LinA Zettel 10

Monday, June 1, 2020 17:55

41

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Nun: $\langle a \times b, a \rangle = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)$

$= \cancel{a_1a_2b_3} - \cancel{a_1a_3b_2} + \cancel{a_2a_3b_1} - \cancel{a_1a_2b_3} + \cancel{a_1a_3b_2} - \cancel{a_2a_3b_1}$

$= 0$

Weiters $\langle a \times b, c \rangle = c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)$

$= a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3$

$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$

$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$

$= \langle a, b \times c \rangle = \langle b \times c, a \rangle$

42

Sei $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechne $\frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|} \cdot v$ für die orthogonale Projektion

und $\left\| \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|} v - x \right\|$ für den Abstand.

$$\frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|} = \frac{-4 - 6 + 6}{\sqrt{6}} \approx -1{,}633$$

$$\frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|} v = \begin{pmatrix} 1{,}633 \\ -3{,}266 \\ -1{,}633 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{\langle x,v\rangle}{\|v\|} v - x \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1{,}633 \\ -3{,}266 \\ -1{,}633 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 2{,}367 \\ -0{,}266 \\ -7{,}633 \end{pmatrix} \right\|$$

$$\approx 8$$

43 1 Dot product mit $\overbrace{\text{Basisvektoren}}^{\text{orthonormalisierten}}$ der Ebene nehmen

$E := -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

Suche ONB für E:

$$(-2 \quad -1 \quad 2)$$

$$\rightsquigarrow (1 \quad 1/2 \quad -1)$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Basisvektoren sind also $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalisiert: $\frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gram Schmidt:

$$v_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{5}} \left(-\tfrac{1}{2}\right) \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{4}{10} \begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2/10\\4/10\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0.8\\0.4\\1\end{pmatrix}$$

$$V_2 = \frac{\tilde{V}_2}{\|\tilde{V}_2\|} = 5/9 \begin{pmatrix}0.8\\0.4\\1\end{pmatrix}$$

Nun: Die Projektion von x auf E ist

$$v_1 \langle x, v_1 \rangle + v_2 \langle x, v_2 \rangle$$

$$= v_2 \left\langle \begin{pmatrix}-7\\5\\9\end{pmatrix}, 5/9 \begin{pmatrix}0.8\\0.4\\1\end{pmatrix} \right\rangle + v_1 \left\langle \begin{pmatrix}-7\\5\\9\end{pmatrix}, 2/\sqrt{5} \begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= V_2 \cdot 5/9 \cdot 5{,}4 + V_1 \cdot 7{,}602$$

$$= \begin{pmatrix}2{,}4\\1{,}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3{,}4\\6{,}8\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\8\\3\end{pmatrix}$$

2 Orthogonale Gerade -- das crossp. der Basen
dann Crossp. zu x bewegen und schneiden

$$\frac{5}{9}\begin{pmatrix}0.8\\0.4\\1\end{pmatrix} \times \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{5}{9}\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\begin{pmatrix}0.8\\0.4\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{5}{9}\frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\0.8+0.2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{5}{9}\frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Gerade durch x und orthogonal zu E:

$$\begin{pmatrix}-7\\5\\9\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\1\end{pmatrix} \qquad E = -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -2(-7-\lambda) - (5 - \tfrac{1}{2}\lambda) + 2(9+\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 14 + 2\lambda - 5 + \tfrac{1}{2}\lambda + 18 + 2\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 27 + 4\tfrac{1}{2}\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = -6$$

$$\Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix}-7\\5\\9\end{pmatrix} + (-6)\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-7\\5\\9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\3\\-6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\8\\3\end{pmatrix}$$