33.

$$U = LIN\left\{\begin{pmatrix}-5\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-9\\5\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-7\\7\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad p = \begin{pmatrix}-3\\6\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Basis von U:

$$\begin{pmatrix}-7\\7\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}-9\\5\\0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}7\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \text{lasse } \begin{pmatrix}-7\\7\\1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ weg (linear abhängig).}$$

Die restlichen drei Vektoren sind linear unabhängig, denn für

$$\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\cdot\begin{pmatrix}-9\\5\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3\cdot\begin{pmatrix}7\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

muss für die 3. Komponente $\lambda_1\cdot 1 + \lambda_2\cdot 0 + \lambda_3\cdot 0 = 0$, also $\lambda_1 = 0$ gelten, für die 4. Komponente $\lambda_2 = 0$ und für die 5. Komponente $\lambda_3 = 0$.

also: Basis von U: $\left(\begin{pmatrix}-5\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-9\\5\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

$$p + U = \left\{\begin{pmatrix}-3\\6\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_1\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\cdot\begin{pmatrix}-9\\5\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3\cdot\begin{pmatrix}7\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} : \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

entspricht genau der Form, die sich beim Ablesen der Lösung folgenden linearen Gleichungssystems ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 0 & 5 & 9 & -7 & -3\\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 6\end{array}\right) \quad \text{also}$$

$$\begin{aligned} a \quad + 5c + 9d - 7e &= -3\\ b - 2c - 5d \quad &= 6 \end{aligned}$$

$\boxed{33}$ Fortsetzung / Alternative: allgemeines Verfahren zur Bestimmung eines GLS laut Vorlesung: $p + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} - v_1 - \\ - v_2 - \\ - v_3 - \end{pmatrix}$

$$C^T = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Löse $C^T x = 0$ mit Gauß-Algorithmus:
(rechte Seite $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ nicht angeschrieben)

$\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{III}$ $\quad$ $\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{IV}$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{III} \leftrightarrow \mathrm{V}$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{a_1} + \mu_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}}_{a_2} \right\}$$

(Bei anderem Lösungsweg von $C^T x = 0$ muss die selbe Menge (Ebene) herauskommen, aber die aufspannenden Vektoren a_1, a_2 können anders sein.)

$$A = \begin{pmatrix} - a_1 - \\ - a_2 - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

$$b = A p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 9 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

GLS $Ax = b$, also $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -2 & 5 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -5 & 9 & -7 & -3 \end{array}\right)$

$$\begin{aligned} b - 2c - 5d &= 6 \\ a + 5c + 9d - 7e &= -3 \end{aligned}$$

Gleichungen von vorher (in umgekehrter Reihenfolge), bei anderem Lösungsweg von $C^T x = 0$ können aber auch ganz andere GLS entstehen.

$\boxed{34}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -2 & 1 & -8 & 4 \\ 4 & -8 & 5 & 4 & 4 & 9 \\ -2 & 4 & -2 & -2 & 0 & -6 \\ 3 & -6 & -1 & -4 & 5 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & -8 & 5 & 4 & 4 & 9 \\ -3 & 6 & -2 & 1 & -8 & 4 \\ 3 & -6 & -1 & -4 & 5 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -4\mathrm{I} \\ +3\mathrm{I} \\ -3\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -8 & 13 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 5 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{SPALTEN } \mathrm{II}_S \leftrightarrow \mathrm{III}_S \\ \\ -\mathrm{II} \\ +4\mathrm{II} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -12 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 21 & -28 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{SPALTEN } \mathrm{III}_S \leftrightarrow \mathrm{IV}_S \\ \\ \cdot\frac{1}{4} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 21 & -28 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\mathrm{III}\ \ -\mathrm{II} \\ \\ \\ +7\mathrm{III} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lösung: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$, Basis von $U = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $p = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= p + U$

$\boxed{35}$ Schnitt einer Geraden $G: x = p + \lambda \cdot u$, $\lambda \in \mathbb{R}$ mit einer Hyperebene $H: ax = b$: $a(p + \lambda u) = b \Rightarrow \lambda au = b - ap$

konkret: in $\mathbb{R}^4$:

$$G: x = p + \lambda \cdot u, \quad p = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

H_1: $a_1 x = b_1$ mit $a_1 = (-8, -3, -3, -7)$ und $b_1 = 10$.

$$a_1 u = (-8, -3, -3, -7) \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -8 \cdot 2 + (-3) \cdot (-7) + (-3) \cdot 4 + (-7) \cdot 5 =$$
$$= -16 + 21 - 12 - 35 = \underline{\underline{-42}} \quad \underline{\underline{\neq 0}}$$

$$a_1 p = (-8, -3, -3, -7) \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = -56 - 15 + 18 - 21 = \underline{\underline{-74}}$$

$$\lambda_1 a_1 u = b_1 - a_1 p$$
$$\lambda_1 \cdot (-42) = 10 - (-74)$$
$$\lambda_1 = \frac{b_1 - a_1 p}{a_1 u} = \frac{84}{-42} = \underline{\underline{-2}}$$

$$x_1 = p + \lambda_1 \cdot u = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-4 \\ 5+14 \\ -6-8 \\ 3-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 19 \\ -14 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$G \cap H_1 = \{x_1\} = \underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 19 \\ -14 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}}}$$ ein Schnittpunkt

H_2: $a_2 x = b_2$ mit $a_2 = (-3, -1, -4, 3)$ und $b_2 = 6$.

$$a_2 u = (-3, -1, -4, 3) \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -6 + 7 - 16 + 15 = \underline{\underline{0}}$$ $\Rightarrow \lambda_2 a_2 u = 0$ für beliebige $\lambda_2 \in \mathbb{R}$

Normalvektor der Hyperebene H_2 (a_2) normal auf Richtungsvektor der Gerade G (u), daher entweder $G \subseteq H_2$ oder $G \cap H_2 = \emptyset$.

$$a_2 p = (-3, -1, -4, 3) \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = -21 - 5 + 24 + 9 = 7 \neq b_2 = 6 \Rightarrow p \notin H_2$$

$\Rightarrow \lambda_2 a_2 u = 0 \neq b_2 - a_2 p = -1$ $\qquad \underline{\underline{G \cap H_2 = \emptyset}}$ G parallel zur Hyperebene H_2

$\boxed{35}$ Fortsetzung: H_3: $a_3 x = b_3$ mit $a_3 = a_2 = (-3, -1, -4, 3)$ und $b_3 = 7$

$a_3 u = a_2 u = 0$, $a_3 p = a_2 p = 7 \underline{= b_3} \Rightarrow p \in H_3$, $\underline{\underline{G \cap H_3 = G}}$

52 G liegt in der Hyperebene H_3 ($G \subseteq H_3$).