UNIVERSITÄT SALZBURG

# Brückenkurs Mathematik

## FB Computerwissenschaften

**Angefertigt von**

*Patrick Bammer, BSc*

**WS 2017/18**

# Inhaltsverzeichnis

# 1. Grundlegendes

## 1.1 Rechnen mit reellen Zahlen

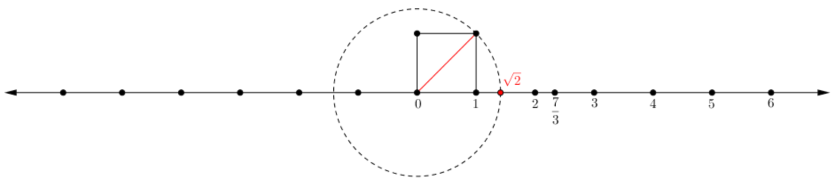
Für uns wichtige Zahlenmengen sind:

1. die *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots\}$,
2. die *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1,0,1,2, \dots\}$,
3. die *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}\ ;\ m \in \mathbb{Z},\ \ n \in \mathbb{N}\ \text{ mit }\ n \neq 0\right\}$.

Die Erweiterung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$ ermöglicht die uneingeschränkte Ausführung der Subtraktion (Umkehrung der Addition), die Erweiterung auf $\mathbb{Q}$ bewirkt, dass auch die Division (Umkehrung der Multiplikation) durch alle Zahlen ungleich Null durchgeführt werden kann.

Alle drei Zahlenmengen sind sogenannte *geordnete Mengen*, denn von je zwei verschiedenen Zahlen ist die eine stets kleiner oder größer als die andere. Geometrisch lassen sich die Zahlen als Punkte auf einer Zahlengerade darstellen. Die *positiven Zahlen* liegen rechts und die *negativen Zahlen* liegen links der Zahl $0$. Es wird bei einer sochen Darstellung auch die Ordnung der Zahlen berücksichtigt, denn je größer eine Zahl ist, desto weiter rechts und je kleiner eine Zahl ist, desto weiter links liegt sie auf der Zahlengerade.

**Die reellen Zahlen:** Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ liegen *dicht* auf der Zahlengerade, das heißt zwischen zwei rationalen Zahlen $a$ und $b$ liegt stets eine weitere rationale Zahl, beispielsweise $\frac{a+b}{2}$. Da man dieses Verfahren beliebig oft fortsetzen kann, erkennt man unschwer, dass zwischen zwei rationalen Zahlen unendlich viele rationale Zahlen liegen. Man könnte nun den Eindruck gewinnen, dass die rationalen Zahlen alle Punkte der Zahlengeraden erfassen, doch das ist falsch. Beispielsweise ist die Zahl $\sqrt{2}$ nicht rational, das heißt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Die rationalen Zahlen liegen also zwar dicht aber nicht „lückenlos“ auf der Zahlengerade. Möchte man nun diese „Lücken“ schließen ist es notwendig, die rationalen Zahlen um nicht rationale Zahlen (unendliche, nichtperiodische Dezimalzahlen), die sogenannten *irrationalen Zahlen* $\mathbb{I}$, zu erweitern.




Die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ sind nun alle rationalen Zahlen, vereinigt mit den irrationalen Zahlen, das heißt $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ und entsprechen nun „lückenlos“ den Punkten auf der Zahlengeraden. Intuitiv können wir die reellen Zahlen also als die Menge aller Punkte auf der Zahlengeraden oder als die Menge aller endlichen und unendlichen Dezimalbrüche beschreiben.

**Rechengesetze:** Für beliebige reelle Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt sowohl für die Addition als auch die Multiplikation das

1. *Assoziativgesetz*:

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \qquad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

2. *Kommutativgesetz*:

$$x + y = y + x, \qquad x \cdot y = y \cdot x$$

3. Darüber hinaus gilt für alle reellen Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$ das sogenannte *Distributivgesetz*:

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

**Einige grundlegende Eigenschaften:** Wir wollen an dieser Stelle einige für das Rechnen wichtige, grundlegende Eigenschaften reeller Zahlen anführen.

1. Es gilt die Kürzungsregel für die Addition reeller Zahlen, das heißt für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$y + x = z + x \quad \Longrightarrow \quad y = z.$$

Für $x \neq 0$ gilt die Kürzungsregel auch für die Multiplikation, das heißt

$$y \cdot x = z \cdot x \quad \Longrightarrow \quad y = z.$$

2. Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist $-(-x) = x$ und $-(x + y) = -x - y$.

3. Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ bezeichnet $x^{-1} = \frac{1}{x}$ und es gilt

$$(x^{-1})^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \qquad \text{und} \qquad (x \cdot y)^{-1} = \frac{1}{x \cdot y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = x^{-1} \cdot y^{-1}.$$

4. Für alle reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ ist $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$ und $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$.

**Umgang mit Brüchen:** Wir wollen kurz noch näher auf das Rechnen mit Brüchen eingehen.

1. Ein gegebener Bruch lässt sich mit einer beliebigen reellen Zahl $x \neq 0$ erweitern oder kürzen:

$$\frac{a}{b} = \frac{x \cdot a}{x \cdot b}, \qquad \frac{a}{b} = \frac{a : x}{b : x}$$

beispielsweise

$$\frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{12}{20}, \qquad \frac{18}{27} = \frac{9 \cdot 2}{9 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

2. Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem sie auf den gemeinsamen Nenner gebracht werden, beispielsweise

$$\frac{5}{9} + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{10}{18} + \frac{27}{18} - \frac{6}{18} = \frac{10 + 27 - 6}{18} = \frac{31}{18}$$

3. Brüche werden multipliziert, indem ihre Zähler und Nenner jeweils miteinander multipliziert werden, beispielsweise

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{14}{15}$$

insbesondere ist also $x\cdot\frac{a}{b}=\frac{x\cdot a}{b}$ für $x\in\mathbb{R}$.

4. Brüche werden dividiert, indem man den Dividend mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert, beispielsweise

$$\frac{3}{7}:\frac{5}{4}=\frac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{4}}=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3\cdot 4}{7\cdot 5}=\frac{12}{35}$$

insbesondere ist also $\frac{a}{b}:x=\frac{a}{x\cdot b}$ für $x\neq 0$ und $x:\frac{a}{b}=x\cdot\frac{b}{a}=\frac{x\cdot b}{a}$.

**Aufgaben zu Brüchen:** Es folgen nun die Übungsaufgaben zu Brüchen, Doppelbrüchen und Bruchgleichungen aus Abschnitt 1.4.

**Einige wichtige Bezeichnungen:**

1. Für eine reelle Zahl $x\in\mathbb{R}$ und eine natürliche Zahl $n\in\mathbb{N}$ heißt $n\cdot x$ *Vielfaches von* $x$ und ist definiert durch

$$\begin{aligned}0\cdot x&\coloneqq 0,\\1\cdot x&\coloneqq x,\\(n+1)\cdot x&\coloneqq n\cdot x+x,\\(-n)\cdot x&\coloneqq -(n\cdot x).\end{aligned}$$

2. Für eine reelle Zahl $x\in\mathbb{R}$ und eine natürliche Zahl $n\in\mathbb{N}$ heißt $x^n$ *Potenz von* $x$ und ist definiert durch

$$\begin{aligned}x^0&\coloneqq 1,\\x^1&\coloneqq x,\\x^{n+1}&\coloneqq x^n\cdot x,\\x^{-n}&\coloneqq (x^{-1})^n,\qquad \text{für } x\neq 0.\end{aligned}$$

Es gelten folgende Rechenregeln für Potenzen

$$\begin{aligned}x^n\cdot x^m&=x^{n+m},\\\frac{x^n}{x^m}&=x^{n-m},\\(x^n)^m&=x^{n\cdot m},\\(x\cdot y)^n&=x^n\cdot y^n,\\\left(\frac{x}{y}\right)^n&=\frac{x^n}{y^n}.\end{aligned}$$

3. Für ein reelles $x>0$ und eine natürliche Zahl $n\in\mathbb{N}$ gibt es genau eine reelle Zahl $y>0$ mit $y^n=x$. Diese Zahl heißt *n-te Wurzel von* $x$ und wird mit $y=\sqrt[n]{x}$ bezeichnet.

**4.** Für eine reelle Zahl $x > 0$ und eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $r = \frac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$ heißt

$$x^r = x^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{x^m}$$

*rationale Potenz von* $x$. Darüber hinaus ist $0^r := 0$ für alle $r \in \mathbb{Q}$ mit $r > 0$. Es gelten die folgenden Rechenregeln

$$\begin{aligned} x^r \cdot x^s &= x^{r+s}, \\ \frac{x^r}{x^s} &= x^{r-s}, \\ (x^r)^s &= x^{r \cdot s}, \\ (x \cdot y)^r &= x^r \cdot y^r, \\ \left(\frac{x}{y}\right)^r &= \frac{x^r}{y^r}. \end{aligned}$$

In Wurzelschreibweise gelten damit insbesondere die Rechenregeln

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x \cdot y} &= \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}, \\ \sqrt[n]{x^m} &= \left(\sqrt[n]{x}\right)^m, \\ \sqrt[n]{\frac{x}{y}} &= \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}, \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} &= \sqrt[n \cdot m]{x}. \end{aligned}$$

**Aufgaben zu Potenzen und Wurzeln:** Es folgen nun die Übungsbeispiele zu Potenzen und Wurzeln aus Abschnitt 1.4.

## 1.2 Der Absolutbetrag und Ungleichungen

Die folgenden Eigenschaften reeller Zahlen sind im Hinblick auf den Umgang mit Ungleichungen von Bedeutung.

**1.** Für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt stets genau eine der drei Aussagen

$$x < y, \qquad x = y, \qquad x > y.$$

**2.** Es gilt die sogenannte Monotonie der Addition, das heißt

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad x + z < y + z.$$

**3.** Es gilt die Monotonie der Multiplikation

$$x < y \;\text{ und }\; z > 0 \quad \Longrightarrow \quad x \cdot z < y \cdot z.$$

**4.** Für $x, y > 0$ ist stets $x + y > 0$ und $x \cdot y > 0$.

**5.** Ist $x < y$, so folgt $-x > -y$.

**6.** Für $x \neq 0$ gilt stets $x^2 > 0$.

**7.** Für $x > 0$ und $y < 0$ ist $x \cdot y < 0$.

**8.** Für $0 < x < y$ ist $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

**Der Absolutbetrag:** Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt $|x|$ der *Absolutbetrag von $x$* und ist definiert als

$$|x| \coloneqq \begin{cases} \;\; x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Dabei gilt:

**1.** Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist $|x| \geq 0$ und es ist $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.

**2.** Es ist $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

**3.** Für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt stets die sogenannte *Dreiecksungleichung*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Des Weiteren gilt die häufig als *umgekehrte Dreiecksungleichung* bezeichnete Ungleichung

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|.$$

Der Vollständigkeit halber definieren wir auch noch das *Signum* oder *Vorzeichen von $x$* als

$$\operatorname{sgn}(x) \coloneqq \begin{cases} +1, & \text{falls } x > 0, \\ \;\; 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Damit gilt dann

$$x = |x| \cdot \operatorname{sgn}(x), \qquad |x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x), \qquad \operatorname{sgn}(x \cdot y) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(y).$$

**Der Betrag als Abstand zwischen reellen Zahlen:** Für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gibt der Betrag $|x - y|$ den Abstand zwischen diesen beiden Zahlen am Zahlenstrahl an und es gilt $|x - y| = |y - x|$. Insbesondere gibt der Betrag $|x|$ einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ also deren Abstand zur reellen Zahl 0 an.

Die Ungleichung $|x| < 5$ bedeutet damit geometrisch, dass die Zahl $x$ zu 0 höchstens im Abstand 5 liegen darf, weshalb nur alle reellen Zahlen mit $-5 < x < 5$ in Frage kommen.

**Das Lösen von Ungleichungen mit Beträgen:** Wir betrachten als Beispiel die Ungleichung

$$|2x + 4| < |x - 8|.$$

Um die Lösungsmenge der Ungleichung angeben zu können unterscheiden wir mehrere Fälle:

**i.** Für $x < -2$ ist sowohl $2x + 4 < 0$ als auch $x - 8 < 0$, damit folgt laut Definition

$$\begin{aligned} -(2x+4) < -(x-8) \quad &\Leftrightarrow \quad -2x - 4 < -x + 8 \\ &\Leftrightarrow \quad -12 < x \end{aligned}$$

Damit lösen alle reellen Zahlen mit $-12 < x < -2$ die Ungleichung.

**ii.** Für $x \geq -2$ und $x < 8$ ist $2x + 4 > 0$ und $x - 8 < 0$, damit folgt laut Definition

$$\begin{aligned} 2x + 4 < -(x-8) \quad &\Leftrightarrow \quad 2x + 4 < -x + 8 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x < 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x < \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Somit lösen auch alle reellen Zahlen mit $-2 \leq x < \frac{4}{3}$ die Ungleichung aber nicht jene mit $\frac{4}{3} \leq x < 8$.

