PS Lineare Algebra f. Informatik Übungszettel 1

$\boxed{1}$ r = Kosten eines Rinds, s = Kosten eines Schafs, w = Kosten e. Schweins

(1) $2r + 5s - 13w = 1000$

(2) $3r - 9s + 3w = 0 \qquad \Rightarrow w = -r + 3s$

(3) $-5r + 6s + 8w = -600$

aus (1): $2r + 5s - 13(-r + 3s) = 15r - 34s = 1000$

aus (3): $-5r + 6s + 8(-r + 3s) = -13r + 30s = -600 \Rightarrow s = \frac{13}{30}r - 20$

$$15r - 34\left(\frac{13}{30}r - 20\right) = \left(15 - \frac{17 \cdot 13}{15}\right)r + 680 = 1000$$

$$\Rightarrow r = \frac{1000 - 680}{15 - \frac{17 \cdot 13}{15}} = \frac{320 \cdot 15}{15 \cdot 15 - 17 \cdot 13} = \frac{320 \cdot 15}{225 - 221} = \frac{320 \cdot 15}{4} = 80 \cdot 15 = \underline{\underline{1200}}$$

Kosten eines Rinds

$s = \frac{13}{30}r - 20 = \frac{13}{30} \cdot 1200 - 20 = 13 \cdot 40 - 20 = 520 - 20 = \underline{\underline{500}}$ Kosten eines Schafs

$w = -r + 3s = -1200 + 3 \cdot 500 = \underline{\underline{300}}$ Kosten eines Schweins

$\boxed{2}$ g = Anzahl Gänse, e = Anzahl Enten, h = Anzahl Hühner

(1) $h + e + g = 100$

(2) $\frac{1}{2}h + 3e + 4g = 100 \Rightarrow h + 6e + 8g = 200$

Drei Unbekannte, nur zwei Gleichungen

aus (1): $h = 100 - e - g$

in (2): $(100 - e - g) + 6e + 8g = 100 + 5e + 7g = 200$

$$\Rightarrow e = \frac{200 - 100 - 7g}{5} = 20 - \frac{7}{5}g$$

einsetzen in $h = 100 - e - g$:

$$h = 100 - \left(20 - \frac{7}{5}g\right) - g = 80 + \frac{2}{5}g$$

$g < 0$ nicht möglich   nur ganzzahlige nichtnegative Werte für g, e, h

$g = 0$: $e = 20 - \frac{7}{5}g = 20$

$h = 80 + \frac{2}{5}g = 80$ eine Lösung: $g = 0,\ e = 20,\ h = 80$

$g = 1, 2, 3, 4$: $e = 20 - \frac{7}{5}g$, ganzzahlige Lösung nur für g ein Vielfaches von 5

