Einführung in die Lineare Algebra für Informatik

Marián Vajteršic

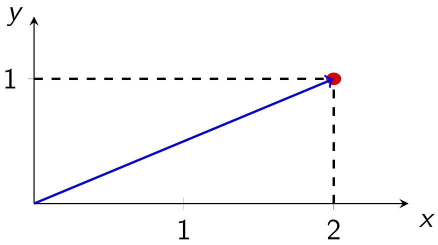
Fachbereich Computerwissenschaften
Universität Salzburg

Was ist lineare Algebra?

Definition

Lineare Algebra ist die **Theorie der Vektorräume**.

Vektoren sind Elemente der Vektorräume und werden in vielen Anwendungen verwendet.
Sie dienen z. B. dazu, dass man die Lage der Punkte in der Ebene, im Raum und in höherdimensionalen Räumen durch ihre Koordinaten beschreiben kann.



Der Vektor beschreibt mittels der Koordinaten $(\underbrace{2}_{\text{x-Achse}}, \underbrace{1}_{\text{y-Achse}})$ die Lage des Punktes ● in der Ebene.

Wozu lineare Algebra?

Weil die Theorie der Vektorräume für viele praktische Anwendungen als zentrales Hilfsmittel dient.

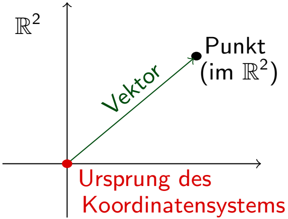
Lineare Gleichungssysteme, Approximationstheorie, Kryptographie, Stochastik, Ökonomie, Spieltheorie, Computergraphik, Statik, Genetik, Computertomographie, elektrische Netzwerke, ...

...und damit auch für viele Bereiche der angewandten Informatik.

Vektor

- Geometrische Veranschaulichung

Ein Vektor ist die (orientierte) Abszisse, die ein Punkt im Vektorraum mit dem Ursprung des Koordinatensystems verbindet.



- Räumliche Interpretierung

Ein Vektor ist ein n-Tupel $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x_i \in K\,, \quad i = 1, 2, ..., n$, welches die **Position des Punktes** mit Koordinaten $x_1, x_2, ..., x_n$ im **n-dimensionalen Vektorraum** über K beschreibt.

Lineare Algebra

Die Theorie der Vektorräume (= lineare Algebra) ermöglicht **Einsicht in die Struktur linearer Probleme und ihre Lösung**.

Anmerkung

Lineare Probleme sind häufig eine **Vereinfachung realer Probleme der Praxis** (Naturwissenschaft, Technik).

Damit man die „gut ausgearbeitete“ Theorie der linearen Algebra für ihre Lösung anwenden kann, muss man wissen:

Was bedeutet linear?

Welche Probleme sind linear?

Definition

Probleme sind linear, wenn die Unbekannten in **erster Potenz** auftreten.

Beispiel: Die Gleichungssysteme (LGS)

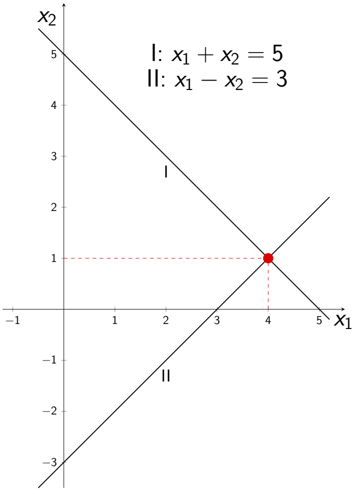
- Das nichtlineare Gleichungssystem

$$x_1^{2} + x_2 = 10$$
$$x_1^{2} + x_2^{2} = 10$$

- Potenz der Unbekannten: 2
- Lösung: $x_1 = 3, x_2 = 1$
- Verfahren: Newton (aufwendig, VO Numerische Mathematik)

Welche Probleme sind linear?

- Das lineare Gleichungssystem



\- Potenz der Unbekannten: 1
\- Lösung:
$x_2 = 5 - x_1 \Rightarrow x_1 - (5 - x_1) = 3$
$\Rightarrow 2x_1 = 8 \Rightarrow x_1 = 4$
$\Rightarrow x_2 = 1$
\- Verfahren: GAUSS (unsere Vorlesung)
\- geometrisch: Schnittpunkt zweier Geraden, die den Gleichungen genügen

Wie ist es bei **drei** Unbekannten?
Die Gleichungen beschreiben eine Hyperebene im **drei-dimensionalen** Raum.

Lerninhalte

- Einleitung
- Vektorräume
- Lineare Abbildungen und Matrizen
- Lineare Gleichungssysteme, Gauss-Algorithmus und LU-Zerlegung
- Rang, Basis und Dimension
- Inverse Matrix
- Euklidische Vektorräume
- Determinanten
- Eigenwerte

Literatur

- G. Fischer: Lineare Algebra, Vieweg
- R. Walter: Einführung in die Lineare Algebra, Vieweg
- K. Jänich: Lineare Algebra, Springer

Zahlenbereiche

- Natürliche Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \qquad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- Ganze Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

- Rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}$$

- Reelle Zahlen

$$\mathbb{R} = \{\textit{Punkte auf der Zahlengerade}\}$$

- Komplexe Zahlen

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x,\ y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

Zahlenbereiche

Offensichtlich gilt:

$$\mathbb{N} \overset{①}{\subset} \mathbb{Z} \overset{②}{\subset} \mathbb{Q} \overset{③}{\subset} \mathbb{R} \overset{④}{\subset} \mathbb{C}$$

① $\forall n \in \mathbb{N} \; : \; n \in \mathbb{Z}$

$-2 \in \mathbb{Z}$ aber $-2 \notin \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

② $\forall z \in \mathbb{Z} \; : \; z = \frac{z}{1} \quad \Rightarrow \quad z \in \mathbb{Q}$

$\frac{22}{7} = 3.14\ldots \in \mathbb{Q}$ aber $\frac{22}{7} \notin \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

③ $\forall q \in \mathbb{Q} \; : \; q = \dfrac{p}{r} \quad (p \in \mathbb{Z}, \, r \in \mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad q \in \mathbb{R}$

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (Beweis später) $\quad \Rightarrow \quad \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

④ $\forall r \in \mathbb{R} \; : \; r = r + 0i \quad \Rightarrow \quad r \in \mathbb{C}$

$1 + 2i \in \mathbb{C}$ aber $1 + 2i \notin \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Beweis (indirekt): $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Angenommen, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, das heißt $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Durch Kürzen können wir erreichen, dass <u>n oder m</u> ungerade ist [wenn nicht, kürzen wir mit 2 weiter].

$\Rightarrow 2 = (\sqrt{2})^2 = (\frac{m}{n})^2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2$

$\Rightarrow m^2$ ist gerade $\Rightarrow m$ ist gerade [wenn m ungerade wäre, kann m^2 nicht gerade sein].

$\Rightarrow n$ ist ungerade [wenn m gerade ist, muss n ungerade sein].

Da m gerade ist, folgt $m = 2l$.

$\Rightarrow 2 = (\frac{2l}{n})^2 = \frac{4l^2}{n^2} \Rightarrow 2n^2 = 4l^2 \Rightarrow n^2 = 2l^2$

$\Rightarrow n^2$ ist gerade $\Rightarrow n$ ist gerade

$\rightarrow$ Widerspruch! [n ist ungerade]

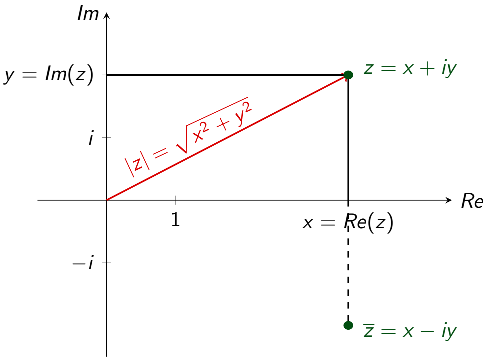
$\Rightarrow$Also ist die Annahme $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ nicht wahr $\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Komplexe Zahlen

Definition

$$z \in \mathbb{C} \quad \overset{DEF}{\Longleftrightarrow} \quad z = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R} \qquad i^2 = -1$$

- $i \ldots$ imaginäre Einheit
- $x = Re(z) \ldots$ Realteil von z
- $y = Im(z) \ldots$ Imaginärteil von z
- $\overline{z} = x - iy \ldots$ konjugiert komplexe Zahl zu z
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \ldots$ Betrag von z



Komplexe Zahlen

Beweis: $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (x+iy)(x-iy) &&= \\ &= x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 &&= \\ &= x^2 + y^2 &&= |z|^2 \end{aligned}$$

Natürliche Zahlen – vollständige Induktion

- Das schwache Prinzip

  Angenommen, A ist eine Aussage, deren Wahrheitswert von $n \in \mathbb{N}$ abhängt, d. h. $A(n)$.
  Der Beweis, dass $A(n)$ wahr ist (gilt) für alle natürlichen Zahlen, d. h. für $\forall n \in \mathbb{N}$, besteht aus folgenden drei Schritten:
  - **Schritt 1: Induktionsanfang (IB)**
    Beweis, dass $A(1)$ wahr ist (gilt)
  - **Schritt 2: Induktionsannahme (IA)**
    Angenommen, dass $A(k)$ wahr ist (gilt) für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$
  - **Schritt 3: Induktionsschritt (IS)**
    Beweis, dass $A(k+1)$ wahr ist (aufgrund dessen, dass $A(k)$ wahr ist)

Natürliche Zahlen – vollständige Induktion

- Das starke Prinzip

  Wie beim schwachen Prinzip, der Unterschied ist im

  Schritt 2:

  Angenommen, dass für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass $A(1), A(2), \ldots, A(k-1), A(k)$ wahr sind

  Schritt 3:

  Beweis, dass $A(k+1)$ wahr ist aufgrund der Annahme aus Schritt 2 (d. h. dass alle $A(i) \quad i \leq k$ wahr sind)

Bemerkung

Es lässt sich zeigen, dass beide Prinzipien äquivalent sind

Äquivalenz schwaches Prinzip $\Leftrightarrow$ starkes Prinzip

- Schwaches Prinzip $\Rightarrow$ Starkes Prinzip

  Schritt 1: identisch bei beiden Prinzipien

  Schritt 2: Wenn das schwache Prinzip gilt, dann folgt aus der Gültigkeit von $A(1)$ [Induktionsanfang] auch die Gültigkeit von $A(k+1) = A(2)$ für $k = 2$. Daraus beweist man $A(3), \dots$

  Damit ergibt sich für ein beliebiges, aber festes k die Gültigkeit $A(1), A(2), \dots, A(k-1), A(k)$, was die **Induktionsannahme für das starke Prinzip** darstellt.

  Schritt 3: ist trivial (wenn das schwache Prinzip gilt, dann folgt die Gültigkeit von $A(k+1)$ direkt aus der Gültigkeit von $A(k)$.