**iii.** Für $x \geq 8$ ist schließlich $2x + 4 > 0$ und $x - 8 \geq 0$, damit folgt

$$2x + 4 < x - 8 \quad \Leftrightarrow \quad x < -12$$

Dies ist ein Widerspruch, da wir $x > 8$ vorausgesetzt haben, also lösen keine reellen Zahlen $x \geq 8$ die Ungleichung.

Insgesamt erhalten wir also als Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\, -12 < x < \frac{4}{3}\right\}$.

**Aufgaben zu Beträgen und Ungleichungen:** Es folgen nun die Übungsaufgaben zum Umgang mit Beträgen und Ungleichungen aus Abschnitt 1.4.

## 1.3 Weitere Definitionen

**Fakultät und Binomialkoeffizient:** Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ definiert man $n!$, sprich $n$-*Fakultät*, rekursiv durch

$$\begin{aligned} 0! &:= 1, \\ (n+1)! &:= (n+1) \cdot n! \end{aligned}$$

Wir betrachten diese Rekursion beispielhaft für $n = 5$:

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \cdot 4! = \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3! = \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \end{aligned}$$

Für natürliche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}$ heißt $\binom{n}{k}$ *Binomialkoeffizient* und ist definiert als

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &:= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} && \text{für } 0 \leq k \leq n, \\ \binom{n}{k} &:= 0 && \text{für } k > n. \end{aligned}$$

Der Binomialkoeffizient gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, aus einer Menge mit $n$ Elementen genau $k$ Elemente auszuwählen, wobei die Reihenfolge dieser $k$ Elemente keine Rolle spielt, so ergeben sich für die 2-elementigen Teilmengen der 4-elementigen Menge $\{1,2,3,4\}$ genau die $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ Möglichkeiten

$$12, \qquad 13, \qquad 14, \qquad 23, \qquad 24, \qquad 34.$$

Für $0 \leq k \leq n$ gilt:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.
3. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt der *Binomische Lehrsatz*:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}\,.$$

Insbesondere erhalten wir für $n = 2$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

**Summen und Produkte:** Es sei eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gegeben und es seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ reelle Zahlen. Dann definieren wir

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \coloneqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

als die *Summe der $n$ reellen Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$* und

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \coloneqq a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

als das *Produkt der $n$ reellen Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$*.

**Beispiel:** Wir betrachten abschließend für $n \in \mathbb{N}$ die Summe

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ stets folgende Gleichheit gilt

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n}{2} \cdot (n + 1).$$

So löste GAUSS (1777-1855) als Kind die Aufgabe, alle Zahlen von $1$ bis $100$ zu addieren, indem er die $\frac{n}{2} = 50$ gleichen Summen

$$1 + 100, \qquad 2 + 99, \qquad 3 + 98, \dots \qquad 50 + 51$$

bildete. Für $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ gibt es im Gegensatz dazu keine ähnlich einfache Formel.

# 1.4 Übungsaufgaben

## I. Umgang mit Brüchen

**Aufgabe 1:** *Vereinfachen Sie die folgenden Brüche soweit wie möglich.*

$$2 \cdot \frac{15}{12} + 3 \cdot \frac{9}{4}, \qquad 5 \cdot \frac{3}{4} - \frac{11}{3}, \qquad \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{3}, \qquad 4 \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2}.$$

**Aufgabe 2:** *Berechnen Sie die folgenden Doppelbrüche.*

$$\frac{16}{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}, \qquad \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}}, \qquad \frac{2 \cdot \frac{a^2}{3b}}{\frac{4a}{b^2}}, \qquad \frac{k - \frac{1}{k}}{1 + \frac{1}{k}}.$$

**Aufgabe 3:** *Lösen Sie die folgenden Bruchgleichungen nach der jeweiligen Variable auf.*

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{3}} = 3 - \frac{1}{3}, \qquad \frac{\frac{t}{5} + 1}{\frac{t}{5} - \frac{1}{2}} = \frac{t + \frac{5}{3}}{t - \frac{10}{3}}.$$

**Lösungen: A1**: $\frac{37}{4}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{71}{40}$. **A2**: $\frac{96}{5}$, $\frac{22}{3}$, $\frac{ab}{6}$, $k - 1$. **A3**: $x = 24$, $t = 5$.

## II. Umgang mit Wurzeln und Potenzen

**Aufgabe 1:** *Berechnen Sie folgende Potenzen.*

$$((-2)^2)^3 \cdot 4^4, \qquad \left(\frac{3x}{2y}\right)^3 \cdot \left(\frac{4y}{9x}\right)^3, \qquad \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}, \qquad y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{2}{3}}, \qquad \left(z^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Aufgabe 2:** *Vereinfachen Sie die folgenden Wurzelausdrücke soweit wie möglich.*

$$3 \cdot \sqrt[3]{24}, \qquad \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{12}, \qquad \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{48}.$$

**Lösungen: A1**: $4^7$, $\frac{8}{27}$, $9$, $y^{\frac{7}{6}}$, $z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{z}$. **A2**: $6 \cdot \sqrt[3]{3}$, $12$, $6$, $\sqrt{3}$.

## III. Rechnen mit Beträgen und Ungleichungen

**Aufgabe 1:** *Ermitteln Sie für die folgenden Ungleichungen die Lösungsmenge.*

$$4x + 2 < 2x - 1, \qquad \frac{2x+1}{3x-2} < 2.$$

Hinweis: Bei der zweiten Ungleichung ist eine Fallunterscheidung von Nöten.

**Aufgabe 2:** *Vereinfachen Sie so weit wie möglich.*

$$|3-7|, \qquad |(-5)\cdot x|, \qquad \frac{2\cdot|-12|}{|4\cdot y|}$$

**Aufgabe 3:** *Ermitteln Sie die Lösungsmenge folgender Betragsungleichungen.*

$$|x-3| < 7, \qquad |2x| > |3-x|, \qquad |x-3| < |2x+4|.$$

**Lösungen:** **A1**: $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\; x < -\frac{3}{2}\right\}$, $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\; x < \frac{2}{3} \;\vee\; x > \frac{5}{4}\right\}$. **A2**: 4, $5 \cdot |x|$, $\frac{6}{|y|}$. **A3**: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}\,;\; 4 < x < 10\}$, $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}\,;\; x < -3 \;\vee\; x > 1\}$, $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\; x < -7 \;\vee\; x > -\frac{1}{3}\right\}$.

# 2. Wichtige reelle Funktionen

## 2.1 Der Funktionenbegriff

Unter einer *reellwertigen Funktion auf einer Menge $D$* versteht man eine Vorschrift $f$, die jedem Element $x \in D$ genau eine reelle Zahl $f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Man verwendet üblicherweise die Bezeichnung

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \longmapsto f(x).$$

Dabei nennt man die Menge $D$ *Definitionsbereich* und die Menge $f(D) = \{f(x) \in \mathbb{R}\,;\; x \in D\}$ *Wertebereich* der Funktion $f$. Unter dem *Graphen der Funktion* versteht man die (Punkt-)Menge

$$G_f := \big\{\big(x, f(x)\big)\,;\; x \in D\big\} \subseteq D \times \mathbb{R}.$$

Für $D \subseteq \mathbb{R}$ kann der Funktionsgraph häufig als „Kurve" im $\mathbb{R}^2$ dargestellt werden, muss aber im Allgemeinen keine durchgezogene Linie sein, sondern kann beispielsweise nur aus einzelnen Punkten bestehen, wie bei einer Definitionsmenge $D = \mathbb{N}$ (siehe Kapitel 3).

**Beispiele:**

**a)** Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = k$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ ordnet jeder reellen Zahl den konstanten Wert $k$ zu. Der Wertebereich ist also die Menge $f(\mathbb{R}) = \{k\}$ und der Graph $G_f$ dieser Funktion ist eine zur $x$-Achse parallele Gerade, welche die $y$-Achse im Punkt $(0, k)$ schneidet.

**b)** Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x - 3$ ordnet jedem $x \in \mathbb{R}$ den Wert $2x - 3$ zu, ihr Wertebereich ist ganz $\mathbb{R}$ und der Graph $G_f$ dieser Funktion entspricht jener Gerade, welche die Steigung $k = 2$ und den Schnittpunkt $(0, -3)$ mit der $y$-Achse besitzt.

**c)** Die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ordnet jeder reellen Zahl $x \neq 0$ den Wert $\frac{1}{x}$ zu, ihr Wertebereich ist $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ und ihr Graph $G_f$ entspricht einer Hyperbel.

**Nullstellen:** Eine Zahl $\alpha$ heißt *Nullstelle der Funktion* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $x \longmapsto f(x)$, falls $f(\alpha) = 0$ ist. An dieser Stelle schneidet der Graph $G_f$ der Funktion $f$ die $x$-Achse.

**Monotonie:** Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt

**i.** *monoton wachsend*, falls $f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$.

**ii.** *monoton fallend*, falls $f(x) \geq f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$.

**iii.** *streng monoton wachsend*, falls $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$.

**iv.** *streng monoton fallend*, falls $f(x) > f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$.

## 2.2 Polynome, Gleichungen und Gleichungssysteme

Wir wollen unter einem *Polynom* eine Funktion $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verstehen, welche sich in der Form

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$

darstellen lässt, wobei die *Koeffizienten* $a_0, a_1, \dots, a_n$ reelle Zahlen sind. Ist $a_n \neq 0$, so heißt $n$ der *Grad* des Polynoms und $a_n$ sein *Leitkoeffizient*. Eine Zahl $\alpha$ heißt wieder *Nullstelle* des Polynoms, wenn $p(\alpha) = 0$.

**Lemma:** *Ist $\alpha$ eine Nullstelle von $p$, dann ist $p$ durch den Linearfaktor $(x - \alpha)$ teilbar, es gibt also ein Polynom $q$ mit einem um* 1 *kleineren Grad als der von $p$ derart, dass*

$$p(x) = (x - \alpha) \cdot q(x).$$

**Korollar:** *Ein Polynom vom Grad $n$ hat höchstens $n$ Nullstellen.*

**Lineare Funktionen und lineare Gleichungen:** Unter einer *linearen Funktion $f$* verstehen wir ein Polynom vom Grad 1, also eine reellwertige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, welche sich in der Form

$$f(x) = k \cdot x + d, \qquad \text{mit } k, d \in \mathbb{R} \text{ und } k \neq 0$$

darstellen lässt. Genaugenommen heißt die Funktion $f$ nur im Falle $d = 0$ *linear* und ansonsten *affin* (d.h. verschoben linear). Der Graph $G_f$ einer linearen Funktion entspricht der Geraden mit Steigung $k$ und dem Schnittpunkt $(0, d)$ mit der $y$-Achse.

Unter einer *linearen Gleichung* verstehen wir eine Gleichung der Form

$$a \cdot x + b = 0, \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0.$$

Es gibt genau eine Lösung in $\mathbb{R}$, nämlich $x = -\frac{b}{a}$. Diese Lösung entspricht gerade der Nullstelle der zugehörigen linearen Funktion bzw. dem zugehörigen Polynom 1ten Grades.

**Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen:** Unter einer *quadratischen Funktion* verstehen wir ein Polynom vom Grad 2, also eine reellwertige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, welche sich in der Form

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \qquad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0$$

darstellen lässt. Der Graph $G_f$ einer quadratischen Funktion entspricht einer Parabel mit Scheitel $S = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

Eine *quadratische Gleichung* ist nun eine Gleichung der Form

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, \qquad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0.$$

Eine solche Gleichung lässt sich jederzeit in ihrer sogenannten *reduzierten Form*

$$x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_{=:p} \cdot x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{=:q} = x^2 + p \cdot x + q = 0$$

anschreiben. Wir leiten nun die Lösungen dieser Gleichung mittels quadratischen Ergänzens her:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + px + q = \\ &= x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\Rightarrow \quad x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Wir erhalten also die beiden Lösungen $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ und $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ und da wir $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ gesetzt haben, erhalten wir als Lösungen der allgemeinen quadratischen Gleichung

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Betrachten wir nochmals die reduzierte Form $x^2 + px + q = 0$ der allgemeinen quadratischen Gleichung. Dann heißt der Ausdruck

$$D := \frac{p^2}{4} - q$$

*Diskriminante* der quadratischen Gleichung. Für die Anzahl der reellen Lösungen gilt:

- Ist $D > 0$, so existieren zwei reelle Lösungen.
- Ist $D = 0$, so existiert genau eine reelle Lösung (mit Vielfachheit 2).
- Ist $D < 0$, so gibt es keine reelle Lösung (sondern zwei komplex konjugierte Lösungen)

**Gleichungen höheren Grades:** Für Gleichungen 3ten und 4ten Grades gibt es noch allgemeine Lösungsformeln (Lösungsformel von CARDANO und Auflösungsformel von FARRARI), während es für Gleichungen höheren Grades keine Formel mehr geben kann, mit Ausnahme von drei speziellen Typen von Gleichungen ($x^n - 1 = 0$, $x^n - a = 0$ und $(x + a)^n = 0$).

