Proseminar

Lineare Algebra f. Informatik

SoSe 2020

Übungszettel 11

Hinweise: Abgabefrist Übungszettel 11 und Ausgabe Übungszettel 12: Do 18.06.2020.
Angekündigte Blackboard-Abschaltung von Do 11.06.2020 bis voraussichtlich Mo 15.06.2020.

44. Im $\mathbb{R}^3$ ist die Ebene $E:\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -3$ gegeben. Berechnen Sie den Abstand dieser Ebene E vom Nullpunkt, sowie den Abstand des Punktes $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$ von E.

45. Gegeben ist eine Matrix:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ -2 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$
Berechnen Sie die Determinante dieser Matrix auf zwei Arten:

- mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz, wobei auch die Regel von Sarrus verwendet werden darf
- mit dem Gauß-Algorithmus durch Umformung auf eine Dreiecksmatrix

Welche Aussage über die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für $b \in \mathbb{R}^4$ lässt sich mit dem Wissen über diese Determinante treffen?

46. Gegeben ist eine Matrix:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 & -2 \\ 2 & 2 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Überprüfen Sie für jeden der folgenden Vektoren, ob es sich um einen Eigenvektor der Matrix A handelt, und falls ja, geben Sie jeweils den zugehörigen Eigenwert an. (Dabei ist i die imaginäre Einheit.)
$$a = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Weiteres Beispiel auf Seite 2.)

47. Gegeben sind drei Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Führen Sie für jede dieser Matrizen alle folgenden Schritte durch:

- Berechnen Sie das charakteristische Polynom.
- Überprüfen Sie damit, dass $\lambda = 2$ ein Eigenwert ist.
- Geben Sie die algebraische Vielfachheit von $\lambda = 2$ an.
- Bestimmen Sie eine Basis von $E_{\{2\}}$, dem Eigenraum zu $\lambda = 2$.
- Geben Sie die geometrische Vielfachheit von $\lambda = 2$ an.