Axiome eines Vektorraums $(V, \oplus, \odot)$ über dem Körper $(K, +, \cdot)$

V1: $\forall x, y \in V : x \oplus y \in V$

V2: $\forall x, y, z \in V : x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

V3: $\exists 0 \in V \, \forall x \in V : x \oplus 0 = x$

V4: $\forall x \in V \, \exists (-x) \in V : x \oplus (-x) = 0$

V5: $\forall x, y \in V : x \oplus y = y \oplus x$

V6: $\forall x \in V \, \forall \lambda \in K : \lambda \odot x \in V$

V7: $\forall x, y \in V \, \forall \lambda \in K : \lambda \odot (x \oplus y) = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y)$

V8: $\forall x \in V \, \forall \lambda, \mu \in K : (\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x)$

V9: $\forall x \in V \, \forall \lambda, \mu \in K : \lambda \odot (\mu \odot x) = (\lambda \cdot \mu) \odot x$

V10: $\forall x \in V : 1 \odot x = x$

7. Vektorraum der $m \times n$-Matrizen $M_{m \times n}$

V1: Seien A, B beliebige $m \times n$-Matrizen.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}.$$

V2: Seien $A, B, C \in M_{m \times n}$ beliebig.

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & \cdots & b_{1n} + c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} + c_{m1} & \cdots & b_{mn} + c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + (b_{11} + c_{11}) & \cdots & a_{1n} + (b_{1n} + c_{1n}) \\ \vdots & & \\ a_{m1} + (b_{m1} + c_{m1}) & \cdots & a_{mn} + (b_{mn} + c_{mn}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11}) + c_{11} & \cdots & (a_{1n} + b_{1n}) + c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{m1} + b_{m1}) + c_{m1} & \cdots & (a_{mn} + b_{mn}) + c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} = (A + B) + C.$$

V3: Sei $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$. Dann ist für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$ beliebig.

$$A + 0 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 0 & \cdots & a_{1n} + 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + 0 & \cdots & a_{mn} + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A.$$

V4: Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$ beliebig. Dann gilt für $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$:

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + (-a_{11}) & \cdots & a_{1n} + (-a_{1n}) \\ \vdots & & \\ a_{m1} + (-a_{m1}) & \cdots & a_{mn} + (-a_{mn}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$\boxed{7.}$ Fortsetzung

<u>V5</u>: Seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$ beliebig.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1}+a_{m1} & \cdots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix} = B + A.$$

<u>V6</u>: Seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}.$$

<u>V7</u>: Seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\lambda (A+B) = \lambda \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(a_{11}+b_{11}) & \cdots & \lambda(a_{1n}+b_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda(a_{m1}+b_{m1}) & \cdots & \lambda(a_{mn}+b_{mn}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11}+\lambda b_{11} & \cdots & \lambda a_{1n}+\lambda b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1}+\lambda b_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn}+\lambda b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda b_{11} & \cdots & \lambda b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda b_{m1} & \cdots & \lambda b_{mn} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \lambda A + \lambda B.$$

<u>V8</u>: Seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$(\lambda+\mu) A = (\lambda+\mu) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+\mu)a_{11} & \cdots & (\lambda+\mu)a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ (\lambda+\mu)a_{m1} & \cdots & (\lambda+\mu)a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11}+\mu a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n}+\mu a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1}+\mu a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn}+\mu a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu a_{11} & \cdots & \mu a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu a_{m1} & \cdots & \mu a_{mn} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \lambda A + \mu A$$

[7.] Fortsetzung

V9: Seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\lambda(\mu A) = \lambda\left(\mu\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix} \mu a_{11} & \cdots & \mu a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu a_{m1} & \cdots & \mu a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\mu a_{11}) & \cdots & \lambda(\mu a_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda(\mu a_{m1}) & \cdots & \lambda(\mu a_{mn}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\lambda\mu) a_{11} & \cdots & (\lambda\mu) a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ (\lambda\mu) a_{m1} & \cdots & (\lambda\mu) a_{mn} \end{pmatrix} = (\lambda\mu)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\lambda\mu) A.$$

V10: Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}$ beliebig.

$$1A = 1\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a_{11} & \cdots & 1a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 1a_{m1} & \cdots & 1a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A.$$

Also: Die Menge $M_{m\times n}$ aller $m\times n$-Matrizen ist mit diesen Operationen ein Vektorraum.