- Starkes Prinzip $\Rightarrow$ Schwaches Prinzip

  Offensichtlich

Nützliche Formeln

Seien $n \in \mathbb{N}$, $A(n) : \sum_{i=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}$

Also $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Beweis</u>

- IB: $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \qquad \Rightarrow A(1) \textit{ ist wahr}$$

- IA: Angenommen, es gilt

$$A(k) = \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$

Nützliche Formeln

- IS: Beweis, dass $A(k+1)$ gilt

$$A(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} i = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} i}_{IA} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 =$$

$$= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

$\Rightarrow$ Gültigkeit für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Nützliche Formeln

Seien $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\sum_{i=0}^{n} x^i = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

Also $x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ [Summe der geometrischen Reihe]

<u>Beweis:</u>

- IB: $n = 0$

$$\sum_{i=0}^{0} x^i = x^0 = 1 = \frac{1 - x^{0+1}}{1 - x} = 1 \qquad A(0) \textit{ ist wahr}$$

- IA: Angenommen, $A(k)$ gilt für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}_0$

$$A(k) = \sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$$

Nützliche Formeln

- IS: Beweis, dass $A(k+1)$ gilt

$$\sum_{i=0}^{k+1} x^i = \sum_{i=0}^{k} x^i + x^{k+1} = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} + x^{k+1} =$$

$$= \frac{1-x^{k+1}+(1-x)x^{k+1}}{1-x} = \frac{1-x^{k+1}+x^{k+1}-x^{k+2}}{1-x} =$$

$$= \frac{1-x^{k+2}}{1-x} = \frac{1-x^{(k+1)+1}}{x-1}$$

$\Rightarrow A(k+1)$ gilt

$\Rightarrow A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Algebraische Strukturen

Menge $\longrightarrow$ **Gruppe** $\longrightarrow$ **Ring** $\longrightarrow$ **Körper**

Verknüpfung

Unter einer Verknüpfung auf einer Menge M versteht man eine Vorschrift $*$, die zwei gegebenen Elementen $a, b \in M$ ein neues Element $a * b \in M$ zuordnet, d. h. eine Abbildung

$$* : \quad MxM \to M \qquad (a, b) \mapsto (a*b)$$

Verknüpfung – Beispiele

- M=$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $*: +, \cdot$
  Hier gilt, dass für $\forall a, b \in M \Rightarrow a{*}b \in M$ ist.
  $\underline{\mathbb{N}:}$
  $\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{N} \wedge a + b \in \mathbb{N}$
  $a = 5,\ b = 1: \qquad 5 \cdot 1 = 5 \in \mathbb{N} \qquad 5 + 1 = 6 \in \mathbb{N}$

- M=$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $*$: arithmetisches Mittel $(a, b) \mapsto \frac{1}{2}(a + b)$
  $\underline{\mathbb{Q}:}$
  $\forall a,\ b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{1}{2}(a + b) \in \mathbb{Q}$
  $a = \frac{p_1}{q_1}, \quad b = \frac{p_2}{q_2} \qquad (p_1,\ p_2 \in \mathbb{Z},\ q_1,\ q_2 \in \mathbb{N})$

  $\frac{1}{2}(a + b) = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{2 q_1 q_2} \in \mathbb{Q}$ Zähler $\in \mathbb{Z}$, Nenner $\in \mathbb{N}$

Verknüpfung – Gegenbeispiel

Gegenbeispiel:

M$= \mathbb{N}$ und $* : -$

$\rightarrow \quad \exists(a, b) \quad a * b \notin \mathbb{N}$

$$a = 3,\ b = 5 \qquad \longrightarrow \qquad a * b = 3 - 5 = -2 \notin \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow$ also: $-$ ist keine Verknüpfung auf $\mathbb{N}$

Gruppe

Gruppe

Eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $*$ heißt Gruppe, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

Assoziativgesetz:

$(a*b)*c = a*(b*c) \quad \forall a, b, c \in G$

Es gibt ein neutrales Element $e \in G$, sodass

$e*a = a \qquad \forall a \in G$

Es gibt ein inverses Element $a' \in G$ von a, sodass

$a'*a = e$ für **jedes** $a \in G$

Abelsche Gruppe

Die Gruppe heißt abelsche Gruppe, falls **zusätzlich** $a*b = b*a$ für alle $a, b \in G$ (Kommutativgesetz).

Gruppe – Beispiel

- $G = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $* : +$

  $\underline{\mathbb{Z} :}$

  Assoziativgesetz:

  $$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$$

  $$(-7 + 5) - 8 = -7 + (5 - 8)$$

  Neutrales Element:

  $$0 \quad \forall a \in \mathbb{Z} \qquad a + 0 = a$$

  Inverses Element:

  $$-a \quad \forall a \in \mathbb{Z} \qquad a + (-a) = a - a = 0$$

Gruppe – Gegenbeispiele

- Gegenbeispiel 1: $G = \mathbb{N}$ und $* : \cdot$

  Assoziativgesetz gilt, $\exists$ neutrales Element (1), aber $\nexists$ inverses Element
  $n \in \mathbb{N} \quad \rightarrow$ inverses Element sollte $n' = \frac{1}{n}$ sein (damit $n \cdot n' = 1$), aber
  $\frac{1}{n} \notin \mathbb{N} \quad n \neq 1$!
  Also: $\mathbb{N}$ mit $\cdot$ ist <u>keine</u> Gruppe!

- Gegenbeispiel 2: $G = \mathbb{R}$ und $*$: das arithmetische Mittel

  $*$ ist nicht assoziativ $(a * b) * c = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(a + b) + c] \neq \frac{1}{2}[a + \frac{1}{2}(b + c)] = a * (b * c)$

  $\nexists$ kein neutrales Element (0): $\frac{1}{2}[a + 0] \neq a * 0 \neq a$

  $\nexists$ inverses Element

Ring

Ring

Eine Menge R zusammen mit zwei Verknüpfungen

$+ \qquad R \times R \to R \qquad (a,b) \mapsto a+b$ („Addition“)

$\cdot \qquad R \times R \to R \qquad (a,b) \mapsto a \cdot b$ („Multiplikation“)

heißt Ring, wenn folgendes gilt:

- R zusammen mit der Addition $(+)$ ist eine abelsche Gruppe
- Die Multiplikation ist assoziativ
- Es gelten die Distributivgesetze, d. h. für alle $a, b, c \in$ R gilt:
  $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
  $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Kommutativer Ring

Ein Ring heißt kommutativ, wenn $a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall a, b \in$ R.

Ring

- Ein Element $1 \in R$ heißt Einselement, wenn $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \qquad \forall a \in \mathrm{R}$.
- Beispiel für kommutative Ringe:
  $\mathrm{R} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
  sind zusammen mit der üblichen Addition und Multiplikation kommutative Ringe

Körper

Körper

Eine Menge K zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$+ \qquad K \times K \to K \qquad (a, b) \mapsto a + b$$
$$\cdot \qquad K \times K \to K \qquad (a, b) \mapsto a \cdot b$$

heißt **Körper**, wenn folgendes gilt:

- K zusammen mit der Addition $+$ ist eine abelsche Gruppe (ihr neutrales Element wird mit 0, das zu $a \in K$ inverse Element mit $-a$ bezeichnet
- $K^* = K \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation $\cdot$ ist eine abelsche Gruppe (ihr neutrales Element wird mit 1, das zu $a \in K^*$ inverse Element mit a^{-1} bezeichnet. Man schreibt $b/a = a^{-1}b = ba^{-1}$.
- Es gelten die Distributivgesetze, d. h. für $a, b, c \in K$ gilt:
  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Körper – Beispiel

- Beispiel 1:
  Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind Körper (mit der üblichen Addition und Multiplikation).

  $\underline{\mathbb{R}:}$
  $(\mathbb{R},+)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem inversen Element $-a$ und dem neutralen Element 0.

  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist ebenso eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 1 und dem inversen Element $\frac{1}{a} = a^{-1}$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.

  Die Gültigkeit der Distributivgesetze ist offensichtlich.

Körper – Beispiel

- Beispiel 2:

  $K = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

  $+ : (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$
  $\cdot \ : (a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$

  (K,$+$) ist eine abelsche Gruppe mit $(0, 0)$ als neutralem Element der Addition und $(-a, -b)$ als inversem Element von (a, b).
  (K $\setminus\{0, 0\}, \cdot)$ ist ebenso eine kommutative (abelsche) Gruppe mit $(1, 0)$ als neutralem Element der Multiplikation und $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ als multiplikativem Inversen.

  Wir nennen $(K, +, \cdot)$ den Körper der komplexen Zahlen mit der Bezeichnung $\mathbb{C}$.

Körper – Gegenbeispiel & Fazit

- Gegenbeispiel:
  $\mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation ist kein Körper, (obwohl es ein Ring ist*), weil $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ keine abelsche Gruppe ist.
  z. B. wenn 1 das neutrale Element wäre, dann gibt es zu -5 kein inverses Element in $\mathbb{Z}$, sodass $-5 \cdot x = 1 (x = -\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z})$

  *Anmerkung: in $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist die Multiplikation assoziativ, was für den Ring ausreichend ist.

Fazit:

Rationale Zahlen, reelle Zahlen und komplexe Zahlen (mit den oben angegebenen Verknüpfungen) bilden einen Körper.

Vektorräume

Definition Vektorraum:

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$.

Eine (nicht leere) Menge V zusammen mit einer inneren Verknüpfung

$\oplus \quad V \times V \to V \quad (x, y) \mapsto x \oplus y \quad$ (Vektoraddition)

und einer äußeren Verknüpfung

$\odot \quad K \times V \to V \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda \odot x \quad$ (Skalarmultiplikation – Multiplikation mit Skalaren)

heißt ein Vektorraum über K oder ein K-Vektorraum, wenn die folgenden **10 Axiome** gelten:

Vektorraumaxiome (1)

V1 Abgeschlossenheit bezüglich $\oplus$:

$$\forall x, y \in V \quad x \oplus y \in V$$

V2 Assoziativität bezüglich $\oplus$:

$$\forall x, y, z \in V \quad x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

V3 Existenz eines neutralen Elements bezüglich $\oplus$:
Es gibt ein Element $0 \in V$ mit:

$$\forall x \in V \quad x \oplus 0 = x$$

V4 Existenz eines inversen Elements bezüglich $\oplus$:
Zu jedem $x \in V$ gibt es ein Element $(-x) \in V$ mit:

$$x \oplus (-x) = 0$$

V5 Kommutativität bezüglich $\oplus$:

$$\forall x, y \in V \quad x \oplus y = y \oplus x$$

Vektorraumaxiome (2)

V6 Abgeschlossenheit bezüglich $\odot$:

$$\forall x \in V, \forall \lambda \in K \quad \lambda \odot x \in V$$

V7

$$\forall x, y \in V, \forall \lambda \in K \quad \lambda \odot (x \oplus y) = \lambda \odot x \oplus \lambda \odot y$$

V8

$$\forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in K \quad (\lambda + \mu) \odot x = \lambda \odot x \oplus \mu \odot x$$

V9

$$\forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in K \quad \lambda \odot (\mu \odot x) = (\lambda \cdot \mu) \odot x$$

V10

$$\forall x \in V \quad 1 \odot x = x$$

Vektorraumaxiome

Bemerkung

Aufgrund V1 -V5 ist $(V, \oplus)$ eine abelsche Gruppe.

Anmerkung

Elemente von V heißen Vektoren.

Beispiel – Standardraum über K

$$V = K^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in K, n \in \mathbb{N}\}$$

$$\oplus \;:\; K^n \times K^n \to K^n \qquad (x, y) \mapsto x \oplus y \quad \text{(Vektoraddition)}$$

$$\begin{aligned} x \oplus y &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \oplus (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ &\{\in K^n \text{ weil } x_i + y_i \in K \ \ \forall i = 1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

$$\odot \;:\; K \times K^n \to K^n \qquad (\lambda, x) \mapsto \lambda \odot x \quad \text{(Skalarmultiplikation)}$$

$$\lambda \odot x = \lambda \odot (x_1, x_2, \ldots x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$$

Reeller Vektorraum

Konkret für $K = \mathbb{R}$

Sei $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Die Menge } \mathbb{R}^n = \{x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;:\; x_i \in \mathbb{R}\,,\; i = 1, 2, \ldots, n\}$$

heißt **n-dimensionaler reeller Vektorraum**.

Vektoren

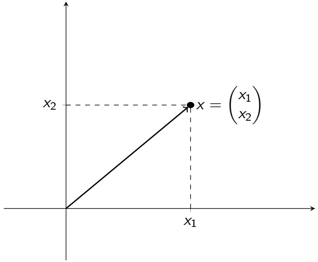
$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ heißt ein **n-dimensionaler reeller Vektor** oder

ein **Punkt im n-dimensionalen reellen Vektorraum**.

Die reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ heißen die **Koordinaten von** x.

<u>Beispiel:</u>

$n = 2$ $\quad \mathbb{R}^2$ – Punkte der Ebene
$n = 3$ $\quad \mathbb{R}^3$ – Punkte des Raumes



Operationen im $\mathbb{R}^n$

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$.

