Geometrische Anwendungen – Affine Teilräume

Definition (Punkt, Gerade, Ebene, Hyperebene)

Sei L ein affiner Teilraum des $\mathbb{R}^n$.

L heißt Punkt, wenn $\dim(L) = 0$
Gerade, wenn $\dim(L) = 1$
Ebene, wenn $\dim(L) = 2$
Hyperebene, wenn $\dim(L) = n - 1$.

Bemerkungen

(1) Hyperebene im $\mathbb{R}^{\underline{1}}$ ist ein Punkt
(Hyperebene hat Dimension $1 - 1 = \underline{0}$, d. h. es ist ein Punkt),
im $\mathbb{R}^{\underline{2}}$ ist eine Gerade
(Hyperebene hat Dimension $2 - 1 = \underline{1}$, d. h. eine Gerade),
im $\mathbb{R}^{\underline{3}}$ ist eine Ebene
(analog: $n - 1 = 3 - 1 = \underline{2}$, also eine Ebene).

(2) Betrachte eine lineare Gleichung

$$Ax = b: \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

mit $a_i, b \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ und $a_1 \neq 0$, also $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}$.

Gaussnormalform ist

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & \frac{a_2}{a_1} & \ldots & \frac{a_n}{a_1} & \frac{b}{a_1} \end{array}\right] \Rightarrow \text{Parameterdarstellung des Lösungsvektors}$$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{b}{a_1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \lambda_{n-1} \begin{bmatrix} -\frac{a_n}{a_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \dim(\text{LÖS}(A, b)) = \underline{n - 1}$, also:

Eine lineare Gleichung mit n Unbekannten ist eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$.

(3) Parameterdarstellung einer Gerade: $x = p + \lambda u$

sowie einer Ebene: $x = p + \lambda_1 u + \lambda_2 v$

(weil $x \in L = p + U$ und $\dim(L) = 2 = \dim(U)$

$\Rightarrow$ Basis von U hat 2 linear unabhängige Vektoren u, v).

Das LGS zu einem affinen Teilraum

Sei $L = p + U$ ein affiner Teilraum ($L \neq \emptyset$) von $\mathbb{R}^n$.
Sei $v_1, v_2, \ldots, v_k$ eine Basis von U (also $\dim(L) = k$).

Unsere Aufgabe ist, eine solche Matrix A und einen solchen Vektor b zu finden, sodass:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x \in L = p + U\} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = b\}$$

oder anders:

$$\boxtimes \quad L = \text{LÖS}(A, b) \Rightarrow k = \dim(L) = \dim(\text{LÖS}(A, b)) = \dim(\text{LÖS}(A)).$$

Wir wissen:

$$\text{rg}(A) = n - \dim(\text{Ker}(F_A)) = n - \dim(\text{LÖS}(A)) = (n - k).$$

A besitzt $(n-k)$ linear unabhängige Zeilen $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A ist eine Matrix der Größe $(n-k) \times n$ und b ein $(n-k)$-Vektor.

Offensichtlich sind $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \text{LÖS}(A)$:

Es gilt, dass $\text{LÖS}(A, b) = \hat{b} + \text{LÖS}(A)$.
Da laut ⊠ gilt $\text{LÖS}(A, b) = L = p + U \Rightarrow U = \text{LÖS}(A)$.
Weil $v_1, v_2, \ldots, v_k$ eine Basis von U bilden, sind diese Vektoren auch aus $\text{LÖS}(A)$.

$\Rightarrow Av_1 = Av_2 = \ldots = Av_k = 0.$ ▽

Wenn wir die Zeilenvektoren von $A_{(n-k)\times n}$ als a_1, a_2, ..., a_{n-k} bezeichnen, dann

$$A = \begin{bmatrix} \text{——} & a_1 & \text{——} \\ \text{——} & a_2 & \text{——} \\ & \vdots & \\ \text{——} & a_{n-k} & \text{——} \end{bmatrix}_{(n-k)\times n}$$

und analog bilden wir aus den Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_k$ (spaltenweise) eine $n \times k$-Matrix

$$C = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_k \\ | & | & & | \end{bmatrix}_{(n \times k)} .$$

Dann lassen sich die Gleichungen $\triangledown$ als Matrix-Produkt darstellen:

$$A_{(n-k)\times n} \cdot C_{n\times k} = 0_{(n-k)\times k}.$$

Also:

$$\begin{array}{r} a_1 \longrightarrow \\ a_2 \longrightarrow \\ \\ a_{n-k} \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n-k,1} & \dots & \dots & a_{n-k,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & & v_k \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \dots & v_{k1} \\ v_{12} & v_{22} & \dots & v_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \dots & v_{kn} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} .$$

Sei $v_j^T = [v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jn}]$ $\forall j = 1, 2, \ldots, k$ (also Spalte j von C transponiert, d. h. als Zeilenvektor dargestellt).

Analog sei $a_i^T = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n-k$ (also Zeile i von A transponiert, d. h. als Spaltenvektor dargestellt).

Dann folgt aus $AC = 0_{(n-k)\times k}$ für die transponierten Matrizen C^T und A^T:

$$(AC)^T = \left(0_{(n-k)\times k}\right)^T$$
$$\Rightarrow C^T A^T = 0_{k\times(n-k)}$$

(Wir haben die Gleichung transponiert, damit wir ein LGS für die unbekannte Matrix A bekommen.)

Also gilt für alle $\forall j = 1, 2, \dots, k \qquad \forall i = 1, 2, \dots, n-k$:

$$v_j{}^T a_i{}^T = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\begin{bmatrix} \text{---} & v_1{}^T & \text{---} \\ \text{---} & v_2{}^T & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & v_k{}^T & \text{---} \end{bmatrix} \cdot a_i{}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(k \times 1)} \qquad \forall i = 1, 2, \dots, n-k.$$

Also: $C^T a_i{}^T = 0$ für $\forall i = 1, 2, \dots, n-k$.

Daher sind $a_1{}^T$, $a_2{}^T$, $\dots$, $a_{n-k}{}^T$ (d. h. die Zeilen der gesuchten Matrix A in transponierter Form) Lösungen des homogenen LGS

$$C^T x = 0.$$

- Da $v_1, v_2, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind und gilt:
  Zeilenrang von C^T = Spaltenrang von C^T
  $\Rightarrow \mathrm{rg}(C^T) = k$.
- Da $\dim(\text{LÖS}(C^T)) = n - \mathrm{rg}(C^T) = n - k$, hat das homogene LGS $C^T x = 0$ $n - k$ linear unabhängige Lösungen. Diese sind $a_1{}^T$, $a_2{}^T$, ..., $a_{n-k}{}^T$.

Die Matrix A ist dann

$$A = \begin{bmatrix} \text{---} & a_1 & \text{---} \\ \text{---} & a_2 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_{n-k} & \text{---} \end{bmatrix}_{(n-k)\times n} \qquad \text{und} \qquad b = Ap.$$

Vorgehensweise für die Bestimmung von A und b

Sei $x = p + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$ (die Parameterdarstellung von L) und

$$C^T = \begin{bmatrix} \text{——} & {v_1}^T & \text{——} \\ \text{——} & {v_2}^T & \text{——} \\ & \vdots & \\ \text{——} & {v_k}^T & \text{——} \end{bmatrix}.$$

Löse $C^T x = 0$ nach Gauss.

Lösung sind die Vektoren $\begin{vmatrix} \\ a_1 \\ \\ \end{vmatrix}^T, \begin{vmatrix} \\ a_2 \\ \\ \end{vmatrix}^T, \ldots, \begin{vmatrix} \\ a_{n-k} \\ \\ \end{vmatrix}^T$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \text{——} & a_1 & \text{——} \\ \text{——} & a_2 & \text{——} \\ & \vdots & \\ \text{——} & a_{n-k} & \text{——} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = Ap \quad \text{sind}$$

die gesuchte Matrix A und die gesuchte rechte Seite des LGS $Ax = b$.

Anmerkung

Das LGS zu einem affinen Teilraum ist nicht eindeutig.

Erklärung

Sei $L = p + U$ ein affiner Teilraum ($L \neq \emptyset$) und $Ax = b$ ein zugehöriges LGS.
Sei $\dim(L) = \dim(U) = k$ und $L \subseteq \mathbb{R}^n$.

Dann beschreibt jede der $(n - k)$ Gleichungen im LGS eine Hyperebene (also einen affinen Teilraum der Dimension $(n - 1)$) im $\mathbb{R}^n$.

Da $(n - 1) \geq k$, gibt es unendlich viele solche Hyperebenen, die L beinhalten.

Daher gibt es unendlich viele Gleichungen (mit n Unbekannten), die den Vektoren von L genügen. Davon kann man beliebig linear unabhängige $(n - k)$-Tupel wählen, die dann die Matrix A des LGS zu L bilden.

Beispiel (zur Anmerkung)

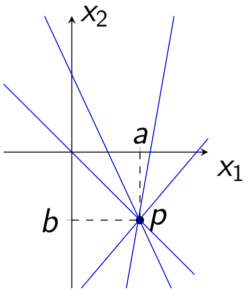
$$L = p = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow \dim(L) = k = 0$ und $n = 2$.

$\Rightarrow A_{(n-k)\times n} = A_{2\times 2}$

Also: Das LGS zu L (d. h. zum Punkt p) wird von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten gebildet.
Jede davon beschreibt eine Hyperebene im $\mathbb{R}^2$, also einen affinen Teilraum der Dimension $(n-1) = (2-1) = 1$, d. h. eine Gerade.

Offensichtlich gibt es unendlich viele solche Geraden, die den Punkt p beinhalten.



Davon kann man beliebig viele Paare bilden, die als Schnittpunkt p haben.

Das sind die $n - k = 2 - 0 = 2$-Tupel (Paare) von linear unabhängigen Zeilen von $A_{2\times 2}$.

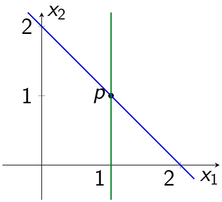
Veranschaulichung (3 verschiedene LGS zu $L = p$)

$$L = p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

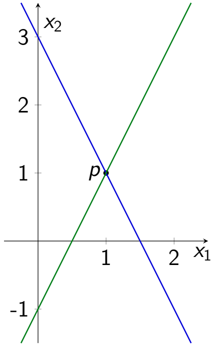
LGS 1:
- $x_1 + x_2 = 2$
- $x_1 \qquad = 1$

LGS 2:
- $x_1 + {}^1\!/_2\, x_2 = {}^3\!/_2$
- $x_1 - {}^1\!/_2\, x_2 = {}^1\!/_2$

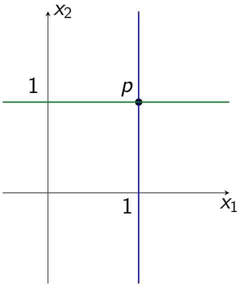
LGS 3:
- $x_1 = 1$
- $x_2 = 1$



LGS 1



LGS 2



LGS 3

Beispiel zur Vorgehensweise

$$L: \quad x = \overset{p}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}} + \lambda_1 \overset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + \lambda_2 \overset{v_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}} \qquad (\text{Ebene im } \mathbb{R}^4,\ n = 4,\ k = 2)$$

Dann ist die Matrix $C^T_{(k \times n)} = \begin{bmatrix} {v_1}^T \\ {v_2}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{(2\times 4)}$

$$\Rightarrow \text{zu lösen: } C^T x = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2\times 2)}.$$

Lösen von $C^T x = 0$ nach Gauss:

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)\mathrm{II}+\mathrm{I}=\mathrm{I}} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]_{\text{Gaussnormalform}}$$

$\Rightarrow n - k = 4 - 2 = 2$ linear unabhängige Lösungen

$$a_1{}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2{}^T = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \text{---} & a_1 & \text{---} \\ \text{---} & a_2 & \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die rechte Seite $\quad b = Ap = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$

Dann ist das LGS $Ax = b$, welches L beschreibt

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = b$$

oder

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 &= 6\ . \end{aligned}$$

Anmerkung

Es gibt auch andere Verfahren für die Berechnung des LGS zu L.
Laut voriger Anmerkung können diese zu einem anderen (gültigen!) LGS zu L führen.

Anderes LGS zum vorigen Beispiel

$$L: \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + \lambda_1 & & \\ x_2 &= 1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 & &\Rightarrow x_2 = 1 + 2\lambda_1 + \tfrac{x_4}{2} \\ x_3 &= 3 + \lambda_1 + \lambda_2 & & \\ x_4 &= 2\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = \tfrac{x_4}{2} & &\Rightarrow x_3 = 3 + \lambda_1 + \tfrac{x_4}{2} \end{aligned}$$

$$x_3 - x_1 = (3 + \lambda_1 + \tfrac{x_4}{2}) - (2 + \lambda_1) = 1 + \tfrac{x_4}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Gleichung 1:} \quad x_1 + 0 \cdot x_2 - x_3 + \tfrac{x_4}{2} = -1$$

$$2x_3 - x_2 = 2(3 + \lambda_1 + \tfrac{x_4}{2}) - (1 + 2\lambda_1 + \tfrac{x_4}{2}) = 5 + \tfrac{x_4}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Gleichung 2:} \quad 0 \cdot x_1 - x_2 + 2x_3 - \tfrac{x_4}{2} = 5$$

$$\Rightarrow \text{LGS:} \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & x_3 + & \tfrac{1}{2}x_4 & = -1 \\ & & -x_2 & + & 2x_3 - & \tfrac{1}{2}x_4 & = 5\,. \end{array}$$

Dieses LGS unterscheidet sich von dem mit dem vorigen Verfahren konstruierten.

Probe:

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0: \qquad \begin{array}{r} 2 - 3 + 0 = -1 \checkmark \\ -1 + 6 - 0 = 5 \checkmark \end{array}$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}. \qquad \begin{array}{r} 3 - 5 + 1 = -1 \checkmark \\ -4 + 10 - 1 = 5 \checkmark \end{array}$$

Dieses Ergebnis ist auch ein gültiges LGS zu L.

Schnitt zweier affiner Teilräume

Seien L_1, L_2 zwei affine Teilräume von $\mathbb{R}^n$.

Sei $A_1 x = b_1$ und $A_2 x = b_2$ das zugehörige LGS zum L_1 bzw L_2.

Betrachte den Schnitt $L_1 \cap L_2$ von L_1 und L_2.

Also:

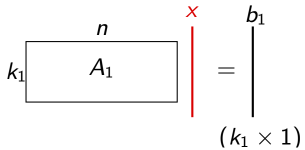
$$\begin{aligned} L_1 \cap L_2 &= \{x \in \mathbb{R}^n : \; x \in L_1 \;\wedge\; x \in L_2\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \; A_1 x = b_1 \;\wedge\; A_2 x = b_2\} \end{aligned}$$

$$A_1 \in M_{k_1 \times n}$$
$$A_2 \in M_{k_2 \times n}$$

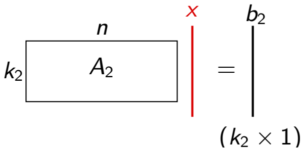
b_1 : k_1-Vektor
b_2 : k_2-Vektor
x : n-Vektor .

Dann ist die Lösungsmenge $\{x\}$ veranschaulicht:

$$A_1 x = b_1$$



$$A_2 x = b_2$$



Dies lässt sich zu einem LGS zusammenfassen:

$$Ax = b \qquad A \in M_{(k_1+k_2)\times n}\ ; \quad b \in M_{(k_1+k_2)\times 1}$$

$$\text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}_{(k_1+k_2)\times n} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{(k_1+k_2)\times 1} .$$

Beispiel

Schneide L mit Hyperebene H.

$$\begin{aligned} L = L_1 &: \ x = p + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \\ H = L_2 &: \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{aligned} \qquad p = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(also L gleich wie im vorigen Beispiel).

Berechne $L \cap H = L_1 \cap L_2$:

$$Ax = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = b,$$

wobei A_1 und b_1 zum LGS für L (L_1) gehören, sowie A_2 und b_2 zum LGS für H (L_2).

$$\begin{bmatrix} A_1^* \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0^* \\ 4 & -2 & 0 & 1^* \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4^* \\ 6^* \\ 5 \end{bmatrix}.$$

($*$ aus vorigem Beispiel bekannt)

Lösen von $Ax = b$ nach Gauss

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)\,\mathrm{I}+\mathrm{III}=\mathrm{III}]{(-4)\,\mathrm{I}+\mathrm{II}=\mathrm{II}} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[1/2\,\mathrm{II}=\mathrm{II}]{(-1)\,\mathrm{II}+\mathrm{III}=\mathrm{III}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{1/4\,\mathrm{III}=\mathrm{III}} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11/4 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{I}+\mathrm{II}=\mathrm{I}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11/4 \end{array}\right] \xrightarrow[\mathrm{II}+(2)\,\mathrm{III}=\mathrm{II}]{\mathrm{I}+\mathrm{III}=\mathrm{I}} \left[\begin{array}{ccc|c:c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 7/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11/4 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 7/4 \\ 1/2 \\ 11/4 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad = p + U' = L'.$$

Also ist der Schnitt von L und H eine Gerade im $\mathbb{R}^4$ (weil $\dim(L') = \dim(U') = 1$).