**Lineare Gleichungssysteme:** Unter einem *linearen Gleichungssystem in zwei Variablen* verstehen wir eine System von zwei Gleichungen, in dem die beiden Variablen jeweils *linear*, das heißt in der ersten Potenz, vorkommen. Allgemein hat ein solches die Form

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ \text{II:}\quad & a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{aligned}$$

wobei $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ist $c_1 = c_2 = 0$, so spricht man von einem *homogenen* linearen Gleichungssystem in zwei Variablen und andernfalls von einem *inhomogenen*.

Eins solches Gleichungssystem kann entweder genau eine oder keine Lösung besitzen. Grafisch entsprechen beide Gleichungen jeweils einer Gerade, welche entweder parallel liegen können, oder aber sich in einem Punkt schneiden. Zum Lösen eines solchen Gleichungssystems gibt es mehrere Methoden. Wir veranschaulichen das sogenannte Additionsverfahren andhand

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & 3x + 4y = 6{,}5 \\ \text{II:}\quad & 8x - 3y = 10{,}5 \end{aligned}$$

1. Wir multiplizieren die beiden Gleichungen mit geeigneten reellen Zahlen so, dass beide Gleichungen denselben Term einer Variable, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen besitzen. In unserem Fall multiplizieren wir die erste Gleichung mit 3 und die zweite mit 4 und erhalten ein *äquivalentes* Gleichungssystem, das heißt ein neues Gleichungssystem, welches aber dieselben Lösungen wie das ursprüngliche besitzt

$$\begin{aligned} \text{I:}\quad & 9x + 12y = 19{,}5 \\ \text{II:}\quad & 32x - 12y = 42 \end{aligned}$$

2. Nun addieren wir die beiden neuen Gleichungen und erhalten eine weitere Gleichung, die aber nur mehr eine Variable enthält und somit als lineare Gleichung für uns lösbar wird.

$$\begin{array}{lrl} & 9x + 12y &= 19{,}5 \\ + & 32x - 12y &= 42 \\ \hline & 41x &= 61{,}5 \qquad \Longrightarrow \quad x = 1{,}5 \end{array}$$

3. Im letzten Schritt setzten wir die aus **2.** erhaltene Lösung in beide Ausgangsgleichungen ein und lösen diese nach der noch unbekannten Variable auf. Stimmen die beiden Lösungen überein, haben wir die Lösung des Gleichungssystems gefunden, andernfalls gibt es keine Lösung. Wir erhalten ins unserem Fall

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1{,}5 + 4y = 6{,}5 \quad & \Longrightarrow \quad y = 0{,}5 \\ 8 \cdot 1{,}5 - 3y = 10{,}5 \quad & \Longrightarrow \quad y = 0{,}5 \end{aligned}$$

Damit ist das Paar $(x, y) = (1.5, 0.5)$ eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems.

**Aufgaben zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen.** Es folgen nun die Übungsaufgaben zum Lösen linearer und quadratischer Gleichungen und Aufgaben zum Lösen von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen aus Abschnitt 2.4.

## 2.3 Die Exponential- und Logarithmusfunktion

**Die Euler'sche Zahl $\mathbb{e}$:** Wir werden im nächsten Kapitel genauer das Konzept der Folge betrachten, doch nehmen wir für die Definition der Exponentialfunktion eine besondere Folge vorweg, nämlich:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad n \longmapsto \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

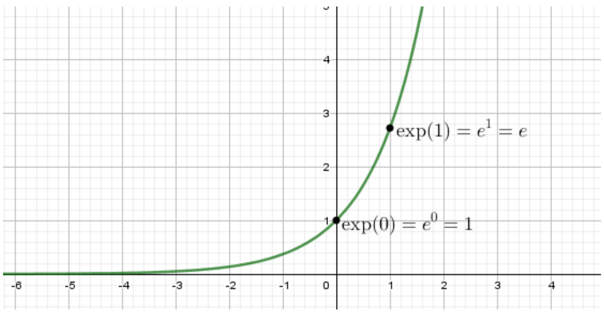
Jeder natürlichen Zahl $n$ wird also der Wert $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ zugeordnet, einige Werte sind

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | 2 | $\frac{9}{4}$ | $\frac{64}{27}$ | $\frac{625}{256}$ | $\frac{7776}{3125}$ |
| | 2 | 2,25 | $2,\overline{370}$ | 2.44140625 | 2,48832 |

Für immer größer werdendes $n \in \mathbb{N}$ nähert sich der Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ immer mehr einer ganz bestimmten Zahl, nämlich der *Euler'schen Zahl* $\mathbb{e} \approx 2{,}71828$ an.

**Die Exponentialfunktion:** Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \mathbb{e}^x$ heißt *Exponentialfunktion* und wird häufig mit $\exp(x)$ bezeichnet, das heißt

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \exp(x) = \mathbb{e}^x,$$




Wir wollen nun einige gerade für das Rechnen bedeutsame Eigenschaften dieser Funktion festhalten. Es gilt:

1. Es ist $\exp(0) = \mathbb{e}^0 = 1$ und $\exp(1) = \mathbb{e}^1 = \mathbb{e}$.
2. Es ist $\exp(x) = \mathbb{e}^x > 0$ für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$.
3. Es ist $0 < \exp(x) = \mathbb{e}^x < 1$ für $x < 0$ und $\exp(x) = \mathbb{e}^x > 1$ für $x > 1$.
4. Die Funktion $\exp$ ist streng monoton wachsend.
5. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x + y) = \mathbb{e}^{x+y} = \mathbb{e}^x \cdot \mathbb{e}^y = \exp(x) \cdot \exp(y)$.
6. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(-x) = \mathbb{e}^{-x} = \frac{1}{\mathbb{e}^x} = \frac{1}{\exp(x)}$.

Wir betrachten nun für $n \in \mathbb{N}$

$$\exp(n \cdot x) = \exp\underbrace{(x + x + \cdots + x)}_{n-\text{mal}} = \mathbb{e}^{\overbrace{x+x+\cdots+x}^{n-\text{mal}}} = \mathbb{e}^x \cdot \mathbb{e}^x \cdot \ldots \cdot \mathbb{e}^x = (\mathbb{e}^x)^n = \exp(x)^n.$$

Damit gilt für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, dass $\exp(n \cdot x) = \mathbb{e}^{x \cdot n} = (\mathbb{e}^x)^n = \exp(x)^n$. Diese Formel gilt jedoch auch für jedes rationale $q \in \mathbb{Q}$ mit $q = \frac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 0)$, das heißt

$$\exp(q \cdot x) = \mathbb{e}^{x \cdot q} = (\mathbb{e}^x)^q = \exp(x)^q.$$

Bisher haben wir nur rationale Potenzen definiert, mit der Exponentialfunktion haben wir auch erstmals *irrationale Potenzen* für $\mathbb{e}$, beispielsweise $\mathbb{e}^{\sqrt{2}}$ durch

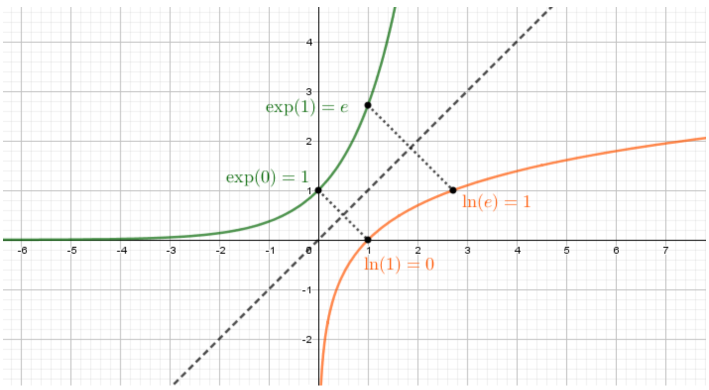
$$\exp(x) := \mathbb{e}^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

erklärt. Dadurch, dass die Funktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ streng monoton wachsend ist, ordnet sie jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ in eindeutiger Weise einen Wert $\exp(x) = \mathbb{e}^x \in \mathbb{R}_+$ zu, weshalb wir auch deren Unterfunktion $\exp^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ betrachten können. Diese führt uns zur

**Logarithmusfunktion:** Die Umkehrfunktion $\log : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ zur Exponentialfunktion heißt *Logarithmusfunktion* oder *natürlicher Logarithmus*, und wird zumeist mit $\log$ oder $\ln$ bezeichnet:

$$\log : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \log(x) = \exp^{-1}(x).$$

Es gilt also $y = \exp(x) \Leftrightarrow \log(y) = x$. Den Grafen $G_{\log}$ der Logarithmusfunktion erhält man durch Spiegelung des Grafen $G_{\exp}$ der Exponentialfunktion an der ersten Meridiane.




In Analogie zu den Eigenschaften der Exponentialfunktion gilt:

1. Es ist $\log(1) = 0$ und $\log(\mathbb{e}) = 1$.
2. Es ist $\log(x) < 0$ für $x < 1$ und $\log(x) > 1$ für $x > 1$.
3. Die Funktion $\log$ ist streng monoton wachsend.
4. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$ und $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$.
5. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ ist $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$.

Ist $x > 0$, so gilt für jedes $q \in \mathbb{Q}$, also insbesondere für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$

$$\log(x^q) = q \cdot \log x.$$

Mithilfe der Exponential- und Logarithmusfunktion ist es nun möglich, allgemeine Potenzen für $a > 0$ zu erklären, denn nach obiger Gleichung gilt für $a > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$:

$$a^q = \exp(\log(a^q)) = \exp(q \cdot \log(a)).$$

**Allgemeine Potenzen:** Wir setzten nun für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$

$$a^x := \exp(x \cdot \log(a)) = \mathrm{e}^{x \cdot \log(a)}.$$

Den Ausdruck $a^x$ nennt man *allgemeine Potenz*.

Für die allgemeine Potenz gelten die üblichen Rechenregeln, die wir sie bereits in Abschnitt 1.1 für rationale Potenzen festgehalten haben:

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \\ a^{x \cdot y} &= (a^x)^y \\ (a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x \end{aligned}$$

Darüber hinaus ist die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a^x$ für $a > 1$ streng monoton wachsend und für $0 < a < 1$ streng monoton fallend. Dadurch ordnet die Funktion $f$ für $a > 0$ mit $a \neq 1$ jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ in eindeutiger Weise den Wert $a^x$ zu, weshalb wir wieder deren Unterfunktion betrachten können. Dies führt uns zum

**Allgemeinen Logarithmus:** Für reelles $a > 0$ mit $a \neq 1$ heißt die Umkehrfunktion zu $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = a^x$

$$\log_a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \log_a(x) = f^{-1}(a^x)$$

*allgemeiner Logarithmus* oder *Logarithmus zur Basis* $a$. Damit gilt $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b)$

$$\begin{aligned} a^x = \mathrm{e}^{x \cdot \log(a)} = b \quad &\Longrightarrow \quad \log\left(\mathrm{e}^{x \cdot \log(a)}\right) = \log(b) \\ &\Longrightarrow \quad x \cdot \log(a) = \log(b) \\ &\Longrightarrow \quad x = \frac{\log(b)}{\log(a)} \\ &\Longrightarrow \quad \log_a(x) = \frac{\log(b)}{\log(a)}. \end{aligned}$$

**Beispiel:** Nach der obigen Umformung können wir den allgemeinen Logarithmus $\log_{\mathrm{a}}(b)$ als Quotient zweier natürlicher Logarithmen, nämlich $\frac{\log(b)}{\log(a)}$ schreiben, beispielsweise

$$4^x = 8 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_4(8) = \frac{\log(8)}{\log(4)} = \frac{\log(2^3)}{\log(2^2)} = \frac{3 \cdot \log(2)}{2 \cdot \log(2)} = \frac{3}{2}.$$

# 2.4 Übungsaufgaben

## I. Gleichungen und lineare Gleichungssysteme

**Aufgabe 1:** *Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen.*

$$x^2 - 16x + 28 = 0, \qquad x^2 + 6x + 9 = 0, \qquad 3x^2 - 12x = 24, \qquad 4x^2 - 6x = 9.$$

**Aufgabe 2:** *Finden Sie die Nullstellen folgender Gleichungen.*

$$2x^3 - 16x^2 + 30x = 0, \qquad (x-2)\cdot(x+3)\cdot(x-4) = 0, \qquad x^3 - 6x^2 + 9x = 0.$$

*Tipp: Denken Sie dabei an die Tatsache, dass ein Produkt $x \cdot y$ zweier reeller Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ genau dann gleich Null ist, wenn einer der beiden Faktoren oder beide Faktoren gleich Null sind*

**Aufgabe 3:** *Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme.*

$$\begin{array}{llllll} \text{I:} & 3x + 4y = 8 & \text{I:} & 2x - 5y = 4 & \text{I:} & x - 3y = 7 \\ \text{II:} & 6x - 3y = 5' & \text{II:} & 5x - 3y = 5' & \text{II:} & 7x + 9y = 21 \end{array}$$

**Lösungen:** **A1**: $x_{1,2} = 8 \pm 6$, $x = -3$, $x_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{3}$, $x_{1,2} = \frac{3}{4} \pm \frac{3\sqrt{5}}{4}$. **A2**: $x_{1,2,3} = 0{,}3{,}5$, $x_{1,2,3} = 2,-3{,}4$, $x_{1,2} = 0{,}3$. **A3**: $(x,y) = \left(\frac{4}{3}, 1\right)$, $(x,y) = \left(\frac{13}{19}, -\frac{10}{19}\right)$, $(x,y) = \left(\frac{21}{5}, -\frac{14}{15}\right)$.