- Vektoraddition

$$\oplus \ : \ x \oplus y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad + : \text{„übliche“ Addition in } \mathbb{R}$$

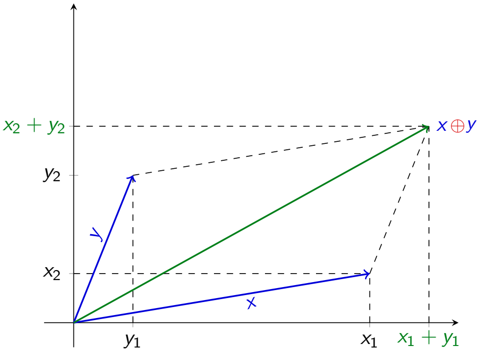
- Skalarmultiplikation

$$\odot \ : \ \lambda \odot x = \lambda \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{bmatrix} \quad \cdot : \text{„übliche“ Multiplikation in } \mathbb{R}$$

Veranschaulichung

- Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$ (Parallelogramm)

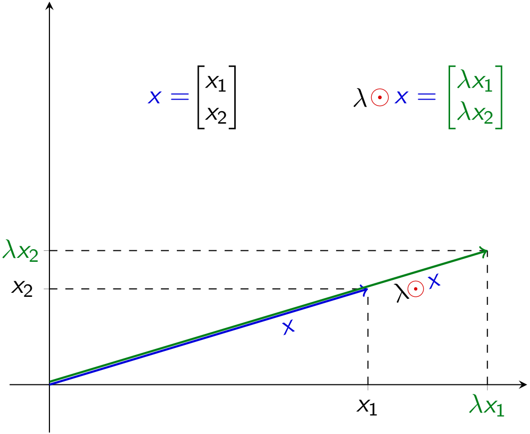
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad x \oplus y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}$$



Vektor: beschreibt die Lage des Punktes im Vektorraum

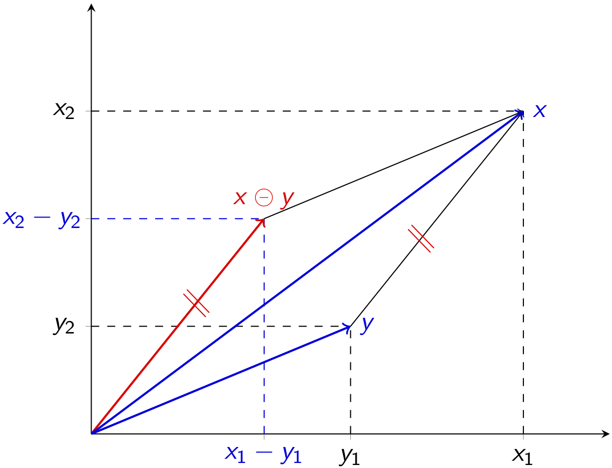
Veranschaulichung

- Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^2$ (Dehnung eines Vektors)



Veranschaulichung

- Vektorsubtraktion im $\mathbb{R}^2$ (Parallelogramm)



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \; y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$x \oplus -y = x \ominus y =$$
$$= \begin{bmatrix} x_1 + (-y_1) \\ x_2 + (-y_2) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{bmatrix}$$

Beweis, dass $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum ist

- **V1** $x, y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ weil } x_i + y_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

- **V2** $x, y, z \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x \oplus (y \oplus z) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \oplus \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \oplus \left(\begin{bmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \\ \vdots \\ y_n + z_n \end{bmatrix} \right) =$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ x_2 + y_2 + z_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{bmatrix} \overset{*}{=} \begin{bmatrix} (x_1 + y_1) + z_1 \\ (x_2 + y_2) + z_2 \\ \vdots \\ (x_n + y_n) + z_n \end{bmatrix} = (x \oplus y) \oplus z$$

[$*$ Addition in $\mathbb{R}$ ist assoziativ]

Beweis, dass $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum ist

- V3

$$\exists\, 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad [\text{weil } 0 \in \mathbb{R}] \qquad \text{und es gilt } \forall x \in \mathbb{R}^n:$$

$$x \oplus 0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 0 \\ x_2 + 0 \\ \vdots \\ x_n + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x$$

Beweis, dass $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum ist

- V4 zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ $\exists$ inverses Element bezüglich $\oplus$

$$(-x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \{\text{weil } \forall x_i \in \mathbb{R} : \ \exists(-x_i) \in \mathbb{R}$$

sodass

$$x \oplus (-x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + (-x_1) \\ x_2 + (-x_2) \\ \vdots \\ x_n + (-x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_1 \\ x_2 - x_2 \\ \vdots \\ x_n - x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Beweis, dass $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum ist

- V5 Kommutativität bezüglich $\oplus$: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$x \oplus y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \stackrel{*}{=} \begin{bmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_2 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{bmatrix} = y \oplus x$$

[$*$ Addition in $\mathbb{R}$ ist kommutativ]

- V6 Abgeschlossenheit bezüglich $\odot$: $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \odot x = \begin{bmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{bmatrix} \stackrel{*}{\in} \mathbb{R}^n \qquad [* \text{ weil } \lambda \cdot x_i \in \mathbb{R} \quad \forall x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n]$$

Beweis, dass $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum ist

- V7 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \odot (x \oplus y) = \lambda \odot \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) = \lambda \odot \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot (x_1 + y_1) \\ \lambda \cdot (x_2 + y_2) \\ \vdots \\ \lambda \cdot (x_n + y_n) \end{bmatrix} \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=} \begin{bmatrix} \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot y_1 \\ \lambda \cdot x_2 + \lambda \cdot y_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n + \lambda \cdot y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \lambda \cdot y_1 \\ \lambda \cdot y_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot y_n \end{bmatrix} = \lambda \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \oplus \lambda \odot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda \odot x \oplus \lambda \odot y$$

[$*$ Multiplikation distributiv in $\mathbb{R}$]

Beweis, dass $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum ist

- V8 $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$(\lambda + \mu)\odot x = \lambda\odot x\oplus\mu\odot x$$

$$(\lambda + \mu)\odot x = (\lambda + \mu)\odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda + \mu) \cdot x_1 \\ (\lambda + \mu) \cdot x_2 \\ \vdots \\ (\lambda + \mu) \cdot x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 + \mu \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n + \mu \cdot x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \mu \cdot x_1 \\ \mu \cdot x_2 \\ \vdots \\ \mu \cdot x_n \end{bmatrix} = \lambda\odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \mu\odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda\odot x\oplus\mu\odot x$$

Beweis, dass $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum ist

- V9 $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda \odot (\mu \odot x) = \lambda \odot \left(\mu \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = \lambda \odot \begin{bmatrix} \mu \cdot x_1 \\ \mu \cdot x_2 \\ \vdots \\ \mu \cdot x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot (\mu \cdot x_1) \\ \lambda \cdot (\mu \cdot x_2) \\ \vdots \\ \lambda \cdot (\mu \cdot x_n) \end{bmatrix} \stackrel{*}{=}$$

$$\stackrel{*}{=} \begin{bmatrix} (\lambda \cdot \mu) \cdot x_1 \\ (\lambda \cdot \mu) \cdot x_2 \\ \vdots \\ (\lambda \cdot \mu) \cdot x_n \end{bmatrix} = (\lambda \cdot \mu) \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (\lambda \cdot \mu) \odot x$$

[$*$ Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist assoziativ]

Beweis, dass $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$ ein Vektorraum ist

- V10 $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad 1 \in \mathbb{R}$

$$1 \odot x = 1 \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_2 \\ \vdots \\ 1 \cdot x_n \end{bmatrix} \stackrel{*}{=} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x$$

$[*$ weil $1 \cdot x_i = x_i \ , \ x_i \in \mathbb{R} \ \ \forall i = 1, \dots, n]$

Beispiel: Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$

- Beispiel

V2 $$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L.S. $$x \oplus y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

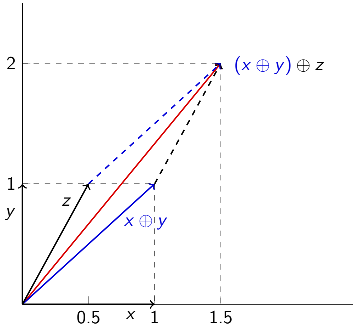
$$(x \oplus y) \oplus z = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

R.S. $$y \oplus z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

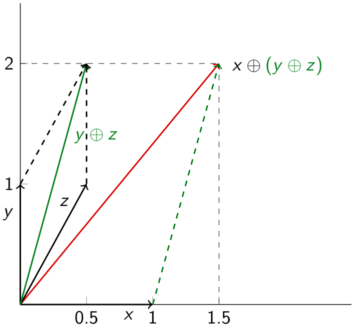
$$x \oplus (y \oplus z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Beispiel: Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$

L. S.



R. S.



Beispiel: Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^2$

V8 $(\lambda + \mu) \odot x = \lambda \odot x \oplus \mu \odot x$

$$\lambda = 0.5 \qquad \mu = 2 \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L.S.

$$\lambda + \mu = 0.5 + 2 = 2.5$$

$$(\lambda + \mu) \odot x = 2.5 \odot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

R.S.

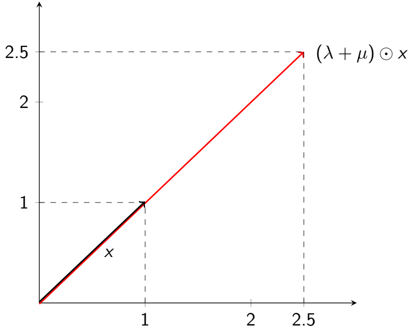
$$\lambda \odot x = 0.5 \odot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\mu \odot x = 2 \odot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

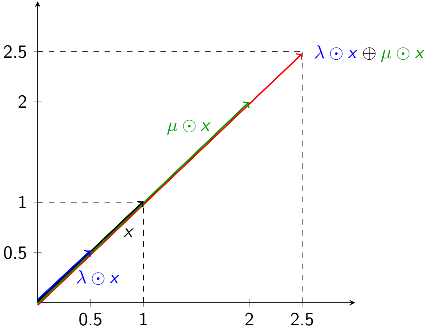
$$\lambda \odot x \oplus \mu \odot x = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

Beispiel: Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^2$

L. S.



R. S.



Beispiel: kein Vektorraum

- Beweis, dass

$$V = \left\{ z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x, y \geq 0 \right\}$$

mit $\oplus, \odot$ (Operationen wie oben definiert)

kein Vektorraum ist:

V4 inverses Element zu $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \notin V$

V6 ist auch nicht erfüllt, denn für $\lambda = -1 \in \mathbb{R}$ ist

$$\lambda \odot z = -1 \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \notin V$$

weil $-x, -y \leq 0$ für $x, y \geq 0$

Beispiel: kein Vektorraum

- Beweis, dass $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ mit

$$\oplus : \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$\odot : \quad \lambda \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kein Vektorraum ist:

V1–V9 sind erfüllt

V10 gilt aber nicht für $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq 0$

$$1 \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x$$

Bemerkung

Dieses Beispiel zeigt, dass V10 **nicht** aus den anderen Axiomen herleitbar ist.

