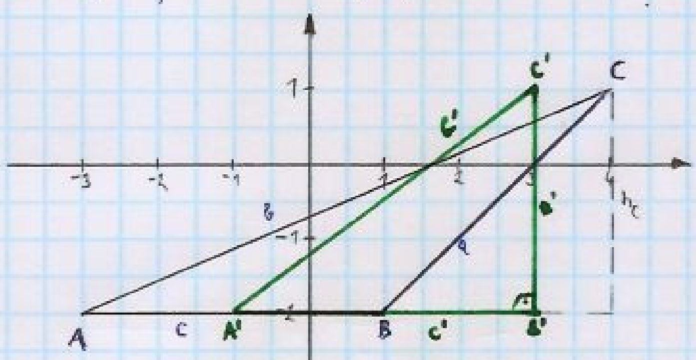
$\boxed{17}$ $A = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$



Fläche ΔABC : $\dfrac{c \cdot h_c}{2} = \dfrac{(x_B - x_A)\cdot(y_C - y_B)}{2} = \dfrac{(1-(-3))\cdot(1-(-2))}{2} = \dfrac{4\cdot 3}{2} = \underline{\underline{6}}$

$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Scherung , $f_S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto S \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix}$

also: f_S ohne explizites Matrix-Vektor-Produkt: $f_S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix}$

$A' = f_S(A) = S \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$B' = S \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$C' = S \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Delta A'B'C'$ ist rechtwinklig, Fläche $\dfrac{c' \cdot a'}{2} = \dfrac{(x_{B'} - x_{A'})\cdot(y_{C'} - y_{B'})}{2} = \dfrac{(3-(-1))\cdot(1-(-2))}{2} = \underline{\underline{6}}$

Bei Scherung bleibt der Flächeninhalt unverändert

18

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

ges.: $x \in \mathbb{R}^2$ mit $f_A(x) = x$ (Fixpunkt):

$$f_A\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) \overset{!}{=} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7}a + \frac{6}{7}b \\ \frac{4}{7}a - \frac{5}{7}b \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

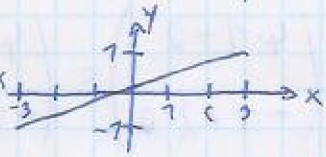
$$\frac{5}{7}a + \frac{6}{7}b = a \Rightarrow 5a + 6b = 7a \Rightarrow 6b = 2a \Rightarrow a = 3b$$

$$\frac{4}{7}a - \frac{5}{7}b = b \Rightarrow 4a - 5b = 7b \Rightarrow 4a = 12b \Rightarrow a = 3b$$

b frei wählbar, $a = 3b$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3b \\ b \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \left(= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a = 3b \right\} \right)$$

geometrisch: Gerade $x = 3y$ d.h. $y = \frac{1}{3}x$



z.z. $\forall x \in \mathbb{R}^2 : f_A(f_A(x)) = x$

Sei $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ beliebig.

$$f_A(f_A(x)) = A \cdot (A \cdot x) = A \cdot \left(A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{7}a + \frac{6}{7}b \\ \frac{4}{7}a - \frac{5}{7}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \cdot \left(\frac{5}{7}a + \frac{6}{7}b\right) + \frac{6}{7} \cdot \left(\frac{4}{7}a - \frac{5}{7}b\right) \\ \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{5}{7}a + \frac{6}{7}b\right) + \left(-\frac{5}{7}\right) \cdot \left(\frac{4}{7}a - \frac{5}{7}b\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{49} \cdot \begin{pmatrix} 25a + 30b + 24a - 30b \\ 20a + 24b - 20a + 25b \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \cdot \begin{pmatrix} 49a \\ 49b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad \square$$

$$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \; f_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{5}{7}x + \frac{6}{7}y \\ \frac{4}{7}x - \frac{5}{7}y \end{pmatrix}$$

bzw. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{5}{7}x + \frac{6}{7}y \\ \frac{4}{7}x - \frac{5}{7}y \end{pmatrix}$

$\boxed{18}$ Alternative: zeige $\forall x \in \mathbb{R}^2 : f_A(f_A(x)) = x$

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 : f_A(f_A(x)) = x \iff \forall x \in \mathbb{R}^2 : A \cdot (A \cdot x) = x \iff$$

$$\iff (A \cdot A) \cdot x = x \quad \text{(Assoziativität)} \quad \iff A \cdot A = I \quad \text{(Einheitsmatrix)}$$

mit Matrixmultiplikation:

$$A \cdot A \quad (= A^2) \quad = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} + \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{7} & \frac{5}{7} \cdot \frac{6}{7} + \frac{6}{7} \cdot \frac{-5}{7} \\ \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{7} + \frac{-5}{7} \cdot \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{7} + \frac{-5}{7} \cdot \frac{-5}{7} \end{pmatrix} =$$

