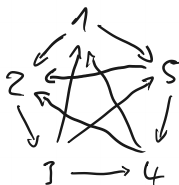




Graph:



Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AA = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assoziativität  
↓  
 $A^2 A^2 = A^4 =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 A^2 = A^6 = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 12 & 3 & 7 & 7 \\ 10 & 22 & 13 & 11 & 10 \\ 7 & 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 10 & 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Es gibt 10 Wege der Länge 6 von Knoten 3 zu 5 und 7 Wege von Länge 6 von Knoten 5 zu 3.

22

$$W: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \\ 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad W^T: \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H: \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad H^T: \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 2 \\ -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Weg 1: von links nach rechts, d.h.

①

$$(W^T W) H$$

2x4-Matrix mal 4x2-Matrix: gibt 2x2-Matrix mit 16 Multiplikationen  
 2x2-Matrix mal 2x4-Matrix: gibt 2x4-Matrix in 16 Multiplikationen  
 $\Rightarrow$  braucht 32 Multiplikationen

②

$$(W H) H^T$$

4x2 mal 2x4: gibt 4x4-Matrix mit 4\*2\*4 = 32 Multiplikationen  
 4x4-Matrix mal 4x2-Matrix: gibt 4x2-Matrix in 32 Multiplikationen  
 $\Rightarrow$  braucht 64 Multiplikationen

$\Rightarrow$  braucht 64 Multiplikationen

Weg 2: von rechts nach links, d.h.

$$W^T (W H) \quad (\text{äquivalent zu } ②)$$

$$W (H H^T) \quad (\text{äquivalent zu } ①)$$

Am Effizientesten sind also  $(W^T W) H$  und  $W (H H^T)$

$$(W^T W) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \\ 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 4 \\ 4 & 22 \end{pmatrix}$$

$$(W^T W) H = \begin{pmatrix} 25 & 4 \\ 4 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 108 & -29 & -33 \\ -108 & 60 & -26 & -48 \end{pmatrix}$$

$$(H H^T) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 2 \\ -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 1 \\ 1 & 34 \end{pmatrix}$$

$$W (H H^T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \\ 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 & 1 \\ 1 & 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 34 \\ -70 & -139 \\ 42 & -66 \\ 89 & 38 \end{pmatrix}$$

23

$$(A, b) = \left( \begin{array}{cccc|c} -2 & 8 & 0 & -4 & 6 \\ 3 & -7 & -5 & 6 & 1 \\ -4 & 8 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & -2 & 5 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \text{II} + 1.5 \text{I} \\ \text{II} - 2 \text{I} \\ \text{IV} + \text{I} \\ \rightarrow \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} -2 & 8 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & -8 & 2 & 3 & -10 \\ 0 & 14 & -2 & -6 & 11 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \text{III} + 1.6 \text{II} \\ \text{IV} - 2.8 \text{II} \\ \rightarrow \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} -2 & 8 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & -6 & -17 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \text{IV} + 2 \cdot \text{III} \\ \rightarrow \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} -2 & 8 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Rg}(A, b) = 4$$

$$\text{Rg}(A) = 3$$

$\Rightarrow$  keine Lösung

24

$$\text{LGS: } \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & -3 & 9 & 6 \\ -2 & -4 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 12 & 13 \\ -4 & -8 & 2 & -21 & -19 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} I \leftrightarrow III \\ \rightarrow \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 & 13 \\ -2 & -4 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & -3 & 9 & 6 \\ -4 & -8 & 2 & -21 & -19 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} II + 2I \\ III - 3I \\ IV + 4I \\ \rightarrow \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 6 & 27 & 33 \\ 0 & 0 & -6 & -27 & -33 \\ 0 & 0 & 6 & 27 & 33 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} III + II \\ IV - II \\ \rightarrow \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 6 & 27 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} II : 6 \\ \rightarrow \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 12 & 13 \\ & & 1 & 5.5 & 6.5 \\ & & & & \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} S_{II} \leftrightarrow S_{III} \\ \rightarrow \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 12 & 13 \\ & 1 & & 5.5 & 6.5 \\ & & & & \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} I - II \\ \rightarrow \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 6.5 & 6.5 \\ & 1 & & 5.5 & 6.5 \\ & & & & \end{array} \right)$$

Damit ist die Lösungsmenge  $L := \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 6.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -6.5 \\ -5.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$