Vektorraum der Funktionen

- Beweis, dass $(V, \oplus, \odot)$ mit

$$V = \{f \mid f : A \to K \text{ eine Funktion}\}$$

$A \neq \emptyset$ (eine nicht leere Menge)

K : ein Körper

und

$$\oplus : \quad (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in A$$
$$\odot : \quad \lambda \odot f(x) = \lambda \cdot f(x) \qquad \forall \lambda \in K, \quad \forall x \in A$$

(Also: $+$ und $\cdot$ sind Addition und Multiplikation im Körper K)

ein Vektorraum ist:

V1 $\quad f \oplus g$ ist wieder eine Funktion

V6 $\quad \lambda \odot f$ ist auch eine Funktion

Vektorraum der Funktionen

V2 $((f \oplus g) \oplus h)(x) = (f \oplus g)(x) + h(x) =$
$= (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$
$= f(x) + (g \oplus h)(x) = (f \oplus (g \oplus h))(x) \qquad \forall x \in A, \ \forall f, g \in V$

Also $(f \oplus g) \oplus h \ = \ f \oplus (g \oplus h)$

V5 $f \oplus g \ = \ g \oplus f$

V3 Neutrales Element ist die *Null*-Funktion

$0 : \quad A \to K \quad$ wobei $\quad \forall x \in A \ : \ 0(x) = 0 \in K$

$(f \oplus 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + 0 = f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f \oplus 0 = f \qquad \forall f \in V, \ \forall x \in A$

V4 Inverses Element zu $\forall f \in V$ ist $\quad -f : A \to K \qquad x \mapsto -f(x)$

$(f \oplus (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0 = 0(x)$

$\Rightarrow f \oplus (-f) = 0$

V7-V10 gelten auch

Eigenschaften eines Vektorraumes

Eigenschaften eines Vektorraumes

Sei V ein Vektorraum über K. Dann gilt für $\forall x \in V$ und $\forall \lambda \in K$:

1. $0 \odot x = 0$
2. $(-1) \odot x = -x$
3. $\lambda \odot 0 = 0$

Beweis

1. $$\underline{0} \overset{V4}{=} x \oplus (-x) \overset{V10}{=} 1 \odot x \oplus (-x) = (0+1) \odot x \oplus (-x) =$$
$$\overset{V8}{=} (0 \odot x \oplus 1 \odot x) \oplus (-x) \overset{V10}{=} (0 \odot x \oplus x) \oplus (-x) =$$
$$\overset{V2}{=} 0 \odot x \oplus (x \oplus (-x)) = 0 \odot x \oplus 0 \overset{V3}{=} \underline{0 \odot x}$$

2. $$\underline{-x} \overset{V3}{=} (-x) \oplus 0 \overset{1.}{=} (-x) \oplus 0 \odot x = (-x) \oplus (1-1) \odot x =$$
$$\overset{V8}{=} (-x) \oplus (1 \odot x \oplus (-1) \odot x) \overset{V10}{=} (-x) \oplus (x \oplus (-1) \odot x)$$
$$\overset{V2}{=} ((-x) \oplus x) \oplus (-1) \odot x \overset{V5}{=} (x \oplus (-x)) \oplus (-1) \odot x \overset{V4}{=} 0 \oplus (-1) \odot x = \underline{(-1) \odot x}$$

Eigenschaften eines Vektorraumes

3. PS-Aufgabe

Vereinbarung

Ab nun werden wir wegen einfacher Schreibweise die Multiplikationszeichen $\cdot$ und $\odot$ weglassen. (D. h. statt $\lambda \cdot \mu$ und $\lambda \odot x$ wird nur $\lambda\mu$ und λx geschrieben.)

Für die Vektoraddition $\oplus$ wird nur $+$ (bzw. $-$) benutzt (so wie auch für die Skalaraddition). (D. h. statt $x \oplus y$ und $\lambda + \mu$ wird $x + y$ und $\lambda + \mu$ geschrieben, also **ohne** zwischen $\oplus$ und $+$ zu unterscheiden.)

Lineare Abbildungen und Matrizen

- Definition (Matrix)

  Eine $m \times n$-Matrix A ist eine Anordnung von mn Elementen $a_{ij} \in K$ (K : Körper) ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) nach folgendem Schema:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Kurze Schreibweise:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$$

a_{ij} : Koeffizient der Matrix A $\quad (i = 1, \ldots, m;\ \ j = 1, \ldots, n)$

$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$: Zeile i von A $\quad (i = 1, \ldots, m)$

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \ : \ \text{Spalte } j \text{ von } A \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Definition

- $M(m \times n)$ **bezeichnet** die Menge aller $m \times n$-Matrizen (über dem gleichen Körper K).
- Eine $n \times n$-Matrix heißt eine **quadratische Matrix**.

Eigenschaften

- Zeilen sind Elemente des K^n
- Spalten sind Elemente des K^m

Definition

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Mit $1 \in K$, $0 \in K$ heißt $n \times n$-**Einheitsmatrix** (über K).

Vereinbarung

Im Weiteren betrachten wir die Matrizen mit Koeffizienten (Elementen) aus $K = \mathbb{R}$, d. h. die **reellen Matrizen**.

Dann gilt in einer $m \times n$ reellen Matrix:

- Zeilen sind Vektoren aus $\mathbb{R}^n$
- Spalten sind Vektoren aus $\mathbb{R}^m$

Definition (Transponierte Matrix)

Die $n \times m$-Matrix A^T heißt die transponierte Matrix zur $m \times n$-Matrix A, wenn für jedes Element a_{ij} $i = 1, \ldots, m;\ \ j = 1, \ldots, n$
der Matrix A gilt: $a_{ij} = a^T_{ji}$ wobei a^T_{ji} ein Element von A^T in Zeile $j = 1, 2, \ldots, n$ und Spalte $i = 1, 2, \ldots, m$ ist.

- Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ \underline{5} & 6 \end{bmatrix}_{(3\times 2)} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \overset{a^T_{13}}{\underline{5}} \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{(2\times 3)} \qquad \text{z.B.} \quad \underline{a_{31}} = \underline{5} = \underline{a^T_{13}}$$

a_{31}

- Definition (Matrix-Vektor-Produkt)

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ eine $m \times n$ Matrix und $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\underline{n}}$,

dann ist das Produkt von A und x ein Vektor $Ax \in \mathbb{R}^{\underline{m}}$:

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i \end{bmatrix}$$

- Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M(3 \times 2) \quad \Rightarrow \quad \underline{m} = 3, \underline{n} = 2$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\underline{2}}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 \\ 2-2 \\ 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\underline{3}}$$

- Was bedeutet Ax rechnerisch?

Das Matrix-Vektor-Produkt Ax gehört zu den Basis-Operationen in der numerischen linearen Algebra.

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \boxed{a_{k1} \quad a_{k2} \quad \dots \quad a_{kn}} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \boxed{a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \boxed{\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \boxed{y_k} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = y$$

Also ist

$$\underline{y_k} = a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \qquad \text{für} \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

das Skalarprodukt der Zeile k von $A \in M(m \times n)$
und des Vektors $\underline{x \in \mathbb{R}^n}$.

- Komplexität (Rechenaufwand)

  Die Berechnung von $\underline{y_k}$ benötigt n Multiplikationen $\otimes$
  (Produkte $a_{ki}x_i \quad$ für $\quad i = 1, 2, \ldots, n$) und $n - 1$ Additionen ($\oplus$).

  $\Rightarrow$ Die Berechnung des gesamten Vektors y
  braucht $m[n\otimes, (n-1)\oplus] = \underline{mn \otimes \text{ und } m(n-1)\oplus}$.

- Also hat das Produkt einer $m \times n$ Matrix mit einem $n-$Vektor die asymptotische Komplexität $\mathcal{O}(mn)$.
  Wenn $m = n$, dann ist der Rechenaufwand $2n^2 - n = \mathcal{O}(n^2)$.

Eigenschaften (Matrix-Vektor-Produkt)

Seien $A \in M(m \times n)$ und $a_i \in \mathbb{R}^m \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad$ Spalten von A. Dann gilt für $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $A(x + y) = Ax + Ay$
2. $A(\lambda x) = \lambda(Ax)$
3. $Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$

   (Ax ist eine Linearkombination von den Spalten von A)

- Beweis

1. $$A(x+y) = A\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}(x_i + y_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}(x_i + y_i) \end{pmatrix} =$$

$$\overset{\text{Distributivgesetz in } \mathbb{R}}{=} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i + \sum_{i=1}^n a_{1i}y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i + \sum_{i=1}^n a_{mi}y_i \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}y_i \end{bmatrix} = Ax + Ay$$

2. $$A(\lambda x) = A \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}\lambda x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}\lambda x_i \end{bmatrix} =$$

$$\overset{\text{Kommutativität der Multiplikation in } \mathbb{R}}{=} \begin{bmatrix} \lambda \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \lambda \sum_{i=1}^n a_{mi}\lambda x_i \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} x_i \end{bmatrix} = \lambda(Ax)$$

$$3.\ Ax = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + & \dots & + & a_{1n} & x_n \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + & \dots & + & a_{2n} & x_n \\ a_{31} & x_1 & + & a_{32} & x_2 & + & \dots & + & a_{3n} & x_n \\ & \vdots & & & \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m-1,1} & x_1 & + & a_{m-1,2} & x_2 & + & \dots & + & a_{m-1,n} & x_n \\ a_{m1} & x_1 & + & a_{m2} & x_2 & + & \dots & + & a_{mn} & x_n \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{array}\end{array} =$$

$$= x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$$

(Lineare Kombination der Spalten von A)
(Die Koeffizienten (Gewichte) dieser Linearkombination
sind x_i, $\quad i = 1, \dots, n \quad$ also die Elemente des Vektors x)

Definition

Sei $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\underline{F_A(x) = Ax} \quad \text{für } \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{und } A \in M(m \times n).$$

Eigenschaft

F_A ist **eine Abbildung**.

Definition (Abbildung)

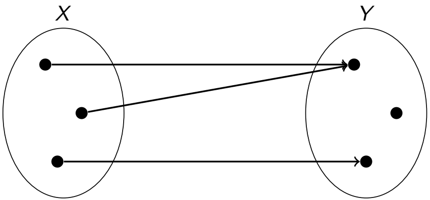
Seien X, Y zwei nicht leere Mengen.
$C : X \to Y$ heißt eine Abbildung von X nach Y,
wenn für $\underline{\forall x \in X}$ $\exists$ $\underline{\text{ein einziges } y \in Y}$, sodass $C(x) = y$.

Also muss gelten:

(i) $\forall x \in X \; \exists \; y \in Y$, sodass $C(x) = y$.

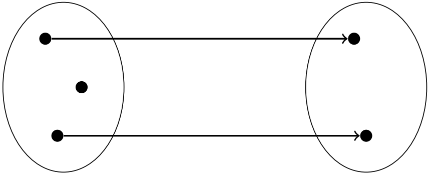
(ii) Dieses y ist eindeutig.

C_1 :



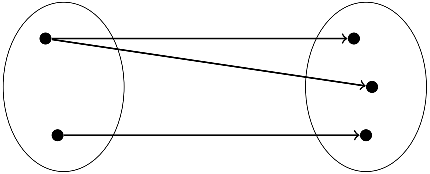
Okay

C_2 :



Falsch, da (i) **nicht** gilt

C_3 :



Falsch, da (ii) **nicht** gilt

- Beweis (Eigenschaft)

  Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$.

  $$C(x) = F_A(x) = Ax = y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i \end{bmatrix}$$

  (i) Offensichtlich für $\forall x \in X = \mathbb{R}^n \; \exists \; y \in Y = \mathbb{R}^m$.
  Da $a_{ij} \in \mathbb{R}$ und ebenso $x_i \in \mathbb{R}$, ist $y_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i$ die Summe reeller Zahlen und daher ist $y_k \in \mathbb{R}$ für alle Komponenten $k = 1, 2, \ldots, m$ des m-Vektors y.
  Damit gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^n \; \exists \; y = Ax \in \mathbb{R}^m$.

(ii) Ist das Bild $F_A(x)$ von $x \in \mathbb{R}^n$ (x : beliebig aber fix) eindeutig?
Angenommen, es gibt für $x \in \mathbb{R}^n$ zwei Bilder, die voneinander unterschiedlich sind, d. h.

$$F_A(x) = y_1$$
$$F_A(x) = y_2 \qquad \text{wobei } y_1 \neq y_2$$

Dann gilt laut der Definition:

$$y_1 = Ax$$
$$y_2 = Ax$$

$\Rightarrow$ $y_1 - y_2 = Ax - Ax = 0 \in \mathbb{R}^m \Rightarrow y_1 = y_2$, was ein Widerspruch zu unserer Annahme ist $\Rightarrow$ damit gilt (ii).

Aus der Gültigkeit von (i) und (ii) folgt, dass F_A der Abbildungs-Definition genügt.

