# PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 1 (2018-03-09)

**Aufgabe 1** Im folgenden seien $x, y, z \in \mathbb{N}$ typisierte Variable. Das Prädikat $S(x, y, z)$ gelte genau dann wenn $x + y = z$ ist. Entsprechend gelte $P(x, y, z)$ g.d.w. $x \cdot y = z$ und $L(x, y)$ g.d.w. $x < y$ ist. Formulieren Sie die folgenden Sätze in der Prädikatenlogik:

1. Zu jedem $x$ und jedem $y$ gibt es ein $z$ mit $x + y = z$.
2. Kein $x$ ist kleiner als $0$.
3. Für alle $x$ gilt: $x + 0 = x$.
4. Es gibt ein $x$ mit $x \cdot y = y$ für alle $y$.

**Aufgabe 2** Wir betrachten eine Gruppe $(M, \heartsuit)$ sowie $a, b \in M$. Beweisen Sie, daß dann genau ein $x \in M$ eine Lösung der Gleichung $a \heartsuit x = b$ darstellt.

**Aufgabe 3** Ermitteln Sie die Verknüpfungstabelle für die endliche Gruppe mit den Elementen 0, $a$ und $b$. Erklären Sie weiters, warum diese Verknüpfungstabelle eindeutig ist.

**Aufgabe 4** Geben Sie für die folgenden Formeln die freien und gebundenen Variablen an und negieren Sie die Formeln. (Negationszeichen sollen so weit wie möglich vermieden werden und dürfen jedenfalls in ihrer Lösung nur noch ganz innen stehen.)

1. $(\forall z\ f(z) \neq z)$
2. $(\forall y\ (\neg P(x) \wedge P(y)))$
3. $(\forall x\ (\exists y\ f(x, y) > z))$
4. $(\forall\ \epsilon > 0\ (\exists N \in \mathbb{N}\ (\forall n \in \mathbb{N}\ \ (n \geqslant N \Rightarrow |\bar{a} - a(n)| < \epsilon))))$

**Aufgabe 5** Wir betrachten die Mengen

$$S_1 := \{(x, y)\ :\ (x, y) \in [8, 9] \times \mathbb{R}\ \wedge\ (\forall x \in [0, 7]\ \ y \geqslant \sin(x))\}$$

und

$$S_2 := \{(x, y)\ :\ (x, y) \in [8, 9] \times \mathbb{R}\ \wedge\ (\exists x \in [0, 7]\ \ y \geqslant \sin(x))\}$$

als Teilmengen des $\mathbb{R}^2$. (Das Argument des Sinus ist dabei in Radiant angegeben.) Skizzieren Sie die Mengen $S_1$ und $S_2$ graphisch. Argumentieren Sie weiters logisch (und ohne Benutzung der graphischen Visualisierung), daß $S_1 \subseteq S_2$. Warum ist die Definition von $S_1$ und $S_2$ aus formaler Sicht nicht glücklich gewählt?

**Aufgabe 6** Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln jeweils eine Tautologie sind:

1. $(\forall x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)) \ \Leftrightarrow\ (\forall x\, \exists y\, (P(x) \wedge Q(y)))$.
2. $(\forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)) \ \Leftrightarrow\ (\forall x\, \exists y\, (P(x) \vee Q(y)))$.

Dabei wird vorausgesetzt, dass das Universum bei den Variablen $x$ und $y$ gleich und nicht leer ist.

**Aufgabe 7** Sei $A$ eine nicht-leere Menge und $P$ eine Partition von $A$. Beweisen Sie, dass die Relation

$$R_P := \{(x, y) \in A \times A :\ \text{es gibt ein } X \in P \text{ mit } x \in X \text{ und } y \in X\}$$

eine Äquivalenzrelation auf $A$ ist.

# PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 2 (2018-03-16)

**Aufgabe 8** Gib eine abstrakte Prädikatenformel an, die dem folgenden Beispiel eines Syllogismus entspricht, und zeige dass sie eine Tautologie ist.

Keine Hausaufgabe macht Spass.
Manchmal ist Lesen eine Hausaufgabe.

---

Daher macht manchmal Lesen keinen Spass.

**Aufgabe 9** Eine gewisse Anzahl ($n \in \mathbb{N}$) Gefangener stehen in einer Schlange und bekommen Hüte aufgesetzt die weiss oder schwarz sein können. Jeder Gefangene kann die Farbe der Hüte der vor ihm in der Schlange stehenden sehen, nicht jedoch die seines eigenen sowie die der hinter ihm stehenden. Mit dem letzten in der Schlange beginnend müssen die Gefangenen der Reihe nach einen Tipp abgeben welche Farbe ihr eigener Hut hat. Beschreibe ein Protokoll (auf dass sich die Gefangenen im vorhinein verständigen können), welches sicherstellt, dass höchstens einer die falsche Farbe sagt (jeder darf nur eine Farbe tippen).