Spezialfall 1 (Lösungsmenge eines LGS)

Man betrachtet ein LGS mit m Gleichungen und n Variablen.
Also besteht die Matrix des LGS aus m Zeilen und jede davon entspricht einer Hyperebene.

> Siehe vorige Folien: eine lineare Gleichung beschreibt eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ (angenommen: n Unbekannte).

Daher: Die Lösungsmenge $\text{LÖS}(A, b)$ eines LGS $Ax = b$

> ($A \in M_{(m \times n)}$, $b \in \mathbb{R}^m$) ist der Durchschnitt von m Hyperebenen H_i (m affinen Teilräumen L_i) $A_i x = a_i x = b_i$, $i = 1, \ldots, m$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} \text{---} & a_1 & \text{---} \\ \text{---} & a_2 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_m & \text{---} \end{bmatrix}_{(m \times n)} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{(m \times 1)} .$$

Spezialfall 2 (Schnitt Gerade – Hyperebene)

Veranschaulichung im $\mathbb{R}^3$: Hyperebene ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

Schnitt: 3 Möglichkeiten

- Gerade G in Parameterform: $x = p + \lambda u \qquad (p, u \in \mathbb{R}^n)$
- Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ als Lösungsmenge der Gleichung
  $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b \qquad$ (also in der Form eines LGS)

$$Ax = ax = b,$$

wobei $\quad a = [a_1, a_2, \ldots, a_n]\ , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\ , \quad b \in \mathbb{R}\ .$

- Der Schnitt $G \cap H$: $\{x = p + \lambda u \in \mathbb{R}^n \ : \ ax = b\}$.

  Daher $\quad a\,(p + \lambda u) = b \quad \Rightarrow \quad \lambda au = b - ap.$ $\triangledown$

  Dabei ist

$$au = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n$$

$$ap = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n$$

$\boxed{\triangledown\ \lambda au = b - ap}$

Fall 1: $a \cdot u \neq 0$

$\Rightarrow \lambda = \lambda_0 = \frac{b-ap}{au}$

und $G \cap H = \{x_0\}$ mit $x_0 = p + \lambda_0\, u = p + \frac{b-ap}{au}\, u$ ist der Schnittpunkt von G mit H.

Fall 2: $a \cdot u = 0$

- Fall 2a : $b - ap = 0$

  Aus $\triangledown$ folgt: $\lambda \cdot 0 = 0 \quad \rightarrow$ das gilt für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$

  $\Rightarrow$ Alle Punkte $x = p + \lambda u \in G$ erfüllen die Gleichung $ax = b$

  $\Rightarrow G \cap H = G$ (Also: G liegt in der Hyperebene H)

- Fall 2b : $b - ap \neq 0$

  Aus $\triangledown$ folgt: $\lambda \cdot 0 \neq 0 \quad \rightarrow$ Das gilt für kein $\lambda \in \mathbb{R}$

  $\Rightarrow$ Der Schnitt $G \cap H$ ist die leere Menge $\emptyset$

  (Also: G ist parallel zur Hyperebene H).

Beispiel (Schnitt Gerade – Hyperebene im $\mathbb{R}^3$)

Sei $\quad G: \quad x = \overset{p}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}} + \lambda \overset{u}{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}} = p + \lambda u \quad$ und

$H: \quad x_1 + 4x_2 = 1$ (also $a = [\,1 \;\; 4 \;\; 0\,]$, $\; b = 1$) (Hyperebene im $\mathbb{R}^3$)

$G \cap H$:

$$a \cdot u = [\,1 \;\; 4 \;\; 0\,] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0 \overset{\text{Fall } 1}{\Rightarrow} x_0 = \overset{p}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}} + \frac{\overset{b}{1} - \overset{a}{[\,1 \;\; 4 \;\; 0\,]} \overset{p}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}}{\underset{au}{2}} \overset{u}{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1-5}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ist der Schnittpunkt von G mit H.

Euklidische Vektorräume

Ziel: Abstand und Winkel von zwei Vektoren

- im $\mathbb{R}^1$: Für $x \in \mathbb{R}$ sei $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

  der Betrag oder die Länge von x.

  Der Abstand zweier Elemente $x, y \in \mathbb{R}^1$:

  $$d(x+y) = |x-y|.$$

- im $\mathbb{R}^2$:

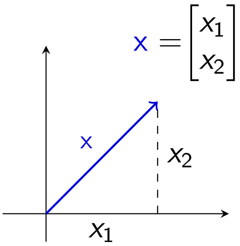
  Nach dem Satz von Pythagoras ist die Länge ↗

  von $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ gleich $\left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

  und der Abstand zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$:

  $$d(x,y) = \|x-y\| = \left\| \begin{matrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{matrix} \right\| =$$

  $$= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}.$$



- im $\mathbb{R}^n$:

  Die euklidische Norm eines n-Vektors x

$$||x|| = \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

  und der Abstand zweier Vektoren $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$d(x,\ y) = ||x - y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ .$$

Definition – Skalarprodukt

Sei V ein Vektorraum über Körper K.

K wird im Weiteren $\mathbb{C}$ sein. Da $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist $(r \in \mathbb{R}: \; r = r + 0 \cdot i)$, gelten alle Auslegungen auch für $K = \mathbb{R}$.

$$\langle \, , \, \rangle : \quad V \times V \to K$$

heißt Skalarprodukt oder inneres Produkt, wenn gilt:

(1) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$

$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \qquad \forall x, y, x_1, x_2 \in V \quad \forall \lambda \in K$

(2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \qquad \forall x, y \in V, \quad \overline{}$: komplex konjugiert (bei $K = \mathbb{C}$)

(3) $\langle x, x \rangle \geq 0 \qquad \forall x \in V$

$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Bemerkungen

(a) Eigenschaft (1) besagt, dass $\langle\ ,\ \rangle$ linear in der ersten Variable ist

(b) Aus (2) folgt:

(i) $\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle$

(ii) $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\,\langle x, y\rangle$.

Beweis:

(i) $\langle x, y_1 + y_2\rangle \overset{(2)}{=} \overline{\langle y_1 + y_2, x\rangle} \overset{(1)}{=} \overline{\langle y_1, x\rangle + \langle y_2, x\rangle} \overset{\text{Eig. kompl. Z.}}{=}$

$= \overline{\langle y_1, x\rangle} + \overline{\langle y_2, x\rangle} = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle$

(ii) $\langle x, \lambda y\rangle \overset{(2)}{=} \overline{\langle \lambda y, x\rangle} \overset{(1)}{=} \overline{\lambda\langle y, x\rangle} = \overline{\lambda}\,\overline{\langle y, x\rangle} \overset{(2)}{=} \overline{\lambda}\,\langle x, y\rangle$.

Also ist $\langle\ ,\ \rangle$ halblinear in der zweiten Variable (nur halblinear, weil (ii) nicht der zweiten Eigenschaft einer linearen Abbildung entspricht).

(c) Eigenschaft (3) heißt positiv definit.

Definition – Euklidischer Vektorraum

Euklidischer Vektorraum

Ein Vektorraum V über Körper K mit einem inneren Produkt heißt ein euklidischer Vektorraum.

Anmerkung

$K = \mathbb{R}$: „euklidischer“ Vektorraum.
$K = \mathbb{C}$: unitärer Vektorraum.

Beispiel 1

$$\underline{V = \mathbb{R}^n} \quad (K = \mathbb{R}) \quad \text{mit } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

$(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ ist ein euklidischer Vektorraum über $\mathbb{R}$
mit dem Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 2

$\underline{V = \mathbb{C}^n}$ $(K = \mathbb{C})$ mit $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ $\quad x_i, y_i \in \mathbb{C}$ $\forall i = 1, \dots, n$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}$$

(leicht überprüfbar, dass $\langle \ , \ \rangle$ ein Skalarprodukt ist)

ist ein euklidischer Vektorraum über $\mathbb{C}$ (unitärer Vektorraum).

Beispiel 3

$V = \mathbb{R}^2$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle x,\, y\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

ist auch ein euklidischer Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Beispiel 4

Lorentzprodukt (auf $\mathbb{R}^4$) (wichtig in der Relativitätstheorie).

(Die ersten drei Koordinaten x_1, x_2, x_3 sind gewöhnliche Raumkoordinaten, die vierte die Zeit (t, s).)

$$x = (x_1, x_2, x_3, t)$$
$$y = (y_1, y_2, y_3, s)$$

$$\langle x,\, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - c^2ts$$

c: die Konstante der Lichtgeschwindigkeit

Ungleichung von Cauchy-Schwarz

Sei V ein euklidischer Vektorraum. Dann gilt für alle $x, y \in V$:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle} \ .$$

$\in \mathbb{R}$ (auch für $x, y \in \mathbb{C}$)

Beweis

(1) Sei $y = 0 \Rightarrow \langle x, 0\rangle = \langle x, \underline{\overset{\in K}{0}} \cdot \overset{\in V}{0} \rangle \overset{(ii)}{=} \underline{\overset{\in K}{0}} \cdot \langle x, \overset{\in V}{0} \rangle = \overset{\in K}{0}$ und $\langle 0, 0\rangle = 0$
$\Rightarrow$ Ungleichung.

$$\boxed{\begin{aligned} * \quad z &= a + ib,\ \bar{z} = a - ib \\ z\bar{z} &= (a+ib)\,(a-ib) \ = \\ &= a^2 - i^2 b = a^2 + b^2 = \\ &= |z|^2 \qquad (z = \langle x, y\rangle) \end{aligned}}$$

(2) Sei $y \neq 0 \Rightarrow \langle y,\, y\rangle \neq 0$ und setze $z = x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot y$

$$\Rightarrow 0 \leq \langle z,\, z\rangle = \left\langle \overset{1}{x} - \frac{\overset{2}{\langle x,\, y\rangle}}{\langle y,\, y\rangle} \cdot y \;,\; \overset{3}{x} - \frac{\overset{4}{\langle x,\, y\rangle}}{\langle y,\, y\rangle} \cdot y \right\rangle =$$

$$= \overset{\langle 1,3\rangle}{\langle x,\, x\rangle} - \overset{\langle 2,3\rangle}{\frac{\langle x,\, y\rangle}{\langle y,\, y\rangle}} \langle y,\, x\rangle - \overset{\langle 1,4\rangle}{\overline{\frac{\langle x,\, y\rangle}{\langle y,\, y\rangle}}} \langle x,\, y\rangle + \overset{\langle 2,4\rangle}{\frac{\langle x,\, y\rangle}{\langle y,\, y\rangle}} \frac{\overline{\langle x,\, y\rangle}}{\cancel{\langle y,\, y\rangle}} \cancel{\langle y,\, y\rangle} =$$

$$= \underbracket{\overset{\langle 1,3\rangle}{\langle x,\, x\rangle} - \frac{\overset{\langle 2,3\rangle}{\langle x,\, y\rangle\, \overline{\langle x,\, y\rangle}}}{\langle y,\, y\rangle}} - \underbrace{\frac{\overset{\langle 1,4\rangle}{\overline{\langle x,\, y\rangle}\, \langle x,\, y\rangle}}{\langle y,\, y\rangle} + \frac{\overset{\langle 2,4\rangle}{\langle x,\, y\rangle\, \overline{\langle x,\, y\rangle}}}{\langle y,\, y\rangle}}_{0} =$$

$$= \underbracket{\langle x,\, x\rangle - \frac{\langle x,\, y\rangle\, \overline{\langle x,\, y\rangle}}{\langle y,\, y\rangle}} \overset{*}{=} \langle x,\, x\rangle - \frac{|\langle x,\, y\rangle|^2}{\langle y,\, y\rangle} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |\langle x,\, y\rangle|^2 \leq \langle x,\, x\rangle \langle y,\, y\rangle.$

$*$ s. vorige Folie

Euklidische Norm

Euklidische Norm

Sei V ein euklidischer Vektorraum.

Sei $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad \forall x \in V.$

Es gilt:

(1) $||x|| \geq 0 \qquad \forall x \in V$
$||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x|| \qquad \forall x \in V,\ \forall \lambda \in K$

(3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \qquad \forall x, y \in V$ (Dreiecksungleichung).

$||x||$ heißt dann die euklidische Norm von x.

Beweis:

(1) $||x|| = \sqrt{\overset{\geq 0}{\langle x, x\rangle}} \geq 0$

$||x|| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) $||\lambda x|| = \sqrt{\langle \lambda x, \underline{\lambda} x\rangle} \overset{(ii)}{=} \sqrt{\lambda \underline{\overline{\lambda}} \langle x, x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x\rangle} =$

$= |\lambda| \sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda| \, ||x||$.

(3) $||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle =$

$= ||x||^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + ||y||^2$

Sei $\begin{array}{l} z = a + ib \in \mathbb{C} \\ \overline{z} = a - ib \end{array} \Rightarrow 2a = z + \overline{z}$

$a = \mathrm{Re}(z)$

$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$

$= ||x||^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2|\langle x, y\rangle| + ||y||^2 \leq$

$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} ||x||^2 + 2\,||x||\,||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$

$\Rightarrow ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

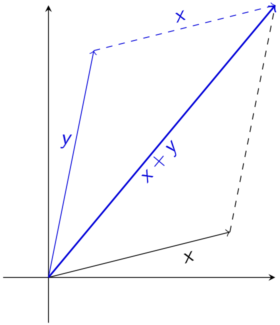
Dreiecksungleichung – Veranschaulichung

Wenn $V = \mathbb{R}^2$ und die euklidische Norm der Länge des Vektors entspricht, dann muss in einem Dreieck gelten:

Seite x + Seite $y \geq$ Seite $(x + y)$

also

$$||x|| + ||y|| \geq ||x + y|| \quad .$$



Bemerkung

Ungleichung von Cauchy-Schwarz und Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}^n$

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i)^2\right)^{1/2}$$

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i)^2\right)^{1/2}$$

( ): weil $x_i, y_i \in \mathbb{R}$

Definition (Normierter Raum)

Ein Vektorraum V heißt ein normierter Raum, falls es eine Abbildung
$|| \quad || : V \to \mathbb{R}$ (Norm) gibt mit

(1) $||x|| \geq 0 \qquad \forall x \in V$
$||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x|| \qquad \forall x \in V, \ \forall \lambda \in K$

(3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \qquad \forall x, y \in V$.

Korollar

Jeder euklidische Vektorraum ist mit der Norm $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ein normierter Raum.

Beispiele (Norm)

(a)

$$||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \qquad \text{euklidische Norm}$$

(b)

$$||x||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

(c)

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

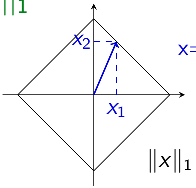
(d)

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad \text{für } p \geq 1$$

Veranschaulichung

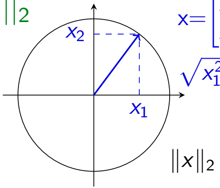
Betrachte $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| = 1\}$ also solche $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ für welche $||x|| = 1$.

(c) $||\,.\,||_1$



$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = |x_1| + |x_2| = \|x\|_1 = 1_{/\!/}$

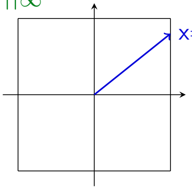
(a) $||\,.\,||_2$



$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1_{/\!/}$

(b) $||\,.\,||_\infty$

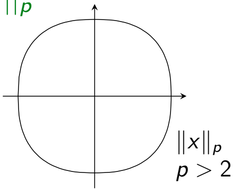


$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\|x\|_\infty = \max \{|x_1|, |x_2|\} = 1_{/\!/}$

$\|x\|_\infty$

(d) $||\,.\,||_p$



Definition (Abstand)

Seien $x, y \in$ V. Dann heißt $d(x,y) = ||x-y||$ der Abstand zwischen x und y.

Eigenschaft

Es gilt:

(1) $d(x,y) \geq 0$

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) $d(x,y) = d(y,x)$

(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Beweis

(1) $d(x,y) = ||x-y|| \overset{\text{Def. Norm}}{\geq} 0$

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow ||x-y|| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) $d(x,y) = ||x-y|| = ||(-1)(y-x)|| = |-1|\,||y-x|| = d(y,x)$

(3) $d(x,y) = ||x-y|| = ||(x-z)+(z-y)|| \overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq}$

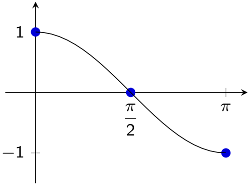
$\leq ||x-z|| + ||z-y|| = d(x,z) + d(z,y)$.

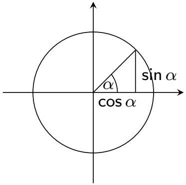
Betrachte die Ungleichung von Cauchy-Schwarz für $x, y \neq 0$:

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\,||y|| \iff -1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{||x||\,||y||} \leq 1\ .$$

Für $\cos(\alpha)$ $\alpha \in [0, 2\pi]$ gilt:

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1\ .$$





Wenn

$$\cos\alpha = \frac{\langle x, y\rangle}{||x||\,||y||} \qquad (1),$$

dann gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für den Winkel α.
Damit ist der Winkel zwischen x und y eindeutig bestimmt für $0 \leq \alpha < \pi$.