$\boxed{8.}$ $\mathbb{R}^2$ mit gewöhnlicher Vektoraddition und neuer Skalarmultiplikation

$$\lambda \odot x = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\lambda} \\ \frac{x_2}{\lambda} \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

<u>V6:</u> z.z. $\forall x \in \mathbb{R}^2 \; \forall \lambda \in \mathbb{R}: \; \lambda \odot x \in \mathbb{R}^2$

Sei $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und sei $\lambda = 0 \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \odot x = 0 \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0} \\ \frac{1}{0} \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}^2, \text{ denn } \frac{1}{0} \notin \mathbb{R}$$

Da V6 nicht erfüllt ist, sind nicht alle Vektorraumaxiome erfüllt, also:
<u>kein</u> Vektorraum.

<u>V8:</u> z.z. $\forall x \in \mathbb{R}^2 \; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \; (\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x)$

Sei $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und seien $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$ und $\mu = 2 \in \mathbb{R}$.

$$(\lambda + \mu) \odot x = (2+2) \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{4} \\ \frac{4}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x) = \left(2 \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \oplus \left(2 \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{2} \\ \frac{4}{2} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \frac{4}{2} \\ \frac{4}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \neq (\lambda + \mu) \odot x$$

Da V8 nicht erfüllt ist, sind nicht alle Vektorraumaxiome erfüllt, also:
<u>kein</u> Vektorraum.

9. V Vektorraum über Körper K, Nullvektor $0 \in V$.

z.z.: $\forall \lambda \in K: \lambda \cdot 0 = 0$

Sei $\lambda \in K$ beliebig. Laut V6: $\lambda \cdot 0 \in V$.

$$0 \overset{V4}{=} (\lambda \cdot 0) + (-(\lambda \cdot 0)) \overset{V3}{=} (\lambda \cdot (0+0)) + (-(\lambda \cdot 0)) \overset{V7}{=}$$
$$\overset{V7}{=} ((\lambda \cdot 0) + (\lambda \cdot 0)) + (-(\lambda \cdot 0)) \overset{V2}{=} (\lambda \cdot 0) + ((\lambda \cdot 0) + (-(\lambda \cdot 0))) \overset{V4}{=}$$
$$\overset{V4}{=} (\lambda \cdot 0) + 0 \overset{V3}{=} \lambda \cdot 0 . \quad \square$$

11. $B = \{0, 1\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a, b, c \in B \right\}$

Addition auf B: $\quad + : B \times B \to B$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Sei 0 das neutrale Element bezüglich +, daher $0+0=0$, $0+1=1$. Wollen Kommutativität haben $\Rightarrow 1+0=1$. Um ein Linksinverses zu 1 zu haben, muss $1+1=0$ sein. Entspricht XOR (exklusivem Oder).

Multiplikation auf B: $\quad \cdot : B \times B \to B$

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Um $0 \cdot x = 0 \ \forall x \in B$ zu erhalten: $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$.
Für Kommutativität: $1 \cdot 0 = 0$.
1 als neutrales Element auf $B \setminus \{0\} = \{1\}$: $1 \cdot 1 = 1$.
Entspricht AND.

Darauf aufbauend (Vektor-)Addition $+ : V \times V \to V$: $\left(\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_a \\ y_b \\ y_b \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} x_a + y_a \\ x_b + y_b \\ y_c + y_c \end{pmatrix}$

Addition auf B

Skalarmultiplikation $\cdot : B \times V \to V$: $\left(\lambda, \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_a \\ \lambda \cdot x_b \\ \lambda \cdot x_c \end{pmatrix}$

Multiplikation auf B

11. Fortsetzung

Ist V mit $+$ und $\cdot$ ein Vektorraum?