Können Sie dieses Protokoll auf den Fall von drei Farben verallgemeinern, wo dann verlangt ist, dass höchstens zwei der Gefangenen mit ihrem Tipp falsch liegen.

**Aufgabe 10** Drei Gefangene bekommen die Aufgabe das folgende Rätsel zu lösen, und der erste der es löst und die Lösung erklären kann wird freigelassen.

Aus einem Sack der drei weisse und zwei schwarze Hüte enthält bekommt jeder der drei Gefangenen einen Hut aufgesetzt. Jeder der Gefangenen kann die Farbe der Hüte der anderen beiden sehen, nicht jedoch die seines eigenen. Die verbleibenden zwei Hüte bleiben im Sack, und keiner der Gefangenen kann deren Farbe sehen. Um freigelassen zu werden muss ein Gefangener der erste sein der die Farbe seines Hutes richtig benennt, und diese Aussage auch schlüssig begründen kann.

Eine halbe Stunde lang passiert nichts. Aber dann sagt einer der Gefangenen, der selbst zwei weisse Hüte sieht, die richtige Farbe seines eigenen Hutes. Was ist die Farbe seines Hutes, und wie kann er das begründen ? Sie können annehmen, dass alle drei Gefangenen gleich intelligent sind.

**Aufgabe 11** Betrachte die folgende Definition einer “silly-circular function”: Eine Funktion $f\colon A \to B$ heißt silly-circular, wenn

$$\forall a, b \in A. f(a) = b.$$

Zeige, dass eine Funktion genau dann silly-circular ist, wenn $A \subseteq B$, $|A| \leqslant 1$ und $f(x) = x$ für $x \in A$.

**Aufgabe 12** Sei $\Sigma$ ein nichtleeres Alphabet. Betrachte die induktive (rekursive) Definition der Länge $|w|$ eines Wortes $w \in \Sigma^*$, nämlich $| - |\colon \Sigma^* \to \mathbb{N}_0$, gegeben als $|\varepsilon| := 0$ und $|ua| = |u| + 1$ für $a \in \Sigma, u \in \Sigma^*$.
Zeige, dass $| - |$ genau dann bijektiv ist, wenn $|\Sigma| = 1$.

**Aufgabe 13** Gib eine exakte induktive Definition einer Funktion $\mathrm{NQ}\colon \Phi \to \mathbb{N}_0$ wo $\Phi$ die Menge aller prädikatenlogischer Formeln ist, und wo für eine Formel $\varphi \in \Phi$, $\mathrm{NQ}(\varphi)$ gleich der Anzahl der in $\varphi$ auftretenden Quantoren ist.
Beachte hier die induktive Definition einer prädikatenlogischen Formel:

- Ist $P$ ein $n$-stelliges Prädikat und $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine Prädikatenformel.
- Ist $\varphi$ eine Prädikatenformel, dann ist $\neg\varphi$ ebenfalls eine Prädikatenformel.

- Sind $\varphi_1$ und $\varphi_2$ Prädikatenformel, dann sind $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$, $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ ebenfalls Prädikatenformeln.
- Ist $\varphi$ eine Prädikatenformel, dann sind $\forall x.\varphi$ und $\exists x.\varphi$ Prädikatenformeln.

**Aufgabe 14** Was ist bei den Versuchen einen Begriff zu definieren jeweils nicht gut? Warum? Wie können Sie die Definition verbessern?

(a) Definitionsversuch von "Rechteck": Ein Viereck nennt man Rechteck, wenn gegenüberliegende Seiten parallel zueinander und gleichlang sind und die Diagonalen des Vierecks gleich lang sind und sich gegenseitig halbieren.

(b) Definitionsversuch von "Parallelogram": Ein Viereck nennt man Parallelogram, wenn eine Diagonale die andere halbiert.

(c) Definitionsversuch von "Kubisches Dreieck": Ein Dreieck nennt man ein Kubisches Dreieck, wenn es gleichseitig ist und einen rechten Winkel besitzt.

# PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 3 (2018-03-23)

**Aufgabe 15** Sei $M$ eine Menge aussagenlogischer Variablen $M \coloneqq \{a, b, c\}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

$$(\exists x \in M \; \neg x) \Rightarrow (a \Rightarrow \neg(b \wedge c)).$$

**Aufgabe 16** Zeigen oder wiederlegen Sie:

a) Für alle natürlichen Zahlen $n$ ist $n^2 + n + 41$ eine Primzahl.

b) $n^9 - 9$ ist ein Vielfaches von 9 für alle $n \in \mathbb{N}$.
(In der VO haben wir ja bereits gesehen, dass $n^7 - n$ für alle $n$ ein Vielfaches von 7 ist.)