$g = 5$: $e = 20 - \frac{7}{5}g = 20 - \frac{7}{5} \cdot 5 = 13$

$h = 80 + \frac{2}{5}g = 80 + \frac{2}{5} \cdot 5 = 82$

zweite Lösung: $g = 5,\ e = 13,\ h = 82$

$g = 10$: $e = 20 - \frac{7}{5}g = 20 - \frac{7}{5} \cdot 10 = 6$

$h = 80 + \frac{2}{5}g = 80 + \frac{2}{5} \cdot 10 = 84$

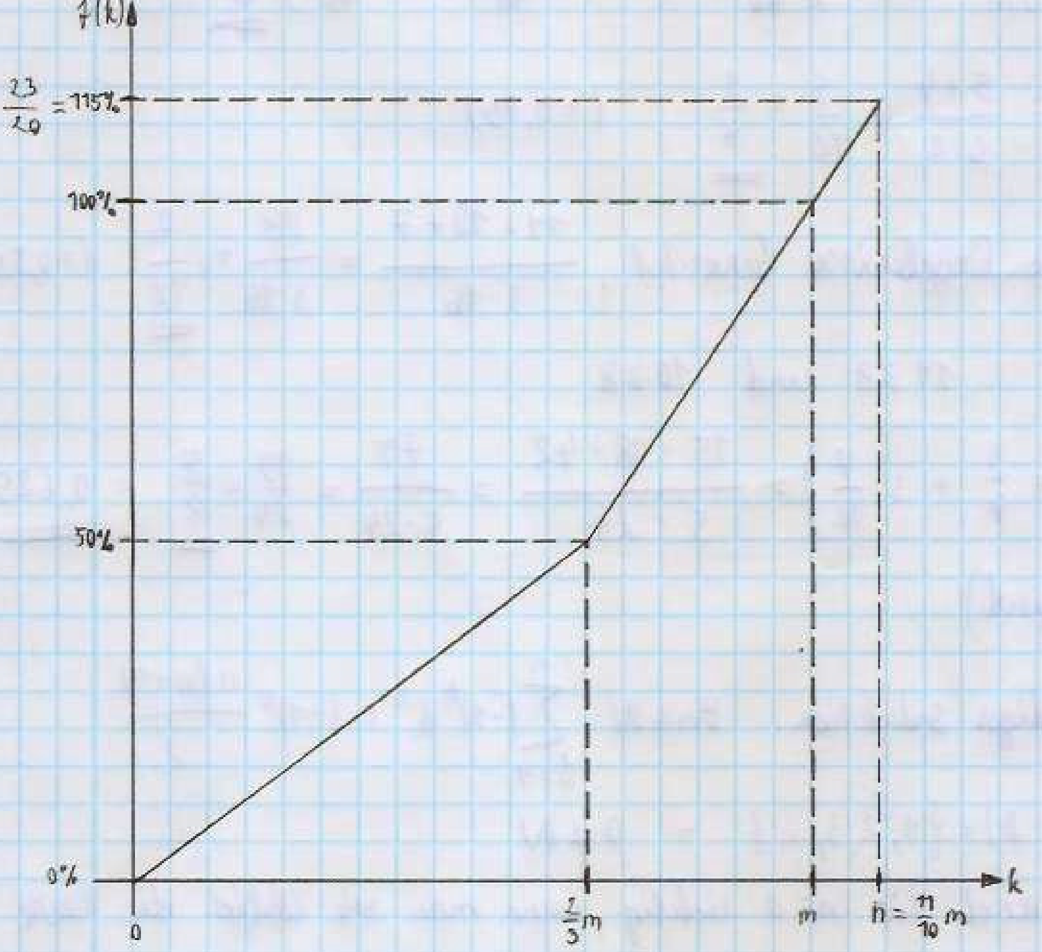
dritte Lösung: $g = 10,\ e = 6,\ h = 84$

$g = 15$: $e = 20 - \frac{7}{5}g = 20 - \frac{7}{5} \cdot 15 = 20 - 21 = -1 < 0$

keine weiteren Lösungen da für $g \geq 15$: $e < 0$

$\boxed{3.}$ Funktionsgraph der Teilbewertung f für die Kreuze für k von 0 bis n laut Proxminal-Richtlinien. $m = \frac{10}{11} n$

wenn $k \geq \frac{2}{3} m$: $f(k) = \frac{3k}{2m} - \frac{1}{2}$ sonst $(k < \frac{2}{3} m)$: $f(k) = \frac{3k}{4m}$



für $k < \frac{2}{3} m$: $f(k) = \frac{3k}{4m} = \frac{3}{4m} \cdot k = k_1 \cdot k + d_1$ mit $k_1 = \frac{3}{4m}$, $d_1 = 0$

Steigung $k_1 = \frac{3}{4m}$ $\left(= \frac{3 \cdot 11}{4 \cdot 10 n} = \frac{33}{40n} \right)$

(auch berechenbar: $k_1 = „\frac{\Delta y}{\Delta x}" = \frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{2}{3} m - 0} = \frac{3}{4m}$)

für $k \geq \frac{2}{3} m$: $f(k) = \frac{3k}{2m} - \frac{1}{2} = k_2 \cdot k + d_2$ mit $k_2 = \frac{3}{2m}$, $d_2 = -\frac{1}{2}$

Steigung $k_2 = \frac{3}{2m} = 2 \cdot k_1$ $\left(= \frac{33}{20n} \right)$

$k_2 = „\frac{\Delta y}{\Delta x}" = \frac{1 - \frac{1}{2}}{m - \frac{2}{3} m} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3} m} = \frac{3}{2m}$

oder auch: $k_2 = „\frac{\Delta y}{\Delta x}" = \frac{\frac{23}{20} - \frac{1}{2}}{\frac{11}{10} m - \frac{2}{3} m} = \frac{\frac{13}{20}}{\frac{(33-20) m}{30}} = \frac{3}{2m}$

