29. Lineare Hülle

Sei V ein Vektorraum über K und seien $x_1, x_2, \dots, x_r \in V$.
Die Menge aller Linearkombinationen von $x_1, x_2, \dots, x_r$

$$LIN\{x_1, x_2, \dots, x_r\} = \{ x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in K\}$$

heißt die lineare Hülle von $x_1, x_2, \dots, x_r$.

Lineare Unabhängigkeit

Sei V ein Vektorraum über K und seien $x_1, x_2, \dots, x_r \in V$.
$x_1, x_2, \dots, x_r$ heißen linear unabhängig wenn gilt:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$$

(In VO mit „$\Leftrightarrow$" statt „$\Rightarrow$", äquivalent - da für beliebige $x \in V$ gilt $0 \cdot x = 0$ muss „$\Leftarrow$" nicht gefordert und überprüft werden.)

Basis:

Sei V ein Vektorraum. Das n-Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ von Vektoren aus V heißt Basis von V, wenn gilt:

(1) $x_1, x_2, \dots, x_n$ sind linear unabhängig
(2) $LIN\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = V$

29. Fortsetzung

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ c_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(a, b, c_1) Basis des $\mathbb{R}^3$?

(1) z.z. linear unabhängig (l.u.)   z.z. $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Bestimme alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c_1 = 0$ mit dem Gauß-Alg.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & -8 & 0 \\ 5 & 3 & -9 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot\frac{-1}{4} \\ \\ \cdot\frac{-1}{2} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 5 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -5\mathrm{I} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\mathrm{II} \\ \\ -\frac{1}{2}\mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ (hier erkennbar: unendlich viele Lösungen) $$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

also z.B. $3a - 2b + c = 0 \Rightarrow$ nicht l.u. $\Rightarrow$ keine Basis

(a, b, c_2) Basis des $\mathbb{R}^3$

(1) z.z. l.u.   rechte Seite bleibt unverändert $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ weggelassen

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \\ 5 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \cdot\frac{-1}{4} \\ \\ \cdot\frac{-1}{2} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 5 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ -5\mathrm{I} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -19 \end{pmatrix}\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\mathrm{II} \\ \\ -\frac{1}{2}\mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \cdot\frac{-1}{20} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} -\mathrm{III} \\ -2\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ einzige Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ l.u.   ($\Leftrightarrow \det A \neq 0$)

Invarianz der Basislänge: Besitzt ein Vektorraum V eine Basis, dann haben alle Basen von V gleich viele Elemente.

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3 \Rightarrow 3$ l.u. Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bilden eine Basis

$\Rightarrow (a, b, c_2)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$

29. Fortsetzung

Alternative: zeige (2): z.z. $LIN\{a, b, c_2\} = \mathbb{R}^3$

Da $\mathbb{R}^3$ ein Vektorraum ist, gilt $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}: \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c_2 \in \mathbb{R}^3$,
also $LIN\{a, b, c_2\} \subseteq \mathbb{R}^3$. (abgeschlossen bzgl. Skalarmult. (V6) und Vektoraddition (V1))

z.z. $\mathbb{R}^3 \subseteq LIN\{a, b, c_2\}$

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ beliebig. z.z. $x \in LIN\{a, b, c_2\}$

d.h. z.z. $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}: \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c_2 = x$

Finde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit Gauß-Algorithmus

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & -8 & x_1 \\ 5 & 3 & -9 & x_2 \\ -2 & -1 & -4 & x_3 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Umformungen wie in (1) mit neuer rechter Seite} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_3 \end{array}\right)$$

insgesamt: (a, b, c_2) ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

30. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : b - 2c + d = 0 \right\}$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : a = d,\ b = 2c \right\}$

Basis von U: Löse GLS mit vier Unbekannten $0a + b - 2c + d = 0$

$$(0 \ \ 1 \ \ -2 \ \ 1 \mid 0) \rightsquigarrow (1 \ \ 0 \ \ -2 \ \ 1 \mid 0)$$

Spaltentausch

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

da Spalten 1 und 2 vertauscht wurden

$$\Rightarrow U = LIN\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Da gilt $\dim(\mathbb{L}) = n - rg(A) = 4 - 1 = 3$ bilden die drei Vektoren eine Basis von U.