**Aufgabe 17** Die Mittelwertungleichungen besagen, dass für (positive) Zahlen $x_i$ das harmonische Mittel kleinergleich dem geometrischen Mittel ist, welches wiederum kleinergleich dem arithmetischen ist, also:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Führen Sie einen direkten Beweis, der zeigt, dass

$$\forall a, b, c > 0. \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Hinweis: Betrachten sie das HM und AM von $a + b$, $b + c$ und $c + a$.

**Aufgabe 18** Sie sitzen mit Begleitung und zwölf weiteren Personen um einen runden Tisch. Sieben von Ihnen haben einen roten Hut auf, die anderen sieben Personen einen grünen Hut.
Ihnen fällt auf, dass Sie zwischen zwei Personen mit grünen Hüten sitzen. Ihre Begleitung will nun wissen, ob es, egal wie die Hüte verteilt sind, immer jemanden gibt, der direkt zwischen zwei grünen Hüten sitzt. Was ist Ihre Antwort (mit Beweis)?

**Aufgabe 19** Lösen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$: $|x + 2| + |x + 5| = 7$ durch Fallunterscheidung. Wie schaut der Graph der Funktion der linken Seite aus?

**Aufgabe 20** Argumentieren Sie, dass

a) es einen Punkt gibt, der von den Punkten $A = (1, 2, 3)$, $B = (5, 6, 7)$ und $C = (10, 2, 0)$ gleich weit entfernt ist. (Sie brauchen den Punkt selbst nicht zu berechnen).

b) dass es ein $x$ gibt, wo $f(x) \coloneqq x^5 + 3x^2 - 7x$ und $g(x) \coloneqq \cos(x)$ den selben Wert annehmen.

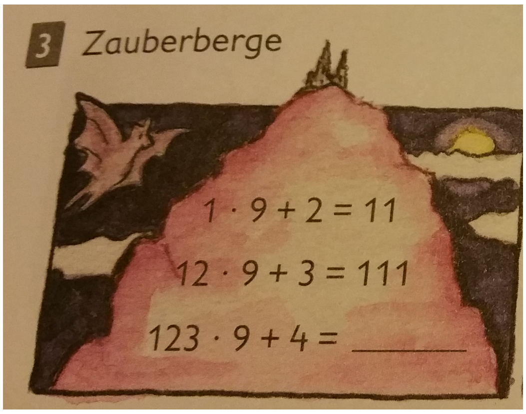
c) dass es ein $x$ gibt, mit $|x - 6| + (x - 3)^2 - \{x\} = 3$. Der Ausdruck $\{x\}$ bezeichnet den Wert von $x - \lfloor x \rfloor$, wobei $\lfloor x \rfloor$ die Abrundefunktion ist. Für positive $x$ ist $\{x\}$ also der Teil nach dem Komma.

**Aufgabe 21** Zeigen Sie mit Hilfe eines Umkehrschlusses, dass für ein beliebiges $a \in \mathbb{N}$ gilt:
Ist $a^2$ ungerade, so ist auch $a$ ungerade.

# PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 4 (2018-04-13)

**Aufgabe 22** Beweisen Sie mittels Induktion, dass $3^n > n \cdot 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

**Aufgabe 23** In einer vierten Klasse Volksschule mussten die Schüler letzte Woche den rechts abgebildeten Zauberberg „fortsetzen“. Natürlich fragten sie sich, ob denn so ein Berg überhaupt beliebig hoch werden kann. Helfen Sie den Kindern, indem Sie diesen Zusammenhang formalisieren und mittels Induktion beweisen. Tipp: Die linke Seite lässt sich als




$$S(n) := n + 9 \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot 10^{n-1-i}$$

formalisieren. Beachten Sie weiters, dass $10^k - 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ durch 9 ohne Rest teilbar ist.

**Aufgabe 24** Beweisen Sie mittels Schubfachschluß: Auf einer Party mit sechs Gästen gibt es stets entweder drei Gäste, welche sich entweder gegenseitig kennen, oder drei Gäste, welche sich gegenseitig nicht kennen. (Die Relation “sich kennen” wollen wir dabei als symmetrisch aber nicht als reflexiv ansehen.)

# PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 5 (2018-04-20)

**Aufgabe 25** Zeigen Sie mittels Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: $b \big| \big((a+b)^n - a^n\big)$.

**Aufgabe 26** Seien $p$ und $q$ zwei verschiedene Primzahlen und $n$ eine natürliche Zahl. Zeige, dass

$$p \mid n \wedge q \mid n \Rightarrow pq \mid n.$$

Zeige, dass die Voraussetzung, dass $p, q$ prim sind, nicht weggelassen werden kann, d.h., dass es natürliche Zahlen $i, j, n$ mit $i \mid n \wedge j \mid n \wedge ij \nmid n$ gibt.

**Aufgabe 27** Zeige, dass eine natürliche Zahl $a = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot 10^i$ genau dann durch 6 teilbar ist, wenn $2|a_0$ und $3| \sum_{i=0}^{m} a_i$. Sie dürfen dabei nur den Teil von Lemma 32 der Vorlesung benützen, der in der Vorlesung bewiesen wurde.