→

3. Fortsetzung

Kreuze: $n = 55$, $k = 40$

$$m = \frac{10}{11} n = \frac{10}{11} \cdot 55 = 50$$

$$k \geq \frac{2}{3} m = \frac{100}{3} = 33,\dot{3}$$

Teilbewertung $\frac{3k}{2m} - \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 40}{2 \cdot 50} - \frac{1}{2} = \frac{12-5}{10} = \underline{\underline{\frac{7}{10}}}$ $(= 0,7)$

Teilbewertung Tafel: $\frac{\frac{5}{6} + \frac{4}{6}}{2} = \frac{5+4}{6 \cdot 2} = \frac{9}{12} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$ $(= 0,75)$

Tests: drei beste Ergebnisse gewertet

$$\frac{11+9+8}{3 \cdot 16} = \frac{28}{3 \cdot 16} = \underline{\underline{\frac{7}{12}}} \quad (= 0,58\dot{3}) \quad \geq 0,5$$

$11 \geq 8$ und $9 \geq 8$

gesamt:

$$g = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{7}{10} + \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{7}{12} \right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{7}{10} + \frac{3}{4} + \frac{7}{4} \right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{7}{10} + \frac{10}{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{14+50}{20} = \frac{64}{100} = 0,64$$

somit $0,625 \leq g < 0,75$, Note 3 (Befriedigend)

$\boxed{4}$ Verknüpfung $\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a \circ b = b$

Assoziativität: z.z. $\forall a,b,c \in \mathbb{R}: (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig.

$(a \circ b) \circ c = b \circ c = c = a \circ c = a \circ (b \circ c)$

z.z. $\exists e \in \mathbb{R} \, \forall a \in \mathbb{R}: e \circ a = a$.

Setze $e = 0 \, (\in \mathbb{R})$ z.z. $\forall a \in \mathbb{R}: e \circ a = a$

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. $e \circ a = a$ laut Def. von $\circ$.

z.z. $\forall a \in \mathbb{R} \, \exists a' \in \mathbb{R}: a \circ a' = e$.

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle $a' = e$ (also $a' = 0$). Dann ist

$a \circ a' = a' = e$.

z.z. $(\mathbb{R}, \circ)$ ist keine Gruppe.

Def. Gruppe: Paar $(G, *)$, G Menge, $*$ zweistellige Verknüpfung auf G:

$* : G \times G \to G : (a, b) \mapsto a * b$

$(G, *)$ ist eine Gruppe, wenn gilt:

1. Assoziativität: $\forall a,b,c \in G: (a * b) * c = a * (b * c)$
2. neutrales Element: $\exists e \in G \, \forall a \in G: e * a = a$ (Linksneutral)
3. inverses Element: $\forall a \in G \, \exists a' \in G: a' \circ a = e$ (Linksinvers)

Bereits festgestellt, dass $(\mathbb{R}, \circ)$ Eigenschaften 1 und 2 erfüllt.

3. jedoch nicht! Existenz eines Rechtsinversen für jedes Element gezeigt, in 3. wird aber ein Linksinverses für jedes Element gefordert.

Für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$ ist unabhängig von der Wahl von a'

$a' \circ a = a$, also sicher nicht gleich e für alle $a \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ keine Gruppe

(ungleich e für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq e$)

(2. ist auch mit verschiedenen (nämlich allen) $e \in \mathbb{R}$ erfüllbar, was bei einer Gruppe nicht sein kann.)

$\boxed{5.}$ Def. abelsche Gruppe (kommutative Gruppe):
Eine Gruppe $(G, *)$ heißt abelsch, wenn gilt $\forall a,b \in G: a * b = b * a$.