Veranschaulichung von α: siehe Folie 48

$\langle x, y\rangle$: Aus (1) folgt also, dass

$$\langle x, y\rangle = ||x||\,||y||\cos\alpha \qquad (2)$$

für $\alpha = 90^\circ$ $(= \frac{\pi}{2})$ ist $\cos\alpha = 0$ $\quad \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$, d. h.
x und y stehen senkrecht zueinander.

Veranschaulichung von $\langle x, y\rangle$: siehe Folie 50

Wenn also der Winkel zwischen zwei Vektoren 90° ist, dann sind die beiden Vektoren orthogonal (senkrecht) zueinander.

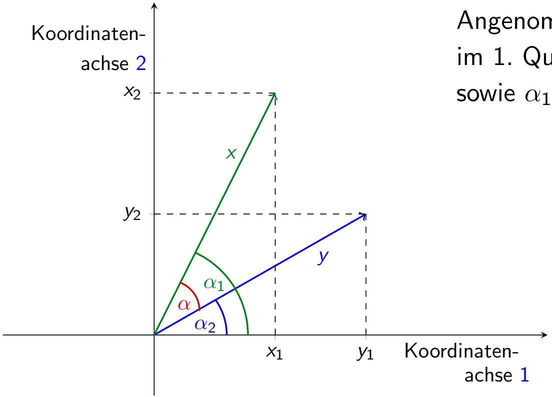
Veranschaulichung α (Winkel zwischen zwei Vektoren)

Sei $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \neq 0$ und

α_1: Winkel von x zur Koordinatenachse 1

α_2: Winkel von y zur Koordinatenachse 1

$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$: Winkel zwischen x und y (bezüglich Koordinatenachse 1).



Angenommen, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$ sind im 1. Quadrant, sowie $\alpha_1 \geq \alpha_2$.

Es gilt:

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_1}{||x||} \qquad \cos\alpha_2 = \frac{y_1}{||y||}$$
$$\sin\alpha_1 = \frac{x_2}{||x||} \qquad \sin\alpha_2 = \frac{y_2}{||y||}$$

Da $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, dann

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 = \\ &= \frac{x_1 y_1}{||x||\,||y||} + \frac{x_2 y_2}{||x||\,||y||} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{||x||\,||y||} = \frac{\langle x, y\rangle}{||x||\,||y||} \quad (1)\ .\end{aligned}$$

Veranschaulichung $\langle x, y\rangle$ (inneres Produkt zweier Vektoren)

Sei $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq 0, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \neq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^2$ und

α: Winkel zwischen x, y (α: im ersten Quadrant)

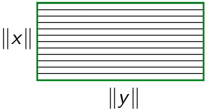
Dann ist laut

$$\langle x, y\rangle = ||x||\,||y|| \cos\alpha \quad (2)$$

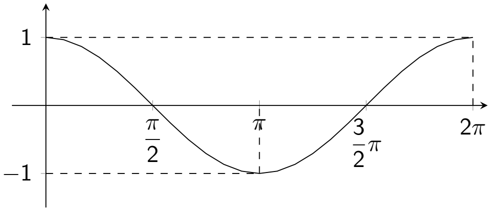
$\langle x, y\rangle$ das Produkt von $||x||\,||y||$ mit $\cos\alpha$.

$||x||\,||y||$ ist aber die Fläche des Rechtecks mit Seiten $||x||$ und $||y||$, also

$\|x\|\,\|y\| =$



$\cos \alpha$ hat für $\alpha \in [0, 2\pi]$ folgenden Verlauf

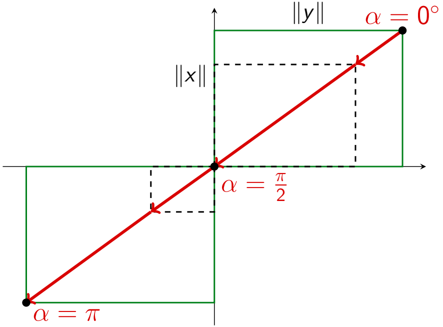


Aus (2) folgt:

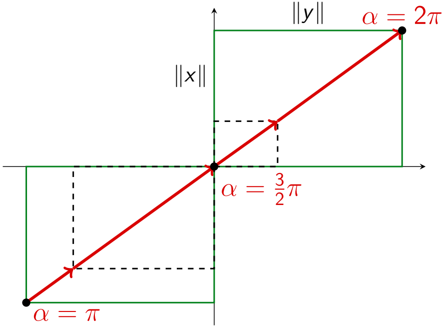
$\langle x, y \rangle$ geht von seinem maximalen Wert $||x||\,||y|| \cdot 1$ (für $\alpha = 0°$)
zu $||x||\,||y|| \cdot 0 = 0$ (für $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$),
dann zu $||x||\,||y|| \cdot (-1)$ (für $\alpha = \pi = 180°$),
und wieder zu 0 (für $\alpha = \frac{3}{2}\pi = 270°$),
und periodisch zu $||x||\,||y||$ (für $\alpha = 2\pi = 360°$).

graphisch dargestellt:

$\alpha : 0° \to 180°$



$\alpha : 180° \to 360°$



Tabellarisch dargestellt:

α	$\langle x, y \rangle$	
$0° = 0 \cdot \pi$	$\|\|x\|\| \, \|\|y\|\|$	(Wenn x, y parallel (kollateral) sind, ist das innere Produkt maximal.)
$60°$	$\|\|x\|\| \, \|\|y\|\| \cdot \frac{1}{2}$	(Wenn $\alpha = 60°$, dann ist die Fläche die Hälfte des Rechtecks.)
$90° = \frac{\pi}{2}$	0	(Wenn die Vektoren orthogonal sind, ist die Fläche 0 (minimal).)
$180° = \pi$	$\|\|x\|\| \, \|\|y\|\| \cdot (-1)$	(Hier ist das Skalarprodukt gleich dem Minus-Wert der maximalen Fläche.)
$270° = \frac{3}{2}\pi$	0	(Hier ist das Skalarprodukt gleich 0 (Orthogonalität).)
$360° = 2\pi$	$\|\|x\|\| \, \|\|y\|\|$	(Wie bei $\alpha = 0°$.)

Veranschaulichung Matrix-Vektor-Produkt

$A \in M(m \times n) \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad y = Ax \in \mathbb{R}^m$

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

y_i ist $||a_i|| \cdot ||x|| \cos(\measuredangle a_i, x)$ für $i = 1, 2 \ldots, m$

Also:

> y_i ist die Fläche des Rechtecks mit Seiten $||a_i||$ und $||x||$ multipliziert mit dem Cosinus des Winkels zwischen dem Vektor a_i (i-te Zeile von A) und dem Vektor x.

$\Rightarrow$ Vektor y: Vektor von Flächen

Veranschaulichung Matrix-Matrix-Produkt

$$A \in M(m \times k) \qquad B \in M(k \times n)$$

$$C = AB \in M(m \times n) \quad \text{mit} \quad c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2 \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}$$

Also: c_{ij} ist das Skalarprodukt von Zeile i von A mit Spalte j von B.

Bezeichnung: a_i: Zeile i von A $\qquad i = 1, \ldots, m$
b_j: Spalte j von B $\qquad j = 1, \ldots, n$.

Dann ist c_{ij} die Fläche des Rechtecks mit den Seiten $||a_i||$ und $||b_j||$ multipliziert mit dem Cosinus des Winkels zwischen a_i und b_j.

$\Rightarrow$ Ist der Winkel $\pi/2 = 90^\circ$, dann sind a_i und b_j orthogonal zueinander und $\cos(\pi/2) = 0$, daher in diesem Fall $c_{ij} = 0$.

$\Rightarrow$ C ist eine Matrix von Flächen.

Orthogonalität

Definition – Orthogonalität

Sei V ein euklidischer Vektorraum und $x, y \in V$.
x, y heißen orthogonal (senkrecht) zueinander, wenn:

$$\langle x, y \rangle = 0 \qquad \text{geschrieben: } x \perp y.$$

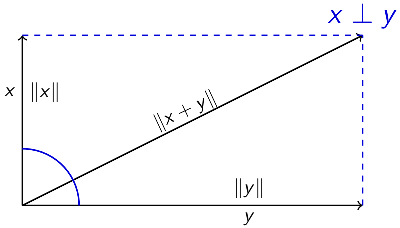
Eigenschaft – Satz von Pythagoras (für zwei orthogonale Vektoren)

Seien $\langle x, y \rangle = 0$. Dann $||\underset{a^2}{x}||^2 \underset{+}{+} ||\underset{b^2}{y}||^2 \underset{=}{=} ||\underset{c^2}{x+y}||^2$

$c = a + b$
(vektoriell)

Beweis

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= \langle x+y, x+y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + \underset{=0}{\langle x, y \rangle} + \underset{=0}{\langle y, x \rangle} + \langle y, y \rangle = \\ &= ||x||^2 + ||y||^2 \; . \end{aligned}$$



Definition (Orthonormalbasis)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$.

(1) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ heißt Orthogonalsystem (OGS), wenn

$$v_i \perp v_j \qquad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n \quad i \neq j$$

(2) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ heißt Orthonormalsystem (ONS), wenn

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Also: $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist OGS mit $||v_i|| = 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n$

(3) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ heißt Orthonormalbasis (ONB), wenn

(a) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist Orthonormalsystem

(b) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist eine Basis von V.

Eigenschaft – Satz von Pythagoras (für n orthogonale Vektoren)

Sei $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ein Orthogonalsystem.

$$\Rightarrow \left|\left|\sum_{i=1}^{n} v_i\right|\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} ||v_i||^2$$

(Die quadrierte Norm einer Vektorensumme ist die Summe der quadrierten Normen der Vektoren.)

Beweis (vollständige Induktion)

- $n = 1 \qquad ||v_1||^2 = ||v_1||^2$
- Induktionsannahme: Sei k beliebig, aber fix, $k < n$, und gelte

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{k} v_i\right|\right|^2 = \sum_{i=1}^{k} ||v_i||^2 .$$

- $k \to k+1$

$$\left\langle \sum_{i=1}^{k} v_i ,\ v_{k+1} \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle v_i ,\ v_{k+1} \rangle = 0$$

Also: $\sum_{i=1}^{k} v_i$ und v_{k+1} sind $\perp$

$$\Rightarrow \left|\left| \sum_{i=1}^{k+1} v_i \right|\right|^2 = \left|\left| \left(\sum_{i=1}^{k} v_i \right) + v_{k+1} \right|\right|^2 =$$

wegen Satz von Pythagoras für zwei orthogonale Vektoren

$$= \left|\left| \sum_{i=1}^{k} v_i \right|\right|^2 + ||v_{k+1}||^2 \overset{\text{Induktions-annahme}}{=} \sum_{i=1}^{k} ||v_i||^2 + ||v_{k+1}||^2 = \sum_{i=1}^{k+1} ||v_i||^2 .$$

Eigenschaft

Sei $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ein Orthogonalsystem mit $v_i \neq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$.
Dann sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

Beweis

Sei $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Dann folgt $\forall v_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$0 = \langle 0, v_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j, v_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{=0 \text{ für } i \neq j} = \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle = \lambda_i ||v_i||^2$$

$\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \qquad \Rightarrow v_1, v_2, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

Korollar

$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist ONB $\iff$ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist ONS und $\mathrm{LIN}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = V$

Beweis

Nach obiger Eigenschaft ist jedes ONS linear unabhängig.

Was bedeutet die Transformation

$$T(x) = T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad ?$$

Der Transformation T entspricht eine Matrix (gesucht).

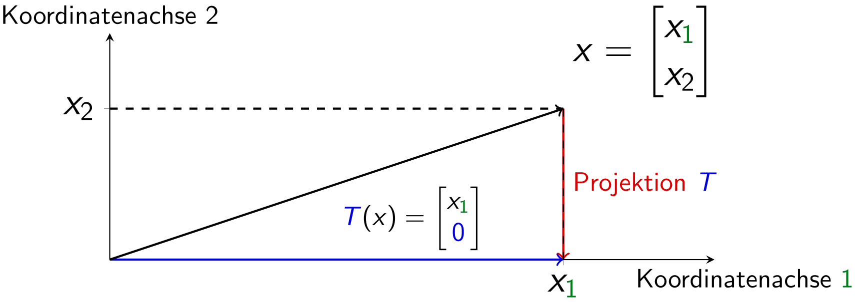
$$A = \begin{bmatrix} \text{—} & a_1 & \text{—} \\ \text{—} & a_2 & \text{—} \\ & \vdots & \\ \text{—} & a_n & \text{—} \end{bmatrix} \qquad \text{sodass } T(x) = Ax = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Einerseits: T ist die Eliminierung der ersten Spalte bei der Berechnung der Halbdiagonalform (im Gauss-Algorithmus).

- Andererseits: T ist die Projektion des Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^1$ (d. h. auf die erste Koordinatenachse des Koordinatensystems).

Veranschaulichung

$x \in \mathbb{R}^2 \qquad T(x) = T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$



Es gilt

$$Ax = \begin{bmatrix} \text{---} & a_1 & \text{---} \\ \text{---} & a_2 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_n & \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \langle a_1, x\rangle &= x_1 \\ \langle a_2, x\rangle &= 0 \\ &\vdots \\ \langle a_n, x\rangle &= 0 \end{aligned}$$

Also: die Zeilen von A (beginnend mit a_2) sollen orthogonal zum Vektor x sein.

Bei der Eliminierung der ersten Spalte im Gauss-Algorithmus (d. h. Vektor x = 1. Spalte der Matrix des LGS) wird das $(-\frac{x_i}{x_1})$-fache der ersten Gleichung zur i-ten Gleichung addiert.

Die Matrix ist dementsprechend: $T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{x_2}{x_1} & 1 & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ -\frac{x_i}{x_1} & & & 1 & \\ \vdots & & 0 & & \ddots & \\ -\frac{x_n}{x_1} & & & & & 1 \end{bmatrix}$

Tatsächlich:

$$
\begin{aligned}
\langle a_1, x\rangle &= 1 \cdot x_1 &&= x_1\\
\langle a_2, x\rangle &= -\tfrac{x_2}{x_1} \cdot x_1 + x_2 &&= 0\\
&\vdots \qquad \vdots\\
\langle a_i, x\rangle &= -\tfrac{x_i}{x_1} \cdot x_1 + x_i &&= 0\\
&\vdots \qquad \vdots\\
\langle a_n, x\rangle &= -\tfrac{x_n}{x_1} \cdot x_1 + x_n &&= 0
\end{aligned}
$$

Die Zeilen $a_2, \dots, a_n$ von A sind orthogonal zu x, d. h.
$\cos(\measuredangle a_i, x) = 0 \Rightarrow \measuredangle a_i, x = 90^\circ \quad i = 2, \dots, n$
und die Fläche $||a_i||\,||x||\cos(\measuredangle a_i, x) =$
$\sqrt{1 + \frac{x_i^2}{x_1^2}}\,\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\cos(\measuredangle a_i, x) \underset{\text{mit } \cos(\measuredangle a_i, x) = 0}{\longrightarrow} 0$

Satz – Fourierentwicklung

Sei V ein euklidischer Vektorraum und $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ein ONS von V. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist ONB von V

(2) $\forall x \in V$ gilt:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle v_i$$

Fourierentwicklung

(3) $\forall x, y \in V$ gilt:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle \overline{\langle y, v_i \rangle}$$

Parsevalsche Gleichung

(4) $\forall x \in V$ gilt:

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, v_i \rangle|^2$$

(5) Ist $x \in V$ mit $\langle x, v_i \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$, so gilt $x = 0$.

Beweis

- (1) $\Rightarrow$ (2)

  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ist Basis

  $\Rightarrow \forall x \in V$ gilt:

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \quad \text{eindeutig}$$

$$\Rightarrow \langle x, v_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j, v_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underset{\begin{array}{ll} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{array}}{\langle v_j, v_i \rangle} = \lambda_i$$

- $(2) \Rightarrow (3)$

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &\overset{(2)}{=} \langle \textstyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle v_i, y\rangle \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle \langle v_i, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle \overline{\langle y, v_i\rangle}\end{aligned}$$

- $(3) \Rightarrow (4)$

  setzen $x = y$ in (3)

  $\Rightarrow \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i\rangle \overline{\langle x, v_i\rangle} = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, v_i\rangle|^2$

- $(4) \Rightarrow (5)$

  Sei $\langle x, v_i\rangle = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \|x\|^2 = \textstyle\sum_{i=1}^{n} |\underbrace{\langle x, v_i\rangle}_{=0}|^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

- $(5) \Rightarrow 1$

  Zu zeigen ist, dass $\mathrm{LIN}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = V$.

  Angenommen $\exists x \in V$ mit $x \notin \mathrm{LIN}\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$

  $\Rightarrow x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle v_j \neq 0$

  aber

  $$\langle x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle v_j, v_i \rangle = \langle x, v_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{\substack{=0\ i \neq j \\ =1\ i=j}}$$

  $= \langle x, v_i \rangle - \langle x, v_i \rangle = 0 \quad \Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme

  $\stackrel{(5)}{\Rightarrow} x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle v_j = 0 \Rightarrow \mathrm{LIN}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = V$

  $\Rightarrow v_1, v_2, \ldots v_n$ ist eine Orthonormalbasis.