- Was bedeutet $F_A(x)$?

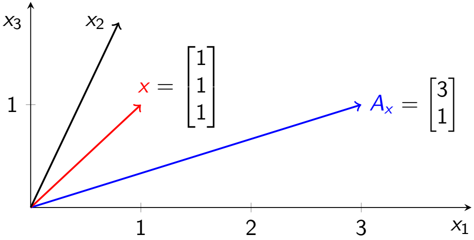
  $F_A(x) = Ax \in \mathbb{R}^m \qquad A \in M(m \times n), \quad x \in \mathbb{R}^n$

  Also Vektor x (aus $\mathbb{R}^{\underline{n}}$) wird abgebildet auf Vektor Ax (aus $\mathbb{R}^{\underline{m}}$)

- Beispiel 1 $\quad \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$

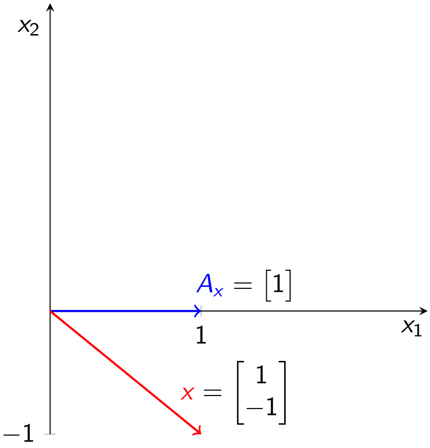
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in M(2 \times 3) \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$F_A(x) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$



- Beispiel 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \in M(1 \times 2) \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad Ax = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^1$$



$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Ein und derselbe Vektor in Vektorräumen unterschiedlicher Dimension.

- Satz (Matrix $\rightarrow$ Abbildung Korrespondenz)

  Jeder $m \times n$-Matrix A entspricht folgende Abbildung F_A :

$$F_A \quad : \quad \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \qquad \text{oder:} \quad \begin{array}{l} x \mapsto Ax \\ F_A(x) = Ax \ (\bullet) \end{array}$$

  (Beweis, dass F_A eine Abbildung ist: siehe vorige Folien)

  Und es gilt für $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

  1. $F_A(x + y) = F_A(x) + F_A(y)$
  2. $F_A(\lambda x) = \lambda F_A(x)$

- Beweis

  $F_A(x) = Ax$ und nach der Definition ist $Ax \in \mathbb{R}^m$

1. $F_A(x+y) \overset{\text{Satz } (\bullet)}{=} A(x+y) \overset{\text{(Eig. 1. / Folie 71)}}{=} Ax + Ay \overset{\text{Satz } (\bullet)}{=} F_A(x) + F_A(y)$
1. $F_A(\lambda x) \overset{\text{Satz } (\bullet)}{=} A(\lambda x) \overset{\text{(Eig. 2. / Folie 71)}}{=} \lambda(Ax) \overset{\text{Satz } (\bullet)}{=} \lambda F_A(x)$

Definition (Lineare Abbildung)

Seien V und W Vektorräume (über K). Eine Abbildung $T : V \to W$ heißt linear, wenn für $\forall x, y \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

(i) $$\underset{\substack{\in V \\ \text{(also } \underline{\text{Addition in } V}\text{)}}}{T(x+y)} = \underset{\substack{\in W \\ \text{(also } \underline{\text{Addition in } W}\text{)}}}{T(x) + T(y)}$$

(ii) $$\underset{\substack{\text{Skalarmultiplikation} \\ \underline{\text{in } V}}}{T(\lambda x)} = \underset{\substack{\text{Skalarmultiplikation} \\ \underline{\text{in } W}}}{\lambda T(x)}$$

Weil V und W Vektorräume über dem gleichen Körper K sind.

Folgerung (zum Satz Korrespondenz Matrix $\to$ Abbildung)

Sei $A \in M(m \times n)$. Dann ist

$$F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$F_A(x) = Ax$$

eine lineare Abbildung. (also nicht “nur”eine Abbildung, was vorher gezeigt wurde)

Beweis

Folgt direkt aus dem Satz, weil Eigenschaft 1. erfüllt die Bedingung (i) der Definition und analog Eigenschaft 2. des Satzes ist konform mit der Anforderung (ii) der Definition der linearen Abbildung.

- Beispiel 1 (Lineare Abbildung)

$$V = W = \mathbb{R}^2$$

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad T(x) = T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

<u>T ist eine lineare Abbildung:</u>

(i)
$$T(x) = T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$T(y) = T\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \\ (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \\ (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = T(x) + T(y) \end{aligned}$$

(ii) $$T(\lambda x) = T\left(\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = T \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \lambda x_1 - \lambda x_2 \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \lambda(x_1 - x_2) \\ \lambda(x_1 + x_2) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \lambda \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \lambda T(x)$$

- Veranschaulichung (Lineare Abbildung)

  Beispiel 1

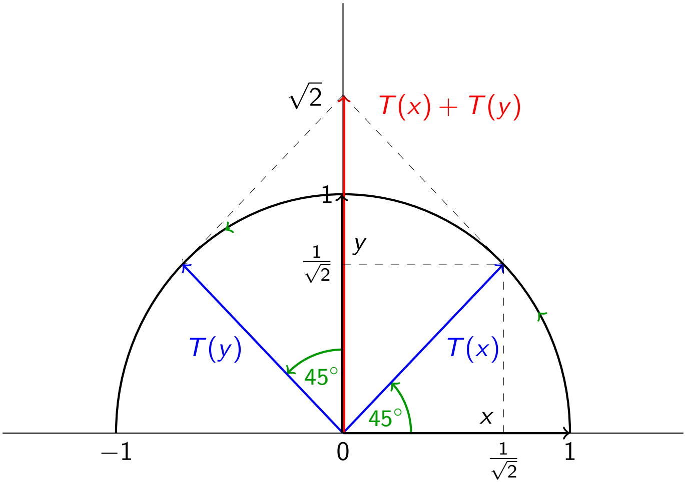
  $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$

  Ist eine Drehung von Vektor x um $45^\circ = \frac{\pi}{4}$

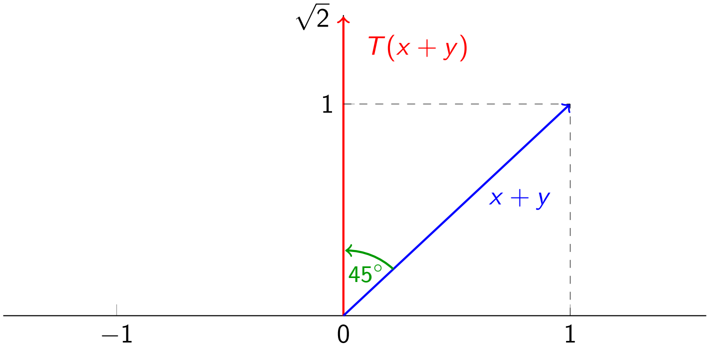
(i) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$

$$T(x) = T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$
$$T(y) = T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 - 1 \\ 1 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{T(x) + T(y)} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cdot 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$



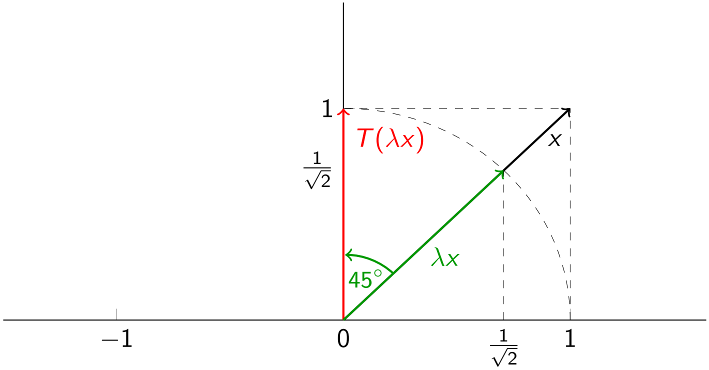
$$\underline{T(x+y)} = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1-1\\1+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2/\sqrt{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\\sqrt{2}\end{bmatrix}$$



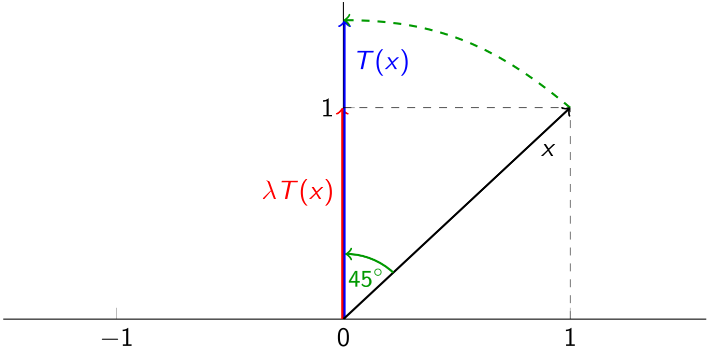
(ii) $x = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $\qquad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \lambda x = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

$$T(x) = T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}x_1-x_2\\x_1+x_2\end{bmatrix}$$

$$\underline{T(\lambda x)} = T\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \underset{\sim\sim}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$



$$\underline{\lambda T(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cdot {}^{1}\!/\!\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



- Beispiel 2 (Lineare Abbildung)

  $$V = W = \mathbb{R}^3$$

  $$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad T(x) = T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

  - ist linear ((i), (ii) leicht überprüfbar)
  - Veranschaulichung: T ist eine Projektion auf der $(x, y)-$Ebene, weil T linear ist $\Rightarrow$ die Summe $(x + y) \in \mathbb{R}^3$ projiziert auf $\mathbb{R}^2$ ergibt den gleichen Vektor, als wenn man die Projektionen der beiden Vektoren in $\mathbb{R}^2$ addieren würde.

- Beispiel 3 (**Keine** lineare Abbildung)

$$V = W = \mathbb{R}^2$$
$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}, \qquad T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} T\left[\lambda x\right] = T\left[2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right] = T\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \lambda T(x) = 2T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} T(\lambda x) \neq \lambda T(x) \\ \text{für } \forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Daher ist T **nicht** linear.

- Satz (Korrespondenz lineare Abbildung $\rightarrow$ Matrix)

  Zu jeder linearen Abbildung
  $$T \ : \ \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$
  gibt es eine eindeutig bestimmte Matrix $A \in M(m \times n)$ mit
  $$T = F_A \quad | \quad T(x) = F_A(x) = Ax$$

- Beweis

  (i) Eindeutigkeit
  Seien $A, B \in M(m \times n)$ für die gegebene lineare Abbildung T, d. h.
  $$T = F_A = F_B$$
  Zu zeigen ist, dass die beiden Matrizen gleich sind.
  Also es gilt für $\forall x \in \mathbb{R}^n$:
  $$T(x) = F_A(x) = F_B(x) \overset{\text{Definition}}{\Rightarrow} T(x) = Ax = Bx$$

Betrachten wir speziell die Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow Ae_i = Be_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$Ae_{\underline{i}} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot 0 + \dots + \underline{a_{1i} \cdot 1} + \dots + a_{1n} \cdot 0 \\ a_{21} \cdot 0 + \dots + \underline{a_{2i} \cdot 1} + \dots + a_{2n} \cdot 0 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot 0 + \dots + \underline{a_{mi} \cdot 1} + \dots + a_{mn} \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} = Be_i = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{mi} \end{bmatrix}$$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad a_{ki} = b_{ki} \quad \forall k = 1, \dots, m; \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \underline{A = B}$$

(ii) Existenz

Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear und seien $e_1, e_2, \ldots, e_n$ die Einheitsvektoren aus $\mathbb{R}^n$, dann bezeichnen wir die Bilder dieser Vektoren im $\mathbb{R}^m$ wie folgt:

$$Te_1 = T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad \in \mathbb{R}^m$$

$$Te_2 = T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \quad \in \mathbb{R}^m$$

$$\vdots$$

$$Te_n = T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \quad \in \mathbb{R}^m$$

Wir definieren dann die Matrix A durch

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \stackrel{\clubsuit}{=} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ Te_1 & Te_2 & \dots & Te_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A \in M(m \times n)$

Zu zeigen ist, dass diese Matrix der linearen Abbildung T entspricht, d. h. zu zeigen ist $\underline{F_A = T}$.