## II. Exponential- und Logarithmusfunktion

**Aufgabe 1:** *Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich.*

$$(\exp(3x))^2 \cdot (\exp(2y))^2, \qquad 4 \cdot (\exp(3))^2 \cdot \exp(2) - \exp(8), \qquad \exp(3 \cdot \log(4)) \cdot 4^2$$

**Aufgabe 2:** *Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich.*

$$\log(2x) + 3 \cdot \log(y), \qquad 2 \cdot \log(4) - \log(8), \qquad \log_9(27)$$

**Aufgabe 3:** *Lösen Sie folgende Gleichung.*

$$2^{x+2} + 8 \cdot 2^x = 96$$

**Lösungen:** **A1**: $\mathbb{e}^{6x+4y}$ ,$3 \cdot \mathbb{e}^8$, $4^5 = 1024$. **A2**: $\log(2xy^3)$, $\log(2)$, $\frac{3}{2}$. **A3**: $x = 3$.

# 3. Reelle Zahlenfolgen

## 3.1 Der Folgenbegriff

Unter einer *Folge reeller Zahlen* versteht man eine Abbildung $f$ von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, das heißt

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\,.$$

Ist $f(n) = a_n$, so schreibt man für die Folge meist

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = a_1, a_2, a_3, \ldots$$

und bezeichnet die Zahl $a_n$ als *$n$-tes Folgenglied*.

**Angabe einer Folge:** Es gibt drei Möglichkeiten, eine Folge anzugeben.

**1.** Durch Aufzählen der einzelnen Elemente, beispielsweise

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2,4,8,16,32, \ldots).$$

**2.** Durch Angabe einer Bildungsvorschrift für das $n$-te Element, beispielsweise

$$a_n = 2^n.$$

**3.** Durch Angabe einer rekursiven Vorschrift zum Bilden des $(n+1)$-ten Elements aus dessen Vorgänger und einem Startwert, beispielsweise

$$a_0 = 2, \qquad a_{n+1} = 2 \cdot a_n\,.$$

**Beispiele:**

**a)** Das wohl einfachste Folge ist die, welche jedem $n \in \mathbb{N}$ eine konstante Zahl $k \in \mathbb{R}$ zuordnet:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (k, k, k, k, k, k, \ldots).$$

**b)** Es sei $a_n = \frac{1}{n}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$, dann erhalten wir die Folge

$$(a_n)_{n\geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right).$$

Bei dieser Folge scheinen sich die Folgenglieder für wachsendes $n$ immer mehr der Zahl 0 anzunähern, was wir im folgenden Abschnitt genauer betrachten möchten.

**c)** Es sei $a_n = (-1)^n$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$. Dann erhalten wir die Folge

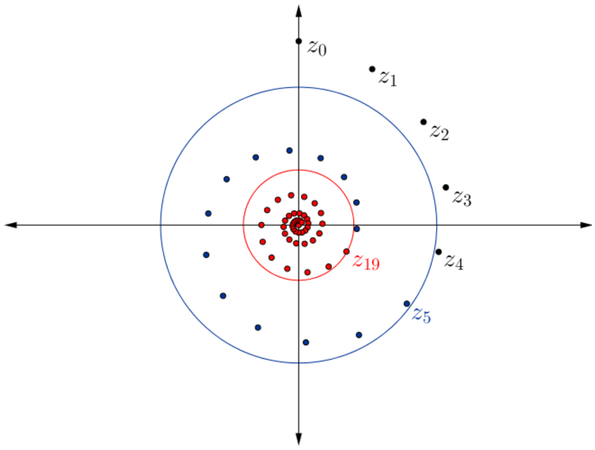
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots).$$

Hier springen die Folgenglieder abwechselnd zwischen den zwei Werten $-1$ und 1 hin und her, nähern sich aber sicher keiner bestimmten Zahl an.

**Aufgaben:** Es folgen die ersten beiden Übungsaufgaben aus Abschnitt 3.4.

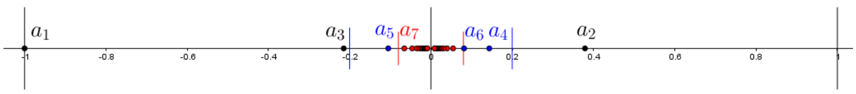
## 3.2 Konvergenz

Häufig ist das Verhalten einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für wachsendes $n \in \mathbb{N}$ von Interesse, da es wie im vorangegangenen Beispiel **b)** sein kann, dass sich die Folgenglieder $a_n$ immer mehr einer bestimmten Zahl $a$ nähern. Wir betrachten zunächst eine Folge von Punkten in der Ebene:




Die Abbildung zeigt deutlich, dass sich die Punkte zunehmend dem Ursprung des Koordinatensystems nähern. Wir sehen, dass ab dem Index $n = 5$ alle Folgenglieder innerhalb des blauen Kreises und ab dem Index $n = 19$ sogar innerhalb des roten Kreises liegen. Tatsächlich könnten wir für jeden Kreis mit einem auch noch so kleinen, beliebig vorgegebenen Radius $r > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ finden, ab dem alle weiteren Folgenelemente innerhalb dieses Kreises liegen. Der Abstand der Punkte vom Ursprung wird für wachsendes $n$ also beliebig klein.

Für eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ würde ein solches Verhalten bedeuten, dass die Folgenglieder immer näher an eine feste Zahl $a \in \mathbb{R}$ heranrücken. Zu jedem beliebig vorgegebenen $r > 0$ findet man daher einen Index $N \in \mathbb{N}$, ab dem alle weiteren Folgenglieder im Intervall $(a - r, a + r)$ um $a$ liegen, das heißt, dass der Abstand $|a_n - a|$ der Folgenglieder $a_n$ zu $a$ ab dem Index $N$ kleiner als $r$ wird.




**Konvergenz:** Wir nennen eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen *konvergent*, falls es für jedes $r > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$|a_n - a| < r \quad \text{für alle } n \geq N.$$

In diesem Fall nennt man die Zahl $a$ *Limes* oder *Grenzwert* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und man schreibt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \xrightarrow{n\to\infty} a.$$

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt, eine Folge kann also höchstens einen Grenzwert haben. Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit Grenzwert $a$ bzw. $b$, dann sind auch die Folgen $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $a + b$ bzw. $a \cdot b$.

**Beispiel einer konvergenten Folge:** Wir betrachten die reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$, also $a_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$. Wir vermuten, dass diese den Grenzwert $a = 0$ besitzt und betrachten daher

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

- Für $r = 0{,}4$ gilt

  $$0{,}4 > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \cdots$$

  Setzen wir nun $N = 3$, folgt

  $$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \underbrace{0{,}4}_{=r} \quad \text{für alle } n \geq 3.$$

- Für $r = 0{,}001$ gilt

  $$0{,}001 > \frac{1}{1001} > \frac{1}{1002} > \frac{1}{1003} > \cdots$$

  Setzen wir nun $N = 1001$, folgt

  $$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \underbrace{0{,}001}_{=r} \quad \text{für alle } n \geq 1001.$$

Wir sehen also, dass wir für jedes $r > 0$ eine natürliche Zahl $N$ mit $N > \frac{1}{r}$ finden, sodass

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < r \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Damit gilt $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Eine Folge, die als Grenzwert die Zahl 0 besitzt, nennt man auch *Nullfolge*.

**Beispiel einer nicht konvergenten Folge:** Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$, also

$$a_n = (1, -1, 1, -1 - 1, \dots)$$

Die einzig möglichen Kandidaten für einen Grenzwert sind $-1$ und 1.

- $-1$ kann aber nicht der Grenzwert sein, denn für $r = 0{,}5$ und einem beliebigem $N \in \mathbb{N}$ ist

  $$|a_n - (-1)| = |1 + 1| = 2 > 0{,}5 = r$$

  für alle geraden Zahlen $n > N$.

- Ebenso kann 1 nicht der Grenzwert sein, denn für $r = 0{,}5$ und einem beliebigem $N \in \mathbb{N}$ ist

  $$|a_n - 1| = |-1 - 1| = 2 > 0{,}5 = r$$

  für alle ungeraden Zahlen $n > N$.

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent. Eine solche Folge nennt man auch *divergent*.

**Einige wichtige Folgen und deren Grenzwert:**

1. Für die konstante Folge mit $a_n = k$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{R}$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} a_n = k.$$
2. Für die Folge mit $a_n = \frac{k}{n^s}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{N}$ beliebig gilt
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n^s} = 0.$$
3. Für die *geometrische Folge* mit $a_n = q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und einer reellen Zahl $q \in \mathbb{R}$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } |q| < 1, \\ 1, & \text{falls } q = 1, \\ \text{divergent}, & \text{falls } q = -1 \text{ oder } |q| > 1. \end{cases}$$
4. Für die Folge mit $a_n = \frac{x^n}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$
Dieser Grenzwert sagt aus, dass $n$-Fakultät viel schneller anwächst als die Potenzen einer festen reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$.
5. Für die Folge mit $a_n = \sqrt[n]{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

**Bestimmte Divergenz:** Um manchen divergenten Folgen noch wenigstens einen uneigentlichen Grenzwert zuordnen zu können, erweitert man die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ um zwei Elemente $\infty$ und $-\infty$, sodass für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $-\infty < x < \infty$ gilt.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent gegen* $\infty$, wenn zu jeder reellen Zahl $k \in \mathbb{R}$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ gefunden werden kann, sodass alle weiteren Folgenglieder größer als $k$ sind, das heißt
$$a_n > k \quad \text{für alle } n \geq N.$$
Analog heißt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bestimmt divergent gegen* $-\infty$, wenn zu jeder reellen Zahl $k < 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ gefunden werden kann, sodass alle weiteren Folgenglieder kleiner als $k$ sind, das heißt
$$a_n < k \quad \text{für alle } n \geq N.$$
Man schreibt dann in solchen Fällen auch
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

**Beispiele:**

**a)** Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist bestimmt divergent gegen $\infty$.

**b)** Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = -n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist bestimmt divergent gegen $-\infty$.

**c)** Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bleibt divergent.

**Aufgaben:** Es folgen nun die Übungsaufgaben zur Konvergenz von Folgen aus Abschnitt 3.4.

**Monotone Folgen:** Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, falls es eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$|a_n| \leq s$$

gilt. Jede konvergente Folge ist beschränkt, jedoch nicht jede beschränkte Folge konvergent wie das Beispiel $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ zeigt. Es lässt sich aber zeigen, dass jede beschränkte Folge, die zudem monoton ist, konvergiert. Dabei heißt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen

- **i.** *monoton wachsend*, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- **ii.** *monoton fallend*, falls $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- **iii.** *monoton*, falls sie entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist.

**Asymptotischer Vergleich von Folgen:** Häufig möchte man die Größenordnung zweier vorgegebener Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für große Werte von $n$ vergleichen und dieses Verhältnis in einer Kurzschreibweise ausdrücken. Eine Möglichkeit dafür ist die Verwendung der *Landau Symbole*:

Es seien zwei Folgen reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben

- **i.** Wir schreiben $a_n = o(b_n)$, falls es eine reelle Zahl $c > 0$ gibt, sodass ab einem Index $N \in \mathbb{N}$ folgende Abschätzung gilt:

$$|a_n| \leq c \cdot b_n \quad \text{für } n \geq N.$$

- **ii.** Wir schreiben $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

- **iii.** Die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißen *asymptotisch gleich*, in Zeichen $a_n \sim b_n$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Sind die beiden Folgen asymptotisch gleich, dann ist $a_n = b_n + o(b_n)$ und $b_n = a_n + o(a_n)$.

**Beispiele:**

**a)** Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ gilt $a_n = \mathcal{O}(n^3)$ oder $a_n = \frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$. Diese Notation wird häufig verwendet, um einen gewissen Rest abzuschätzen. Es gilt sogar $a_n \sim \frac{n^3}{3}$.

**b)** $a_n = \mathcal{O}(n)$ bedeutet, dass sich bei doppeltem $n$ auch der Folgenwert in etwa verdoppelt,
$a_n = \mathcal{O}(n^2)$ bedeutet, dass sich bei doppeltem $n$ der Folgenwert etwa vervierfacht,
$a_n = \mathcal{O}(\log(n))$ bedeutet, dass die Folge ungefähr um einen konstanten Wert anwächst, wenn sich $n$ verdoppelt.