Bemerkung

Sei $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis. Dann ist der Koordinatenvektor von $x \in V$ bezüglich der Basis $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$$x = \begin{bmatrix} \langle x, v_1 \rangle \\ \langle x, v_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, v_n \rangle \end{bmatrix} .$$

Beispiel

Sei $U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 + x_3 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_1, v_2 \in U$$

$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

$\|v_1\| = 1 \quad \|v_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{0+1+1} = 1$

U ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim(U) = 2 \Rightarrow v_1, v_2$ ist ONB von U.

Sei $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \in U$.

Wie lautet der Koordinatenvektor von x bezüglich der ONB $\{v_1, v_2\}$?

$\langle x, v_1 \rangle = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0(-3) = 2$

$\langle x, v_2 \rangle = 2 \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}3 + \frac{1}{\sqrt{2}}(-3)(-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(3+3) = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Koordinatenvektor von x bezüglich ONB $\{v_1, v_2\}$ ist

$$x_{\{v_1, v_2\}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Frage

Besitzt jeder endlichdimensionale euklidische Vektorraum eine Orthonormalbasis? Wenn ja, wie berechnet man diese?

Satz (Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $w_1, w_2, \dots w_k \in V$ linear unabhängige Vektoren. Dann existiert ein Orthonormalsystem $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ mit

$$\mathrm{LIN}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = \mathrm{LIN}\{w_1, w_2, \dots, w_k\}.$$

Beweis

Wir konstruieren $v_1, v_2, \dots, v_k$ rekursiv wie folgt:

(1) Setze $v_1 = \frac{1}{\|w_1\|} w_1 \Rightarrow \|v_1\| = \frac{1}{\|w_1\|}\|w_1\| = 1$

(2) Sind $v_1, v_2, \dots v_l$ für $l < k$ schon berechnet, d. h. es gilt: $\mathrm{LIN}\{v_1, v_2, \dots, v_l\} = \mathrm{LIN}\{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ •

so setze

(i) $\tilde{v}_{l+1} = w_{l+1} - \sum_{i=1}^{l} \langle w_{l+1}, v_i \rangle v_i$

wir zeigen, dass $\langle \tilde{v}_{l+1}, v_j \rangle = 0$ für alle $j = 1, 2, \dots, l$.

$$\langle \tilde{v}_{l+1}, v_j \rangle = \langle w_{l+1} - \sum_{i=1}^{l} \langle w_{l+1}, v_i \rangle v_i, v_j \rangle =$$

$$= \langle w_{l+1}, v_j \rangle - \sum_{i=1}^{l} \langle w_{l+1}, v_i \rangle \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{\substack{= 0 \quad i \neq j \\ = 1 \quad i = j \\ (\text{da } \{v_1, v_2, \dots, v_l\} \text{ ONS})}}$$

$$= \langle w_{l+1}, v_j \rangle - \langle w_{l+1}, v_j \rangle = 0 \ .$$

Da $w_1, \dots, w_l, w_{l+1}$ linear unabhängig sind

$\Rightarrow w_{l+1} \notin \text{LIN}\{w_1, w_2, \dots, w_l\}$

Da nach Induktionsvoraussetzung •

$\text{LIN}\{w_1, w_2, \dots, w_l\} = \text{LIN}\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$

$\Rightarrow w_{l+1} \notin \text{LIN}\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$

$$\Rightarrow \tilde{v}_{l+1} = \underset{\notin \text{LIN}\{v_1, v_2, \dots, v_l\}}{w_{l+1}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{l} \langle w_{l+1}, v_i \rangle v_i}_{} \overset{\star}{\neq} 0$$

$\in \text{LIN}\{v_1, v_2, \dots, v_l\} \Rightarrow \tilde{v}_{l+1} \neq 0$

(weil w_{l+1} und $\sum$ nicht gleich sein können!)

(ii) Setze $v_{l+1} = \underbrace{\frac{1}{\|\tilde{v}_{l+1}\|}}_{\neq 0 \text{ weil } \star} \tilde{v}_{l+1} \Rightarrow \|v_{l+1}\| = 1$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_{l+1}\}$ ist ein Orthonormalsystem.

Da $\dim \mathrm{LIN}\{w_1, w_2, \dots, w_{l+1}\} = l + 1$ und

$v_1, v_2, \dots, v_{l+1} \in \mathrm{LIN}\{w_1, w_2, \dots, w_{l+1}\}$ (nach Konstruktion)

und $v_1, v_2, \dots, v_{l+1}$ linear unabhängig sind

(laut vorigem Satz: jedes Orthonormalsystem ist linear unabhängig),

bilden $v_1, v_2, \dots, v_{l+1}$ eine ONB von $\mathrm{LIN}\{w_1, w_2, \dots, w_{l+1}\}$

$\Rightarrow \mathrm{LIN}\{v_1, v_2, \dots, v_{l+1}\} = \mathrm{LIN}\{w_1, w_2, \dots, w_{l+1}\}$.

Eigenschaft

Jeder endlichdimensionale euklidische Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis.

Beweis

Wähle eine beliebige Basis $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ und wende das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt an
$\Rightarrow \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist eine ONB (da $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ein ONS ist und $V = \mathrm{LIN}\{w_1, w_2, \ldots, w_n\} = \mathrm{LIN}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$).

Definition (orthogonales Komplement)

Sei V ein euklidischer Vektorraum, U ein Teilraum von V. Dann heißt

$$U^{\perp} = \{x \in V \mid \langle x, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U\}$$

das orthogonale Komplement von U.

Eigenschaft

Sei U ein Teilraum von V. Dann gilt:
(1) $U^{\perp}$ ist ein Teilraum von V
(2) $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow U_2^{\perp} \subseteq U_1^{\perp}$.

Beweis

(1) Seien $x, y \in U^\perp \Rightarrow \begin{array}{l} \langle x, u\rangle = 0 \\ \langle y, u\rangle = 0 \quad \forall u \in U \end{array}$

$$\Rightarrow \langle x+y, u\rangle = \langle x, u\rangle + \langle y, u\rangle = 0$$

$$\langle \lambda x, u\rangle = \lambda\langle x, u\rangle = \lambda 0 = 0$$

$$\Rightarrow x + y \in U^\perp,\ \lambda x \in U^\perp.$$

(2) Sei $U_1 \subseteq U_2$ und sei $x \in U_2^\perp$, zu zeigen ist $x \in U_1^\perp$.

Da $x \in U_2^\perp \Rightarrow \langle x, u\rangle = 0 \quad \forall u \in U_2$.

Da $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow \langle x, u\rangle = 0 \quad \forall u \in U_1$

$$\Rightarrow x \in U_1^\perp.$$

Satz

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum, U ein Teilraum von V und $U^\perp$ sein orthogonales Komplement.

Dann gilt:

Jeder Vektor $x \in V$ lässt sich eindeutig als Summe zweier Vektoren aus U und $U^\perp$ schreiben, also

$\circledast\ \forall x \in V \quad \exists!\, x_1 \in U, x_2 \in U^\perp$ mit $x = x_1 + x_2$.

Bezeichnung (für die Eigenschaft $\circledast$):

$V = U \oplus U^\perp$ ist die direkte Summe von U und $U^\perp$.

Es gilt: $V = U \oplus U^\perp \Leftrightarrow V = U + U^\perp$ und $U \cap U^\perp = \{0\}$.

Beweis

(1) Eindeutigkeit

$$\begin{aligned} \text{Angenommen} \quad & x = x_1 + x_2 \quad \text{mit} \quad x_1 \in U, \quad x_2 \in U^\perp \\ \text{und} \quad & x = y_1 + y_2 \quad \text{mit} \quad y_1 \in U, \quad y_2 \in U^\perp. \end{aligned}$$

Zu zeigen ist: $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$.

$$\begin{aligned} 0 = x - x = \quad & (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = \\ & \underbrace{(x_1 - y_1)}_{\in U} + \underbrace{(x_2 - y_2)}_{\in U^\perp} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle x_1 - y_1, x_2 - y_2 \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 \quad & = \langle x_1 - y_1, 0 \rangle = \\ & = \langle x_1 - y_1, (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) \rangle = \\ & = \langle (x_1 - y_1), (x_1 - y_1) \rangle + \langle (x_1 - y_1), (x_2 - y_2) \rangle = \\ & = \langle (x_1 - y_1), (x_1 - y_1) \rangle + 0 = \|x_1 - y_1\|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 - y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1$$

$$\Rightarrow x_2 - y_2 = 0 \Rightarrow x_2 = y_2.$$

(2) Existenz

Sei $\dim(V) = n$.

$U \subseteq V \Rightarrow U$ ist endlichdimensional.

Sei $\dim(U) = k \Rightarrow$ es gibt eine ONB $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ in U.

Nach dem Basisergänzungssatz ergänzen wir $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ zu einer Basis $\{v_1, v_2, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$ von V, wenden darauf Gram-Schmidt an. $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ bleiben dabei unverändert und wir erhalten eine ONB $\{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ von V.

Wir zeigen $U^\perp = \mathrm{LIN}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$.

- $\mathrm{LIN}\{v_{k+1}, \dots, v_n\} \subseteq U^{\perp}$.

Sei $x \in \mathrm{LIN}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$

$\Rightarrow x = \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n$.

Für $i = 1, 2, \dots, k$ gilt dann

$$\begin{aligned} \langle x, v_i \rangle &= \langle \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n, v_i \rangle = \\ &= \lambda_{k+1} \underbrace{\langle v_{k+1}, v_i \rangle}_{=0} + \dots + \lambda_n \underbrace{\langle v_n, v_i \rangle}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Sei nun $y \in U \Rightarrow y = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle x, v_1 \rangle}_{=0} + \dots + \lambda_k \underbrace{\langle x, v_k \rangle}_{=0} = 0.$

$\Rightarrow x \in U^{\perp} \Rightarrow \mathrm{LIN}\{v_{k+1}, \dots, v_n\} \subseteq U^{\perp}$.

- $U^\perp \subseteq \mathrm{LIN}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$.

Sei $\quad x \in U^\perp \subseteq V$

$\Rightarrow x = \langle x, v_1\rangle v_1 + \dots + \langle x, v_k\rangle v_k + \langle x, v_{k+1}\rangle v_{k+1} + \dots + \langle x, v_n\rangle v_n.$

Da $v_1, v_2, \dots, v_k \in U$

$\Rightarrow \langle x, v_1\rangle = \dots = \langle x, v_k\rangle = 0$

$\Rightarrow x = \langle x, v_{k+1}\rangle v_{k+1} + \dots + \langle x, v_n\rangle v_n$

$\quad \in \mathrm{LIN}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$

$\Rightarrow U^\perp \subseteq \mathrm{LIN}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$

●● $\Rightarrow U^\perp = \mathrm{LIN}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$.

Insgesamt ergibt sich für $x \in V$

$$x = \underbrace{\langle x, v_1\rangle v_1 + \dots + \langle x, v_k\rangle v_k}_{=x_1 \in U} + \underbrace{\langle x, v_{k+1}\rangle v_{k+1} + \dots + \langle x, v_n\rangle v_n}_{=x_2 \in U^\perp}.$$

Eigenschaft

Sei V ein euklidischer Vektorraum mit $\dim(V) = n$ und $U \subseteq V$ ein Teilraum mit $\dim(U) = k$.

(1) Sei $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ eine ONB von U.

Wenn diese zu einer ONB $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ von V ergänzt wird, so gilt

$$U^\perp = \mathrm{LIN}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}.$$

(2) $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$

(3) $(U^\perp)^\perp = U$

Beweis

Folgt direkt aus dem Existenzbeweis des obigen Satzes.

Definition (orthogonale Projektion)

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Teilraum.

$\forall x \in V \quad \exists!\, x_1 \in U,\, x_2 \in U^\perp \quad x = x_1 + x_2.$

Dann heißt

$$\pi_U : V \to U \quad , \quad x \mapsto x_1$$

die orthogonale Projektion auf U

$$\pi_{U^\perp} : V \to U^\perp \quad , \quad x \mapsto x_2$$

die orthogonale Projektion auf $U^\perp$.

Beispiel

$V = \mathbb{R}^3$,

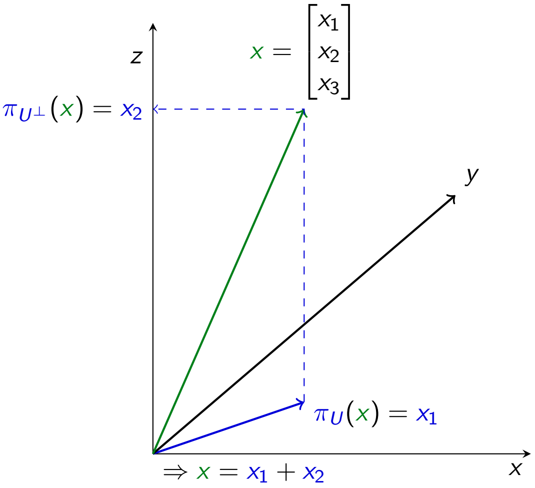
$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(x-y-Ebene)

$$\Rightarrow U^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

(z-Ebene)

$$\overset{x}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \overset{x_1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}} + \overset{x_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}}$$



Eigenschaft

Sei $U \subseteq V$ ein Teilraum von V.

(1) Sei $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ eine ONB von U und $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ die ergänzte ONB von $U^\perp$

$$\Rightarrow \pi_U(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, v_i \rangle v_i \quad \forall x \in V$$

$$\pi_{U^\perp}(x) = \sum_{i=k+1}^{n} \langle x, v_i \rangle v_i \quad \forall x \in V.$$

(2) $\pi_U : V \to U$ und $\pi_{U^\perp} : V \to U^\perp$ sind lineare Abbildungen.

(3) $\pi_U(x) = x \quad \forall x \in U$.

(4) $\forall x \in V$ gilt $\langle x - \pi_U(x), u \rangle = 0 \quad \forall u \in U$.

(5) $\pi_U(x) + \pi_{U^\perp}(x) = x \quad \forall x \in V$.

Beispiel

Sei $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. w_1, w_2 sind linear unabhängig.

Sei $U = \mathrm{LIN}\{w_1, w_2\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) ONB von U

$$\|w_1\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = w_2 - \langle w_2, v_1 \rangle v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{14}} \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{7}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(b) orthogonale Projektion von $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ auf U

$$\pi_U(x) = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}} \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{10}} \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{4}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{6}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 73 \\ 20 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(c) v_1, v_2, x bilden eine Basis im $\mathbb{R}^3$, denn:
$x \notin U$, sonst müsste $\pi_U(x) = x$ sein
$\Rightarrow v_1$, v_2, x sind linear unabhängig $\Rightarrow$ Basis im $\mathbb{R}^3$.

Gram-Schmidt

$$\tilde{v}_3 = x - \pi_U(x) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 73 \\ 20 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad \|\tilde{v}_3\|_2 = \frac{1}{35}\sqrt{9 + 225 + 81} = \frac{\sqrt{315}}{35}$$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|_2} = \frac{1}{\sqrt{315}} \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ -9 \end{bmatrix} \Rightarrow U^\perp = \mathrm{LIN}\{v_3\}.$$

Kennt man v_3 schon, so kann man $\pi_U(x)$ auch folgendermaßen berechnen:

$$\pi_U(x) = x - \pi_{U^\perp}(x) = x - \langle x, v_3 \rangle v_3 =$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{315}} \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ -9 \end{bmatrix} \right\rangle}_{9} \frac{1}{\sqrt{315}} \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{9}{315} \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ -9 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{315} \begin{bmatrix} 630 + 27 \\ 315 - 135 \\ 81 \end{bmatrix} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 73 \\ 20 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Also: Wenn $\dim(U)$ groß ist, so berechnet man $\pi_U(x)$ leichter mit $\pi_U(x) = x - \pi_{U^\perp}(x)$, da dann $\dim(U^\perp)$ klein ist.

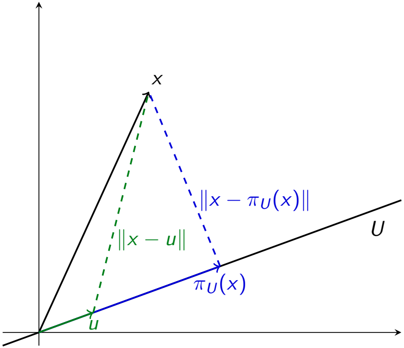
Anwendung (Abstand Punkt – affiner Teilraum)

Satz

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und U ein Teilraum von V. Sei weiters $x \in V$. Dann gilt für alle $u \in U$

$$\|x - u\| \geq \|x - \pi_U(x)\|$$

und Gleichheit gilt genau dann wenn $u = \pi_U(x)$.