25 $$= \frac{1}{49} \cdot \begin{pmatrix} 25 + 24 & 30 - 30 \\ 20 - 20 & 24 + 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \cdot \begin{pmatrix} 49 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{selbstinvers}$$

$\square$

$\boxed{17.}$ $r_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cdot \cos\varphi - y \cdot \sin\varphi \\ x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}$ für ein $\varphi \in \mathbb{R}$.

2.2. r_φ ist eine lineare Abbildung

(i) Seien $a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ beliebig.

$$r_\varphi(a+b) = r_\varphi\left(\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}\right) = r_\varphi\left(\begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (a_x+b_x)\cos\varphi - (a_y+b_y)\sin\varphi \\ (a_x+b_x)\sin\varphi + (a_y+b_y)\cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_x\cos\varphi + b_x\cos\varphi - a_y\sin\varphi - b_y\sin\varphi \\ a_x\sin\varphi + b_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi + b_y\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_x\cos\varphi - a_y\sin\varphi) + (b_x\cos\varphi - b_y\sin\varphi) \\ (a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi) + (b_x\sin\varphi + b_y\cos\varphi) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_x\cos\varphi - a_y\sin\varphi \\ a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x\cos\varphi - b_y\sin\varphi \\ b_x\sin\varphi + b_y\cos\varphi \end{pmatrix} = r_\varphi\left(\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}\right) + r_\varphi\left(\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}\right) = r_\varphi(a) + r_\varphi(b).$$

(ii) Seien $a = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$r_\varphi(\lambda a) = r_\varphi\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = r_\varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda x\cos\varphi - \lambda y\sin\varphi \\ \lambda x\sin\varphi + \lambda y\cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda\cdot(x\cos\varphi - y\sin\varphi) \\ \lambda\cdot(x\sin\varphi + y\cos\varphi) \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix} = \lambda\, r_\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \lambda\, r_\varphi(a).$$

r_φ ist eine lineare Abbildung.

$$r_{\frac{\pi}{2}} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos\frac{\pi}{2} - y\sin\frac{\pi}{2} \\ x\sin\frac{\pi}{2} + y\cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cdot 0 - y\cdot 1 \\ x\cdot 1 + y\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$r_{\frac{\pi}{2}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

