Graph Spanners

Algorithmen für verteilte Systeme

Sebastian Forster

Universität Salzburg

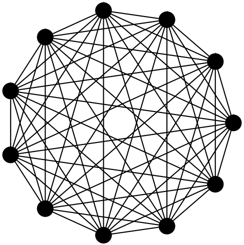
Kompression von Graphen

Ziel: Reduziere Anzahl an Kanten

Kompression von Graphen

Ziel: Reduziere Anzahl an Kanten

Dichter Graph

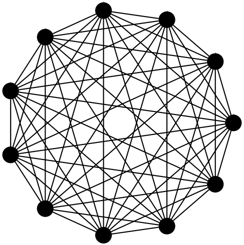


$m = \Omega(n^2)$

Kompression von Graphen

Ziel: Reduziere Anzahl an Kanten

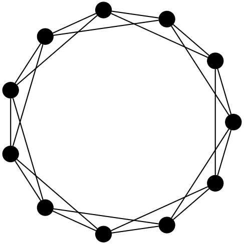
Dichter Graph



$m = \Omega(n^2)$

$\Longrightarrow$

Dünner Graph

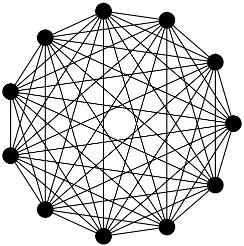


$m' \ll n^2$

Kompression von Graphen

Ziel: Reduziere Anzahl an Kanten

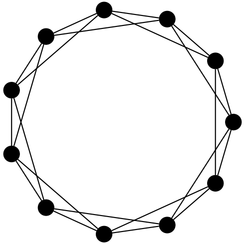
Dichter Graph



$m = \Omega(n^2)$

$\Longrightarrow$

Dünner Graph



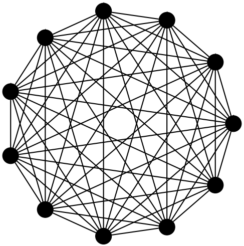
$m' \ll n^2$

Laufzeit: $T(n, m) \Rightarrow T(n, m')$

Kompression von Graphen

Ziel: Reduziere Anzahl an Kanten

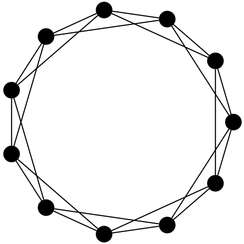
Dichter Graph



$m = \Omega(n^2)$

$\Longrightarrow$

Dünner Graph



$m' \ll n^2$

Laufzeit: $T(n, m) \Rightarrow T(n, m')$

No Free Lunch: In vielen Fällen nur mit Approximation möglich

Distanz-erhaltende Kompression

Definition

Ein *t-Spanner* (Spanner mit *Stretch* t) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Subgraph $H = (V, F)$, für den

$$\mathrm{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u, v)$$

für alle Paare von Knoten $u, v \in V$ gilt.

Distanz-erhaltende Kompression

Definition

Ein *t-Spanner* (Spanner mit *Stretch* t) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Subgraph $H = (V, F)$, für den

$$\mathrm{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u, v)$$

für alle Paare von Knoten $u, v \in V$ gilt.

Subgraph: $F \subseteq E$

Distanz-erhaltende Kompression

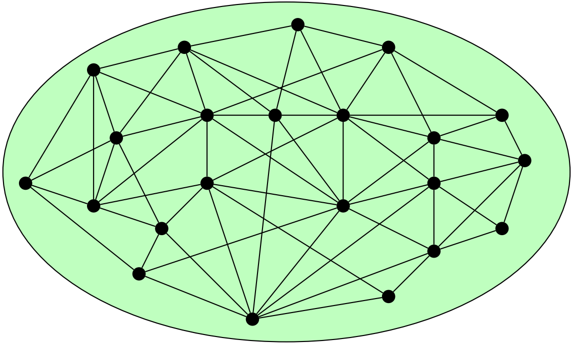
Definition

Ein *t-Spanner* (Spanner mit *Stretch* t) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Subgraph $H = (V, F)$, für den

$$\mathrm{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u, v)$$

für alle Paare von Knoten $u, v \in V$ gilt.