Beweis

$$\langle x - \pi_U(x), \underbrace{\underset{\in U}{\pi_U(x)} - \underset{\in U}{u}}_{\in U} \rangle = 0$$

Aus dem Satz von Pythagoras folgt

$$\begin{aligned} \|x-u\|^2 &= \|(x-\pi_U(x)) + (\pi_U(x)-u)\|^2 \\ &= \|x-\pi_U(x)\|^2 + \underbrace{\|\pi_U(x)-u\|^2}_{\substack{\geq 0 \\ = 0 \text{ wenn } \pi_U(x) = u}} \\ &\geq \|x-\pi_U(x)\|^2. \end{aligned}$$

Also

$d(x, U) = \|x - \pi_U(x)\|$ ist der Abstand eines Punktes $x \in V$ vom Teilraum U.

Sei nun $L = p + U$ ein affiner Teilraum des $\mathbb{R}^n$

$$\| \quad z \quad - u\| \quad \geq \quad \|z - \pi_U(z)\|$$

$$\Rightarrow \|x - (p+u)\| = \|\overbrace{x - p} - u\| \overset{Satz}{\geq} \|(x-p) - \pi_U(x-p)\| =$$

$$= \|x - (p + \pi_U(x-p))\|.$$

Also

$\forall\, y \in L = p + U$ gilt

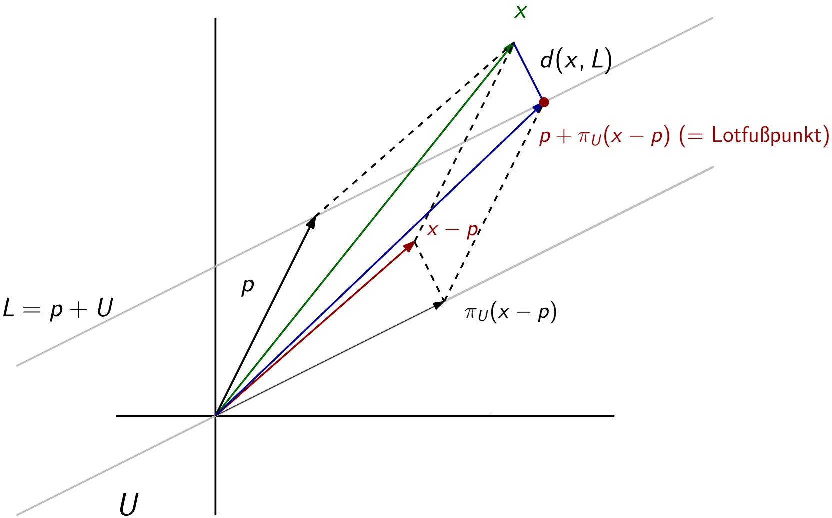
$\|x - y\| \geq \|x - (p + \pi_U(x-p))\|.$

Definition

$d(x, L) = \|x - (p + \pi_U(x-p))\|$

heißt der Abstand von x zu L und

$p + \pi_U(x-p)$ heißt Lotfußpunkt von x an L.


x
$d(x, L)$
$p + \pi_U(x - p)$ (= Lotfußpunkt)
$x - p$
p
$L = p + U$
$\pi_U(x - p)$
U

Spezialfall

Sei H eine Hyperebene gegeben durch die Gleichung

$\langle a, x \rangle = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$, wobei

$H = p + U$ mit U Lösung der Gleichung

$$\langle a, x \rangle = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

Also

$$U = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = 0 \right\}.$$

dabei heißt $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ Normalvektor von $U \Rightarrow U^\perp = \mathrm{LIN}\{a\}$,

$v = \frac{a}{\|a\|}$ ist ONB von $U^\perp$

$\Rightarrow \pi_U(x) = x - \pi_{U^\perp}(x) = x - \langle x, v\rangle v.$

Einsetzen $v \quad \Rightarrow \pi_U(x) = x - \frac{\langle x,a\rangle}{\|a\|^2} a$

$$\Rightarrow d(x,H) \overset{Def}{=} \|x - p - \pi_U(x-p)\| = \left\| x - p - \left((x-p) - \frac{\langle x-p,a\rangle a}{\|a\|^2} \right) \right\|$$
$$= \left\| \frac{\langle x-p,a\rangle}{\|a\|^2} a \right\| = \frac{|\langle x-p,a\rangle|}{\|a\|^2} \|a\| =$$
$$= \frac{1}{\|a\|} \left| \langle x,a\rangle - \langle p,a\rangle \right| = \frac{1}{\|a\|} \left| \langle x,a\rangle - b \right|.$$

Also $d(x,H) = \frac{|\langle a,x\rangle - b|}{\|a\|}$.

Beispiel 1

Sei G eine Gerade im $\mathbb{R}^3$, $G = p + U$

$$G : x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{p} + \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{u}$$

Sei $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. $\quad d(x, G) = ?$

$$v = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow U = \mathrm{LIN}\{v\}$$

$$x - p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\langle x - p, v \rangle v = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\tfrac{2}{\sqrt{5}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\tfrac{2}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(x, G) &= \|x - p - \pi_U(x - p)\| = \|x - p - \langle x - p, v \rangle v\| = \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \tfrac{2}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \tfrac{1}{5} \left\| \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \right\| = \tfrac{1}{5}\sqrt{105} \end{aligned}$$

Beispiel 2

Sei H eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \Rightarrow a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$,

und sei $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Der Abstand von x zu H ist (siehe Spezialfall)

$$d(x, H) = \frac{\left| \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle - 4 \right|}{\sqrt{6}} = \frac{|2-4|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}\,.$$

Determinante

Betrachte das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit $A \in M(n \times n)$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Gesucht ist eine Zahl in Abhängigkeit von der Matrix A, die angibt, ob das LGS eindeutig lösbar ist.

Eine Möglichkeit : $\mathrm{rg}(A) = n$

Eine andere Möglichkeit: die Determinante

Definition

Sei $A \in M(n \times n)$.

A_{ij}: Die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus A durch Weglassen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Definition (Determinante)

Sei $A \in M(n \times n)$

Wir definieren die Determinante von A, kurz $\det(A)$, folgendermaßen induktiv:

$n = 1$ $\det(a) = a$

$n > 1$ (Entwicklung nach einer Spalte):
Sei j mit $1 \leq j \leq n$ eine beliebige aber fixe Zahl. Dann

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, \det(A_{ij})$$

oder analog

(Entwicklung nach einer Zeile):
Wähle ein i, $1 \leq i \leq n$, beliebig aber fix. Dann

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, \det(A_{ij}).$$

Bemerkung

Die Entwicklung der Determinante nach einer Spalte oder nach einer Zeile heißt Laplacescher Entwicklungssatz.

Beispiel 1

$n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \overset{\substack{\text{Entwicklung nach} \\ \text{der 1-sten Zeile}}}{=} (-1)^{1+1}\, a\, \det \overset{A_{11}}{(d)} + (-1)^{1+2}\, b\, \det \overset{A_{12}}{(c)}$$

$$= ad - bc$$

Beispiel 2

$n = 3$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \overset{\substack{\text{Entwicklung nach} \\ \text{der 1-sten Spalte}}}{=} (-1)^{1+1} a_{11}\, \det \overset{A_{11}}{\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} +$$

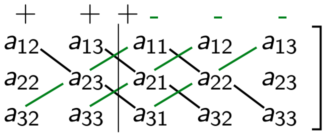
$$+(-1)^{2+1}\, a_{21}\, \det \overset{A_{21}}{\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} + (-1)^{3+1}\, a_{31}\, \det \overset{A_{31}}{\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) +$$

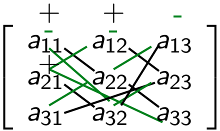
$$+ a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$



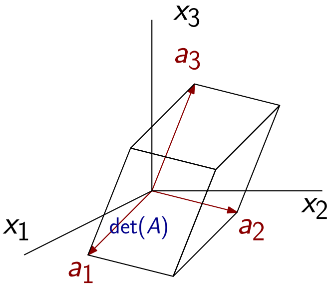
Regel von Sarrus



Veranschaulichung

$n = 3$

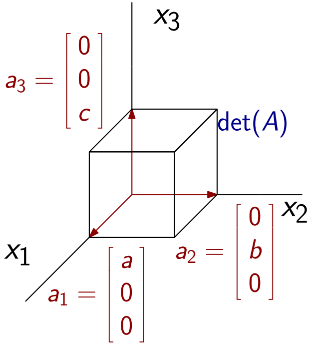
$|\det(A)|$ ist das Volumen des Parallelepipeds, welches durch die Spalten a_1, a_2, a_3 der (3×3)-Matrix A bestimmt ist.



speziell:

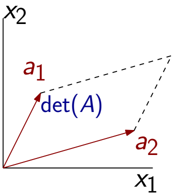
$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \end{array}$$

$\det(A) = abc$



$n = 2$

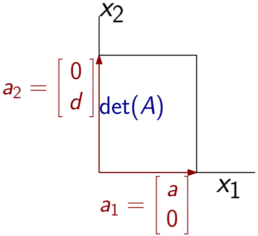
$|\det(A)|$ ist die Fläche des Parallelogramms, welches durch die Spalten a_1, a_2 der (2×2)-Matrix bestimmt ist.



Speziell:

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ a_1 & a_2 \end{array} \end{array}$$

$$\det(A) = ad$$



$n = 1$

$|\det(a)| = |a|$

$\Rightarrow |-1| = 1$

Satz (Eigenschaften der Determinante)

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \det : M(n \times n) &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned}$$

ist die eindeutig bestimmte Abbildung, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(1) det ist linear in jeder Zeile, d. h. wenn

$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ die i-te Zeile von A ist, wobei $a_i = \lambda a_i' + \mu a_i''$ gilt,

dann ist

$$\det \begin{bmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \text{---}\ a_i\ \text{---} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{bmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{bmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \text{---}\ a_i'\ \text{---} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{bmatrix} + \mu \cdot \det \begin{bmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \text{---}\ a_i''\ \text{---} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{bmatrix}.$$

(2) Ist $\mathrm{rg}(A) < n \Rightarrow \det(A) = 0$.

(3) $\det(E) = 1$, wobei $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Beweis

- n=1 Der Satz gilt.
- n=2 Sei $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$.

  Entwicklung nach der 1. Spalte

  $$\det(A) = \det \begin{bmatrix} \overset{+}{\alpha} & \overset{-}{\beta} \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \alpha \cdot \delta - \gamma \cdot \beta \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} &= (-1)^{1+1} \cdot \alpha \cdot \delta + (-1)^{2+1} \cdot \gamma \cdot \beta = \\ &= \alpha \cdot \delta - \gamma \cdot \beta \end{aligned}$$

  (1) $\det \begin{bmatrix} \lambda\alpha' + \mu\alpha'' & \lambda\beta' + \mu\beta'' \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = (\lambda\alpha' + \mu\alpha'') \cdot \delta - \gamma \cdot (\lambda\beta' + \mu\beta'') =$

  $$= \lambda \cdot (\alpha'\delta - \gamma\beta') + \mu \cdot (\alpha''\delta - \gamma\beta'') = \lambda \cdot \det \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} + \mu \cdot \det \begin{bmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

  Ebenso für die 2. Zeile.

(2) Sei $\mathrm{rg}(A) < 2 \Rightarrow \mathrm{rg}(A) = 1$

$$\Rightarrow \text{Spaltenrang} = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \alpha & \lambda\alpha \\ \gamma & \lambda\gamma \end{bmatrix} = \lambda\alpha\gamma - \lambda\alpha\gamma = 0.$$

(3) $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$

Eindeutigkeit

Sei $\det' : M(2 \times 2) \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (1)–(3).
Zu zeigen ist, dass $\det'(A) = \det(A)$.

(i) Seien a_1, a_2 die Zeilenvektoren der Matrix A, also $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$.

Dann gilt:

$$\det' \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = -\det' \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}, \text{ denn}$$

$$0 \overset{(2)}{=} \det' \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 \end{bmatrix}}_{\substack{\textit{lin. abh.} \\ \textit{Zeilen}}} \overset{(1)}{=} \det' \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 + a_2 \end{bmatrix} + \det' \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 + a_2 \end{bmatrix} \overset{(1)}{=}$$

$$= \underbrace{\det' \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \end{bmatrix}}_{=0} + \det' \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \det' \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} + \underbrace{\det' \begin{bmatrix} a_2 \\ a_2 \end{bmatrix}}_{=0} = \det' \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \det' \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det' \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = -\det' \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Sei nun $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

Mit den Zeilen $a_1 = (\alpha, \beta)$, $a_2 = (\gamma, \delta)$

$\Rightarrow a_1 = \alpha \underbrace{(1,0)}_{e_1^T} + \beta \underbrace{(0,1)}_{e_2^T} = \alpha e_1 + \beta e_2$ (T weggelassen, wir bezeichnen mit e_1, e_2 die Zeilenvektoren)

$a_2 = \gamma e_1 + \delta e_2$

$$\Rightarrow \det{}'(A) = \det{}' \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \det{}' \begin{bmatrix} \alpha e_1 + \beta e_2 \\ \gamma e_1 + \delta e_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha \det{}' \begin{bmatrix} e_1 \\ \gamma e_1 + \delta e_2 \end{bmatrix} + \beta \det{}' \begin{bmatrix} e_2 \\ \gamma e_2 + \delta e_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha\,\gamma \underbrace{\det{}' \begin{bmatrix} e_1 \\ e_1 \end{bmatrix}}_{=0} + \alpha\,\delta \det{}' \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \beta\,\gamma \det{}' \begin{bmatrix} e_2 \\ e_1 \end{bmatrix} + \beta\,\delta \underbrace{\det{}' \begin{bmatrix} e_2 \\ e_2 \end{bmatrix}}_{=0} =$$

$$= \alpha\,\delta\;\det'\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \beta\gamma\left(-\det'\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (\alpha\delta - \gamma\beta)\;\det'\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = (\alpha\delta - \gamma\beta)\,\underbrace{\det'(E)}_{=1} =$$

$$= \det(A)$$

- $n > 2$ ohne Beweis

Einige wichtige Eigenschaften der Determinante

(1) Elementare Zeilenumformungen: $A \to A'$

(a) Vertauschen zweier Zeilen:
$\det(A') = -\det(A)$

(b) Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$:
$\det(A') = \lambda \cdot \det(A)$

(c) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen:
$\det(A') = \det(A)$

(2) Determinante der transponierten Matrix

Sei $A \in M(n \times n)$ und $A^T = (a_{ij}^T)$ mit $a_{ij}^T = a_{ji}$ die transponierte Matrix zu A.

Dann gilt: $\det(A^T) = \det(A)$.

Beweis (Eigenschaft (2))

$$\det(A^T) \overset{\substack{\text{Entwicklung nach der}\\ j\text{-ten Spalte von } A^T}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}^T \det(A_{ij}^T) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ji} \det(A_{ji}) =$$

$$\overset{i\leftrightarrow j}{=} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \det(A_{ij}) = \det(A)$$ laut Entwicklung nach der i-ten Zeile von A

Eigenschaft

Eigenschaft (1) gilt auch für Spaltenumformungen.

Beweis

Folgt direkt aus $\det(A^T) = \det(A)$.

Eigenschaft (Multiplikationssatz)

Seien $A, B \in M(n \times n)$. Dann gilt:

$$\det(A \cdot B) = (\det(A)) \cdot (\det(B)).$$

Bemerkung

Aus dem Multiplikationssatz folgt, dass
$\det(AB) = \det(BA)$, obwohl im Allgemeinen $AB \neq BA$.

Eigenschaft

Sei $A \in M(n \times n)$.

A ist invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Beweis

$\Leftarrow$

Beweis durch Widerspruch: Angenommen, dass gilt:
$\neg(\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ ist invertierbar$)$.

Das ist äquivalent zu: $\det(A) \neq 0 \;\wedge\; A$ ist nicht invertierbar.

Aber wenn A nicht invertierbar $\Rightarrow \operatorname{rg}(A) < n$.

Laut Eigenschaft (2) des Satzes (Eigenschaften der Determinante) gilt:
$\operatorname{rg}(A) < n \Rightarrow \det(A) = 0$. Was ein Widerspruch zur Annahme ist.
Also $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ ist invertierbar.

$\Rightarrow$

Sei A invertierbar.

$A \to E$ (durch elementare Zeilenumformungen).

Typ (c) $\det(A') = \det(A)$

Typ (b) $\det(A') = \lambda \cdot \det(A)$

Typ (a) $\det(A') = -\det(A)$.

Also

$\det(E) = \mu \cdot \det(A)$ mit $\mu \neq 0$.

Wäre $\det(A) = 0 \Rightarrow \det(E) = 0$.

Aber $\det(E) = 1 \Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow \det(A) \neq 0$.

Eigenschaft

Sei A invertierbar. Dann $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Beweis

A invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(E) = 1 \Rightarrow$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Eigenschaft

Sei A eine obere Dreiecksmatrix, d. h.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dann ist $\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$.