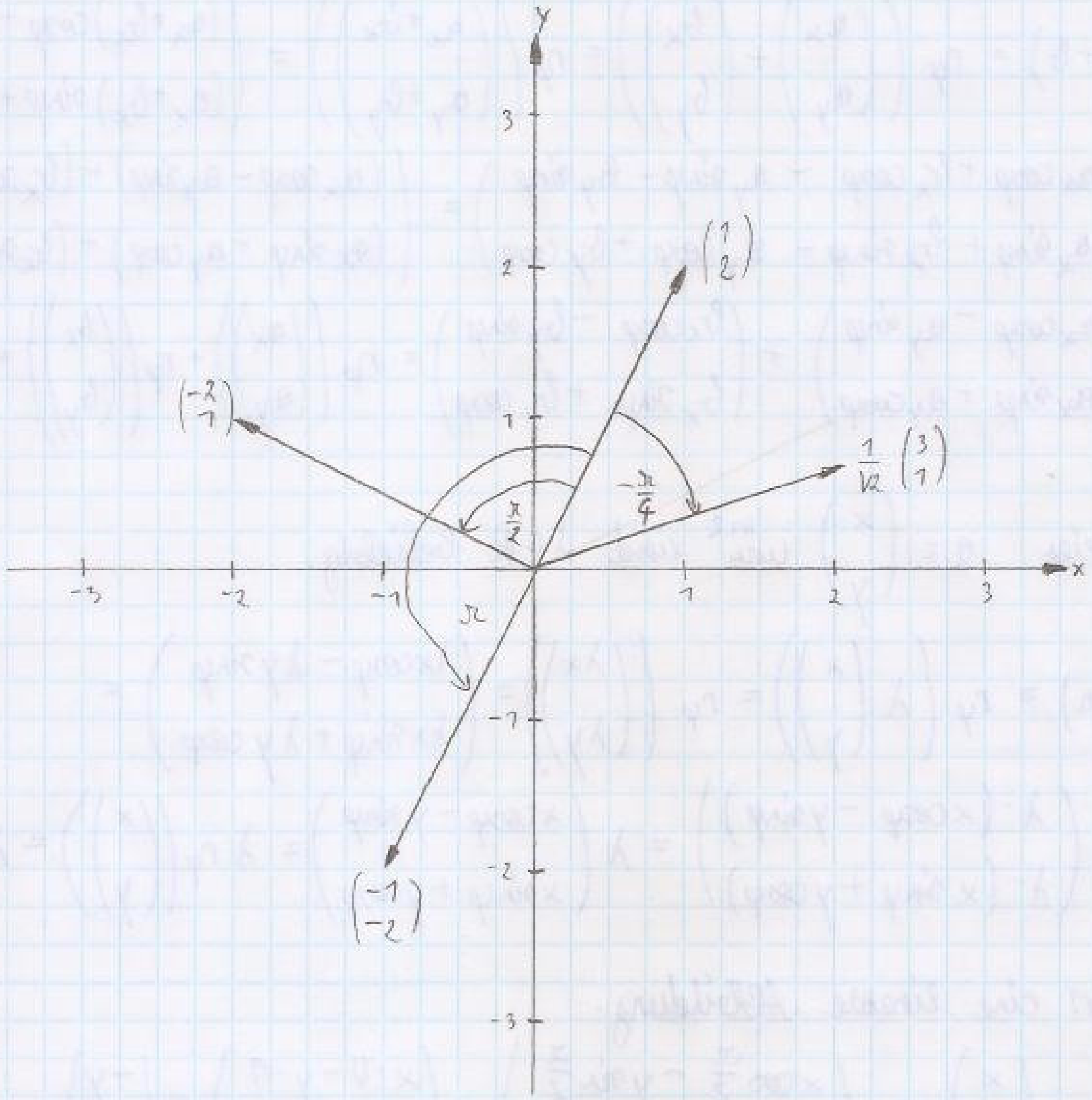
$$r_\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos\pi - y\sin\pi \\ x\sin\pi + y\cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cdot(-1) - y\cdot 0 \\ x\cdot 0 + y\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$r_\pi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{17}$ Fortsetzung: $\varphi = -\frac{\pi}{4}$: $r_{-\frac{\pi}{4}}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - y \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ x \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + y \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - y \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ x \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} + y \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix}$$

$$r_{-\frac{\pi}{4}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1+2 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2{,}121 \\ 0{,}707 \end{pmatrix}$$



r_φ bewirkt eine Rotation um den Nullpunkt um den Winkel φ.

PS Lineare Algebra f. Informatik

$\boxed{20.}$ $\varphi \in \mathbb{R}$. $r_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cdot \cos\varphi - y \cdot \sin\varphi \\ x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}$

Matrix von r_φ: Bilder der kanonischen Einheitsvektoren

$$r_\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \cdot \cos\varphi - 0 \cdot \sin\varphi \\ 1 \cdot \sin\varphi + 0 \cdot \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$r_\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \cdot \cos\varphi - 1 \cdot \sin\varphi \\ 0 \cdot \sin\varphi + 1 \cdot \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \Rightarrow A_{r_\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$A_{r_\beta \circ r_\alpha} = ?$ $\quad r_\beta \circ r_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (r_\beta \circ r_\alpha)(x) = r_\beta(r_\alpha(x))$

$$x \mapsto A_{r_\beta \circ r_\alpha} \cdot x = A_{r_\beta} \cdot (A_{r_\alpha} \cdot x) = (A_{r_\beta} \cdot A_{r_\alpha}) \cdot x$$

$$A_{r_\beta \circ r_\alpha} = A_{r_\beta} \cdot A_{r_\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha) & (-\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha) \\ (\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha) & (-\sin\beta\sin\alpha + \cos\beta\cos\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) & (-1) \cdot (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) & (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \end{pmatrix}$$

mögliche Probe: $r_\beta\left(r_\alpha\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) = 1.$ Spalte der Matrix, $r_\beta\left(r_\alpha\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = 2.$ Spalte

Additionstheoreme: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Also ist $A_{r_\beta \circ r_\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = A_{r_{(\alpha+\beta)}}$!

Rotation um den Nullpunkt um den Winkel α und danach um den Winkel β = Rotation um den Winkel $\alpha+\beta$