Subgraph: $F \subseteq E$



Distanz-erhaltende Kompression

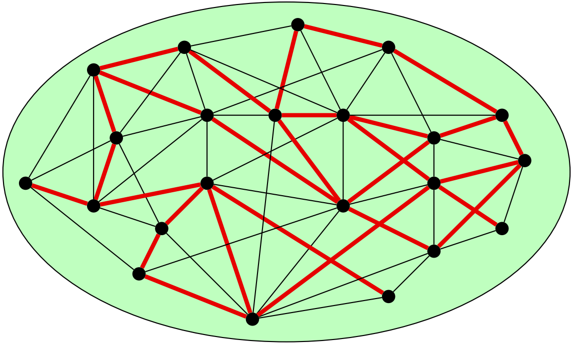
Definition

Ein *t-Spanner* (Spanner mit *Stretch t*) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Subgraph $H = (V, F)$, für den

$$\mathrm{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u, v)$$

für alle Paare von Knoten $u, v \in V$ gilt.

Subgraph: $F \subseteq E$



Grundlegende Eigenschaften

Definition

Ein *t-Spanner* (Spanner mit *Stretch* t) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Subgraph $H = (V, F)$, für den

$$\mathrm{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u, v)$$

für alle Paare von Knoten $u, v \in V$ gilt.

Grundlegende Eigenschaften

Definition

Ein *t-Spanner* (Spanner mit *Stretch* t) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Subgraph $H = (V, F)$, für den

$$\mathrm{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u, v)$$

für alle Paare von Knoten $u, v \in V$ gilt.

Lemma

Für jeden Spanner H von G gilt: $\mathrm{dist}_H(u, v) \geq \mathrm{dist}_G(u, v)$ *für jedes Paar von Knoten* $u, v \in V$.

Grundlegende Eigenschaften

Definition

Ein *t-Spanner* (Spanner mit *Stretch* t) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Subgraph $H = (V, F)$, für den

$$\mathrm{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u, v)$$

für alle Paare von Knoten $u, v \in V$ gilt.

Lemma

Für jeden Spanner H von G gilt: $\mathrm{dist}_H(u, v) \geq \mathrm{dist}_G(u, v)$ *für jedes Paar von Knoten* $u, v \in V$.

Lemma

Ein Subgraph $H = (V, F)$ ist genau dann ein t-Spanner von $G = (V, E)$ wenn

$$\mathrm{dist}_H(u, v) \leq t \cdot w_G(u, v)$$

*für **jede Kante** $(u, v) \in E$ gilt.*

Grundlegende Eigenschaften

Definition

Ein *t-Spanner* (Spanner mit *Stretch t*) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Subgraph $H = (V, F)$, für den

$$\mathrm{dist}_H(u, v) \leq t \cdot \mathrm{dist}_G(u, v)$$

für alle Paare von Knoten $u, v \in V$ gilt.

Lemma

Für jeden Spanner H von G gilt: $\mathrm{dist}_H(u, v) \geq \mathrm{dist}_G(u, v)$ *für jedes Paar von Knoten* $u, v \in V$*.*

Lemma

Ein Subgraph $H = (V, F)$ ist genau dann ein t-Spanner von $G = (V, E)$ wenn

$$\mathrm{dist}_H(u, v) \leq t \cdot w_G(u, v)$$

für ***jede Kante*** $(u, v) \in E$ *gilt.*

Heute: Ungerichtete, ungewichtete Graphen mit $w_G(u, v) = 1$

Greedy 3-Spanner

Ziel: Berechne 3-Spanner für Graph $G = (V, E)$

Greedy 3-Spanner

Ziel: Berechne 3**-Spanner für Graph** $G = (V, E)$

$F \leftarrow \emptyset$

Greedy 3-Spanner

Ziel: Berechne 3**-Spanner für Graph** $G = (V, E)$

$F \leftarrow \emptyset$

foreach $(u, v) \in E$ **do**

    Sei $H = (V, F)$

Greedy 3-Spanner

Ziel: Berechne 3-Spanner für Graph $G = (V, E)$

$F \leftarrow \emptyset$
foreach $(u, v) \in E$ **do**
  Sei $H = (V, F)$
  if $\mathrm{dist}_H(u, v) > 3$ **then**
    $F \leftarrow F \cup \{(u, v)\}$