Beweis

Entwicklung nach der 1. Spalte, dann nach der 1. Spalte von A_{11}, ... usw.

$$\Rightarrow \det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} + 0 + 0 + \dots + 0 =$$

$$a_{11}(-1)^{1+1} a_{22} \det \begin{bmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} + 0 + 0 + \dots + 0 =$$

$$= \dots = a_{11} a_{22} \dots a_{n-1,n-1} \det(a_{nn}) =$$

$$a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \det(A) \overset{\text{Sarrus-Regel}}{=} = 1 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 3 -$$

$$-3 \cdot 4 \cdot 0 - 5 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 6 =$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot 6 = a_{11} a_{22} a_{33} = 24$$

Eigenschaft (Berechnungsverfahren für die Determinante)

Sei $A \in M(n \times n)$ invertierbar.
Verwandle A durch elementare Umformungen in eine obere Dreiecksmatrix A' mit Diagonalelementen $a'_{11}, a'_{22}, \dots a'_{nn}$, wobei $a'_{ii} \neq 0$ für $i = 1, 2, \dots, n$.
(Dies ist sicher möglich, weil sonst wäre $\mathrm{rg}(A) < n$ und A nicht invertierbar und daher $\det(A) = 0$).

Sei r die Anzahl der Zeilenumtauschungen.
Sei λ das Produkt aller Zeilenmultiplikationen.
Dann ist:

$$\det(A) = \frac{1}{\lambda}(-1)^r \det(A') = \frac{1}{\lambda}(-1)^r a'_{11} \dots a'_{nn}.$$

Beispiel 1 (Zeilenumtauschungen)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{IV}}{=} (-1)^1 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\overset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{=} (-1)^1(-1)^1 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^{2=r} \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1) = 1$$

Beispiel 2 (elementare Umformungen und Zeilenumtauschungen)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{1/2\,\mathrm{III}=\mathrm{III}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{II}(-2)+\mathrm{I}=\mathrm{I}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A'$$

$$\Rightarrow r = 2 \Rightarrow \det(A) = \frac{1}{\frac{1}{2}}(-1)^2 \cdot a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot a'_{33} = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -2$$

$$\Rightarrow \lambda = 1/2$$

Probe (Sarrus-Regel) :

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 0 + 2 + 0 - 0 - 4 - 0 = -2$$

Beispiel 3 (elementare Umformungen und Laplacesche Entwicklung)

$$\det\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix} \overset{\mathrm{I}+(-1)\mathrm{IV}=\mathrm{I}}{=} \det\begin{bmatrix}0 & 2 & -3 & 2\\ 0 & 1 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix} =$$

$$\overset{\substack{\text{Entwicklung}\\ \text{nach der 1. Spalte}}}{=} (-1)^{1+4}\det\begin{bmatrix}2 & -3 & 2\\ 1 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix} \overset{\substack{(-2)\mathrm{III}+\mathrm{I}=\mathrm{I}\\ (-1)\mathrm{III}+\mathrm{II}=\mathrm{II}}}{=}$$

$$= (-1)\det\begin{bmatrix}0 & -3 & -6\\ 0 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix} \overset{\substack{\text{Entwicklung}\\ \text{nach der 1. Spalte}}}{=}$$

$$= (-1)(-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix}-3 & -6\\ 4 & -2\end{bmatrix} = (-1)(6+24) = -30$$

Satz

Sei $A \in M(n \times n)$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Dann ist das $(n \times n)$-Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

Beweis

$A \in M(n \times n)$.

$Ax = b$ ist eindeutig lösbar $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = n \Leftrightarrow A$ ist invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Eigenwerte

Einführung

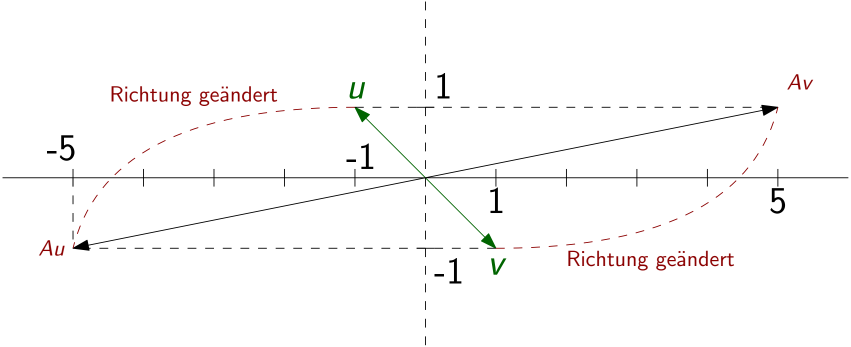
Die Abbildung $F_A(x) = Ax$ transformiert Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ in unterschiedliche Richtungen.
Also ändert die Transformation die Richtung des Vektors.

Beispiel

$$F_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} : F_A(u) = Au = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} : F_A(v) = Av = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$



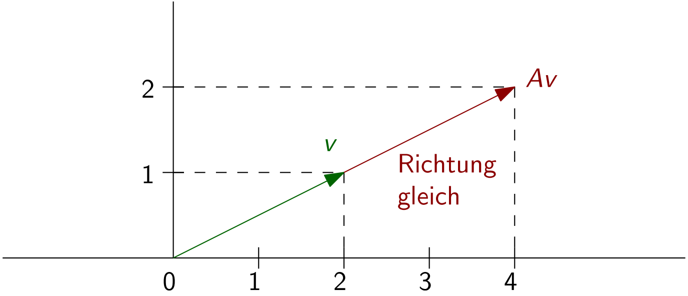
Aber es gibt auch spezielle Vektoren, für welche diese Transformation mit A ganz einfach ist, nämlich dass $Ax = \lambda x$ für ein gewisses $\lambda \in \mathbb{R}$.

Also ändert die Transformation die Richtung eines solchen Vektors nicht.

Beispiel

F_A (und daher) A wie auf vorheriger Folie; $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$F_A(v) = Av = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot v \Rightarrow \lambda = 2\,.$$



Solche Vektoren, die durch Transformation mit A ihre Richtung nicht ändern, spielen eine wichtige Rolle in Technik und Wissenschaft.
Diese Vektoren heißen Eigenvektoren und die entsprechenden λ-Skalare Eigenwerte von A.

Definition (Eigenwert, Eigenvektor einer Matrix)

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über K. Weiters sei $A \in M(n \times n)$ über K. Eine Zahl $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von A, wenn es ein $x \neq 0$, $x \in V$ gibt, sodass

$$Ax = \lambda x.$$

x heißt dann Eigenvektor von A bezüglich λ.

Eine analoge Definition (da jeder Matrix eine lineare Abbildung entspricht und umgekehrt):

Definition (Eigenwert, Eigenvektor einer linearen Abbildung)

Sei $T : V \to V$ linear, wobei V ein Vektorraum über K ist. Eine Zahl $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von T, wenn es ein $x \neq 0$ gibt, sodass

$$T(x) = \lambda x.$$

x heißt dann Eigenvektor von T bezüglich λ.

Anmerkung

Eigenvektor ist ungleich 0.
Eigenwert kann gleich 0 sein.

Standardfall

$V = \mathbb{C}^n$.
A: eine komplexe $(n \times n)$-Matrix.
$\lambda \in \mathbb{C}$; $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$.

Da $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, gilt für reelle Matrizen:

Spezialfall

$V = \mathbb{C}^n$ (eventuell $\mathbb{R}^n$).
A: eine reelle $(n \times n)$-Matrix.
$\lambda \in \mathbb{C}$ (eventuell $\lambda \in \mathbb{R}$) ; $x \in \mathbb{C}^n$ (eventuell $x \in \mathbb{R}^n$), $x \neq 0$.

Im Weiteren werden wir zunächst den Spezialfall betrachten, also die Eigenwerte und Eigenvektoren einer reellen Matrix, und uns dabei zwei Fällen widmen.

Fall 1 : A eine reelle $(n \times n)$-Matrix und λ, x reell.

Beispiel (Fall 1)

Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ eine reelle Matrix

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = -4x = \lambda x$$

$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ ist ein reeller Eigenvektor von A und

$\lambda = -4$ ist ein reeller Eigenwert von A.

Hingegen ist $x = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ kein Eigenvektor von A, weil

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \lambda x \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Fall 2 : A eine reelle $(n \times n)$-Matrix und λ, x komplex.

Beispiel (Fall 2)

Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ eine reelle Matrix

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \lambda x \Rightarrow$$

$\lambda = i$ ist ein komplexer Eigenwert und

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ ist ein komplexer Eigenvektor von A.

Definition (Eigenraum)

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum.
Sei $A \in M(n \times n)$ und λ ein Eigenwert von A.
Dann heißt

$$E_{\{\lambda\}} = \{x \in V \mid Ax = \lambda x\}$$

Eigenraum zum Eigenwert λ.

Eigenschaft (geometrische Vielfachheit)

$E_{\{\lambda\}}$ ist ein Teilraum von V.
$\dim(E_{\{\lambda\}})$ heißt die geometrische Vielfachheit von λ.

Beweis

Seien $x, y \in E_{\{\lambda\}}$.

$\Rightarrow$ (i) $A(x+y) = Ax + Ay \overset{\text{Def}}{=} \lambda x + \lambda y = \lambda(x+y) \Rightarrow x + y \in E_{\{\lambda\}}$.

(ii) $A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x) \Rightarrow \alpha x \in E_{\{\lambda\}}$.

Bemerkung

$E_{\{\lambda\}}$ enthält genau den Nullvektor und alle Eigenvektoren zu λ.

Beispiel

Angenommen, dass $\lambda = 7$ ein Eigenwert von $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ist.

Gesucht ist der Eigenraum $E_{\{7\}}$.

Wenn $\lambda = 7$ ein Eigenwert von A ist $\Rightarrow \exists x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq 0$

$$Ax = 7x \Leftrightarrow Ax - 7x = 0 \Leftrightarrow (A - 7E)x = 0.$$

Lösung des homogenen LGS mit der Matrix

$A - 7E = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$ ergibt

$$\left[\begin{array}{cc|c} -6 & 6 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Die allgemeine Lösung ist $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \mu_1 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Jeder Vektor $\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1 \neq 0$ ist ein Eigenvektor zu $\lambda = 7$.

Also $E_{\{\lambda\}} = E_{\{7\}} = \left\{ \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_1 \in \mathbb{R} \right\}$ (Nullvektor inklusive!)

$E_{\{7\}}$ ist eine Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch den Ursprung des

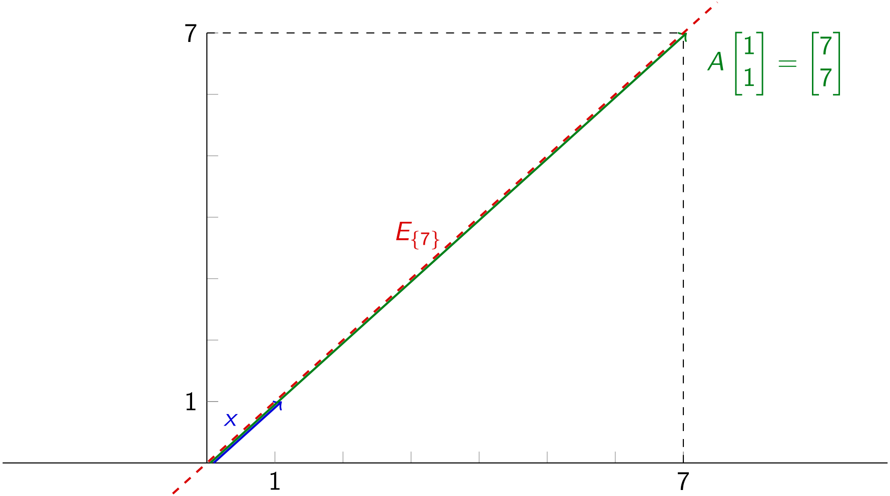
Koordinatensystems und $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (wenn $\alpha_1 = 1$) geht.

Die geometrische Vielfachheit von $\lambda = 7$ ist also 1.

Speziell: wenn $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dann ist

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda x.$$

Also ist x ein Eigenvektor zu $\lambda = 7$ und dieser ändert durch Transformation mit der Matrix A seine Richtung nicht.



Definition (charakteristisches Polynom)

Sei $A \in M(n \times n)$. Dann ist das Polynom n-ten Grades $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ das charakteristische Polynom zu A.

Satz

Ein Skalar λ ist ein Eigenwert von $A \in M(n \times n)$ dann und nur dann, wenn $p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$.

Beweis

λ ist ein Eigenwert von $A \Leftrightarrow$
$\exists x \neq 0 : Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda E)x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda E)x = 0$ hat eine nicht triviale Lösung.

Wir wissen:

$(A - \lambda E)x = 0$ hat eine eindeutige (triviale) Lösung $x = 0 \Leftrightarrow$
$A - \lambda E$ ist invertierbar $\Leftrightarrow \det(A - \lambda E) \neq 0$.

Also (aus der Negation des Obigen) folgt:

$(A - \lambda E)x = 0$ hat eine nicht triviale Lösung $x \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Anmerkung

Das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ ist ein reelles Polynom n-ten Grades (weil A eine reelle $n \times n$-Matrix ist).
Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat dieses n Wurzeln (Nullstellen), die aber auch komplex sein können.
Also: Die Eigenwerte einer reellen Matrix können auch komplex sein (siehe Beispiel (Fall 2)).

Eigenschaft

λ ist ein Eigenwert von $A \Leftrightarrow \lambda$ ist eine Wurzel des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$ zu A.

Definition (algebraische Vielfachheit)

Sei $A \in M(n \times n)$ mit p unterschiedlichen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.
Wir sagen $\lambda_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p$ hat die algebraische Vielfachheit $r_i, \quad r_i \in \mathbb{N}$

(oder: λ_i ist ein r_i-facher Eigenwert von A), wenn für das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ von A gilt:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \ldots (\lambda - \lambda_p)^{r_p}.$$

Beispiel 1 (reelle Wurzeln von $p(\lambda)$)

Sei $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$.

$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-6-\lambda) - 9 = \lambda^2 + 4\lambda - 21 = (\lambda+7)(\lambda-3)$

$\Rightarrow$ Die Wurzeln $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = 3$ von $p(\lambda)$ sind die Eigenwerte von A.

Beispiel 2 ($p(\lambda)$ mit komplexen Wurzeln)

Sei $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} -2-\lambda & 4 \\ -1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (-2-\lambda)^2 - (-4) = (2+\lambda)^2 + 4$

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (2+\lambda)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)^2 = -4 \Leftrightarrow \lambda + 2 = \pm 2i$
$\Rightarrow \lambda_1 = -2 + 2i$, $\lambda_2 = -2 - 2i$ sind die Eigenwerte von A.

Beispiel 3 (mehrfache Wurzeln)

Sei $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda) = (5-\lambda)^2(3-\lambda)(1-\lambda)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$ sind die Eigenwerte von A.

Der Eigenwert $\lambda_1 = 5$ ist ein mehrfacher (zweifacher) Eigenwert und $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$ sind einfache Eigenwerte (also $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r_3 = 1$).

Beispiel (Basis von $E_{\{\lambda\}}$)

Sei $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ mit einem Eigenwert $\lambda = 2$.

Gesucht ist eine Basis von $E_{\{2\}}$.
$\lambda = 2$ ist ein zweifacher Eigenwert von A:

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 & 6 \\ 2 & 1-\lambda & 6 \\ 2 & -1 & 8-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(1-\lambda)(8-\lambda) - 12 - 12 - 12(1-\lambda) + 2(8-\lambda) + 6(4-\lambda) =$$
$$= -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 40\lambda + 36 = 0 \Rightarrow$$

die charakteristische Gleichung ist $\lambda^3 - 13\lambda^2 - 40\lambda + 36 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda - 9) = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 9) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 9.$$

Also: Die algebraische Vielfachheit von λ_1 bzw. λ_2 ist 2 bzw. 1.

Das homogene LGS zu $Ax = 2x$ ist:

$$(A - 2E)x = 0 \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1/2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\text{LÖS}(A - 2E) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$E_{\{2\}}$ ist ein zweidimensionaler Teilraum des $\mathbb{R}^3$

mit der Basis: $\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Daher ist die geometrische Vielfachheit von λ_1 gleich 2.

Satz (Eigenwerte einer Dreiecksmatrix)

Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix sind ihre Diagonalwerte.

Beweis

Das charakteristische Polynom einer (z. B. oberen) Dreiecksmatrix ist

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda).$$

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow a_{11} = \lambda_1$ oder $a_{22} = \lambda_2$ oder ... oder $a_{nn} = \lambda_n$.
Also sind die Wurzeln von $p(\lambda)$ die Diagonalwerte von A.

Beispiel

Sei $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Dann sind die Eigenwerte von A 3, 0 und 2.
Die Eigenwerte von B sind 4 (zweifach) und 1.

Satz (Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten)

Seien $v_1, v_2, \ldots, v_p$ die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ von A.
Dann ist die Vektormenge $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ linear unabhängig.

Beweis (durch Widerspruch)

Seien $v_1, v_2, \ldots, v_p$ linear abhängig $\Rightarrow \exists i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, sodass der Vektor v_i eine Linearkombination der anderen Vektoren ist
(die alle linear unabhängig sind).