# 3.4 Übungsaufgaben

## I. Umgang mit Folgen

**Aufgabe 1:** *Berechnen Sie die ersten fünf Glieder der nachstehenden Folgen.*

$$a_n = \frac{2n}{n+3}, \qquad a_n = 5 + 2 \cdot (-1)^n.$$

*Berechne jeweils das fünfte Glied der untenstehenden Folgen:*

$$a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = 3 \cdot a_n\,, \qquad a_7 = 20,\ \ a_{n+1} = a_n + n.$$

**Aufgabe 2:** *Gibt es für die nachstehenden Folgen jeweils eine Zahl, der sich die Folgenglieder zunehmend annähern?*

**a**) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right),$

**b**) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2n+1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{13}{5}, \dots\right),$

**c**) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right),$

**d**) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, \dots),$

**e**) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{n^2+1}{4n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2}{4}, \frac{5}{8}, \frac{10}{12}, \frac{17}{16}, \dots\right).$

## II. Konvergenz von Folgen

**Aufgabe 1:** *Berechnen Sie den Grenzwert der nachstehenden Folgen.*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2n+1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{3n+1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

*Was gilt für die Summe beider Folgen, also für die Folge* $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*?*

**Aufgabe 2:** *Begründe Sie warum die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit*

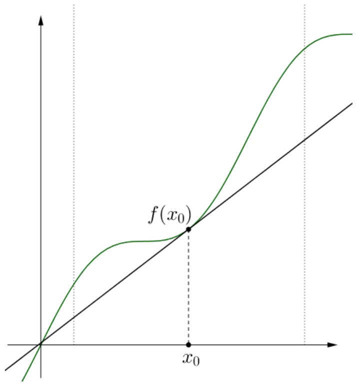
$$a_n = \frac{3n^2+1}{n}$$

*keinen Grenzwert haben kann, also divergiert.*

# 4. Differentialrechnung

## 4.1 Die Ableitung einer Funktion

**Das Tangentenproblem:** Wir betrachten eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Wir stellen uns nun die Frage, ob der Funktionsgraph $G_f$ von $f$ in einem bestimmten Punkt eine Tangente besitzt und wie groß deren Steigung ist.

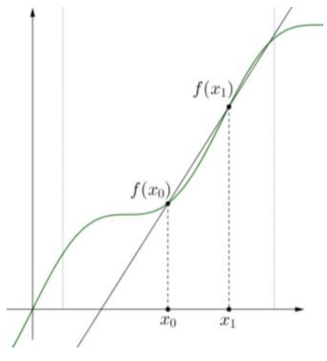



Diesem Problem stellte sich LEIBNIZ und begründete dabei die Differentialrechnung.

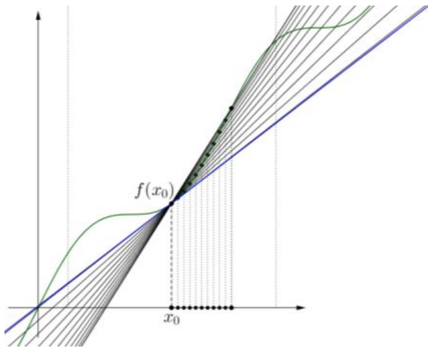
**Differenzenquotient:** Wir betrachten zunächst Sekanten und deren Steigung. Es sei dazu $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0$ eine feste Stelle innerhalb des Intervalls $I$. Es sei $x_1$ eine weitere Stelle innerhalb von $I$ mit $x_1 \neq x_0$. Dann versteht man unter dem *Differenzenquotient* den Ausdruck

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Dieser gibt gerade die Steigung der Sekante durch die beiden Punkte $\big(x_0, f(x_0)\big)$ und $\big(x_1, f(x_1)\big)$ des Funktionsgraphen $G_f$ an.




Wird nun die Stelle $x_1$ immer näher an die Stelle $x_0$ herangerückt, lässt sich beobachten, dass die entstehenden Sekanten sich immer mehr der Tangente an der Stelle $x_0$ nähern.




Dieser Grenzübergang führt zum sogenannten *Differentialquotienten*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Diese Überlegungen führen uns zur

**Ableitung einer Funktion:** Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I$ heißt *differenzierbar in* $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad (*)$$

existiert. Der Grenzwert $(*)$ heißt dann *Ableitung* oder *Differentialquotient* von $f$ in $x_0$ und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet. Die Funktion $f$ heißt *differenzierbar auf* $I$, wenn sie in jedem Punkt des Intervalls $I$ differenzierbar ist.

Ist eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in einem Punkt $x_0 \in I$, so entspricht die Gerade

$$y(x) = f'(x_0) \cdot x + (f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0)$$

mit der Steigung $k = f'(x_0)$ und $d = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$ der *Tangente* an der Stelle $x_0$.

Die Differenzierbarkeit einer Funktion in einem Punkt bedeutet im Wesentlichen, dass sich die Funktion lokal durch eine verschoben lineare Funktion – nämlich der Tangente – besonders gut annähern lässt.

**Beispiel:** Wir möchten die Ableitung $f'$ der Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ bestimmen. Wir betrachten dazu für eine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} x + x_0 = x_0 + x_0 = 2x_0.$$

Da obige Rechnung für jede Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ gültig ist, erhalten wir als Ableitungsfunktion von $f$ bekanntlich die Funktion $f' \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 2x$. Die folgenden Ableitungsregeln lassen sich alle mithilfe der Definition des Differentialquotienten herleiten.

**Ableitungsregeln:** Wir betrachten zuerst die Ableitungen einiger Grundfunktionen

1. $f(x) = k \implies f'(x) = 0$ $(k \in \mathbb{R})$.
2. $f(x) = x^n \implies f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$.
3. $f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x$.
4. $f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\sin x$.
5. $f(x) = \tan x \implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.
6. $f(x) = \mathbb{e}^{cx} \implies f'(x) = c \cdot \mathbb{e}^{cx}$ $(c \in \mathbb{R})$.
7. $f(x) = a^x \implies f'(x) = a^x \cdot \ln a$ $(a \in \mathbb{R})$.
8. $f(x) = \ln x \implies f'(x) = \frac{1}{x}$.

Für in $x$ differenzierbare Funktionen $f$ und $g$ sind auch die Funktionen $f + g$, $f \cdot g$ und im Fall $g(x) \neq 0$ auch $\frac{f}{g}$ differenzierbar in $x$ und es gilt:

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ *(Linearität).*
2. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ *(Produktregel).*
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ *(Quotientenregel).*

Sind $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ mit $f(I) \subseteq J$ zwei Funktionen, wobei $f$ in $x_0$ und $g$ in $f(x_0)$ differenzierbar ist, so ist auch die Funktion $h$ mit $h(x) = g\big(f(x)\big)$ differenzierbar in $x_0$ und es gilt

$$h'(x_0) = \Big(g\big(f(x_0)\big)\Big)' = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0) \qquad (Kettenregel).$$

**Beispiel:** Wir betrachten die Funktion $h(x) = \sqrt{x^3 + 1} = (x^3 + 1)^{\frac{1}{2}}$. Dann ist

$$h(x) = g\big(f(x)\big) \quad \text{mit} \quad f(x) = x^3 + 1 \;\text{ und }\; g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Nach der Kettenregel folgt also für die Ableitung von $h$

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x^3 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2) = \\ &= \frac{3x^2}{2 \cdot \sqrt{x^3 + 1}}. \end{aligned}$$

**Aufgaben:** Es folgen nun die Übungsaufgaben zur Ableitung von Funktionen aus Abschnitt 4.3.

## 4.2 Kurvendiskussion

**Minima und Maxima:** Man sagt die Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ habe in der Stelle $x_0 \in I$

**i.** ein *globales Minimum*, falls $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in I$,

**ii.** ein *globales Maximum*, falls $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in I$,

**iii.** ein *lokales Minimum*, falls $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap I$ mit einem $r > 0$.

**iv.** ein *lokales Maximum*, falls $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap I$ mit einem $r > 0$.

Die Intervalle $(x - r, x + r)$ in **i.** und **ii.** heißen auch *offene Umgebungen des Punktes* $x_0$. Hat die Funktion $f$ in $x_0$ ein globales bzw. lokales Minimum oder Maximum, so spricht man auch von einem *globalen* bzw. *lokalem Extremum*.

**Lemma:** *Es sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf $I$ und $x_0 \in I$. Besitzt $f$ in der Stelle $x_0$ ein lokales Minimum oder Maximum, so ist $f'(x_0) = 0$.*

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen jedoch nicht, wie das Beispiel $f(x) = x^3$ zeigt. Hier ist zwar $f'(0) = 0$, aber die Funktion $f$ hat in 0 kein lokales Minimum oder Maximum.

**Monotonie und Ableitung:** Sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf $(a, b)$. Dann gilt

**1.** Ist $f'(x) > 0$ in $(a, b)$, dann ist die Funktion $f$ streng monoton wachsend in $(a, b)$.

**2.** Es ist $f'(x) \geq 0$ genau dann in $(a, b)$, wenn die Funktion $f$ monoton wächst in $(a, b)$.

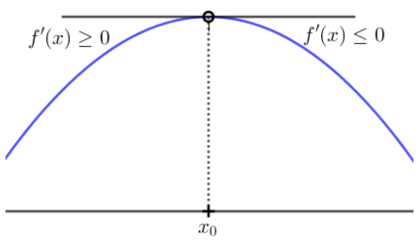
**3.** Es ist $f'(x) \leq 0$ genau dann in $(a, b)$, wenn die Funktion $f$ monoton fällt in $(a, b)$.

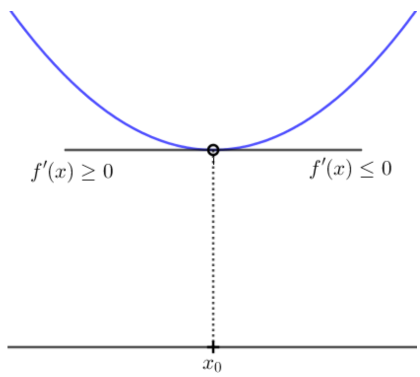
**4.** Ist $f'(x) < 0$ in $(a, b)$, dann ist die Funktion $f$ streng monoton fallend in $(a, b)$.

**Kriterium für Extrema:** *Es sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ gelte $f'(x_0) = 0$. Dann hat $f$ in der Stelle $x_0$*

**1.** *ein Minimum, falls $f'(x) \leq 0$ in $(a, x_0)$ und $f'(x) \geq 0$ in $(x_0, b)$.*

**2.** *ein Maximum, falls $f'(x) \geq 0$ in $(a, x_0)$ und $f'(x) \leq 0$ in $(x_0, b)$.*



**Kurvendiskussion:** Wir betrachten als Beispiel die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x \cdot (x-1)}{x+1} = x - 2 + \frac{2}{x+1}.$$

- *Definitionsbereich:* Die Funktion ist für alle $x \neq -1$ definiert, also gilt

$$D = \mathbb{R}\backslash\{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty).$$

- *Nullstellen:* Die Funktion $f$ besitzt genau dort Nullstellen, wo ihr Zähler $x \cdot (x-1)$ Null wird und das ist der Fall, wenn $x = 0$ oder $x = 1$ ist.

- *Lokale Extrema:* Dafür berechnen wir die erste und zweite Ableitung der Funktion $f$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4}{(x+1)^3}$$

Um die möglichen Kandidaten für Extremstellen zu erhalten, setzen wir die erste Ableitung gleich Null

$$0 = 1 - \frac{2}{(x+1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = \pm\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{2}$$

Damit sind $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ und $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ die möglichen Extremstellen. Um festzustellen, ob es sich tatsächlich um solche handelt, betrachten wir die zweite Ableitung in $x_1$ und $x_2$

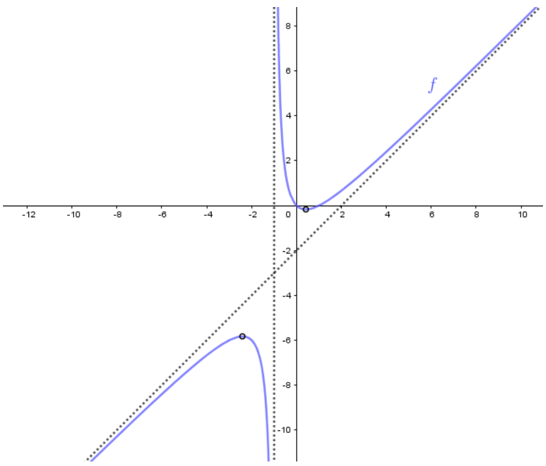
$$f''(x_1) = \frac{4}{\left(-1 - \sqrt{2} + 1\right)^3} = \frac{4}{\left(-\sqrt{2}\right)^3} < 0$$

$$f''(x_2) = \frac{4}{\left(-1 + \sqrt{2} + 1\right)^3} = \frac{4}{\left(\sqrt{2}\right)^3} > 0$$

Damit hat die Funktion $f$ in der Stelle $x_1$ einen Maximum und in der Stelle $x_2$ ein Minimum.