Wir zeigen, dass $F_A = T$:

Sei $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Addition von Vektoren im $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \quad x \overset{\diamondsuit}{=} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow F_A(x) &= F_A(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) && \underset{=}{F_A \text{ ist linear}} \\
&= x_1F_A(e_1) + x_2F_A(e_2) + \ldots + x_nF_A(e_n) && \underset{=}{\text{Definition von } F_A} \\
& && Ae_i = [] \begin{array}{c}\text{Spalte} \\ i \text{ von } A\end{array} \\
&= x_1Ae_1 + x_2Ae_2 + \ldots + x_nAe_n && = \\
&= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} && \underset{=}{\text{Definition von } A \ (\clubsuit)} \\
&= x_1Te_1 + x_2Te_2 + \ldots + x_nTe_n && \underset{=}{T \text{ ist linear}} \\
&= T(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots x_ne_n) && \overset{\diamondsuit}{=} T(x)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow F_A(x) = T(x) \quad \Rightarrow \quad F_A = T$$

- Folgerung (zum Satz Korrespondenz lineare Abb. $\to$ Matrix)

  Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear.
  Die dazugehörige Matrix A ist folgendermaßen konstruiert:

  Die Spalten der Matrix sind die Bilder der Einheitsvektoren.

- Siehe dazu auch Fall 1.1 darstellende Matrix.

- Beispiel

  Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung:

$$T(x) = T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & - & x_3 & + & x_2 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 \\ x_3 & - & x_2 & & \end{bmatrix}$$

- Vorsicht: Die Reihenfolge der Koordinaten ist nicht immer numerisch gegeben (Zeilen 1, 3)

Dazugehörige Matrix A:

Die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren

$$T(e_1) = T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \quad T(e_2) = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \quad T(e_3) = \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizen-Kalkül

- Addition
  Seien $A, B \in M\,(m \times n)$
  dann ist die **Summe** von A und B die Matrix C
  $$C = A + B = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & \dots & (a_{1n} + b_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{m1} + b_{m1}) & \dots & (a_{mn} + b_{mn}) \end{bmatrix}$$
- Beachten: Beide Matrizen haben die **gleiche Größe** (d. h. die gleiche Anzahl von Zeilen m und Spalten n)
- Beispiel Matrix = Bild und Addition (Differenz) von 2 Bildern

- Skalarmultiplikation

  Seien $A \in M(m \times n), \lambda \in \mathbb{R}$.
  Dann ist das Produkt des Skalars λ mit der Matrix A die Matrix $C \in M(m \times n)$

$$C = \lambda A = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Eigenschaft

Die Menge aller $m \times n$-Matrizen $\mathbf{M}(m \times n)$ **über** $\mathbb{R}$ bildet einen **Vektorraum** bezüglich obiger Matrix-Addition und Skalarmultiplikation.

- Beweis

Neutrales Element

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Inverses Element zu A

$$-A = \begin{bmatrix} (-a_{11}) & \dots & (-a_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ (-a_{m1}) & \dots & (-a_{mn}) \end{bmatrix}$$

Axiome V1–V10 überprüfbar (Proseminar)

Eigenschaft (Matrix-Addition)

Die Addition von Matrizen entspricht die Punktweise Addition der linearen Abbildungen: $F_{A+B} = F_A + F_B$

- Beweis

Betrachte $F_A, F_B, F_{A+B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$F_{A+B}(x) = (A+B)x = \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11}) & \dots & (a_{1n}+b_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{m1}+b_{m1}) & \dots & (a_{mn}+b_{mn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11})x_1 + & \dots & +(a_{1n}+b_{1n})x_n \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{m1}+b_{m1})x_1 + & \dots & +(a_{mn}+b_{mn})x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}x_1 + & \dots & +b_{1n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1}x_1 + & \dots & +b_{mn}x_n \end{bmatrix} =$$

$$= Ax \qquad + \qquad Bx =$$

$$= F_A(x) + F_B(x) = (F_A + F_B)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n =$$

$$\Rightarrow F_{A+B} = F_A + F_B$$

Eigenschaften Skalarmultiplikation

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar entspricht der punktweisen Multiplikation der Bildwerte mit dem Skalar:

$$F_{\lambda A} = \lambda F_A$$

- Beweis

Betrachte $F_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}$

$$F_{\lambda A}(x) = [\lambda A]x = \begin{bmatrix} (\lambda a_{11})x_1 + & \dots & +(\lambda a_{1n})x_n \\ & \vdots & \vdots \\ (\lambda a_{m1})x_1 + & \dots & +(\lambda a_{mn})x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda A x = \lambda F_A(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow F_{\lambda A} = \lambda F_A$$

- Multiplikation von Matrizen
- Sei $A \in M(m \times k)$ und $B \in M(k \times n)$.

  Dann ist das Produkt von A und B die Matrix $C \in M(m \times n)$

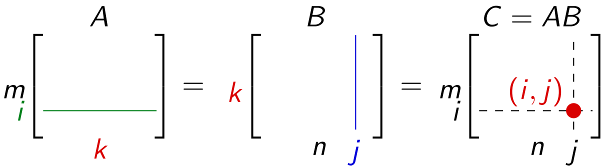
  $$C = AB = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

  mit Koeffizienten

  $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj}$

  $i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n.$

  Also: Koeffizient c_{ij} ergibt sich als Skalarprodukt von Zeile i der Matrix A mit der Spalte j der Matrix B.



- Beachte: Anzahl von Zeilen bei B = Anzahl von Spalten bei A = k
- Komplexität

Für die Berechnung von c_{ij} : k Multiplikationen, $k-1$ Additionen

C hat insgesamt mn Koeffizienten $\Rightarrow$

Die Berechnung von $C = AB$: $\begin{array}{l} mnk \text{ Multiplikationen} \\ mn(k-1) \text{ Additionen} \end{array}$

Für das Produkt von quadratischen Matrizen,

d. h. für $n = m = k$: $\begin{array}{l} n^3 Multiplikationen \\ n^3 - n^2 Additionen \end{array}$ $\Rightarrow \mathcal{O}(n^3) Operationen$

- Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in M(2 \times 3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in M(2 \times 2)$$

AB ist nicht definiert, weil die Anzahl der **Spalten** in $A \neq$ Anzahl der **Zeilen** in B $(3 \neq 2)$ ist.

- Beispiel

BA ist definiert, weil die Anzahl der Spalten in B gleich der Anzahl der Zeilen in A $(2 = 2 = k)$ ist.

Das Matrix-Produkt $C = BA$ wird berechnet nach dem folgenden Schema:

$$BA = \underset{\in M(2\times 2)}{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}}\ \underset{\in M(2\times 3)}{\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}} = \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4 & 6 & 7\\ 10 & 12 & 13\end{bmatrix}\end{array} =$$

$$\begin{bmatrix}4 & 6 & 7\\ 10 & 12 & 13\end{bmatrix} \in M(2\times 3)$$

13 = Zeile 2 von B $\times$ Spalte 3 von A $=$
$3\cdot(-1) + 4\cdot 4 = -3 + 16 = 13$

- Eigenschaft 1 (Produkt quadratischer) Matrizen

  Seien $A, B, C \in M(n\times n), \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

  (i) $A(BC) = (AB)C$ (assoziativ)

  (ii) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

  (iii) $A(B+C) = AB + AC$ (distributiv)

  (iv) $(A+B)C = AC + BC$ (distributiv)

- Beweis

  Folgt aus der Definition der jeweiligen Operationen des Matrizen-Kalküls.

- Eigenschaft 2 (Produkt **quadratischer** Matrizen)

  Seien $A, B \in M(n \times n)$.

  Es gilt allgemein nicht, dass:

  (i) $AB = BA$

  (ii) Wenn $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ oder $B = 0$

  Anders:

  (i) Das Matrix-Produkt **ist nicht** kommutativ.

  (ii) Es gibt auch Nicht-null-Matrizen, deren Produkt eine Null-Matrix ist.

- Beispiel

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 11 & -3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = BA$$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und auch $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

und trotzdem $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\left(\text{Da } BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ gilt auch hier } AB \neq BA.\right)$

- Anwendungsbeispiel (Matrix-Multiplikation)

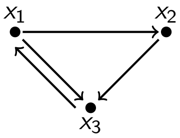
  Ein gerichteter Graph : $G = (V, E)$

  V: Menge der Ecken(Knoten)

  E: Menge der Kanten $E \subseteq V \times V \quad (x, y) \in E \Leftrightarrow x \to y \in G$

$G: \quad V = \{x_1, x_2, x_3\} \quad E = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_1, x_3), (x_3, x_1)\}$

$G:$



Die Adjazenzmatrix zu einem gerichteten Graphen
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$, wobei alle Knoten verschieden sind.
Dann $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in M(n, n)$
Heißt die Adjazenzmatrix zu G, wobei

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls}(x_i, x_j) \in E \\ 0 & sonst \end{cases}$$

- A zum obigen Graphen G:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

: Eine gerichtete Kante von x_2 nach x_3.

Weg der Länge k

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph.
Ein $(k+1)$-Tupel $(v_0, v_1, \ldots, v_k), v_i \in V,\ i = 1, 2, \ldots, k$
heißt ein Weg der Länge k von v_0 nach v_k genau dann, wenn
$(v_j, v_{j+1}) \in E \quad \forall_j = 0, 1, \ldots, k-1, d.h$

$$v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{k-1} \to v_k$$

- Im obigen Beispiel ist das 5-Tupel $(also\ k+1 = 5)$ $(x_1, x_2, x_3, x_1, x_2)$ ein Weg der Länge $k = 4$ von x_1 nach x_2

- Satz (Anzahl der Wege mit Länge k)

  Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Adjazenzmatrix A. Dann gilt:
  Die Anzahl der Wege von x_i nach x_j $(x_i, x_j \in V)$ der Länge k ist der Koeffizient der Matrix.

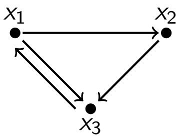
  $$A^k = A \cdot A \cdot A \cdot \cdots \cdot A$$

  an der Stelle (i, j)

- Wege der Länge 3 zum obigen Beispiel.

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

(i)	1 Weg der Länge 3	von	x_1 nach x_1
	1 Weg . . .		x_1 nach x_2
	1 Weg . . .		x_1 nach x_3
	1 Weg . . .		x_2 nach x_2
(ii)	1 Weg . . .		x_2 nach x_3
(iii)	1 Weg . . .		x_3 nach x_1
	1 Weg . . .		x_3 nach x_3



(i) $x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_1$

(ii) $x_2 \to x_3 \to x_1 \to x_3$

(iii) $x_3 \to x_1 \to x_3 \to x_1$

- Beweis

  Induktion nach k

I.B.: Klar, weil die # Wege Länge 1 sind die Koeffizienten der Adjazenzmatrix A.

I.A.: Angenommen, dass der Satz gilt für ein beliebiges aber fixes $k \in \mathbb{N}$.