**Aufgabe 28** Beweisen Sie dass es in jeder fünfelementigen Menge ganzer Zahlen eine dreielementige Teilmenge gibt mit der Eigenschaft, dass die Summe ihrer Elemente durch 3 teilbar ist.

**Aufgabe 29** Zeigen Sie (mittels Induktion nach i): $a \equiv_m b \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}.\, a^i \equiv_m b^i$.

**Aufgabe 30** Beweisen Sie ohne Hilfe eines Taschenrechners, dass $7| \, (333^{444} + 444^{333})$.

**Aufgabe 31** Seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ mit $d \neq 1$.

(a) Ist es möglich eine Bedingung für $d$ zu finden, sodass für alle $a, b, c$ gilt, dass $ab \equiv_d ac \Rightarrow b \equiv_d c$?

(b) Unter welchen Bedingungen für $d$ und $a$ ist es wahr, dass für alle $b$ und $c$ gilt, dass $ab \equiv_d ac \Rightarrow b \equiv_d c$?

Begründen Sie Ihre Antwort.

# PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 6 (2018-04-27)

**Aufgabe 32** Bestimmen Sie die größte ganze Zahl $d$ für die gilt: $d \mid 8547 \wedge d \mid 6105 \wedge d \mid 1628$.
(Für einfache Rechnungen dürfen Sie gerne auf einen Taschenrechner zurückgreifen.)

**Aufgabe 33** Finden Sie je ein Lösungspaar $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ für jede der folgenden Gleichungen sofern ein solches existiert:
 a) $69x + 92y = -23$,
 b) $102x + 63y = 2$.
Weiters, bestimmen Sie *unendlich viele* Lösungspaare von
 c) $28x + 20y = 4$.

**Aufgabe 34** Bestimmen Sie das multiplikative Inverse oder zeigen Sie, dass es nicht existiert.
 a) von 37 in $\mathbb{Z}_{2018}$.
 b) von 371 in $\mathbb{Z}_{2014}$.

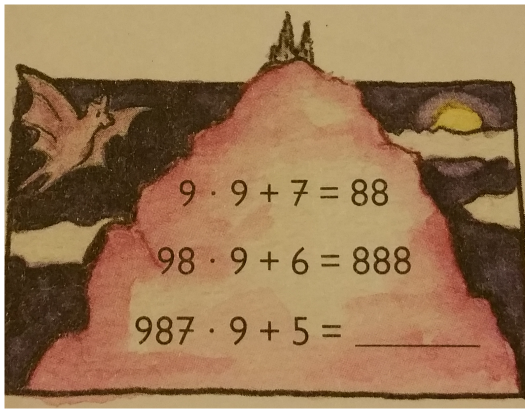
**Aufgabe 35** Betrachten Sie die Linearkombinationen von $a$ und $b$ mit ganzzahligen Koeffizienten $x$ und $y$: $d(x, y) := ax + by$. Lemma 59 aus der Vorlesung besagt, dass der kleinste positive Wert, den $d$ annehmen kann, der $\gcd(a, b)$ ist.
Zeigen Sie (ohne Lemmata der VO ab, inkl., Lemma 59), dass $d$ stehts ein Vielfaches von $\gcd(a, b)$ ist.

**Aufgabe 36** Zeigen Sie weiters, dass der kleinste positive Wert von $d(x, y)$ stehts sowohl $a$ als auch $b$ teilt. (Möglicher Hinweis: Betrachte $a$ bei der Ganzzahldivision durch $d$. Was kann man über den Rest dieser Division aussagen?)

**Aufgabe 37** Gegeben ist ein System von Kongruenzgleichungen mit Modulen $m_1, m_2, \ldots, m_k$:
$b \equiv_{m_i} a_i$ für $i = \{1, \ldots, k\}$ und $\gcd(m_i, m_j) = 1$ für $i \neq j$.
In der Vorlesung haben wir den chinesischen Restsatz gezeigt und wissen daher, dass jedes solche System eine Lösung hat. Weiters haben wir behauptet, dass diese Lösung eindeutig im Bereich $\{1, \ldots, m := \Pi_1^k m_i\}$ bzw. im Bereich $\{0, \ldots, m - 1\}$ ist. Zeigen Sie diese Behauptung.

**Aufgabe 38** Wir wollen die Summe und das Produkt von zwei "großen" Zahlen berechnen. Gemäß der Methode aus der Vorlesung machen wir die Berechnung in einem Restklassensystem mit den Modulen $(2, 3, 5, 7, 11)$.
 a) Addieren Sie die Zahlen, die durch $(1, 2, 2, 5, 3)$ und $(1, 1, 1, 2, 8)$ repräsentiert werden, und rechnen Sie die Summe in eine "normale" Zahl zurück.
 b) Multiplizieren Sie die Zahlen, welche durch $(0, 1, 4, 6, 1)$ und $(1, 0, 4, 4, 6)$ repräsentiert sind. Wandeln Sie das Produkt wieder in eine Zahl um.

# PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 7 (2018-05-04)




**Aufgabe 39** Rückkehr zum Zauberberg: Helfen Sie wieder den Volksschülern, in dem Sie den im rechts abgebildeten Zauberberg angegebenen Zusammenhang formalisieren und beweisen.

**Aufgabe 40** Benützen Sie eine starke Induktion, um die folgende Behauptung zu beweisen: Jede natürliche Zahl kann so als Summe von verschiedenen Fibonacci-Zahlen geschrieben werden, dass keine zwei aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen in dieser Summe auftreten. (Dabei wollen wir $F_3 = 2$ sowohl als auf $F_1 = 1$ als auch auf $F_2 = 1$ folgend betrachten.) Beispiel: Wir können 100 als $3+8+89$ (also als $F_4 + F_6 + F_{11}$) schreiben, wogegen $1 + 2 + 8 + 89$ (also $F_2 + F_3 + F_6 + F_{11}$) nicht passend wäre.

**Aufgabe 41** Für alle Paare $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ definieren wir $a_{m,n}$ wie folgt:

$$a_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{falls } m = n = 0, \\ a_{m-1,n} + 1 & \text{falls } n = 0 \text{ und } m > 0, \\ a_{m,n-1} + n & \text{falls } n > 0. \end{cases}$$

Stellen Sie eine Vermutung für einen geschlossenen Term für $a_{m,n}$ in Abhängigkeit von $m$ und $n$ auf und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels wohlfundierter Induktion.

# PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 8 (2018-05-18)

**Aufgabe 42** Die Menge $T$ aller additiven Terme über $\{0, 1\}$ ist wie folgt induktiv definiert:

- $0 \in T, 1 \in T$.
- Ist $t_1, t_2 \in T$, so ist auch $(t_1 + t_2) \in T$.

Weiters, sind Funktionen depth: $T \to \mathbb{N}_0$ und length: $T \to \mathbb{N}_0$, induktiv definiert als:

$$\text{depth}(0) = \text{depth}(1) = 0; \quad \text{depth}((t_1 + t_2)) = \max(\text{depth}(t_1), \text{depth}(t_2)) + 1$$

und

$$\text{length}(0) = \text{length}(1) = 1; \quad \text{length}((t_1 + t_2)) = \text{length}(t_1) + \text{length}(t_2) + 1.$$

Beweisen Sie, mittels Induktion, dass $\text{depth}(t) \leqslant \text{length}(t)$ für jeden Term $t \in T$ gilt.

**Aufgabe 43** Wir haben eine Münze für die bei einem Wurf die Wahrscheinlichkeiten P(Kopf) = p und P(Zahl) = 1-p sind.

(a) Wir werfen die Münze 10 mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 7 mal Kopf und 3 mal Zahl fällt?

(b) Wir werfen die Münze $n$ mal. Wie groß die Wahrscheinlichkeit, dass $k$ mal Kopf und $n - k$ mal Zahl fällt?

**Aufgabe 44** Wieviele verschiedene Lösungen hat die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 100$, wobei $x_1 \in \mathbb{N}_0$, $x_2 \in \mathbb{N}$ und $x_3 \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$?

**Aufgabe 45** Sei $\pi$ eine Permutation (eine Bijektion) der Menge $\{1, \ldots, n\}$ mit einer (disjunkten) Zykeldarstellung $\pi = c_1 \ldots c_k$. Zeigen Sie, dass $\pi^{-1} = c_1^{-1} \ldots c_k^{-1}$ wobei für einen Zykel $c$ der Zykel $c^{-1}$ durch Umkehrung der Reihenfolge seiner Elemente entsteht. D.h., für $c = (a_1 \ldots a_m)$, ist $c^{-1} = (a_m \ldots a_1)$.

**Aufgabe 46** Wie viele Zahlen in der Menge aller natürlichen Zahlen kleiner oder gleich 1000 sind nicht durch 3, 5, oder 7 teilbar ?

**Aufgabe 47** Wie viele surjektive Funktionen einer $n$-elementigen Menge auf eine $k$-elementige Menge gibt es ? $(n, k \in \mathbb{N})$.

Hinweis: Wenden Sie das Siebprinzip an.

**Aufgabe 48** (a) Aus einer Gruppe von 15 Männern und 5 Frauen werden 6 Personen ausgewählt eine Kommission zu bilden, wobei mindestens 3 Frauen dabei sind. Auf wieviele verschiedene Arten kann die Kommission zusammengesetzt sein?

(b) 10 Personen aus einer Gruppe von 20 Männern und 15 Frauen werden für eine Beförderung ausgewählt. Dabei sei angenommen, dass alle Personen gleich qualifiziert sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle ausgewählten Personen männlich sind?

# PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 9 (2018-05-25)

**Aufgabe 49** Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ ist definiert als $f(n) := 4n^2 - 14n + 15$. Bestimmen Sie möglichst einfache Funktionen $g, h, i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, sodass $f \in O(g)$, $f \in \Omega(h)$, $f \in \Theta(i)$ und die Klassen $O(g), \Omega(h), \Theta(i)$ kleinstmöglich sind. Beweisen Sie Ihre Behauptungen auf Basis der Klassendefinitionen!

**Aufgabe 50** Wir haben eine Punktmenge $S$ in der Ebene. Wir wollen ein Dreieck $\Delta_{p,q,r}$ mit $p, q, r \in S$ als *leer* bezeichnen, wenn es keinen Punkt aus S gibt, der im Inneren des Dreiecks liegt.
Uns interessiert die Anzahl der leeren Dreiecke in einer gegebenen Punktmenge $S$ mit $n$ Punkten.
Dazu wollen wir alle Dreiecke untersuchen: Für jedes Dreieck $\Delta$ überprüfen wir für jeden Punkt aus $S$, ob er in $\Delta$ ist. Wenn kein Punkt in $\Delta$ liegt, zählen wir das Dreieck.
Wie lange (in $O$-Notation) braucht dieser Algorithmus?
(Die Punkte seien in *allgemeiner Lage*, d.h., keine drei Punkte liegen auf einer gemeinsamen Geraden.
Weiters können wir für gegebene $p, q, r, x$ in konstanter Zeit bestimmen, ob $x$ in $\Delta_{p,q,r}$ liegt.)

**Aufgabe 51** In der Vorlesung wurde behauptet, dass für alle positiven a gilt, dass $a^n \in o(n!)$.
Zeigen Sie (ohne Verwendung der Behauptung aus der VO) dass $\forall a \in \mathbb{R}^+ : a^n \in O(n!)$.

**Aufgabe 52** Sei $f := \ln(n^2)$ und $g := \ln(n + 5)$. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g}$.
Was bedeutet Ihr Ergebnis für das asymptotische Wachstum dieser Funktionen?

**Aufgabe 53** Betrachten Sie alle Paare $(A, B)$ der folgenden Komplexitätsklassen und bestimmen Sie für jedes Paar die Klasse $A \cap B$, also insbesondere auch ob $A \subset B$ bzw. $B \subset A$.

- $\Theta(n \log n)$
- $O(n^2)$
- $\Omega((7n)^{\log_2 4})$
- $o(n \log(n^2))$
- $O(n^{\log_n n})$

(Sie müssen die einzelnen Ergebnisse nicht alle vollständig formal zeigen, sollten jedoch auf Nachfrage Ihr Resultat durchaus argumentieren können.)

**Aufgabe 54** Zeigen Sie: $17n^2 \in o(n^2 \log n)$.

**Aufgabe 55** a) Sortieren Sie nach Inklusion, von der kleinsten zur größten Klasse:

- $O(n^{2.5})$
- $O(2^n)$
- $O(\sqrt{n} + 5)$
- $O(n \log n^2)$
- $\Theta(23)$
- $O(3^n)$
- $O(2^{n+1})$
- $O(2^n + 1)$
- $O(n^2 \log n)$
- $O(n \ln n)$
- $O(\sqrt{n} \cdot n^2)$
- $O(n \log n)$

Gibt es Äquivalenzen? Wenn ja, welche?
(Sie müssen die einzelnen Ergebnisse nicht alle vollständig formal zeigen, sollten jedoch auf Nachfrage Ihr Resultat durchaus argumentieren können.)

b) Zeigen Sie: $O(2^n) \subsetneq O(3^n)$.

# PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 10 (2018-06-08)

Wir definieren $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$f(n) := n \log^2 n,$$

$$g(n) := \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 1, \\ 2g\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n \log n & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

**Aufgabe 56** Beweisen Sie, dass $f$ glatt ist und dass $g$ schlussendlich nicht abnehmend ist, wobei $f, g$ wie oben definiert sind.

**Aufgabe 57** Beweisen Sie, dass $g \in O(f)$, wobei $f, g$ wie oben definiert sind. (Falls dies für Ihre Lösung hilfreich ist, dürfen Sie die Behauptungen der vorigen Aufgabe als erwiesen ansehen, auch wenn Sie diese Aufgabe selbst nicht gelöst haben.)

**Aufgabe 58** Lösen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ die folgende Rekurrenzgleichung durch Aufstellen und Lösen der entsprechenden charakteristischen Gleichung:

$$t_n := \begin{cases} 4 & \text{falls } n = 0, \\ 3 & \text{falls } n = 1, \\ 3t_{n-1} + 10t_{n-2} + 7 \cdot 5^n & \text{falls } n \geqslant 2. \end{cases}$$

# PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 11 (2018-06-15)

**Aufgabe 59** Zeigen Sie (ohne Verwendung der Behauptung aus der VO) dass $a^n \in o(n!)$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$.