- *Monotonie:* Wir betrachten die erste Ableitung der Funktion $f$ und erhalten:

$$\begin{array}{lll} f'(x) > 0 \;\text{ für }\; x < x_1 & \Longrightarrow & f \;\text{ streng monoton wachsend in } (-\infty, x_1) \\ f'(x) < 0 \;\text{ für }\; x_1 < x < -1 & \Longrightarrow & f \;\text{ streng monotn fallend in } (x_1, -1) \\ f'(x) < 0 \;\text{ für }\; -1 < x < x_2 & \Longrightarrow & f \;\text{ streng monoton fallend in } (-1, x_2) \\ f'(x) > 0 \;\text{ für }\; x > x_2 & \Longrightarrow & f \;\text{ streng monoton wachsend in } (x_2, \infty) \end{array}$$



# 4.3 Übungsaufgaben

## I. Ableiten von Funktionen

**Aufgabe 1:** *Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion folgender Polynome* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 3x^2 - 7x + 2, \qquad f(x) = -2x^4 + x^2.$$

**Aufgabe 2:** *Bestimmen Sie für folgende Funktionen deren Ableitungsfunktionen.*

$$f(x) = x^2 \cdot \sin x\,, \qquad f(x) = 4x^3 \cdot \mathrm{e}^x, \qquad f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1}.$$

**Aufgabe 3:** *Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen deren Ableitungsfunktion.*

$$f(x) = (x^2 + 1)^3, \qquad f(x) = \sqrt{4x + 1}, \qquad f(x) = \sin(2x^3 - 1).$$

## II. Kurvendiskussion

**Aufgabe 1:** *Betrachten Sie die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

*Bestimmen Sie den Definitionsbereich* $D$ *von* $f$ *und untersuchen Sie diese auf Nullstellen, Extrema und Monotonie.*

**Aufgabe 2:** *Betrachten Sie die Funktion* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit*

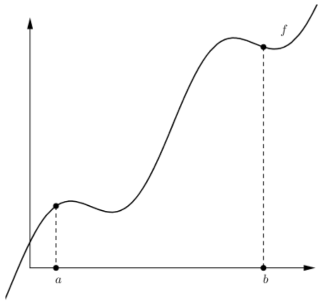
$$f(x) = x - \sqrt{2} \cdot \sin x.$$

*Bestimmen Sie die Extremwerte und die Monotonie der Funktion* $f$ *für* $0 \leq x \leq 4$.

# 5. Integralrechnung

## 5.1 Motivation

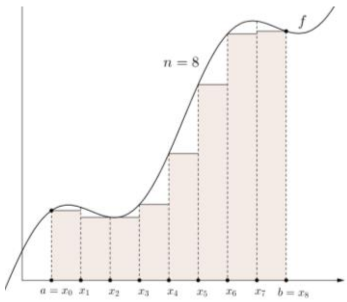
Wir möchten die Fläche unter einer Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zwischen $a$ und $b$ berechnen.



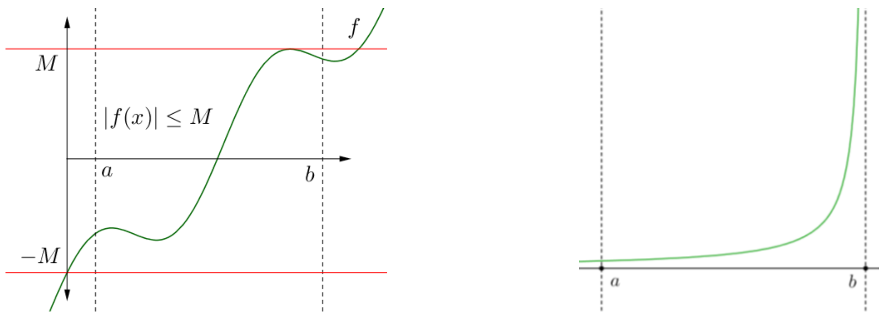

Eine naheliegende Idee ist die Fläche unter der Kurve durch einfache geometrische Objekte, deren Flächeninhalt wir leicht berechnen können, beispielsweise Rechtecke anzunähern. Dazu zerlegen wir das Intervall $[a,b]$ in $n$ gleich lange Teilintervalle $I_1, I_2, \dots, I_n$ und erhalten eine sogenannte *Zerlegung des Intervalls* $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \qquad I_k = [x_{k-1}, x_k].$$

Auf diesen Teilintervallen $I_k$ der Länge $|I_k| = \frac{b-a}{n}$ errichten wir nun Rechtecke, die als Höhe entweder den kleinsten oder größten Wert der Funktion $f$ zwischen $x_{k-1}$ und $x_k$ haben.




**Beschränkte Funktionen:** Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ein Funktion. Diese heißt *beschränkt auf* $[a,b]$, falls es eine reelle Zahl $M$ gibt, sodass $|f(x)| \le M$ für alle $x \in [a,b]$.




Diese Forderung werden wir an die Funktion $f$ stellen müssen, um einen „sinnvollen" Flächeninhalt unter der Kurve $f$ berechnen zu können.

## 5.2 Ober- und Untersummen

**Unter- und Obersumme:** Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und

$$\mathcal{Z}\colon\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \qquad n \in \mathbb{N}$$

wie vorhin eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ in die $n$ Teilintervalle $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ mit der Länge $|I_k| = \frac{b-a}{n}$. Wir bezeichnen nun mit

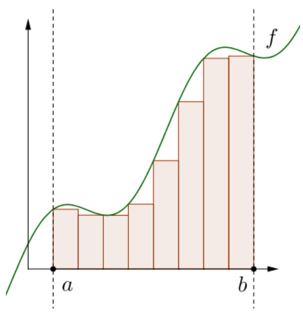
- $m_k(f)$ den kleinsten Wert, den die Funktion $f$ auf dem Teilintervall $I_k$ annimmt,
- $M_k(f)$ den größten Wert, den die Funktion $f$ auf dem Teilintervall $I_k$ annimmt.

Dann ist die *Untersumme von $f$ bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Z}$* gegeben durch

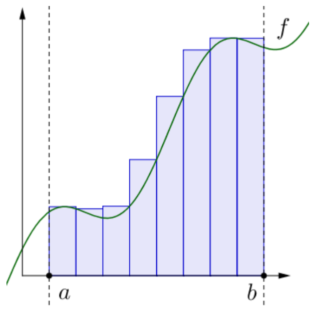
$$U(f,\mathcal{Z}) := m_1(f)\cdot|I_1| + m_2(f)\cdot|I_2| + \cdots + m_n(f)\cdot|I_n| = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\cdot|I_k|$$

und die *Obersumme von $f$ bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Z}$* durch

$$O(f,\mathcal{Z}) := M_1(f)\cdot|I_1| + M_2(f)\cdot|I_2| + \cdots + M_n(f)\cdot|I_n| = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\cdot|I_k|.$$




*Untersummen*




*Obersummen*

Für die Unter- und Obersummen einer beschränkten Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+$ gelten folgende Eigenschaften:

1. Für jedes $n$, das heißt bei jeder Zerlegung $\mathcal{Z}_n$ des Intervalls $[a,b]$, ist die Untersumme immer kleiner oder gleich der Obersumme, das heißt
$$U(f,\mathcal{Z}_n) \le O(f,\mathcal{Z}_n).$$

2. Für wachsendes $n$ wird die Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ immer feiner, dabei wird die Untersumme immer größer und die Obersumme immer kleiner, das heißt für $n < m$ gilt
$$U(f,\mathcal{Z}_n) \le U(f,\mathcal{Z}_m) \qquad \wedge \qquad O(f,\mathcal{Z}_n) \ge O(f,\mathcal{Z}_m).$$

Damit bilden die Untersummen für wachsendes $n$ eine monoton wachsende Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche nach oben beschränkt ist, und die Obersummen eine monoton fallende Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche nach unten beschränkt ist. Damit existieren die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} U_n$, $\lim_{n\to\infty} O_n$.

## 5.3 Das Riemann-Integral

**Das Riemann-Integral:** Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann heißt diese (*Riemann)-integrierbar*, falls

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n \qquad \text{bzw.} \qquad O_n - U_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

In diesem Fall ist das das *Riemann-Integral von $f$* definiert als

$$\int_a^b f := \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n.$$

Man verwendet üblicherweise die Bezeichnung

$$\underbrace{\int_a^b}_{\substack{\text{unendliche}\\ \text{Summe}}} \overbrace{f(x)}^{\substack{\text{Höhe der}\\ \text{Rechtecke}}} \underbrace{\mathrm{d}x}_{\substack{\text{Breite der}\\ \text{Rechtecke}}}.$$

Für eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ setzen wir noch

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0 \qquad \wedge \qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für } a < b.$$

**Einige integrierbare Funktionen:**

- Konstante Funktionen, hier ist $O(f,\mathcal{Z}_n) - U(f,\mathcal{Z}_n)$ für jede beliebige Zerlegung $\mathcal{Z}_n$ immer gleich Null.
- Monotone Funktionen.
- Stetige Funktionen.

**Integrationsregeln:** Wir betrachten zuerst die Integration einiger Grundfunktionen

1. $\int k \,\mathrm{d}x = k \cdot x + c$ $\qquad (k \in \mathbb{R})$.
2. $\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $\qquad (n \in \mathbb{N})$.
3. $\int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ $\qquad (a \in \mathbb{R},\ a \neq -1)$.
4. $\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c$.
5. $\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c$.
6. $\int \mathrm{e}^{kx} \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k} + c$ $\qquad (k \in \mathbb{R})$.
7. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$ $\qquad$ beispielsweise ist $\int \frac{3x^2}{x^3+2} \,\mathrm{d}x = \ln|x^3+2|$.

Die *Integrationskonstante* $c \in \mathbb{R}$ wird durch die Integrationsgrenzen festgelegt, beispielsweise

$$\int_a^b \sin x \, \mathrm{d}x = (-\cos x)|_a^b = \cos b - \cos a.$$

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, $a < c < b$ und $f$ integrierbar über $[a,b]$ so gilt:

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen, die integrierbar über $[a,b]$ sind und ist $c \in \mathbb{R}$, so gilt:

**1.** $f + g$ ist integrierbar über $[a,b]$ und es gilt $\int_a^b (f+g)(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$.

**2.** $c \cdot f$ ist integrierbar über $[a,b]$ und es gilt $\int_a^b c \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$.

**Aufgaben:** Es folgen nun die Übungsaufgaben aus Abschnitt 5.4.

## 5.4 Übungsaufgaben

### I. Integrieren von Funktionen

**Aufgabe 1:** *Bestimmen Sie für folgende Polynome $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ das jeweilige Integral.*

$$\int_0^3 x^2+2\,\mathrm{d}x\,,\qquad \int_{-2}^2 x^5-3x^3+x\,\mathrm{d}x\,,\qquad \int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

**Aufgabe 2:** *Bestimmen Sie jeweils die folgenden Integrale.*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\;\mathrm{d}x\,,\qquad \int_0^{\ln 3} \mathrm{e}^{2x}\;\mathrm{d}x,\qquad \int \frac{2x}{x^2+1}\;\mathrm{d}x.$$

# 6. Ausarbeitung der Übungsaufgaben

## 6.1 Aufgaben aus Kapitel 1

### I. Umgang mit Brüchen

**Aufgabe 1:** *Vereinfachen von Brüchen*

- $2 \cdot \frac{15}{12} + 3 \cdot \frac{9}{4} = \frac{30}{12} + \frac{27}{4} = \frac{30}{12} + \frac{81}{12} = \frac{111}{12} = \frac{37}{4}$
- $5 \cdot \frac{3}{4} - \frac{11}{3} = \frac{15}{4} - \frac{11}{3} = \frac{45}{12} - \frac{44}{12} = \frac{1}{12}$
- $\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{28}{24} = \frac{7}{6}$
- $4 \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{12}{5} - \frac{5}{8} = \frac{96}{40} - \frac{25}{40} = \frac{71}{40}$

**Aufgabe 2:** *Berechnung von Doppelbrüchen*

- $\frac{16}{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} = \frac{16}{\frac{9-4}{6}} = \frac{16}{\frac{5}{6}} = 16 \cdot \frac{6}{5} = \frac{96}{5}$
- $\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{5}} = \frac{\frac{5+6}{15}}{\frac{5-4}{10}} = \frac{\frac{11}{15}}{\frac{1}{10}} = \frac{11}{15} \cdot 10 = \frac{110}{15} = \frac{22}{3}$
- $\frac{2 \cdot \frac{a^2}{3b}}{\frac{4a}{b^2}} = \frac{2a^2}{3b} \cdot \frac{b^2}{4a} = \frac{ab}{6}$
- $\frac{k-\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}} = \frac{\frac{k^2-1}{k}}{\frac{k+1}{k}} = \frac{k^2-1}{k} \cdot \frac{k}{k+1} = \frac{k^2-1}{k+1} = \frac{(k-1)\cdot(k+1)}{k+1} = k-1$