I.S.: Beweis der Gültigkeit für $k+1$
Betrachte einen Weg der Länge $k+1$ von x_i nach x_j.
▶ $x_i \to x_l \to \cdots \to x_j$
Für ein x_l (also $a_{il} = 1$ weil $(i,l) \in E$).
Sei $A^k = B = (b_{pq})_{p,q=1}^n \in M(n \times n)$
Nach I.A. gibt es b_{lj} Wege der Länge k von x_l nach x_j also
b_{lj} Wege der Länge k+1 von x_i über x_l nach x_j

Betrachte alle Wege von i nach k.
Es sind alle Wege ► die sich als Summe der Wege

$$\left.\begin{array}{llllllll} \text{von} & x_i & \textit{nach} & x_j & \text{über} & x_1 & = & a_{i1}b_{1j} \\ \text{von} & x_i & \textit{nach} & x_j & \text{über} & x_2 & = & a_{i1}b_{1j} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{von} & x_i & \textit{nach} & x_j & \text{über} & x_l & = & a_{i1}b_{1j} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{von} & x_i & \textit{nach} & x_j & \text{über} & x_n & = & a_{i1}b_{1j} \end{array}\right\} \sum_{i=1}^{n} a_{il}b_{lj}$$

► : Ist entweder 0 (wenn die Kante (x_i, x_l) nicht existiert, d. h. wenn $a_{il} = 0$, also: $a_{il}b_{lj}$)
oder b_{lj} (wenn die Kante (x_i, x_l) vorhanden ist, d. h. wenn $a_{il} = 1$, also: $a_{il}b_{lj}$)
$\Rightarrow$ # Wege von x_i nach x_j ist gleich der Summe der Wege über alle $x_1, x_2, \dots, x_n$, d. h.
$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}b_{1j}$ = Produkt der Zeile i von A mit Spalte j von B = Element von Matrix
$AB = AA = A^{k+1}$ an der Stelle (i, j)

- Eigenschaft

  Es gilt:

$$(AB)^T = B^T A^T \qquad A_{m\times n} B_{n\times l} \quad \Rightarrow AB \in M(m \times l)$$

  Wiederholung:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

  Wir wissen

  A^T transponierte Matrix zu A:
  Wenn $[A]_{ij}$ das Element von A in Zeile i und Spalte j ist,
  dann $[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$.

Beweis

- Linke Seite: $[(AB)^T]_{ij} = [AB]_{ji} =$
  Zeile j von A $\times$ Spalte i von B $= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$

  Rechte Seite:

$$A^T_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B^T_{l\times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & \dots & b_{n2} \\ \vdots & & \\ b_{1l} & \dots & b_{nl} \end{bmatrix}$$

  $\left[B^T A^T\right]_{ij} =$ Zeile i von $B^T \times$ Spalte j von $A^T =$

  $= \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$

  also L. S. = R. S.

Lineare Gleichungssysteme

- Sei $A \in M(m \times n)$, $b \in \mathbb{R}^m$
  Dann heißt $Ax = b$
  ein linearen Gleichungssystem (LGS).
- Ist $b = 0$, also $Ax = 0$, so heißt das LGS homogen, sonst inhomogen.
- $\text{LÖS}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\}$ heißt die Lösungsmenge des LGS.
- Das LGS heißt lösbar, wenn $\text{LÖS}(A, b) \neq \emptyset$.

- Sei $Ax = b$ ein LGS mit $A \in M(m \times n), b \in \mathbb{R}^m$.
  Dann heißt die Matrix
  $$(A, b) = \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \in M(m \times (n+1))$$
  die erweiterte Matrix zu A.
- Beispiel
  $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned} \qquad \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$
  $$(A, b) = \left[\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

- Definition (elementare Umformungen)

  Sei $A \in M(m \times n)$.

  Es gibt 3 Typen von elementaren Zeilen-(Spalten-)Umformungen:

(i) Vertauschen von zwei Zeilen (Spalten).

(ii) Multiplikation einer Zeile (Spalte) mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

(iii) Addition eines beliebigen (reellen) Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte).

- Beispiel

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} (\mathrm{I}_s) & (\mathrm{II}_s) & (\mathrm{III}_s) \end{array} \\ \begin{array}{c} (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II}) \\ (\mathrm{III}) \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\xrightarrow[(-2)\mathrm{I}+\mathrm{II}=\mathrm{II}]{(iii)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-3)\mathrm{I}+\mathrm{III}=\mathrm{III}]{(iii)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)\mathrm{I}_s+\mathrm{III}_s=\mathrm{III}_s]{(iii)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)\mathrm{I}_s+\mathrm{II}_s=\mathrm{II}_s]{(iii)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenschaft

Sei $Ax = b$ ein LGS mit erweiterter Matrix (A, b).
Verwandelt man $(A, b) \to (A', b')$ durch elementare Zeilenumformungen, so gilt:

$$\text{LÖS}(A, b) = \text{LÖS}(A', b').$$

Beweis

Sei $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ Lösung von $Ax = b$.

Typ (i): Klar, weil es bleibt das gleiche LGS (rechte Seite b inklusive), nur die Reihenfolge der Gleichungen im LGS ist geändert $\Rightarrow$ die Lösungsmenge ändert sich nicht.

Typ (ii): Klar, in dieser einzigen Gleichung wird die linke sowie auch die rechte Seite mit dem gleichen Skalar multipliziert, dann bleibt die Lösung dieser Gleichung unverändert. Da die anderen Gleichungen unverändert bleiben, ist auch die Lösungsmenge des LGS unverändert.

Typ (iii): Wenn man $\lambda\times$Zeile i zur Zeile j addiert, können wir $i = 2$, $j = 1$ betrachten (sonst können wir es auf diesen Fall durch Anwendung von Umformung von Fall (i) bringen)

$$(A, b) \xrightarrow[\lambda\mathrm{II}+\mathrm{I}\to\mathrm{I}]{(iii)} (A', b') = \begin{bmatrix} (a_{11} + \lambda a_{21}) & \dots & (a_{1n} + \lambda a_{2n}) & (b_1 + \lambda b_2) \\ a_{21} & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Betrachte $A'x = b'$:

$$\begin{array}{ccccc} (a_{11} + \lambda a_{21})x_1 + & \dots & +(a_{1n} + \lambda a_{2n})x_n & = & b_1 + \lambda b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + & \dots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

laut Distributivgesetz in $\mathbb{R}$ folgt

$$\begin{array}{cccc} \underbrace{a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n}_{b_1} & +\lambda(\underbrace{a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n}_{b_2}) & = & b_1 + \lambda b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \dots & \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

$\Rightarrow$ Lösung des LGS ändert sich durch Umformung (iii) nicht.

Eigenschaft

Vertauscht man die r-te **Spalte** von A mit der s-ten **Spalte** (der Vektor b darf nicht vertauscht werden), so **unterscheidet** sich die Lösungsmenge von der ursprünglichen nur durch Vertauschen der r-ten mit der s-ten Koordinate des Lösungsvektors.

Beweis

Klar: Die Spalte r in A entspricht dem Koeffizienten bei x_r im LGS $Ax = b$ und die Spalte s der Unbekannten x_s. Also durch Vertauschen dieser zwei Spalten werden auch die entsprechenden Komponenten im Lösungsvektor x vertauscht.

- Definition (Halbdiagonalform)

  Eine $m \times n$-Matrix A ist in Halbdiagonalform, wenn sie von folgender Gestalt ist:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & & r & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ r \\ \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ & 1 & a_{23} & \dots & a_{2,r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} \\ & 0 & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & 1 & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ & & & & & & 0 & \end{bmatrix} \end{array}$$

- Definition (Rang)

  Die Zahl r (Also die Anzahl der Einsen in der Hauptdiagonale $=$ Anzahl der nicht-null-Zeilen) in A (oder in A^T) heißt der Rang von A (abgekürzt als $\mathrm{rg}(A)$).

- Eigenschaft: $\operatorname{rg}(A) \leq \min(m, n)$

  Beweis $\operatorname{rg}(A) \leq m \wedge \operatorname{rg}(A) \stackrel{\text{def}}{=}$ Anzahl der nicht-null-Zeilen in der Halbdiagonalform von $A^T \leq n \Rightarrow \operatorname{rg}(A) \leq \min(m, n)$.

- Eigenschaft

  Jede $m \times n$-Matrix kann mittels elementarer Zeilenumformungen und Spalten Vertauschen auf Halbdiagonalform gebracht werden.

  Beweis

(i) Ist $A = 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 0$.

(ii) Sei $A \neq 0 \Rightarrow \exists\, a_{ik} \neq 0$.

1. Durch Zeilen- und Spaltenumformungen bringe a_{ik} an die Stelle $(1, 1) \Rightarrow$ wir können also annehmen, dass $a_{11} \neq 0$.

   Multipliziere 1.Zeile mit $\frac{1}{a_{11}}$. Diese Zeile ist dann $(1, {a_{12}}', \dots, {a_{1n}}')$ mit ${a_{1k}}' = \frac{a_{1k}}{a_{11}}$, $k = 2, \dots, n$.

2. Für $i = 2, \dots m$ addiere das $(-a_{i1})$-Fache der 1.Zeile zu i-ter Zeile, $i = 2, 3, \dots, n$.

$$\Rightarrow A \to A' = \begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a'_{12} \quad \dots \quad a'_{1n} \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\quad B \quad} \\ 0 & \end{bmatrix}$$

3.

(i) Ist $B = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 1 \Rightarrow$ Eigenschaft erfüllt.

(ii) Wenn $B \neq 0$, durch Vertauschen von Zeilen und Spalten kommt man zu $a'_{22} \neq 0$.
Multipliziere die zweite Zeile mit $\frac{1}{a'_{22}}$ und
addiere das entsprechende Vielfache der 2. Zeile zu den Zeilen $3, 4, \dots, m$ darunter, sodass

$$A \to A'' = \begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & a''_{23} & \dots & a''_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \dots & a''_{mn} \end{bmatrix}$$

4. Das Verfahren solange fortsetzen, bis die Matrix in Halbdiagonalform ist.

- Beispiel

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathrm{I}_s \leftrightarrow \mathrm{V}_s]{(i)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-1)\mathrm{I}=\mathrm{I}]{(ii)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-2)\mathrm{I}+\mathrm{IV}=\mathrm{IV}]{\substack{\textcolor{blue}{(iii)} \\ \mathrm{I}+\mathrm{III}=\mathrm{III} \\ \textcolor{blue}{(iii)}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II}+\mathrm{III}=\mathrm{III}]{\textcolor{blue}{(iii)}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{IV}]{\textcolor{blue}{(i)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}_s\leftrightarrow\mathrm{IV}_s]{\textcolor{blue}{(i)}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(1/5)\mathrm{III}]{\textcolor{blue}{(ii)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3$$

- Der Gauss-Algorithmus für LGS

  Sei $Ax = b$ mit $A \in M(m \times n)$, $(m \leq n)$, $b \in \mathbb{R}^m$ ein LGS.

1. Schritt (Halbdiagonalform)

   Betrachte die **erweiterte** Matrix (A, b). Wende elementare Umformungen auf (A, b) an, sodass A in Halbdiagonalform ist.

   ! Dabei darf die letzte Spalte b von (A, b) nicht vertauscht werden.

$$(A, b) \to \underset{\text{Halbdiagonal-form}}{(\tilde{A}, \tilde{b})} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \dots \tilde{a}_{1,r} & \tilde{a}_{1,r+1} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ & 1 & \tilde{a}_{23} \dots \tilde{a}_{2,r} & \tilde{a}_{2,r+1} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & \tilde{a}_{r,r+1} & \dots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ \hline & & & & 0 & & \tilde{b}_{r+1} \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \tilde{b}_m \end{array}\right]$$

Ist eine der Zahlen $\tilde{b}_{r+1}, \ldots, \tilde{b}_m \neq 0$ (etwa $\tilde{b}_{r+1} \neq 0$ – das kann durch Zeilenvertauschen erreicht werden), so ist $Ax = b$ nicht lösbar, denn für die Zeile $r+1$ des LGS ergibt sich dann

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = \tilde{b}_{r+1} \neq 0.$$

Also Lösung von $Ax = b$ existiert nur dann, wenn

$$\tilde{b}_{r+1} = \cdots = \tilde{b}_m = 0.$$

Anders:

Das LGS $Ax = b$ ist lösbar, wenn $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, b)$.

2. Schritt (Gaussnormalform)

Seien also $\tilde{b}_{r+1} = \cdots = \tilde{b}_m = 0$.
Addiere geeignete Vielfache der r-ten Zeile zu den Zeilen darüber, sodass in der r-ten Spalte in den oberen $r-1$ Zeilen eine 0 steht (d. h. Elimination von Spalte r).