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $i = p$. Also:

(1) $v_p = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_{p-1} v_{p-1}$
wobei nicht alle c_i gleich 0 sind.
Multiplikation mit A (von links):
$$Av_p = c_1 Av_1 + c_2 Av_2 + \ldots + c_{p-1} Av_{p-1}.$$
Da $Av_i = \lambda_i v_i \quad i = 1, 2, \ldots, p \Rightarrow$

(2) $\lambda_p v_p = c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \ldots + c_{p-1} \lambda_{p-1} v_{p-1}.$
Multiplikation von (1) mit λ_p

(3) $\lambda_p v_p = c_1 \lambda_p v_1 + c_2 \lambda_p v_2 + \ldots + c_{p-1} \lambda_p v_{p-1}.$
Subtraktion (2) − (3) ergibt:
$$0 = c_1(\lambda_1 - \lambda_p) v_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_p) v_2 + \ldots + c_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p) v_{p-1}.$$
Da $\{v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}\}$ linear unabhängig sind $\Rightarrow$

(4) $c_i(\lambda_i - \lambda_p) = 0 \quad$ für $i = 1, 2, \ldots, p-1$.
Aber $(\lambda_i - \lambda_p) \neq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, p-1$ (weil die λ-Werte unterschiedlich sind).
Dann folgt aus (4) $\Rightarrow c_i = 0, i = 1, 2, \ldots, p-1$,
was aber einen Widerspruch zu (1) darstellt.

Definition (ähnliche Matrizen)

Zwei $(n \times n)$-Matrizen A, B heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix P gibt, sodass $B = P^{-1}AP$ oder $A = PBP^{-1}$.
Die Transformation von A zu $P^{-1}AP$ heißt Ähnlichkeitstransformation.

Satz (Eigenwerte ähnlicher Matrizen)

Seien A, B zwei ähnliche $(n \times n)$-Matrizen. Dann haben A und B das gleiche charakteristische Polynom und daher die gleichen Eigenwerte (einschließlich derer Vielfachheit).

Beweis

Wenn A, B ähnlich $\Rightarrow \exists P$ invertierbar : $B = P^{-1}AP$

$$B - \lambda E = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(AP - \lambda P) = P^{-1}(A - \lambda E)P.$$

Dann
$$\det(B - \lambda E) = \det(P^{-1}(A - \lambda E)P) = \\ = \det(P^{-1})\det(A - \lambda E)\det(P).$$

Da
$$\det(P^{-1})\det(P) = \det(P^{-1}P) = \det(E) = 1 \Rightarrow \\ \det(B - \lambda E) = \det(A - \lambda E)$$

und daher haben A und B die gleichen Eigenwerte.

Definition (diagonalisierbare Matrix)

Eine $(n \times n)$-Matrix A heißt diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist, d. h. wenn es eine invertierbare Matrix P gibt, sodass $A = PDP^{-1}$ (später so geschrieben).

Satz (Diagonalisierbarkeit einer Matrix)

Eine $(n \times n)$-Matrix A ist diagonalisierbar dann und nur dann, wenn A n linear unabhängige Eigenvektoren hat.

Anders:
Es gilt $A = PDP^{-1}$ (D eine Diagonalmatrix) $\Leftrightarrow$
Die Spalten von P sind n linear unabhängige Eigenvektoren von A.
In diesem Fall sind die Diagonalelemente von D die zugehörigen Eigenwerte zu den Eigenvektoren von A.

Anders:
A ist diagonalisierbar dann und nur dann, wenn sie Eigenvektoren besitzt, die eine Basis des $\mathbb{C}^n$ bilden. (Eine solche Basis heißt Eigenvektor-Basis.)

Beweis

Wenn P eine $(n \times n)$-Matrix mit Spalten $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ist und D eine Diagonalmatrix ist mit den Elementen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, dann

(1) $$AP = A \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ Av_1 & Av_2 & \ldots & Av_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

und

(2) $$PD = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \ldots & \lambda_n v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow$

Angenommen, dass A diagonalisierbar ist und $A = PDP^{-1}$. Multiplikation mit P (von rechts) ergibt $AP = PD$, also aus (1) und (2) folgt

(3) $Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2, \ldots, Av_n = \lambda_n v_n$.
Da P invertierbar ist $\Rightarrow v_1, v_2, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig. Diese sind (da linear unabhängig) ungleich null. Dann folgt aus (3), dass $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ die Eigenvektoren von A sind.

$\Leftarrow$

Wenn $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ die Menge der Eigenvektoren von A ist, dann lässt sich

$$P = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

und mit den dazugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ auch D konstruieren. Das gilt für jede Menge von Eigenvektoren. Dann aus (1), (2) $\Rightarrow AP = PD$. Wenn diese zusätzlich linear unabhängig sind, dann ist P invertierbar und aus $AP = PD \Rightarrow A = PDP^{-1}$.

Beispiel (Matrix diagonalisierbar)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Also gesucht ist eine invertierbare Matrix P und eine Diagonalmatrix D, sodass $A = PDP^{-1}$.

Die Eigenwerte von A sind die Elemente von D:

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2 \text{ (zweifach)}.$$

Die linear unabhängigen Eigenvektoren von A bilden die Spalten von P:

- Eigenvektor x zu λ_1: $Ax = \lambda_1 x$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = A - E$$

Homogenes LGS zu $\lambda_1 : (A - E)x = 0 :$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & -6 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc:c|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \quad x = \alpha_1 \begin{array}{c} \mu_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

- Homogenes LGS zu $\lambda_2 = -2 : (A + 2E)x = 0$

$$A + 2E = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad x = \alpha_1 \begin{array}{c} \mu_1 \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} + \alpha_2 \begin{array}{c} \mu_2 \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dann ist der Basisvektor v_1 des Eigenraums $E_{\{1\}}$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (x \text{ für } \alpha_1 = 1)$$

und die Basisvektoren v_2, v_3 des Eigenraums $E_{\{-2\}}$ sind

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (x \text{ für } \alpha_1 = \alpha_2 = 1).$$

Also $P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $D = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$.

- Probe: Verifizierung ob $AP = PD$ und ob P invertierbar.

$$\left.\begin{aligned} AP &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ PD &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AP = PD (*)$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \operatorname{rg}(P) = 3 \Rightarrow P$ ist invertierbar.

Dann folgt aus (*), dass $A = PDP^{-1} \Rightarrow A$ ist diagonalisierbar.

Beispiel (Matrix nicht diagonalisierbar)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 & 3 \\ -4 & -6-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(-6-\lambda)(1-\lambda) + (-12)\cdot 3 + (-12)\cdot 3 - 3(-6-\lambda)\cdot 3 - (-16)(1-\lambda) - (-9)(2-\lambda) =$$

$$= \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+2)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2 \text{ (zweifach).}$$

Also sind die Eigenwerte gleich wie im vorigen Beispiel.

- Homogenes LGS zu $\lambda_1 = 1 : (A - 1 \cdot E)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} (2-1) & 4 & 3 & 0 \\ -4 & (-6-1) & -3 & 0 \\ 3 & 3 & (1-1) & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ -4 & -7 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 3 & 0 \\ -4 & -7 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{der Basisvektor des Eigenraums } E_{\{1\}} \text{ für}$$

den Eigenwert $\lambda_1 = 1$ ist dann $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad (x$ für $\alpha_1 = 1)$.

- Homogenes LGS zu $\lambda_2 = -2 : (A + 2E)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2-(-2) & 4 & 3 & 0 \\ -4 & -6-(-2) & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 1-(-2) & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 0 \\ -4 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 2 & 3 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x = \alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{(weil } 2 \leftrightarrow 3\text{).}$$

Der Basisvektor des Eigenraums $E_{\{-2\}}$ für

den Eigenwert $\lambda_2 = -2$ ist $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (x für $\alpha_1 = 1$).

Also: Der Eigenraum zum zweifachen Eigenwert -2 ist eindimensional.
Es gibt also nicht 3 linear unabhängige Eigenvektoren von A, sondern nur 2 $\Rightarrow$ um eine invertierbare Matrix P zu gestalten ist das zu wenig $\Rightarrow$ Matrix A ist nicht diagonalisierbar.

Anmerkung

Diese Beispiele zeigen, dass wenn λ ein r-facher Eigenwert ist, dann ist $\dim(E_{\{\lambda\}}) \leq r$.

- Beispiel (Matrix diagonalisierbar)
  $\lambda_1 = 1$, $r = 1$: $\dim(E_{\{1\}}) = 1 = r$
  $\lambda_2 = -2$, $r = 2$: $\dim(E_{\{-2\}}) = 2 = r$.
- Beispiel (Matrix nicht diagonalisierbar)
  $\lambda_1 = 1$, $r = 1$: $\dim(E_{\{1\}}) = 1 = r$
  $\lambda_2 = -2$, $r = 2$: $\dim(E_{\{-2\}}) = 1 < r$.

Satz (hinreichende Bedingung für die Diagonalisierbarkeit einer Matrix)

Eine $(n \times n)$-Matrix mit n unterschiedlichen Eigenwerten ist diagonalisierbar.

Beweis

Seien $v_1, v_2, \ldots, v_n$ die Eigenvektoren zu den n unterschiedlichen Eigenwerten der Matrix A. Diese sind (nach dem Satz über Eigenvektoren zu den unterschiedlichen Eigenwerten) linear unabhängig. Dann ist die daraus gebildete Matrix P invertierbar und laut dem vorigen Satz ist A diagonalisierbar.

Anmerkung

Um diagonalisierbar zu sein, ist es nicht notwendig, für eine $(n \times n)$-Matrix nur einfache Eigenwerte zu haben.

Siehe Beispiel (Matrix diagonalisierbar):

Die dortige (3×3)-Matrix A ist diagonalisierbar, obwohl diese nur 2 unterschiedliche Eigenwerte hat: einen einfachen Eigenwert (1) und einen zweiten Eigenwert (-2) mit algebraischer Vielfachheit 2.

Dieses Beispiel zeigt, dass es diagonalisierbare Matrizen gibt, die nicht unbedingt unterschiedliche Eigenwerte haben. Wie findet man in diesem Fall die invertierbare Matrix P (sodass $P^{-1}AP = D$)?

- Wir wissen:
  Wenn eine Matrix n unterschiedliche Eigenwerte hat, dann ist diese diagonalisierbar. Wann ist eine Matrix diagonalisierbar, wenn sie weniger als n unterschiedliche Eigenwerte hat?

Satz (Diagonalisierbarkeit bei weniger als n unterschiedlichen Eigenwerten)

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix mit p unterschiedlichen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.

a) Für $1 \leq k \leq p$ ist die Dimension des Eigenraumes $E_{\{\lambda_k\}}$ kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit von λ_k. Also für jedes λ_k:
geometrische Vielfachheit $\leq$ algebraische Vielfachheit.

b) Die Matrix A ist diagonalisierbar dann und nur dann, wenn
die Summe der Dimensionen der unterschiedlichen Eigenräume gleich n ist. Das ist dann und nur dann, wenn die Dimension des Eigenraumes für jedes λ_k gleich der algebraischen Vielfachheit von λ_k ist.

c) Wenn A diagonalisierbar ist und für jedes $k = 1, 2, \ldots, p$ gilt, dass B_k eine Basis des Eigenraums $E_{\{\lambda_k\}}$ zu λ_k ist, dann bilden die Vektoren $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_p$ die Eigenvektor-Basis des $\mathbb{C}^n$.

Beispiel

Sei $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

A ist eine untere Dreiecksmatrix mit den Eigenwerten auf der Hauptdiagonale: A hat zwei unterschiedliche Eigenwerte, 5 und -3. Daher ist $p = 2$ und die algebraische Vielfachheit beider ist 2. Die Basen für diese Eigenwerte sind:

$$\text{für } \lambda_1 = 5 \qquad B_1 = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\text{für } \lambda_2 = -3 \qquad B_2 = \{v_3, v_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Daher ist $\dim(E_{\{\lambda_1\}}) = \dim(E_{\{\lambda_2\}}) = 2 \quad$ und
$\dim(E_{\{\lambda_1\}}) + \dim(E_{\{\lambda_2\}}) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathbb{C}^4)$.

Deshalb ist diese Matrix laut b) diagonalisierbar. Laut c) bilden $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ eine Basis des $\mathbb{C}^4$. Darum ist $P = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ invertierbar und $A = PDP^{-1}$ mit

$$D = \begin{bmatrix} 5 & & & \\ & 5 & & \\ & & -3 & \\ & & & -3 \end{bmatrix}.$$

- Wir wissen:
  Wenn eine $(n \times n)$-Matrix weniger als n linear unabhängige Eigenvektoren hat, bzw. wenn die Dimension des Eigenraumes für jeden Eigenwert nicht gleich seiner algebraischen Vielfachheit ist, dann ist die Matrix nicht diagonalisierbar. In diesem Fall kann die Matrix auf eine „diagonal-nahe“ Form gebracht werden.
  Diese Matrix heißt die jordansche kanonische Form von A.

Satz (jordansche kanonische Form)

Jede $(n \times n)$-Matrix A ist ähnlich zu einer Block-Matrix (jordansche kanonische Form von A)

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{bmatrix}$$

d. h. es gibt eine invertierbare $(n \times n)$-Matrix P, sodass $A = PJP^{-1}$. Jedes J_i (jordanscher Block), $i = 1, 2, \ldots, m$, hat die Gestalt

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix},$$

wobei λ einer der Eigenwerte von A ist.

- Die Anzahl m der Blöcke ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren von A.
- Die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes ist gleich der Anzahl der jordanschen Blöcke mit diesem Eigenwert.
- Die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwerts ist gleich der Summe der Dimensionen aller jordanschen Blöcke mit diesem Eigenwert.

Beispiel (jordansche kanonische Form)

Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Finde die jordansche kanonische Form von A.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, r_1 = 2$. Also ist 1 ein zweifacher Eigenwert von A.

$$E_{\{1\}}: \ (A - 1\cdot E)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \underset{\sim}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}.$$

Da $\dim\left(E_{\{1\}}\right) \neq r_1 \quad (1 \neq 2) \Rightarrow A$ ist nicht diagonalisierbar.
Aber es gibt die jordansche kanonische Form von A:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{bmatrix}.$$

- m : # linear unabhängige Eigenvektoren von A ist gleich $\underset{\sim}{1}$.
- # jordansche Blöcke mit $\lambda_1 = \dim\left(E_{\{1\}}\right)$ ist gleich 1.
- Die Summe der Dimensionen aller jordanschen Blöcke mit $\lambda_1 = 1$ ist gleich der algebraischen Vielfachheit von $\lambda_1 = 2$.

Also $J = [J_1]$, $\quad J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ & \lambda_1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{in diesem Spezialfall}}{=} A.$

Dann ist für $P = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ die Matrix A ähnlich zu J. $\quad (A = EJE^{-1})$

Wir wissen:

Jeder $(n \times n)$-Matrix A entspricht eindeutig eine lineare Transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sodass $T(x) = F_A(x) = Ax$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$. Wenn aber $\underline{A \text{ diagonalisierbar ist}}$, dann ist die darstellende Matrix dieser Transformation $\underline{\text{diagonal}}$.

Satz

Sei A eine diagonalisierbare $(n \times n)$-Matrix der Form $A = PDP^{-1}$, wobei D eine $(n \times n)$-Diagonalmatrix ist. Wenn B eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist, deren Vektoren die Spalten von der Matrix P sind, dann ist D die darstellende Matrix der Abbildung $T(x) = F_A(x) = Ax$ bezüglich der Basis B.

Beweis

Sei $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann ist die Matrix $P_{\{B\}} = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ invertierbar und $D_{\{B\}} = P_{\{B\}}^{-1}$ ist die Koordinaten-Wechselmatrix von der kanonischen Basis zur Basis B, d. h. für $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

(1) $P_{\{B\}}^{-1} v_{\{E\}} = v_{\{B\}}$. (siehe darstellende Matrix: Spezialfall 4)

oder umgekehrt:

$P_{\{B\}}$ ist die Koordinaten-Wechselmatrix von der Basis B zur kanonischen Basis E, d. h. für $\forall x \in \mathbb{R}^n$

(2) $P_{\{B\}} v_{\{B\}} = v_{\{E\}}$.

Die darstellende Matrix von T bezüglich B ist laut Spezialfall 2.3
$(V = W = \mathbb{R}^n, \quad T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad B_V = B_W = B)$

$$
\begin{aligned}
D_{\{B\}} &= \big[[T(v_1)]_{\{B\}}\ [T(v_2)]_{\{B\}}\ \dots\ [T(v_n)]_{\{B\}}\big] = \\
&= \big[[A(v_1)]_{\{B\}}\ [A(v_2)]_{\{B\}}\ \dots\ [A(v_n)]_{\{B\}}\big] \overset{\text{laut (1)}}{=} \\
&= \Big[P_{\{B\}}^{-1}[A(v_1)]_{\{E\}}\ P_{\{B\}}^{-1}[A(v_2)]_{\{E\}}\ \dots\ P_{\{B\}}^{-1}[A(v_n)]_{\{E\}}\Big] = \\
&= P_{\{B\}}^{-1}A[{v_1}_{\{E\}}\ \ {v_2}_{\{E\}}\ \ \dots\ \ {v_n}_{\{E\}}] = P_{\{B\}}^{-1}AP_{\{B\}}.
\end{aligned}
$$

Da A diagonalisierbar ist, d. h. $A = PDP^{-1} \Rightarrow$ wenn wir $P = P_{\{B\}}$ setzen, dann $D_{\{B\}} = P_{\{B\}}^{-1}AP_{\{B\}} = P^{-1}(PDP^{-1})P = D$.

