete Kanten entfernt

Es werden mindestens halb so viele *ungerichtete* Kanten entfernt!

Lemma
In jeder Phase wird in Erwartung mindestens die Hälfte der Kanten entfernt.

nun: um wieviel liegen wir potenziell daneben? Markov anwenden!

Theorem (Markov Bound)
Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable und $\alpha > 0$. Dann gilt

$$\Pr[Y \geq \alpha \cdot \mathrm{Ex}[Y]] \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Y: Zufallsvariable für Anzahl der nicht-entfernten Kanten

Wir wissen: $\mathrm{Ex}[Y] \leq \frac{|F|}{2}$
Somit:

$$\Pr\left[Y \geq \frac{2}{3} \cdot |F|\right] \leq \Pr\left[Y \geq \frac{4}{3} \cdot \mathrm{Ex}[Y]\right] \leq \frac{3}{4}$$

Gegenereignis:

$$\Pr\left[Y < \frac{2}{3} \cdot |F|\right] = 1 - \Pr\left[Y \geq \frac{2}{3} \cdot |F|\right] \geq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Resultat

Lemma
In jeder Phase wird mit Wahrscheinlichkeit $\geq \frac{1}{4}$ mindestens ein Drittel der Kanten entfernt.

Lemma
Mit hoher Wahrscheinlichkeit terminiert Algorithmus nach $32\lceil c \ln n \rceil$ Phasen.

→ Die Wahrscheinlichkeit, dass $32\lceil c \ln n \rceil$ Phasen reichen um <1 Kanten übrig zu haben, ist $1/n^c$

Beweis:
Idee: Unterteile in gute und schlechte Phasen, binäre Zufallsvariable

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{falls in Phase } i \text{ mindestens } 1/3 \text{ der Kanten entfernt werden} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

$Z = \sum_{i=1}^{32\lceil c \ln n \rceil} Z_i$ ist Zufallsvariable für Anzahl guter Phasen (mit $Z_i = 1$)
$\mathrm{Ex}[Z] = \frac{1}{4} \cdot 32\lceil c \ln n \rceil \geq 8 \ln n$ → hier wird c einfach ignoriert

Nach k guten Phasen: #Kanten $\leq \frac{m}{3^k} \leq \frac{n^2}{3^k}$
$\Rightarrow$ Für #Kanten < 1 sind $4 \ln n > \frac{2 \ln n}{\ln 3} + 1 = \log_3(n^2) + 1$ gute Phasen ausreichend; Chernoff-Bound für Gegenwahrscheinlichkeit (mit $\delta = \frac{1}{2}$):

$$\Pr[Z < 4 \ln n] \leq \Pr\left[Z < \frac{1}{2}\mathrm{Ex}[Z]\right] \leq \frac{1}{e^{\mathrm{Ex}[Z]/8}} \leq \frac{1}{e^{c \ln n}} = \frac{1}{n^c}$$

→ für rand. Algos ist "hohe Wslkeit" als $1/n^c$ def