Addiere dann geeignete Vielfache der $(r-1)$-sten Zeile zu den Zeilen darüber, sodass in der $(r-1)$-sten Spalte in den oberen $r-2$ Zeilen eine 0 steht (d. h. Elimination von Spalte $r-1$)

Elimination von Spalte $r-2$

$\vdots$

Elimination von Spalte 2

$$(\tilde{A}, \tilde{b}) \underset{\text{Gauss-normalform}}{\rightarrow} (\hat{A}, \hat{b}) = \left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & & 0 & & \hat{a}_{1,r+1} & \dots & \hat{a}_{1,n} & \hat{b}_1 \\ & 1 & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & \hat{a}_{r,r+1} & \dots & \hat{a}_{rn} & \hat{b}_r \\ \hline & & & & 0 & & & \end{array}\right]$$

- Das LGS zu dieser Gaussnormalform ist $\hat{A}x = \hat{b}$

$$\hat{A}x = \begin{bmatrix} x_1 + \hat{a}_{1,r+1}\, x_{r+1} \dots \hat{a}_{1n}\, x_n \\ x_2 + \hat{a}_{2,r+1}\, x_{r+1} \dots \hat{a}_{2n}\, x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_r + \hat{a}_{r,r+1}\, x_{r+1} \dots \hat{a}_{rn}\, x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_r \end{bmatrix} = \hat{b}$$

- Die Variablen $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ können beliebig gewählt werden, also etwa $x_{r+1} = \lambda_1, x_{r+2} = \lambda_2, \ldots, x_n = \lambda_{n-r}$.

  Die allgemeine Lösung hat dann folgende Gestalt:

$$
\begin{array}{rcccccccc}
x_1 = & \hat{b}_1 & +\lambda_1 & (-\hat{a}_{1,r+1}) & +\lambda_2 & (-\hat{a}_{1,r+2}) & \cdots + \lambda_{n-r} & (-\hat{a}_{1n}) \\
x_2 = & \hat{b}_2 & +\lambda_1 & (-\hat{a}_{2,r+1}) & +\lambda_2 & (-\hat{a}_{2,r+2}) & \cdots + \lambda_{n-r} & (-\hat{a}_{2n}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_r = & \hat{b}_r & +\lambda_1 & (-\hat{a}_{r,r+1}) & +\lambda_2 & (-\hat{a}_{r,r+2}) & \cdots + \lambda_{n-r} & (-\hat{a}_{rn}) \\
x_{r+1} = & 0 & +\lambda_1 & 1 & +\lambda_2 & 0 & \cdots + \lambda_{n-r} & 0 \\
x_{r+2} = & 0 & +\lambda_1 & 0 & +\lambda_2 & 1 & \cdots + \lambda_{n-r} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_n = & 0 & +\lambda_1 & 0 & +\lambda_2 & 0 & \cdots + \lambda_{n-r} & 1 \\
 & \hat{b} & & \mu_1 & & \mu_2 & \ldots & \mu_{n-r}
\end{array}
$$

Laut obiger Bezeichnung sind die Vektoren

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mu_1 = \begin{bmatrix} -\hat{a}_{1,r+1} \\ \vdots \\ -\hat{a}_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \ldots \quad \mu_{n-r} = \begin{bmatrix} -\hat{a}_{1n} \\ \vdots \\ -\hat{a}_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ aus } \mathbb{R}^n.$$

Dann folgt für den Lösungsvektor $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x = \hat{b} + \lambda_2 \mu_2 + \cdots + \lambda_{n-r} \mu_{n-r}$$

- Beispiel (Ein lösbares LGS) $m < n$; $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, b)$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 6 \end{aligned}$$

$$A \in M(3 \times 4) \Rightarrow m = 3, n = 4 \Rightarrow x \in \mathbb{R}^4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}\mathrm{I}=\mathrm{I}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1 & 3/2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[(-3)\mathrm{I}+\mathrm{III}=\mathrm{III}]{(-3)\mathrm{I}+\mathrm{II}=\mathrm{II}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 6 & -15/2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{2\mathrm{II}=\mathrm{II}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 3/2 & 6 & -15/2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\mathrm{III}=\mathrm{III}]{(-3/2)\mathrm{II}+}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1/2 & -1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1/2)\mathrm{II}+\mathrm{I}=\mathrm{I}} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Halbdiagonalform $(\tilde{A}, \tilde{b})$ $\rightarrow$ Gaussnormalform $(\hat{A}, \hat{b})$

Aus $(\tilde{A}, \tilde{b}) \Rightarrow$
$r = 2$
(weil $\tilde{b}_{r+1} = \tilde{b}_3 = 0$).
Damit ist
$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, b) = 2$
und daher LGS lösbar.

Aus $(\hat{A}, \hat{b}) \Rightarrow$
$n - r = 4 - 2 = 2 \Rightarrow$
$x = \hat{b} + \lambda \mu_1 + \lambda_2 \mu_2$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Lösbarkeit eines LGS: der Spezialfall $m = n$

  Dann ist A in $Ax = b$ eine $n \times n$ Matrix.

  Die Lösbarkeit hängt vom $\mathrm{rg}(A)$ ab:

- Wenn A regulär (also nicht singulär), d. h. wenn $\mathrm{rg}(A) = n$, dann hat das LGS eine einzige Lösung für beliebiges b.
- Wenn A singulär ist, d. h. wenn $\mathrm{rg}(A) < n$, dann hängen die Lösungen von b ab:
  - keine Lösung: $\mathrm{rg}(A) < n$ und $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A, b)$.
  - ∞ viele Lösungen: $\mathrm{rg}(A) < n$ und $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, b)$.

Fazit:

$$\begin{aligned} \text{einzige Lösung} &: \mathrm{rg}(A) = n \\ \text{keine Lösung} &: \mathrm{rg}(A) < n \text{ und } \mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A, b) \\ \infty \text{ viele Lösungen} &: \mathrm{rg}(A) < n \text{ und } \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, b) \end{aligned}$$

- Beispiel LGS nicht lösbar ($m = n$, $\mathrm{rg}(A) < n$, $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A, b)$)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad m = n = 3 \quad \Rightarrow x \in \mathbb{R}^3$$

$$(A, b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(1/4)\mathrm{I}=\mathrm{I}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/4 & -1/4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-2\mathrm{I}+\mathrm{III}=\mathrm{III}]{2\mathrm{I}+\mathrm{II}=\mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2\mathrm{II}=\mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1/2\mathrm{II}+\mathrm{III}=\mathrm{III}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Halbdiagonalform

$\mathrm{rg}(A)=2 \neq \mathrm{rg}(A,b)=3$

(*weil* $\tilde{b}_{r+1}=1 \neq 0$)

- Satz (Lösungsmenge eines LGS $m \leq n$)

  Sei $Ax = b$ mit $A \in M(m \times n)$ und $b \in \mathbb{R}^m$ ein LGS.
  Dann gilt:

Allgemeine Lösung des inhomogenen LGS

Partikuläre Lösung + Lösung des homogenen LGS

$$\text{LÖS}(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = \hat{b} + \overbrace{\lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_{n-r}\mu_{n-r}}; \ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{R}\}.$$

- Bemerkung

1. Wählt man $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-r} = 0$, so ist $\hat{b}$ eine der Lösungen von $Ax = b$.

- $\hat{b}$ heißt die partikuläre Lösung.

- $\lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_{n-r}\mu_{n-r}$ sind die Lösungen des homogenen LGS $Ax = 0$ (weil $\hat{b} = 0$ im homogenen LGS).
  Begründung: Alle elementaren Umformungen auf $b = 0$ führen zu $\hat{b} = 0$.

  Also:

  Die allgemeine Lösung des inhomogenen LGS $Ax = b$ erhält man durch Addition der partikulären Lösung ($\hat{b}$) und der Lösung des homogenen LGS.

2. Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}$ heißen Parameter und
   $x = \hat{b} + \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \cdots + \lambda_{n-r}\mu_{n-r}$.
3. Ein homogenes LGS hat immer mindestens eine Lösung, nämlich den Nullvektor.
   $(Ax = b \quad \text{für } x = 0: \quad A \cdot 0 = 0)$
4. Die Lösungsmenge eine homogenen LGS ist:
   $$\text{LÖS}(A, 0) = \text{LÖS}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_{n-r}\mu_{n-r}; \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{R}\}$$

- Bemerkung

  Damit der Gauss-Algorithmus auf dem Rechner stabil ist („kleiner Fehler in der Matrix A des LGS hat kleinen Fehler in der Lösung zu Folge“), braucht man die sogenannte Pivotsuche:

- Komplette Pivotsuche:

- Man sucht am Anfang das Element a_{ik} aus der ganzen Matrix A, dessen Betrag am größten ist, bringt es an die Stelle (1,1) und dividiert durch dieses Element. (Dies geht mithilfe von Zeilen- und Spalten-Vertauschen.)
- Dann sucht man wieder ein Pivot in der Matrix

$$\begin{bmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{bmatrix} \in M((m-1)\times(n-1))$$

  und bringt dieses an die Stelle (2,2), usw.

  Komplexität: $n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2$ Suchoperationen $= \mathcal{O}(n^3)$

- Partielle Pivotsuche
- Man sucht in jedem Schritt des Verfahrens das betragsgrößte Element in der Spalte (also nicht in der ganzen restlichen Matrix, die zur Elimination zur Verfügung steht).
  Komplexität: $n + (n-1) + \cdots + 2$ Suchoperationen $= \mathcal{O}(n^2)$
- Es wurde gezeigt, dass in der Praxis die partielle Pivotsuche ausreichend ist.
  Vorteil: der Aufwand bei der Pivotsuche ist hier wesentlich geringer als bei der **kompletten** Pivotsuche (wo der Aufwand größer oder gleich als der Aufwand für den Gauss-Algorithmus selbst ist).

- Gauss-Algorithmus und die LU-Zerlegung

  $Ax = b$

  LU-Zerlegung

  A lässt sich mittels elementarer Umformungen auf die Form $A = LU$ bringen, dabei ist:

  L die untere Dreiecksmatrix mit Einheitsdiagonale
  U die obere Dreiecksmatrix.

  LU-Zerlegung existiert immer (auch für A singulär).

- Dann lässt sich $Ax = b$ schreiben als $L\underbrace{Ux}_{y} = b$.

  Daraus ergibt sich x als Lösung von zwei linearen Dreiecksystemen

  $$Ly = b$$
  $$Ux = y.$$

  Aus der ersten Gleichung folgt $y = L^{-1}b$.
  Dann ist $x = U^{-1}y = U^{-1}(L^{-1}b) = (U^{-1}L^{-1})b = (LU)^{-1}b = A^{-1}b$.

Also:

Der Gauss-Algorithmus und die LU-Zerlegung sind zwei Darstellungen des gleichen Lösungsprozesses für die Ermittlung von x aus dem LGS $Ax = b$.

Für die LU-Zerlegung benutzt man die Umformungen wie im Gauss-Algorithmus.

$\rightarrow$ Algorithmische Formulierung für die Berechnung von L und U aus A

- LU-Zerlegung Algorithmus

  Input: Matrix A der Größe $n \times n$

for $k = 1$ *to* $n-1$ **do**
  if $a_{kk} = 0$ **then**
    stop
  end
  for $i = k + 1$ *to* n **do**
    $m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$
  end
  for $j = k + 1$ *to* n **do**
    for $i = k + 1$ *to* n **do**
      $a_{ij} = a_{ij} - m_{ik} a_{kj}$
    end
  end
end

Outputs: L, U

L: Untere Dreiecksmatrix mit Einheitsdiagonale.
Deren subdiagonale Elemente sind $l_{ik} = m_{ik}$.

U: Obere Dreiecksmatrix.
Diagonalelemente sowie auch die Elemente über der Diagonale sind $u_{ij} = a_{ij}$.

- Die Komplexität (der Rechenaufwand)

  ist $\underset{\bigoplus}{\underset{\downarrow}{n^3/3}} + \underset{\bigotimes}{\underset{\downarrow}{n^3/3}} = \mathcal{O}(n^3)$

- Anmerkung: Stabilität des Gauss-Algorithmus wird durch Pivoting garantiert.