Also: Die darstellende Matrix ist diagonal.

Beispiel (darstellende Matrix diagonal)

Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x) = F_A(x) = Ax$ mit $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Gesucht ist die Basis $B = \{v_1, v_2\}$ des $\mathbb{R}^2$, für welche die darstellende Matrix diagonal ist. Diese Matrix ist diagonalisierbar, sie hat 2 unterschiedliche Eigenwerte $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ und $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Also $A = PDP^{-1}$ mit $P = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ und $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Laut obigem Satz ist $D_{\{B\}} = D$ die darstellende Matrix von T bezüglich der Basis $B = \{v_1, v_2\}$.

Da für den Spezialfall 2.3 gilt $D_{\{B\}}x_{\{B\}} = [T(x)]_{\{B\}}$, dann $[Ax]_{\{B\}} = [T(x)]_{\{B\}} = D_{\{B\}}x_{\{B\}} = Dx_{\{B\}}$.

Konkret: Sei $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dann $T(x) = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$.

$$x_{\{B\}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = a_1 \overset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} + a_2 \overset{v_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ -a_1 - 2a_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_{\{B\}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$[T(x)]_{\{B\}} = a_1 \overset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} + a_2 \overset{v_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 9 \\ -a_1 - 2a_2 &= -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 15 \\ a_2 &= -6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow [T(x)]_{\{B\}} = \begin{bmatrix} 15 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\overset{D}{\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} \overset{x_{\{B\}}}{\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 15 \\ -6 \end{bmatrix} \Rightarrow [T(x)]_{\{B\}} = Dx_{\{B\}}$$

Also:

$T(x) = Ax$ beschreibt die Transformation T zur Basis E.
$[T(x)]_{\{B\}} = Dx_{\{B\}}$ beschreibt die gleiche Transformation T zur Basis B.
$T(x)$ und $[T(x)]_{\{B\}}$ sind die Darstellungen des gleichen Vektors bezüglich unterschiedlicher Basen.

Anmerkung

Im Beweis des vorigen Satzes könnte die Matrix D durch eine ähnliche Matrix C ersetzt werden: Also $A = PCP^{-1}$.
Dann ist die Matrix C ebenso die darstellende Matrix $D_{\{B\}}$ der linearen Abbildung $T(x) = Ax$ bezüglich der Basis $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, wobei v_i die i-te Spalte $(i = 1, 2, \ldots, n)$ der Matrix P ist.

Umgekehrt:

Wenn $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ als $T(x) = Ax$ definiert ist und B eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist, dann ist die darstellende Matrix $D_{\{B\}}$ von T ähnlich zu A. Da für die Matrix P der Basisvektoren von B

$$D_{\{B\}} = P^{-1}AP$$

gilt, ist die Menge aller ähnlichen Matrizen zu A gleich der Menge aller Matrix-Repräsentationen der Transformation $T(x) = F_A(x) = Ax$.

Beispiel (darstellende Matrix in der jordanschen kanonischen Form)

Sei $A = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$, $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Das charakteristische Polynom von A ist

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -9 \\ 4 & -8-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(-8-\lambda) + 36 =$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8\lambda - 32 + 36 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2.$$

Der Eigenraum $E_{\{-2\}}$ zum Eigenwert $\lambda = -2$ ist eindimensional:

$(A - \lambda E)x = 0 \Leftrightarrow (A + 2E)x = 0$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 6 & -9 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -3/2 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:c} \boxed{1} & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x = \alpha \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dim(E_{\{-2\}}) = 1.$

Dadurch ist A nicht diagonalisierbar.

Die Basis $B = \{v_1, v_2\}$ hat die Eigenschaft, dass bezüglich der Basis B die darstellende Matrix $D_{\{B\}}$ zu $T(x) = Ax$ die jordansche kanonische Form von A ist. Dies ist so, weil A ähnlich zu $D_{\{B\}}$ ist, d. h. wenn $P_{\{B\}} = [v_1 \ v_2]$, dann $D_{\{B\}} = P^{-1}AP$.

$$AP = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ist die jordansche kanonische Form von A (mit Eigenwert auf der Diagonale).

$$\begin{aligned} D_{\{B\}} &= \left[[T(v_1)]_{\{B\}} \; [T(v_2)]_{\{B\}} \right] = \left[[Av_1]_{\{B\}} \; [Av_2]_{\{B\}} \right] \\ &= \left[\begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}_{\{B\}} \; \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\{B\}} \right] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Also $D_{\{B\}} = P^{-1}AP$, d. h. in diesem Fall nimmt die darstellende Matrix die jordansche kanonische Form an.

Anmerkung

$P^{-1}AP$ ist folgendermaßen berechnet:

AP und danach $[P \;\; AP] \to [E \;\; P^{-1}AP]$

Also ohne explizite Berechnung von P^{-1} und darauf folgender Matrix-Multiplikation von AP mit P^{-1}.

Komplexe Eigenwerte (einer reellen Matrix)

Das charakteristische Polynom einer reellen $(n \times n)$-Matrix ist ein Polynom n-ten Grades. Dieses hat n Wurzeln (mehrfach gezählt), einige davon eventuell auch komplex. Wenn eine reelle $(n \times n)$-Matrix komplexe Eigenwerte hat, dann enthalten diese „eine kritische Information“ über die Matrix.

Die Eigenwert-Eigenvektor-Theorie, die für $\mathbb{R}^n$ gilt, ist leicht auch auf $\mathbb{C}^n$ übertragbar, wenn ermöglicht wird, dass eine reelle Matrix auf Vektoren aus $\mathbb{C}^n$ operieren kann.

Definition (komplexer Eigenwert und Eigenvektor)

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. Ein komplexer Skalar λ heißt (komplexer) Eigenwert von A, wenn es einen Vektor $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ gibt,
für den gilt $Av = \lambda v$.

Anmerkung

Analog wie im $\mathbb{R}^n$, gilt auch im $\mathbb{C}^n$:
$\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein Eigenwert von $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$.

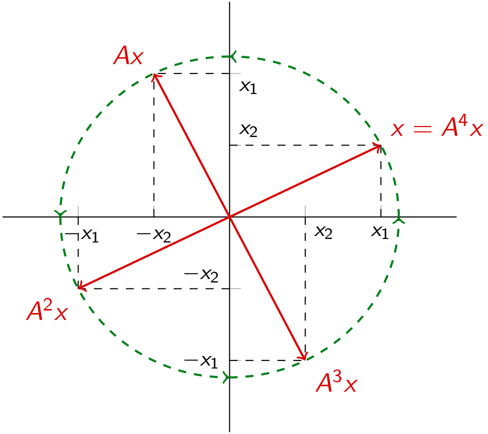
Beispiel (komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren)

Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$.

$F_A(x) = Ax$ rotiert die Vektoren $x \in \mathbb{R}^2$ gegen den Uhrzeigersinn durch alle vier Quadranten, sodass man nach 4 Rotationen zur ursprünglichen Position von x gelangt.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$Ax = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad A^2x = A(Ax) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}, \quad A^3x = A(A^2x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}, \quad A^4x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Offensichtlich hat A die Eigenschaft, dass für keinen Nichtnullvektor x gilt, dass Ax ein Vielfaches von x ist, d. h. A hat keinen Eigenvektor im $\mathbb{R}^2$ und daher folgt, dass A keinen reellen Eigenwert hat.

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow$$

$\lambda^2 + 1 = 0$ hat zwei komplexe Wurzeln $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

Die zugehörigen Eigenvektoren sind $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ und $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$:

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \lambda_1 v_1$$

$$Av_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \lambda_2 v_2.$$

Beispiel (Eigenraum für komplexe Eigenwerte)

Sei $A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}$.

Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} 0.5 - \lambda & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1.6\lambda + 1 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 0.8 - 0.6i \ , \ \ \lambda_2 = 0.8 + 0.6i.$$

$E_{\{\lambda_1\}}, E_{\{\lambda_2\}}$:

$$E_{\{\lambda_1\}} = \{x \mid (A - \lambda_1 E)x = 0\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.8 - 0.6i & 0 \\ 0 & 0.8 - 0.6i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -0.3 + 0.6i & -0.6 \\ 0.75 & 0.3 + 0.6i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rl} (-0.3 + 0.6i)x_1 - 0.6x_2 = 0 & (1) \\ 0.75x_1 + (0.3 + 0.6i)x_2 = 0 & (2) \end{array}$$

$(2) \Rightarrow x_1 = \frac{-(0.3+0.6i)x_2}{0.75} = -(0.4+0.8i)x_2$

$$\begin{aligned} & (-0.3+0.6i)(-0.4-0.8i)x_2 - 0.6x_2 = 0 \\ (1) \Rightarrow \quad & (0.12+0.24i-0.24i-0.48i^2)x_2 - 0.6x_2 = 0 \\ & 0.6x_2 - 0.6x_2 = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für jeden beliebigen komplexen Wert x_2 lösbar.

Also $E_{\{\lambda_1\}} = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(0.4+0.8i)x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{C} \right\}$.

Analog $E_{\{\lambda_2\}} = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{-(0.4+0.8i)x_2} \\ \overline{x_2} \end{bmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{C} \right\}$.

$E_{\{\lambda_1\}}$, $E_{\{\lambda_2\}}$ sind eindimensionale Teilräume des $\mathbb{C}^2$.

Definition (komplex konjugierter Vektor)

Wenn der Real-(Imaginär-)Teil eines komplexen Vektors x als $Re\, x$ ($Im\, x$) bezeichnet wird, dann ist der komplex konjugierte Vektor $\overline{x}$ zu x

$$\overline{x} = Re\, x - Im\, x.$$

Anmerkung (voriges Beispiel)

Jeder Vektor $x \in E_{\{\lambda_1\}}$ ist komplex konjugiert zu $\overline{x} \in E_{\{\lambda_2\}}$ und umgekehrt.

Definition (komplex konjugierte Matrix)

Sei B eine komplexe Matrix. Dann hat $\overline{B}$, die komplex konjugierte Matrix zu B, die komplex konjugierten Elemente von B.

Eigenschaft

Seien $r \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}^n$ und B und C komplexe $(n \times n)$-Matrizen.
Dann gilt: $\overline{rx} = \overline{r}\,\overline{x}$, $\overline{Bx} = \overline{B}\,\overline{x}$, $\overline{BC} = \overline{B}\,\overline{C}$ und $\overline{rB} = \overline{r}\,\overline{B}$.

Eigenschaft

Sei A eine reelle $(n \times n)$-Matrix. Da $A = \overline{A}$, gilt $\overline{Ax} = \overline{A}\,\overline{x} = A\overline{x}$.
Wenn λ ein Eigenwert von A ist und x der zugehörige Eigenvektor im $\mathbb{C}^n$, dann
$A\overline{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \overline{\lambda}\,\overline{x}$
$\Rightarrow \overline{\lambda}$ ist auch ein Eigenwert von A und der zugehörige Eigenvektor ist $\overline{x}$.

Anders:

Komplexe Eigenwerte einer reellen Matrix und die zu ihnen zugehörigen Eigenvektoren treten in komplex konjugierten Paaren auf.

Beispiel

Im vorigen Beispiel:

$$\lambda_1 = 0.8 + 0.6i \qquad \lambda_2 = 0.8 - 0.6i \Rightarrow \lambda_1 = \overline{\lambda_2}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -(0.4 + 0.8i)x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} \overline{-(0.4 + 0.8i)x_2} \\ \overline{x_2} \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \overline{v_2}$$

Beispiel (Rotationsmatrix)

Sei $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$ und nicht beide gleich 0.

Dann sind die Eigenwerte von A:

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & -b \\ b & a - \lambda \end{bmatrix} = (a - \lambda)^2 + b^2 = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2 = 0$$

$\Rightarrow$ Diskriminante der quadratischen Gleichung $D = 4a^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2$

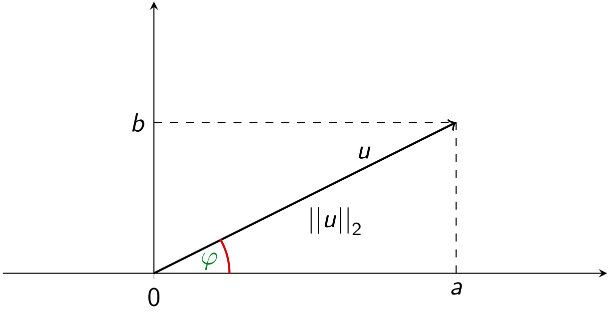
$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{2a \pm \sqrt{-4b^2}}{2} = a \pm ib.$$

Es gilt $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{a^2 + b^2} = \left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|_2.$

Wir wissen:

Wenn $u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und φ der Winkel zwischen u und der positiven ersten Koordinatenachse ist, dann

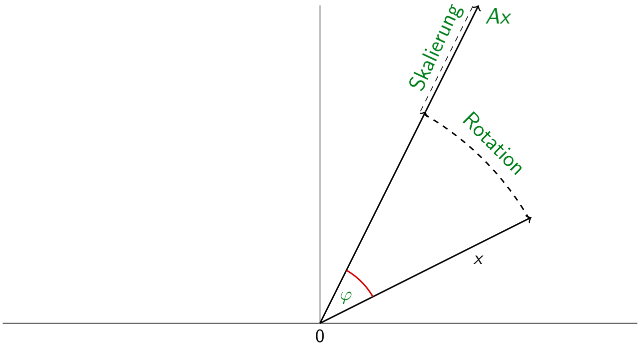
$$\cos\varphi = \frac{a}{||u||_2} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \; .$$



Wenn $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, dann

$$A = r \begin{bmatrix} a/r & -b/r \\ b/r & a/r \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}}^{\text{Skalierung}} \overbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}^{\text{Rotation}} .$$

Also die Transformation Ax eines Vektors $x \in \mathbb{R}^2$ besteht aus der Komposition einer Rotation von x um den Winkel φ und einer Skalierung mit $r = |\lambda_{1,2}|$.



Anmerkung

Die Eigenvektoren einer Rotationsmatrix

$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ sind $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.

Beweis

Wir wissen (voriges Beispiel Rotationsmatrix), dass die Eigenwerte von A
$\lambda_1 = a + ib$ und $\lambda_2 = a - ib$ sind.

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + ib \\ b - ia \end{bmatrix} = (a + ib) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - ib \\ b + ia \end{bmatrix} = (a - ib) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Beispiel

Sei $A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}$.

Wir wissen (voriges Beispiel):

$\lambda_1 = 0.8 - 0.6i \qquad \lambda_2 = 0.8 + 0.6i$

$v_1 = \begin{bmatrix} -2-4i \\ 5+0i \end{bmatrix}$ (für $x_2 = 5 + 0i$) $\qquad v_2 = \begin{bmatrix} -2+4i \\ 5-0i \end{bmatrix}$ (für $\overline{x_2} = 5 - 0i$).

Sei P eine reelle (2×2)-Matrix

$P = [Re\ v_1 \quad Im\ v_1] = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad P^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ (siehe übernächste Folie)

und sei

$$C = P^{-1}AP = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

C ist eine Rotationsmatrix (weil diese von der Gestalt $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ist und

$C = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ mit $r = \sqrt{0.8^2 + 0.6^2} = 1$ und $\cos\varphi = 0.8$, $\sin\varphi = 0.6$).

Aus $C = P^{-1}AP \Rightarrow A = PCP^{-1} = P \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} P^{-1}$.

Also ist in A eine Rotation enthalten.

Die Transformation mit A bewirkt:

- Koordinatenwechsel von der kanonischen Basis E zur Basis $\{Re\ v_1, Im\ v_1\}$ ($=$ Multiplikation mit P^{-1})
- anschließende Rotation um den Winkel $\varphi = \arccos(0.8)$ ($=$ Multiplikation mit C)
- und Wechsel zu Koordinaten bzgl. der ursprünglichen Basis E ($=$ Multiplikation mit P).

Beispiel

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = ?$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -2 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1/2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -10 & 5/2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/20 & -1/10 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2/10 \\ 0 & 1 & -5/20 & -1/10 \end{array}\right] \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Anmerkung

Die Berechnungen wie im obigen Beispiel können für beliebige reelle (2×2)-Matrizen mit einem komplexen Eigenwert durchgeführt werden.

Satz

Sei A eine reelle (2×2)-Matrix mit einem komplexen Eigenwert $\lambda = a - bi$ $(b \neq 0)$ und zugehörigem Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^2$.

Dann $A = PCP^{-1}$,

wobei $P = [Re\ v \quad Im\ v]$ und $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Beweis (ohne Details)

Der Beweis beruht darauf, dass für eine reelle Matrix gilt:

$$A\ Re\ x = Re\ Ax \quad \text{und} \quad A\ Im\ x = Im\ Ax.$$

Wenn v der Eigenvektor zum komplexen Eigenwert λ ist, dann sind $Re\ v$ und $Im\ v$ linear unabhängig im $\mathbb{R}^2$.