Def. Körper:
Eine Menge K zusammen mit zwei Verknüpfungen $+: K \times K \to K: (a,b) \mapsto a+b$ und $\cdot: K \times K \to K: (a,b) \mapsto a \cdot b$ heißt Körper, wenn gilt:
1. $(K,+)$ ist eine abelsche Gruppe (mit neutralem Element 0)
2. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe (mit neutralem Element 1)
3. Distributivitätsgesetze: $\forall a,b,c \in K$:
   $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (wobei $\cdot$ stärker bindet, also $= (a \cdot b) + (a \cdot c)$)
   $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (———"——— $= (a \cdot c) + (b \cdot c)$)

z.z. $\forall a \in K: 0 \cdot a = 0$ wobei 0 das neutrale Element bezüglich $+$ ist.
Sei $a \in K$ beliebig. Schreibweise: $-(0 \cdot a)$ ist das Inverse von $(0 \cdot a)$ bezüglich $+$.

$$0 \overset{1.}{=} (0 \cdot a) + (-(0 \cdot a)) \overset{2.}{=} ((0+0) \cdot a) + (-(0 \cdot a)) \overset{3.}{=} ((0 \cdot a) + (0 \cdot a)) + (-(0 \cdot a)) \overset{4.}{=}$$
$$\overset{4.}{=} (0 \cdot a) + ((0 \cdot a) + (-(0 \cdot a))) \overset{1.}{=} (0 \cdot a) + 0 \overset{2.}{=} 0 \cdot a .$$

Begründungen:
1. $-(0a)$ ist das Inverse von $(0 \cdot a)$ bzgl. $+$
2. 0 ist neutral bzgl. $+$
3. 2. Distributivitätsgesetz
4. Assoziativität von $+$

Einsparung von Klammern mit Konvention, dass $\cdot$ stärker bindet als $+$ (und der Kommutativität von $+$):
$$0 \overset{1.}{=} -0 \cdot a + 0 \cdot a \overset{2.}{=} -0 \cdot a + (0+0) \cdot a \overset{3.}{=} -0 \cdot a + (0 \cdot a + 0 \cdot a) \overset{4.}{=}$$
$$\overset{4.}{=} (-0 \cdot a + 0 \cdot a) + 0 \cdot a \overset{1.}{=} 0 + 0 \cdot a \overset{2.}{=} 0 \cdot a .$$

6) $M = \{0,1,2\}$, Operationen $+$ und $\cdot$ damit $(M,+,\cdot)$ ein Körper ist.

Laut Angabe: $1+1=2$ und $2+2=1$. Daher ist weder 1 noch 2 das neutrale Element bezüglich $+$ $\Rightarrow$ 0 neutral bzgl. $+$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\Rightarrow 0+0=0,\ 0+1=1,\ 0+2=2$

Kommutativität: $1+0=1,\ 2+0=2$

Da es ein Linksinverses bzgl. $+$ für 2 geben muss, und $0+2\neq 0$ und $2+2\neq 0$ muss $1+2=0$ sein.

Kommutativität: $2+1=0$. (ist Addition modulo 3)

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Laut 6. muss $0\cdot a=0$ sein $\forall a\in M$, also $0\cdot 0=0,\ 0\cdot 1=0,\ 0\cdot 2=0$. Kommutativität: $1\cdot 0=0,\ 2\cdot 0=0$.

Sei 1 das neutrale Element bzgl. $\cdot$. Dann $1\cdot 1=1,\ 1\cdot 2=2$. Kommutativität: $2\cdot 1=2$.

Da es ein Linksinverses bzgl. $\cdot$ für 2 geben muss und $1\cdot 2\neq 1$, muss $2\cdot 2=1$ sein. (ist Multiplikation modulo 3)

$(M,+)$ ist eine abelsche Gruppe.

$(M\setminus\{0\},\cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.

Distributivgesetze gelten. $\Rightarrow (M,+,\cdot)$ Körper.

(Restklassenkörper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$).

zum ersten Distributivgesetz: $\forall a,b,c\in M:\ a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

zum zweiten Distributivgesetz: $\forall a,b,c\in M:\ (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$

a	b	c	$a\cdot(b+c)$	$ab+ac$
0	x	y	0	0
x	0	y	$x\cdot y$	$x\cdot y$
x	y	0	$x\cdot y$	$x\cdot y$
1	x	y	$x+y$	$x+y$
2	1	1	1	1
2	1	2	0	0
2	2	1	0	0
2	2	2	2	2

=

Für jeden Körper folgt, da $\cdot$ kommutativ ist, aus der Gültigkeit des einen Distributivgesetzes die Gültigkeit des anderen.

Variante: Wahl von 2 als neutrales El. von $\cdot$ möglich. Dann ebenfalls ein Körper (weniger intuitiv aber korrekt).

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2