V1: z.z. $\forall x,y \in V: x+y \in V$. ja, siehe (1)

V2: $\forall x,y,z \in V: x+(y+z) = (x+y)+z$ ja, siehe (2)

V3: $\exists 0 \in V \, \forall x \in V: x+0 = x$ ja, mit $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, siehe (3)

V4: $\forall x \in V \, \exists (-x) \in V: x+(-x) = 0$ ja, mit $-x = x$, siehe (4)

V5: $\forall x,y \in V: x+y = y+x$ ja, siehe (5)

V6: $\forall x \in V \, \forall \lambda \in B: \lambda \cdot x \in V$ ja, siehe (6)

V7: $\forall x,y \in V \, \forall \lambda \in B: \lambda \cdot (x+y) = (\lambda \cdot x) + (\lambda \cdot y)$ ja, siehe (7)

V8: $\forall x \in V \, \forall \lambda, \mu \in B: (\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda \cdot x) + (\mu \cdot x)$ ja, siehe (8)

V9: $\forall x \in V \, \forall \lambda, \mu \in B: \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$ ja, siehe (9)

V10: $\forall x \in V: 1 \cdot x = x$ ja, siehe (10)

x	y	x+y	y+x	x+0	x+x	x·y	1·x
0	0	0	0	0=x	0	0	0=x
0	1	1	1	0=x	0	0	0=x
1	0	1	1	1=x	0	0	1=x
1	1	0	0	1=x	0	1	1=x
		(1)		(3)	(4)	(6)	(10)

= (5)

x	y	z	y+z	x+(y+z)	x+y	(x+y)+z	x·(y+z)	x·y	x·z	(x·y)+(x·z)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0

= (2) = (7)

x	y	z	(x+y)·z	y·z	(x·z)+(y·z)	x·(y·z)	(x·y)·z
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1	1

= (8) = (9)

$\boxed{10}$ V Vektorraum, K Körper z.z. für $x \in V$ und $\lambda \in K$:

$\lambda \cdot x = 0 \iff (\lambda = 0 \vee x = 0)$.

Verwende dazu $\forall \lambda \in K: \lambda \cdot 0 = 0$ (vorige Aufgabe) und

$\forall x \in V: 0 \cdot x = 0$ (laut V0)

Beweis:

„$\Leftarrow$": Sei $\lambda = 0 \vee x = 0$.

Falls $\lambda = 0$, gilt laut V0 $\lambda \cdot x = 0 \cdot x = 0$.

Falls $x = 0$, gilt laut voriger Aufgabe $\lambda \cdot x = \lambda \cdot 0 = 0$.

Aufgrund der Annahme $\lambda = 0 \vee x = 0$ und der Definition des logischen Oders $\vee$ ist mindestens einer der beiden obigen Fälle erfüllt, daher $\lambda \cdot x = 0$.

„$\Rightarrow$": Sei $\lambda \cdot x = 0$. $(*)$

Falls $\lambda = 0$, gilt $\lambda = 0 \vee x = 0$.

Falls $\lambda \neq 0$: K ist ein Körper, daher ist $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe und es gibt für $\lambda \in K \setminus \{0\}$ ein $\frac{1}{\lambda} \in K \setminus \{0\}$ mit $\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda = 1$. (Δ)

(Wobei 1 das neutrale Element dieser Gruppe ist.)

Daher gilt:

$$x \overset{V10}{=} 1 \cdot x \overset{(\Delta)}{=} \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right) \cdot x \overset{V9}{=} \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) \overset{(*)}{=} \frac{1}{\lambda} \cdot 0 \overset{\text{vorige Aufgabe}}{=} 0.$$

$\square$