$\boxed{41}$ $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Kreuzprodukt
$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

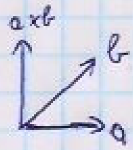
Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$: $\langle a, b \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

a und b sind orthogonal gdw. $\langle a, b \rangle = 0$.

• z.z. $\forall a, b \in \mathbb{R}^3$: $a \times b$ ist orthogonal zu a und zu b.

Seien $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

$$\langle a \times b, a \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\rangle =$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) a_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) a_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) a_3 =$$
$$= a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 - a_2 a_3 b_1 = \underline{\underline{0}}$$



$$\langle a \times b, b \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle =$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) b_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) b_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) b_3 =$$
$$= a_2 b_1 b_3 - a_3 b_1 b_2 + a_3 b_1 b_2 - a_1 b_2 b_3 + a_1 b_2 b_3 - a_2 b_1 b_3 = \underline{\underline{0}}$$

Die Vektoren a, b und $a \times b$ bilden ein Rechtssystem.

• z.z. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3$: $\langle a \times b, c \rangle = \langle b \times c, a \rangle$

Seien $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

$$\langle a \times b, c \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle = (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 =$$
$$= a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 =$$
$$= (b_2 c_3 - b_3 c_2) a_1 + (b_3 c_1 - b_1 c_3) a_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) a_3 = \left\langle \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\rangle =$$
$$= \langle b \times c, a \rangle$$
(auch: $= \langle c \times a, b \rangle = -\langle a \times c, b \rangle = -\langle b \times a, c \rangle = -\langle c \times b, a \rangle$)

Spatprodukt = orientiertes Volumen des durch a, b, c aufgespannten Spats (Parallelepipeds)

$\boxed{42}$ orthogonale Projektion von $x = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ auf die durch $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugte Gerade G des $\mathbb{R}^3$ + Abstand

durch $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugt d.h. $G: \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

$G = LIN\{u\}$

bestimme ONB von G: $v = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad (v) = $ ONB von G

$$\pi_G(x) = \langle x, v \rangle v = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} \cdot (4 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 + 6 \cdot 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{4}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ orthogonale Projektion von x auf G

Abstand $d(x, G) = \| x - \pi_G(x) \| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{-2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| =$

$$= \left\| \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 12 - 2 \\ -9 + 4 \\ 18 + 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 20 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{10^2 + (-5)^2 + 20^2}{3^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{100 + 25 + 400}{9}} = \sqrt{\frac{525}{9}} = \sqrt{\frac{21 \cdot 25}{9}} = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{21} = 5 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} \approx 7{,}6376$$

VO: Abstandsformel für Gerade $G: p + \lambda \cdot u$: $\quad$ ($G = p + U$ affiner Teilraum)

$d(x, G) = \| x - p - \pi_U(x - p) \|$

für diese Gerade: $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (geht durch den Nullpunkt)

$\Rightarrow$ gleiches Ergebnis

$\boxed{43}$ orthogonale Projektion von $x = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ auf Ebene

$E: -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ des $\mathbb{R}^3$ (also Hyperebene)

$E: a^T z = b$ mit $a = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Normalvektor, $b = 0$

Variante 1:

Formel aus VO:

$$\Pi_E(x) = x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} - \frac{(-7)\cdot(-2) + 5\cdot(-1) + 9\cdot 2}{\left(\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2}\right)^2} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} - \frac{27}{9} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

Variante 2:

Gerade G durch x, die senkrecht auf H steht

$G: z = p + \lambda \cdot u$, $\lambda \in \mathbb{R}$, durch x: $p = x$

senkrecht auf E: Richtungsvektor $u = a$ (Normalvektor der Ebene E)

also $G: z = x + \lambda \cdot a$

Schnitt mit E: $a^T z = b$

$a^T \cdot (x + \lambda \cdot a) = b$

$a^T x + \lambda a^T a = b$

$\lambda a^T a = b - a^T x$

$a^T a = (-2, -1, 2) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-2)^2 + (-1)^2 + 2^2 = 9 \neq 0$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt

$\boxed{43}$ Fortsetzung

Schnittpunkt ist $s = x + \underbrace{\frac{b - a^T x}{a^T a}}_{\lambda} a =$

$$= \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{0 - (-2, -1, 2)\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}}{9} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{-((-2)\cdot(-7) + (-1)\cdot 5 + 2\cdot 9)}{9} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{-27}{9} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$