**Aufgabe 3:** *Lösen von Bruchgleichungen*

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}} = 3 - \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\frac{3+x}{3x}} = \frac{8}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x}{3+x} = \frac{8}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 9x = 8 \cdot (3+x)$$

$$\Leftrightarrow \quad 9x = 24 + 8x$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 24$$

$$\frac{\frac{t}{5}+1}{\frac{t}{5}-\frac{1}{2}} = \frac{t+\frac{5}{3}}{t-\frac{10}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{t+5}{5}}{\frac{2t-5}{10}} = \frac{\frac{3t+5}{3}}{\frac{3t-10}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t+5}{5} \cdot \frac{10}{2t-5} = \frac{3t+5}{3} \cdot \frac{3}{3t-10}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2 \cdot (t+5)}{2t-5} = \frac{3t+5}{3t-10}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 2 \cdot (t+5) \cdot (3t-10) = (3t+5) \cdot (2t-5) \\
&\Leftrightarrow \quad 6t^2 + 15t - 100 = 6t^2 - 5t - 25 \\
&\Leftrightarrow \quad 15t = 75 \\
&\Leftrightarrow \quad t = 5
\end{aligned}$$

## II. Umgang mit Wurzeln und Potenzen

**Aufgabe 1:** *Berechnung von Potenzen*

- $((-2)^2)^3 \cdot 4^4 = (4)^3 \cdot 4^4 = 4^{3+4} = 4^7$
- $\left(\frac{3x}{2y}\right)^3 \cdot \left(\frac{4y}{9x}\right)^3 = \left(\frac{3x}{2y} \cdot \frac{4y}{9x}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$
- $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$
- $y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = y^{\frac{3+4}{6}} = y^{\frac{7}{6}}$
- $\left(z^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = z^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}} = z^{\frac{2}{6}} = z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{z}$

**Aufgabe 2:** *Vereinfachen von Wurzelausdrücken*

- $3 \cdot \sqrt[3]{24} = 3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 8} = 3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = 3 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot 2 = 6 \cdot \sqrt[3]{3}$
- $\sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 12} = \sqrt{12 \cdot 12} = \sqrt{12^2} = 12$
- $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 36}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 6^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 6}{\sqrt{2}} = 6$ oder $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{72}{2}} = \sqrt{36} = 6$
- $\sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 9} + \sqrt{3 \cdot 4} - \sqrt{3 \cdot 16} = \sqrt{3} \cdot 3 + \sqrt{3} \cdot 2 - \sqrt{3} \cdot 4 = \sqrt{3}$

## III. Rechnen mit Beträgen und Ungleichungen

**Aufgabe 1:** *Lösen von Ungleichungen*

$$4x + 2 < 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x < -3 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{3}{2}$$

Die Lösungsmenge ist also gegeben durch $\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ x < -\frac{3}{2}\right\}$.

$$\frac{2x+1}{3x-2} < 2$$

Hier müssen wir zunächst den Fall $3x - 2 = 0$, also $x = \frac{2}{3}$ ausschließen, ansonsten ist der linke Ausdruck obiger Ungleichung gar nicht definiert. Des Weiteren haben wir die beiden Fälle $3x - 2 < 0$ und $3x - 2 > 0$ zu unterscheiden:

- Falls $3x - 2 < 0$, also $x < \frac{2}{3}$, folgt

$$2x + 1 > 2 \cdot (3x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 1 > 6x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 5 > 4x \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{5}{4}$$

- Falls $3x - 2 > 0$, also $x > \frac{2}{3}$, folgt

$$2x + 1 < 2 \cdot (3x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 1 < 6x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 5 < 4x \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{5}{4}$$

Aus dem ersten Fall erhalten wir, dass alle reellen Zahlen, die kleiner $\frac{2}{3}$ und kleiner $\frac{5}{4}$ die Ungleichung lösen, das heißt alle Zahlen $x < \frac{2}{3}$. Aus dem zweiten Fall folgt, dass alle reellen Zahlen die größer als $\frac{2}{3}$ und größer als $\frac{5}{4}$ sind, die Ungleichung lösen, das heißt alle Zahlen $x > \frac{5}{4}$. Die Lösungsmenge ist damit

$$\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ x < \frac{2}{3} \text{ oder } x > \frac{5}{4}\right\}.$$

**Aufgabe 2:** *Vereinfachen von Beträgen*

- $|3 - 7| = |-4| = 4$
- $|(-5) \cdot x| = |-5| \cdot |x| = 5 \cdot |x|$
- $\frac{2 \cdot |-12|}{|4 \cdot y|} = \frac{2 \cdot 12}{4 \cdot |y|} = \frac{2 \cdot 3}{|y|} = \frac{6}{|y|}$

**Aufgabe 3:** *Lösen von Betragsungleichungen*

$$|x - 3| < 7 \quad \Leftrightarrow \quad -7 < x - 3 < 7 \quad \Leftrightarrow \quad -4 < x < 10$$

Damit ist die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}\,;\ -4 < x < 10\}$.

$$|2x| > |3 - x|$$

Hier müssen wir mehrere Fälle unterscheiden, je nachdem, ob die einzelnen Ausdrücke positiv oder negativ sind.

- Falls $x < 0$, ist $2x < 0$, aber $3 - x > 0$. Damit folgt

$$-2x > 3 - x \quad \Leftrightarrow \quad -3 > x$$

- Falls $0 \leq x \leq 3$, ist $2x > 0$ und $3 - x \geq 0$. Damit folgt

$$2x > 3 - x \quad \Leftrightarrow \quad 3x > 3 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$$

- Falls $x > 3$, ist $2x > 0$, aber $3 - x < 0$. Damit folgt

$$2x > -(3 - x) \quad \Leftrightarrow \quad 2x > x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x > -3$$

Nach dem ersten Fall lösen alle reellen $x < -3$, nach dem zweiten alle $x \in \mathbb{R}$ mit $1 < x \leq 3$ und nach dem dritten alle $x > 3$ die Ungleichung, wir erhalten also als Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}\,;\ \ x < -3 \ \text{ oder } \ x > 1\}.$$

Bei der letzten Ungleichung

$$|x - 3| < |2x + 4|$$

müssen wir wieder Fälle unterscheiden, je nachdem, ob die Ausdrücke positiv oder negativ sind.

- Falls $x < -2$, ist $x - 3 < 0$ und $2x + 4 < 0$. Damit folgt

$$-(x - 3) < -(2x + 4) \quad \Leftrightarrow \quad 3 - x < -2x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad x < -7$$

- Falls $-2 \leq x < 3$, ist $x - 3 < 0$, aber $2x - 4 \geq 0$. Damit folgt

$$-(x - 3) < 2x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3 - x < 2x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < 3x \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{1}{3}$$

- Falls $x \geq 3$, ist $x - 3 > 0$ und $2x + 4 > 0$. Damit folgt

$$x - 3 < 2x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad -7 < x$$

Nach dem ersten Fall lösen alle reellen $x < -7$, nach dem zweiten alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-\frac{1}{3} < x < 3$ und nach dem letzten alle $x \geq 3$ die Ungleichung, wir erhalten also als Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ \ x < -7 \ \text{ oder } \ x > -\frac{1}{3}\right\}.$$

## 6.2 Aufgaben aus Kapitel 2

### I. Gleichungen und lineare Gleichungssysteme

**Aufgabe 1:** *Lösen quadratischer Gleichungen*

- $x^2 - 16x + 28 = 0 \iff x_{1,2} = 8 \pm \sqrt{64-28} = 8 \pm \sqrt{36} = 8 \pm 6$
- $x^2 + 6x + 9 = 0 \iff x = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3$
- $3x^2 - 12x = 24 \iff x^2 - 4x - 8 = 0 \iff x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+8} = 2 \pm 2 \cdot \sqrt{3}$
- $4x^2 - 6x = 9 \iff x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} = 0 \iff x_{1,2} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{4}} = \frac{3 \pm \sqrt{45}}{4} = \frac{3 \pm 3 \cdot \sqrt{5}}{4}$

**Aufgabe 2:** *Nullstellen kubischer Gleichungen*

- $$\begin{aligned} 2x^3 - 16x^2 + 30x = 0 \iff x^3 - 8x^2 + 15x = 0 &\iff x \cdot (x^2 - 8x + 15) = 0 \\ &\iff x = 0 \ \vee\ x^2 - 8x + 15 = 0 \\ &\iff x = 0 \ \vee\ x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-15} \\ &\iff x = 0 \ \vee\ x = 3 \ \vee\ x = 5 \end{aligned}$$
- $(x-2) \cdot (x+3) \cdot (x-4) = 0 \iff x = 2 \ \vee\ x = -3 \ \vee\ x = 4$
- $$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \iff x \cdot (x^2 - 6x + 9) = 0 &\iff x \cdot (x-3)^2 = 0 \\ &\iff x = 0 \ \vee\ x = 3 \end{aligned}$$

**Aufgabe 3:** *Lösen linearer Gleichungssysteme in zwei Variablen*

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 3x + 4y = 8 \\ \text{II:} & 6x - 3y = 5 \end{array} \quad \overset{\text{I}\cdot(-2)}{\iff} \quad \begin{array}{ll} \text{I}^*: & -6x - 8y = -16 \\ \text{II}^*: & 6x - 3y = 5 \end{array}$$

Addition der beiden neuen Gleichungen $\text{I}^*$ und $\text{II}^*$ liefert $-11y = -11 \implies y = 1$. Einsetzen ergibt

$$3x + 4 = 8 \implies x = \frac{4}{3}$$
$$6x - 3 = 5 \implies x = \frac{4}{3}$$

Damit löst das Paar $(x, y) = \left(\frac{4}{3}, 1\right)$ das gegebene Gleichungssystem.

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 2x - 5y = 4 \\ \text{II:} & 5x - 3y = 5 \end{array} \quad \overset{\text{I}\cdot(5),\ \text{II}\cdot(-2)}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{ll} \text{I}^*: & 10x - 25y = 20 \\ \text{II}^*: & -10x + 6y = -10 \end{array}$$

Addition der beiden neuen Gleichungen $\text{I}^*$ und $\text{II}^*$ liefert $-19y = 10 \implies y = -\frac{10}{19}$. Einsetzen ergibt

$$2x - 5 \cdot \left(-\frac{10}{19}\right) = 4 \;\Rightarrow\; 2x = \frac{76}{19} - \frac{50}{19} = \frac{26}{19} \;\Rightarrow\; x = \frac{13}{19}$$
$$5x - 3 \cdot \left(-\frac{10}{19}\right) = 5 \;\Rightarrow\; 5x = \frac{95}{19} - \frac{30}{19} = \frac{65}{19} \;\Rightarrow\; x = \frac{13}{19}$$

Damit löst das Paar $(x, y) = \left(\frac{13}{19}, -\frac{10}{19}\right)$ das gegebene Gleichungssystem.

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & x - 3y = 7 \\ \text{II:} & 7x + 9y = 21 \end{array} \;\stackrel{\text{I}\cdot 3}{\Longleftrightarrow}\; \begin{array}{ll} \text{I}^*\text{:} & 3x - 9y = 21 \\ \text{II}^*\text{:} & 7x + 9y = 21 \end{array}$$

Addition der beiden neuen Gleichungen I$^*$ und II$^*$ liefert $10x = 42 \;\Rightarrow\; x = \frac{21}{5}$. Einsetzen ergibt

$$\frac{21}{5} - 3y = 7 \;\Rightarrow\; -3y = \frac{35}{5} - \frac{21}{5} = \frac{14}{5} \;\Rightarrow\; y = -\frac{14}{15}$$
$$7 \cdot \frac{21}{5} + 9y = 21 \;\Rightarrow\; 9y = \frac{105}{21} - \frac{147}{21} = -\frac{42}{21} \;\Rightarrow\; y = -\frac{14}{15}$$

Damit löst das Paar $(x, y) = \left(\frac{21}{5}, -\frac{14}{15}\right)$ das gegebene Gleichungssystem.