**Aufgabe 60** Geben Sie für die beiden folgenden Rekurrenzgleichungen an, ob diese mit dem Master-Theorem gelöst werden können. Bitte begründen Sie Ihre Antworten. Falls dies der Fall ist, geben Sie auch jeweils die resultierende Komplexitätsklasse an.

$$T(n) = 16 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + 72n^{\sqrt{2}} \qquad T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + n \log n$$

**Aufgabe 61** Geben Sie für die beiden folgenden Rekurrenzgleichungen an, ob diese mit dem Master-Theorem gelöst werden können. Bitte begründen Sie Ihre Antworten. Falls dies der Fall ist, geben Sie auch jeweils die resultierende Komplexitätsklasse an.

$$T(n) = 27 \cdot T\left(\frac{n}{9}\right) + n^2 + n^{\sqrt{2}} \qquad T(n) = 16 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2 + 2$$

**Aufgabe 62** Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben und fix. Wie schauen die Graphen mit genau $n$ Knoten aus, die jeweils die kleinste Kantenmenge haben und weiters

a) einen Hamiltonischen Pfad,
b) einen Hamiltonischen Kreis (Zyklus)

besitzen? Wie viele Kanten hat Ihr Graph jeweils?
Beschreiben Sie die Graphen jeweils allgemein und zeichnen Sie dann die Graphen für den konkreten Fall mit $n = 5$ explizit.

**Aufgabe 63** Beschreiben Sie für jede der folgenden Fragestellungen ein graphentheoretisches Modell und beantworten Sie die Frage.

(a) Ist die Anzahl aller Menschen, welche eine ungerade Anzahl an Geschwistern haben, gerade?

(b) Ist es möglich dass jeder von 102 Studenten einen von 35 Computern zugewiesen bekommt, sodass jeder Computer genau einem oder genau 3 Studenten zugewiesen ist?

**Aufgabe 64** Man kann die Zahlen 1,2,3,4,5 in einem Kreis so anordnen, dass jede Zahl jede andere Zahl genau einmal als Nachbarn hat. Zum Beispiel in der folgenden Weise: 1,2,3,4,5,3,1,4,2,5. Können Sie die Zahlen 1,2,3,4,5,6,7 in analoger Weise auf einem Kreis anordnen? Nutzen Sie den Satz über Eulersche Wege um zu zeigen, dass dieses Problem für $n$ Zahlen genau dann lösbar ist, wenn $n$ ungerade ist.

**Aufgabe 65** Ein Postbote muss ein zusammenhängendes Netz von Strassen abfahren und Post bei Häusern auf beiden Strassenseiten abgeben. Er möchte seinen Weg so wählen, dass er jede Strasse genau zweimal durchfährt (einmal in jeder Richtung). Zeige, dass es stets möglich ist einen solchen Weg zu finden.
Hinweis: Sie können benützen, dass es in einem gerichteten zusammenhängenden Graph genau dann einen Eulerschen Weg gibt, wenn für jeden Knoten die Anzahl der hineinführenden Kanten gleich der Anzahl der hinausführenden Kanten ist (für die an Theorie interessierten: Sie können versuchen, dies zu beweisen).

# PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 12 (2018-06-22)

**Aufgabe 66** Sei $a_0 = 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = 13$ und $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3}$ ab $n \geqslant 3$. Lösen Sie diese Rekurrenzgleichung durch Aufstellen der charakteristischen Gleichungen und bestimmen Sie eine explizite Formel für $a_n$.

**Aufgabe 67** Wir betrachten die vollständigen bipartiten Graphen $K_{n,m}$ für verschiedene $n$ und ein beliebiges aber fixes $m$. Die Anzahl der Kanten dieses Graphen kann rekursiv geschrieben werden als $E(n,m) = E(n-1,m) + m$ für $n \geqslant 1$ mit $E(0,m) = 0$, wobei natürlich erst ab $n \geqslant 1$ der Graph $K_{n,m}$ nicht-trivial ist.
Finden Sie (durch Kaskadieren, Aufstellen der charakteristischen Gleichungen, Iterieren, Raten, ...) eine explizite Formel für $E(n,m)$ und beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass Ihr Ergebnis mit der rekursiven Definition von $E(n,m)$ übereinstimmt.

**Der Duale Graph:** Betrachten Sie die Zeichnung $E$ des Graphen $G = (V,E)$ in Abbildung 1a. Es sind $V = \{a,b,c,d,e\}$ und $E = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{c,e\},\{d,e\}\}$. Weiters hat die Einbettung vier Facetten: die Dreiecke $f_1 = \Delta(a,b,c)$, $f_2 = \Delta(b,d,c)$, $f_3 = \Delta(c,d,e)$ sowie die unbegrenzte äussere Facette $f_4$.


(a) (b)

Abbildung 1: (a) Graph $G$ mit Einbettung $E$. (b) Dual Graph $G'$ in blau.