Basis von $U = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

30. Alternative: Prüfe noch „händisch" ob l.u.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -2\text{II}, +3\text{III} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ also l.u.}$$

Basis von W: $a = d \Rightarrow a - d = 0$

$b = 2c \Rightarrow b - 2c = 0 \Rightarrow$ GLS

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\dim(\mathbb{L}) = n - rg(A) = 4 - 2 = 2$

$$\Rightarrow \text{Basis von } W = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Basis von $U \cap W$: $0a + b - 2c + d = 0$

$a + 0b + 0c - d = 0$

$0a + b - 2c + 0d = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -\text{II} \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} +\text{III} \\ \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Spaltentausch

da 3. und 4. Spalte vertauscht

$$\Rightarrow \text{Basis von } U \cap W = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$\boxed{31.}$

$$U = \mathrm{LIN}\left\{ \underset{a}{\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}, \underset{b}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{c}{\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}}, \underset{d}{\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{e}{\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$ Basis von U?

Basisauswahlsatz: weglassen geeigneter Vektor bis Rest linear unabhängig

$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ weglassen: $\quad 0 \cdot a + \underline{1} \cdot b + 0 \cdot c + 0 \cdot d + 0 e = 0$

bzw. $b = 0 \cdot a + 0c + 0d + 0e$

verbleibend: $\quad U = \mathrm{LIN}\{a, c, d, e\}$

Prüfe ob l.u.:

„sehen": $\quad 2a + c = 0 \quad \Rightarrow$ entweder a oder c weglassen

falls das nicht erkannt wird: Prüfe mit Gauß (suche $\lambda_a, \lambda_c, \lambda_d, \lambda_e \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_a a + \lambda_c c + \lambda_d d + \lambda_e e = 0$):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & -7 & 9 & 0 \\ -3 & 6 & 9 & -6 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 1 & -5 & \underbrace{0}_{\text{nicht mehr ausgeschrieben}} \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 9 & -6 \\ -2 & 4 & -7 & 9 \\ 4 & -8 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +3I \\ +2I \\ -4I \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -9IV \\ +7IV \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SPALTEN

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \lambda_c \\ \lambda_d \\ \lambda_e \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} +2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$ Rang 2

$\Rightarrow$ (i) für $\alpha = 1, \beta = 0$: $\quad 2a + c = 0 \quad \Rightarrow a, c$ linear abhängig

(ii) für $\alpha = 0, \beta = 1$: $\quad a + d + e = 0 \Rightarrow a, d, e$ lin. abhängig

(iii) für $\alpha = 1, \beta = -2$: $\quad c - 2d - 2e = 0 \Rightarrow c, d, e$ lin. abhängig

31 Fortsetzung

Da der Rang 2 ist, brauchen wir nur 2 Vektoren, um U aufzuspannen.
Da (i) $2a+c=0$, also $c=-2a$, kann c weggelassen werden.
Aufgrund von (ii) $a+d+e=0$, kann weiters ein beliebiger der drei Vektoren a, d, e weggelassen werden, also: eine mögliche Basis ist (d,e) oder (e,d). (oder auch (a,d), (a,e) / (d,a), (e,a)).

Alternative: Da (i) $2a+c=0$, kann a weggelassen werden.
(ii) ist nicht mehr verwendbar (weil a vorkommt), aber wegen (iii) $c-2d-2e=0$ kann weiters ein beliebiger der drei Vektoren c, d, e weggelassen werden $\Rightarrow$ Basen (c,d) / (d,c) oder (c,e) / (e,c) oder (d,e) / (e,d).

Das Weglassen von d <u>und</u> e (mit dem Ergebnis (a,c) bzw. (c,a)) lässt sich nicht begründen und ist <u>falsch</u>.

„Einfacher" Weg: Weglassen <u>eines</u> linear abhängigen Vektors, dann neue Betrachtung mit Gauß.

Alle möglichen Basen von U bei Auswahl aus a, b, c, d, e:
(a,d), (a,e), (c,d), (c,e), (d,e),
(d,a), (e,a), (d,c), (e,c), (e,d)

32. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ohne Zeilenvertauschungen invertieren

Spaltenvertauschungen haben keine Auswirkung auf die rechte Seite, aber beim Ablesen der Lösung (wie üblich)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ -\mathrm{I} \end{matrix} \sim$$

SPALTEN

rechts ändert sich nichts

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ -2\mathrm{II} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)\begin{matrix} +\mathrm{III} \\ -\mathrm{III} \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Beim Ablesen jeder Spalte des Ergebnisses erste und zweite Komponente vertauschen (d.h. insgesamt 1. und 2. Zeile vertauschen):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$