## II. Exponential- und Logarithmusfunktion

**Aufgabe 1:** *Vereinfachen von Exponentialausdrücken*

- $(\exp(3x))^2 = \exp(2 \cdot 3x) = \exp(6x)$ oder $(\mathrm{e}^{3x})^2 = \mathrm{e}^{6x}$
- $4 \cdot (\exp(3))^2 \cdot \exp(2) - \exp(8) = 4 \cdot \exp(6) \cdot \exp(2) - \exp(8) = 4 \cdot \exp(6+2) - \exp(8)$ $= 3 \cdot \exp(8)$ oder $4 \cdot \mathrm{e}^6 \cdot \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^8 = 4 \cdot \mathrm{e}^8 - \mathrm{e}^8 = 3 \cdot \mathrm{e}^8$
- $\exp(3 \cdot \log(4)) \cdot 4^2 = \exp(\log(4^3)) \cdot 4^2 = 4^3 \cdot 4^2 = 4^5$ oder $\mathrm{e}^{3 \cdot \log(4)} \cdot 4^2 = 4^3 \cdot 4^2 = 4^5$

**Aufgabe 2:** *Vereinfachen von Logarithmusausdrücken*

- $\log(2x) + 3 \cdot \log(y) = \log(2x) + \log(y^3) = \log(2xy^3)$
- $2 \cdot \log(4) - \log(8) = \log(4^2) - \log(8) = \log\left(\frac{16}{8}\right) = \log(2)$
- $\log_9(27) = x \;\Leftrightarrow\; 9^x = 27.$ $x = \log_9(27) = \frac{\log(27)}{\log(9)} = \frac{\log(3^3)}{\log(3^2)} = \frac{3 \cdot \log(3)}{2 \cdot \log(3)} = \frac{3}{2}$

**Aufgabe 3:** *Lösen einer Exponentialgleichungen*

- $2^{x+2} + 8 \cdot 2^x = 96 \;\Leftrightarrow\; 2^2 \cdot 2^x + 8 \cdot 2^x = 96 \;\Leftrightarrow\; 2^x + 2 \cdot 2^x = 24$
  $\Leftrightarrow\; 2^x \cdot (1 + 2) = 24$
  $\Leftrightarrow\; 2^x = 8 \;\Leftrightarrow\; x = 3$

# 6.3 Aufgaben aus Kapitel 3

## I. Umgang mit Folgen

**Aufgabe 1:** *Berechnen von Folgengliedern*

- $a_n = \frac{2n}{n+3} \;\Rightarrow\; a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\; a_2 = \frac{4}{5},\; a_3 = \frac{6}{6} = 1,\; a_4 = \frac{8}{7},\; a_5 = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

$$\Rightarrow\; (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 1, \frac{8}{7}, \frac{5}{4}, \ldots\right)$$

- $a_n = 5 + 2 \cdot (-1)^n \;\Rightarrow\; a_1 = 3,\; a_2 = 7,\; a_3 = 3,\; a_4 = 7,\; a_5 = 3$

$$\Rightarrow\; (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3,7,3,7,3,\ldots)$$

- $a_1 = 1 \;\wedge\; a_{n+1} = 3 \cdot a_n \;\Rightarrow\; a_n = 3^{n-1} \;\Rightarrow\; a_5 = 3^4 = 81$
- $a_7 = 20 \;\wedge\; a_{n+1} = a_n + n \;\Rightarrow\; 20 = a_6 + 6 = a_5 + 5 + 6 \;\Rightarrow\; a_5 = 9$

**Aufgabe 2:** *Nähern sich die Folgen einer festen Zahl?*

**a)** Die Folgenglieder $a_n = \frac{1}{n}$ werden für zunehmend großes $n \in \mathbb{N}$ immer kleiner, können aber nie negativ werden. Damit nähern sich die Folgenglieder immer mehr der Zahl 0.

**b)** Betrachten wir einige Folgenglieder, so sehen wir, dass sich die Werte immer mehr der Zahl 2 zu nähern scheinen.

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2n+1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(2.5,\;\; 2.\overline{3},\;\; 2.25,\;\; 2.2, \ldots\;\; ,2.01, \ldots\right)$$

Das können wir uns auch überlegen, indem wir den Bruch etwas umschreiben

$$\frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$$

Für wachsendes $n \in \mathbb{N}$ haben wir uns in **a)** bereits überlegt, dass $\frac{1}{n}$ sich der Zahl 0 nähert, also nähert sich $2 + \frac{1}{n}$ der Zahl 2.

**c)** Die Folgenglieder der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haben abwechselnd positives und negatives Vorzeichen, betrachten wir nun nur die positiven Folgenglieder, dann nähern sich diese nach **a)** der Zahl 0, genauso streben die negativen Folgenglieder gegen die Zahl 0, denn sie werden für immer größeres $n \in \mathbb{N}$ immer größer, werden aber nie positiv.

**d)** Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nimmt abwechselnd die Werte $-1$ und 1 an, kann sich also sicher keiner festen Zahl annähern.

**e)** Die Folgenglieder der Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ werden immer größer, nähern sich somit bestimmt keiner festen Zahl.

## II. Konvergenz von Folgen

**Aufgabe 1:** *Bestimmung von Grenzwerten*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 3 + \frac{1}{n} = 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 3 + 0 = 3$$

Somit gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 2$ und $b_n \xrightarrow{n\to\infty} 3$, für die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt dann $a_n + b_n \xrightarrow{n\to\infty} a + b$, wie man auch leicht direkt erkennt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1+3n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 5 + 2\cdot\frac{1}{n} = 5 + 2\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 5 + 2\cdot 0 = 5$$

**Aufgabe 2:** *Bestimmte Divergenz einer Folge*

$$a_n = \frac{3n^2+1}{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Wir schreiben den Bruch wieder etwas um und erhalten

$$a_n = \frac{3n^2}{n} + \frac{1}{n} = 3n + \frac{1}{n}$$

Der zweite Summand $\frac{1}{n}$ strebt zwar wieder gegen Null, doch wächst der erste $3n$ über alle Grenzen und wird damit beliebig groß, das heißt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 3n + \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 3n + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 3n + 0 = \lim_{n\to\infty} 3n = \infty.$$

# 6.4 Aufgaben aus Kapitel 4

## I. Ableiten von Funktionen

**Aufgabe 1:** *Ableitungsfunktionen von Polynomen*

- $f(x) = 3x^2 - 7x + 2 \implies f'(x) = 6x - 7$
- $f(x) = -2x^4 + x^2 \implies f'(x) = -8x^3 + 2x$

**Aufgabe 2:** *Produkt und Quotientenregel*

- $f(x) = x^2 \cdot \sin x \implies f'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$
- $f(x) = 4x^3 \cdot \mathrm{e}^{3x} \implies f'(x) = 12x^2 \cdot \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \cdot (12x^2 + 1)$
- $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x+1}$. Wir betrachten zuvor Nenner und Zähler getrennt:

  $u(x) = x^2 + 2x - 1 \implies u'(x) = 2x + 2$ und $v(x) = x + 1 \implies v'(x) = 1$. Mithilfe der Quotientenregel erhalten wir dann

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{(2x+2)\cdot(x+1) - (x^2+2x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} &= \frac{2x^2+4x+2-x^2-2x+1}{(x+1)^3} = \\ &= \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{(x+1)^2+2}{(x+1)^2} = 1 + \frac{2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

## II. Kurvendiskussion

**Aufgabe 1:** *Kurvendiskussion der Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

- *Definitionsbereich:* Die Funktion $f$ ist für alle $x \neq 1$ definiert, also gilt

$$D = \mathbb{R}\backslash\{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty).$$

- *Nullstellen:* Die Funktion besitzt dort Nullstellen, wo ihr der Zähler $x^2 + 1$ Null wird. Dies ist hier nicht der Fall da $x^2 = -1$ keine reelle Lösung besitzt.
- *Lokale Extrema:* Dazu berechnen wir die erste und zweite Ableitung der Funktion $f$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 + 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$
$$f''(x) = \frac{(2x-2) \cdot (x-1)^2 - (2x-2) \cdot (x^2 - 2x - 1)}{(x-1)^4} = \cdots = \frac{4}{(x-1)^3}$$

Die möglichen Kandidaten für Extremstellen sind nun die Nullstellen von $f'$, die genau die Nullstellen des Zählers $x^2 - 2x - 1$ sind. Damit folgt

$$0 = x^2 - 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

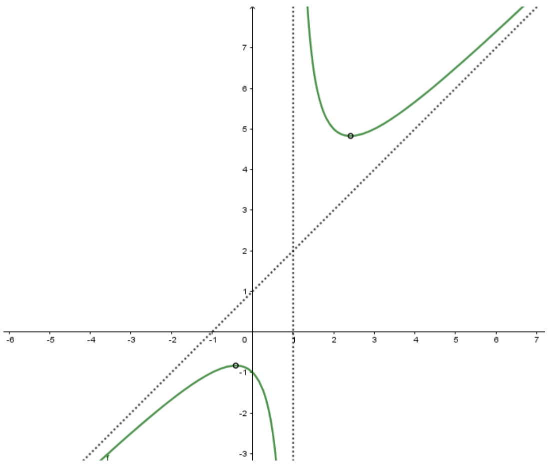
Damit sind $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ und $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ die einzig möglichen Kandidaten für Extremstellen. Wir betrachten nun die zweite Ableitung von $f$ in diesen Punkten

$$f''(x_1) = \frac{4}{\left(1 - \sqrt{2} - 1\right)^3} = \frac{4}{-\left(\sqrt{2}\right)^3} < 0$$
$$f''(x_2) = \frac{4}{\left(1 + \sqrt{2} - 1\right)^3} = \frac{4}{\left(\sqrt{2}\right)^3} > 0$$

Damit hat die Funktion $f$ in der Stelle $x_1$ ein lokales Maximum und in $x_2$ ein lokales Minimum.

- *Monotonie:* Wir betrachten die erste Ableitung der Funktion $f$ und erhalten:

$$\begin{array}{llll} f'(x) > 0 & \text{für } x < x_1 & \Longrightarrow & f \text{ streng monoton wachsend in } (-\infty, x_1) \\ f'(x) < 0 & \text{für } x_1 < x < 1 & \Longrightarrow & f \text{ streng monotn fallend in } (x_1, 1) \\ f'(x) < 0 & \text{für } 1 < x < x_2 & \Longrightarrow & f \text{ streng monotn fallend in } (1, x_2) \\ f'(x) > 0 & \text{für } x_2 < x & \Longrightarrow & f \text{ streng monotn wachsend in } (x_2, \infty) \end{array}$$



**Aufgabe 2:** *Bestimmung der lokalen Extrema und des Monotonieverhaltens der Funktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x - \sqrt{2} \cdot \sin x$$

*auf dem Intervall* $[0,4]$.

- *Definitionsbereich:* Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, also ist $D = \mathbb{R}$.

- *Lokale Extrema:* Dazu betrachten wir wieder die erste und zweite Ableitung der Funktion $f$

$$f'(x) = 1 - \sqrt{2} \cdot \cos x$$

$$f''(x) = \sqrt{2} \cdot \sin x$$

Die möglichen Kandidaten für Extremstellen sind die Nullstellen der ersten Ableitung von $f$, wir betrachten also für $0 \leq x \leq 4$

$$0 = 1 - \sqrt{2} \cdot \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}$$

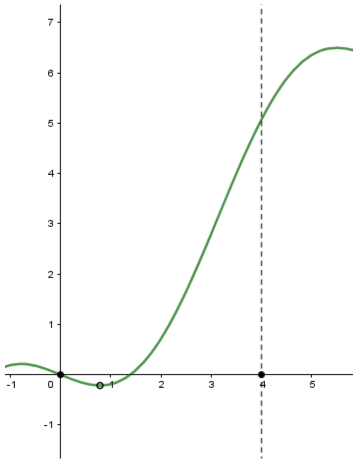
Die einige möglicherweise Extremstelle in $[0,4]$ liegt also bei $x = \frac{\pi}{4}$. Wir betrachten die zweite Ableitung von $f$ in dieser Stelle

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 > 0$$

Damit besitzt die Funktion $f$ im Intervall $[0,4]$ in der Stelle $x = \frac{\pi}{4}$ ein lokales Minimum.

- *Monotonie:* Wir betrachten die erste Ableitung der Funktion $f$ für $0 \leq x \leq 4$

$$f'(x) < 0 \text{ für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ streng monoton fallend auf } \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$$
$$f'(x) > 0 \text{ für } \frac{\pi}{4} < x \leq 4 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ streng monoton wachsend auf } \left(\frac{\pi}{4}, 4\right]$$



# 6.5 Aufgaben aus Kapitel 5

## I. Integrieren von Funktionen

**Aufgabe 1:** *Integrieren von Polynomen*

- $\int_0^3 x^2 + 2\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3 - \underbrace{\left(\frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0\right)}_{=0} = 9 + 6 = 15$

- $\int_{-2}^2 x^5 - 3x^3 + x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^6}{6} - 3 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^2 = \frac{2^6}{6} - \frac{3 \cdot 2^4}{4} + \frac{2^2}{2} - \underbrace{\left(\frac{(-2)^6}{6} - \frac{3 \cdot (-2)^4}{4} + \frac{(-2)^2}{2}\right)}_{=\frac{2^6}{6} - \frac{3 \cdot 2^4}{4} + \frac{2^2}{2}} = 0$

- $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} x^{-3}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{2 \cdot x^2}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2 \cdot (\sqrt{2})^2} + \frac{1}{2 \cdot 1^2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

**Aufgabe 2:** *Integrieren spezieller Funktionen*

- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,\mathrm{d}x = (\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

- $\int_0^{\log 3} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^{\log 3} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{2 \cdot \log 3} - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^0 = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{\log 3^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 9 - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$

- $\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \log(x^2 + 1) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$, da $2x$ ist gerade die Ableitung von $x^2 + 1$ ist (vgl. Integrationsregel 7)