Wir definieren den *dualen Graphen* $G' = (V', E')$ von $G$ (genauer gesagt von $E$) wie folgt: $G'$ hat einen Knoten für jede Facette: $V' = \{f_1', f_2', f_3', f_4'\}$. Weiters existiert für jede Kante $e$ aus $E$ eine Kante in $G'$: Liegt $e$ an den Facetten $f_i$ und $f_j$, so verbindet die entsprechende Kante im Dualgraph $f_i'$ und $f_j'$. Beachten Sie, dass der Dualgraph nicht mehr notwendigerweise schlicht ist. Vielmehr kann er Schlingen und auch "parallele" Kanten beinhalten.

**Aufgabe 68** Finden Sie einen geeigneten Graphen $G$ und zwei Zeichnungen von $G$, die wir $E_1$ und $E_2$ nennen wollen, derart, dass die duale Graphen von $E_1$ und $E_2$ sich unterscheiden.
Sie haben somit gezeigt, dass der duale Graph eines Graphen G=(V,E) nicht unabhängig von der Einbettung von G ist.

**Aufgabe 69** Widerlegen Sie: Der duale Graph eines planaren Graphen $G = (V,E)$ ist genau dann schlicht, wenn alle Knoten aus $V$ vom Grad mindestens 3 sind.

**Aufgabe 70** Zeigen oder widerlegen Sie: Der vollständige bipartite Graph $K_{n,m}$ hat genau dann einen Hamiltonschen Kreis wenn $n = m \geqslant 2$.

**Aufgabe 71** Wir haben eine Zeichnung eines planaren Graphen $G$ mit $v$ Knoten, $e$ Kanten und $f$ Facetten. An jeder Facette liegen genau $k$ Kanten. Berechnen Sie die Anzahl der Kanten von $G$ als Funktion von $v$ und $k$.

**Aufgabe 72** Wir bezeichnen einen geradlinig gezeichneten Graphen als *maximal planar*, wenn man keine weitere Kante in den Graphen einfügen kann, ohne dass dadurch Kreuzungen entstehen würden. Zeigen Sie: Alle begrenzten Facetten eines maximal planaren Graph sind Dreiecke.

# PS Diskrete Mathematik: Aufgabenblatt 13 (2018-06-29)

**Aufgabe 73** Wir betrachten die vollständig-bipartiten Graphen $K_{n,m}$ für $m, n \in \mathbb{N}$. Finden Sie eine Formel für die Anzahl der Kanten $E(n, m)$ von $K_{n,m}$ in Abhängigkeit von $m$ und $n$ und beweisen Sie diese Formel mittels wohlfundierter Induktion. (Sie dürfen dabei das Wissen aus Aufgabe 67 benutzen.)

**Aufgabe 74** Seien $f, g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Beweisen Sie: Falls $g \in \Theta(f)$ und $h \in \Theta(f)$ dann auch $g \in \Theta(h)$.

**Aufgabe 75** Seien $k \in \mathbb{N}$ beliebig aber fix sowie $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ beliebig aber fix mit $a_k > 0$. Sei $p \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion mit $p(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun betrachten wir eine beliebige aber fixe Konstante $c \in \mathbb{N}$ sowie die Polynomfunktion $q \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $q(n) := p(c \cdot n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie (ohne Benutzung von Grenzwerten), dass $q \in \Theta(p)$.

**Aufgabe 76** Unter einer Knotenfärbung eines Graphen versteht man eine Zuweisung von Farben an die Knoten des Graphen sodass keine zwei Knoten die gleiche Farbe haben, falls sie durch eine Kante verbunden sind. Analog versteht man unter einer Kantenfärbung eine Zuweisung von Farben an die Kanten, sodass keine zwei Kanten die gleiche Farbe haben, falls sie im selben Knoten inzident sind. Eine Flächenfärbung bei der planaren Einbettung eines planaren Graphen ist die Zuweisung von Farben an die Flächen, sodass keine zwei Flächen die gleiche Farbe haben, falls sie (bzw. ihr Rand) sich eine Kante teilen. Betrachten wir nun eine planare Einbettung eines planaren Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ und nehmen wir an, dass wir einen Algorithmus haben, welcher eine Knotenfärbung in höchstens $p(v)$ Zeit ermittelt, wobei $v := |V|$ und $p$ ein (unbekanntes) streng monoton wachsendes Polynom ist. (Die sich aus der Anwendung des Algorithmus ergebende Zahl an Farben muss natürlich nicht notwendigerweise gleich $\chi(\mathcal{G})$ sein, aber man sagt uns, dass es sich bei diesem Algorithmus um eine gute Heuristik handelt; keine weiteren Details des Algorithmus sind bekannt.) Finden Sie passende graphentheoretische Modellierungen, sodass je eine Anwendung unseres Algorithmus zum Knotenfärben die gewünschte Kanten- und Flächenfärbung in jeweils $O(p)$ Zeit erzielt.