Formale Sprachen und Komplexitätstheorie
Proseminar

Aufgaben, Woche 1

Aufgabe 1 Betrachten Sie die Turing-Maschine aus der Vorlesung, die die Sprache

$$L = \{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$$

entscheidet. Geben Sie die aufeinanderfolgenden Konfigurationen dieser Turung-Maschine bei den Eingaben 00 und 000 an.

Aufgabe 2 Geben Sie eine informelle Beschreibung einer Turing-Maschine, die die folgende Sprache entscheidet:

$$ABC := \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}.$$

Überlegen Sie sich dazu, welche Worte, die nur aus den Zeichen a, b, c bestehen, nicht in ABC enthalten sind.

Formale Sprachen und Komplexitätstheorie
Proseminar

Aufgaben, Woche 2

Aufgabe 3 Beschreiben Sie eine deterministische 1-Band Turing-Maschine, die für beliebige $x, y \in \{0,1\}^*$ bei der Eingabe $x\#y$ dieses Wort durch $y\#x$ ersetzt (an die gleiche Position schreibt) und dann akzeptiert. D.h., die Reihenfolge der Teilworte x und y soll auf dem Band vertauscht werden.

Aufgabe 4 Sei L eine entscheidbare Sprache und $k \in N$. Zeigen Sie, dass dann auch die Sprache

$$L^k := \{w \mid \exists v_1, \ldots, v_k \in L \text{ mit } w = v_1 \ldots v_k\}$$

entscheidbar ist.

Formale Sprachen und Komplexitätstheorie
Proseminar

Aufgaben, Woche 3

Aufgabe 5 Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antwort.

- Die DTM M entscheide eine Sprache L. Ist L dann auch die von M akzeptierte Sprache?
- Entscheidet jede DTM eine Sprache?

Aufgabe 6 Die symmetrische Differenz $L_1 \Delta L_2$ zweier Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ ist die Menge aller Worte aus Σ^*, die in genau einer der beiden Sprachen liegen. Zeigen Sie: Sind L_1 und L_2 entscheidbar, so ist auch $L_1 \Delta L_2$ entscheidbar.

Aufgabe 7 Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L := \{< M > \ \mid M \text{ hält für mindestens eine Eingabe}\}$$

rekursiv aufzählbar ist.

Formale Sprachen und Komplexitätstheorie Proseminar

Aufgaben, Woche 4

Aufgabe 8 Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L := \{< M > \ \mid M \text{ hält für mindestens 2018 Eingaben}\}$$

rekursiv aufzählbar ist.

Aufgabe 9 Zeigen Sie, dass die Spache

$$L = \{(M, w, d) \mid M \text{ akzeptiert } w \text{ innerhalb von } d \text{ Schritten}\}$$

entscheidbar ist.

Aufgabe 10 Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L := \{< M > \ \mid M \text{ hält für mindestens } |< M >| \text{ viele Eingaben}\}$$

rekursiv aufzählbar ist. Hier bezeichnet $|< M >|$ die Anzahl der Bits in der Gödelnummer von M.

Formale Sprachen und Komplexitätstheorie
Proseminar

Aufgaben, Woche 5

Aufgabe 11 Reduzieren Sie das Akzeptanzproblem auf die Sprache

$$L = \{(< M >, < M' >) \mid \exists x \in \{0,1\}^* \text{ so dass } M \text{ und } M' \text{ beide } x \text{ akzeptieren}\}.$$

Aufgabe 12 Zeigen Sie, dass die Spache

$$L = \{(M, w, d) \mid M \text{ akzeptiert } w \text{ nach mehr als } d \text{ Schritten}\}$$

nicht entscheidbar ist.

Aufgabe 13 Für zwei Bitfolgen $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ gleicher Länge n bezeichnet $x \otimes y$ das innere Produkt modulo 2 von x und y, d.h.,

$$x \otimes y = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) \bmod 2.$$

Wir beachten nun die beiden Sprachen:

$$\begin{aligned} PRODUCT &= \{(x, y) \in \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \mid |x| = |y| \text{ und } x \otimes y = 0\} \\ EVEN &= \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ enthält eine gerade Anzahl von Einsen}\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie $EVEN \leq PRODUCT$.