Greedy 3-Spanner

Ziel: Berechne 3-Spanner für Graph $G = (V, E)$

```
F ← ∅
foreach (u, v) ∈ E do
    Sei H = (V, F)
    if dist_H(u, v) > 3 then
        F ← F ∪ {(u, v)}
```

Lemma

$H = (V, F)$ ist ein 3-Spanner von G.

Greedy 3-Spanner

Ziel: Berechne 3-Spanner für Graph $G = (V, E)$

$F \leftarrow \emptyset$
foreach $(u, v) \in E$ **do**
    Sei $H = (V, F)$
    if $\mathrm{dist}_H(u, v) > 3$ **then**
        $F \leftarrow F \cup \{(u, v)\}$

Lemma

$H = (V, F)$ ist ein 3-Spanner von G.

Beweis:

- Sei $(u, v) \in E$ beliebige Kante von G

Greedy 3-Spanner

Ziel: Berechne 3**-Spanner für Graph** $G = (V, E)$

```
F ← ∅
foreach (u, v) ∈ E do
    Sei H = (V, F)
    if dist_H(u, v) > 3 then
        F ← F ∪ {(u, v)}
```

Lemma

$H = (V, F)$ ist ein 3-Spanner von G.

Beweis:

- Sei $(u, v) \in E$ beliebige Kante von G
- Falls $(u, v) \in F$: $\mathrm{dist}_H(u, v) = 1 \leq 3$

Greedy 3-Spanner

Ziel: Berechne 3-Spanner für Graph $G = (V, E)$

```
F ← ∅
foreach (u, v) ∈ E do
    Sei H = (V, F)
    if dist_H(u, v) > 3 then
        F ← F ∪ {(u, v)}
```

Lemma

$H = (V, F)$ ist ein 3-Spanner von G.

Beweis:

- Sei $(u, v) \in E$ beliebige Kante von G
- Falls $(u, v) \in F$: $\text{dist}_H(u, v) = 1 \leq 3$
- Falls $(u, v) \notin F$: Sei $H' = (V, F')$ der Zustand von H direkt vor der Entscheidung „gegen“ (u, v).

Greedy 3-Spanner

Ziel: Berechne 3**-Spanner für Graph** $G = (V, E)$

$F \leftarrow \emptyset$
foreach $(u, v) \in E$ **do**
  Sei $H = (V, F)$
  if $\text{dist}_H(u, v) > 3$ **then**
    $F \leftarrow F \cup \{(u, v)\}$

Lemma

$H = (V, F)$ *ist ein* 3*-Spanner von* G*.*

Beweis:

- Sei $(u, v) \in E$ beliebige Kante von G
- Falls $(u, v) \in F$: $\text{dist}_H(u, v) = 1 \leq 3$
- Falls $(u, v) \notin F$: Sei $H' = (V, F')$ der Zustand von H direkt vor der Entscheidung „gegen" (u, v). Da $F' \subseteq F$: $\text{dist}_H(u, v) \leq \text{dist}_{H'}(u, v) \leq 3$

Dichte des Greedy 3-Spanners

Definition

Der *Girth (Taillenweite)* eines Graphen ist die Länge seines kürzesten Kreises.

Dichte des Greedy 3-Spanners

Definition

Der *Girth (Taillenweite)* eines Graphen ist die Länge seines kürzesten Kreises.

Lemma

$H = (V, F)$ *hat Girth* > 4.

Dichte des Greedy 3-Spanners

Definition

Der *Girth (Taillenweite)* eines Graphen ist die Länge seines kürzesten Kreises.

Lemma

$H = (V, F)$ *hat Girth* > 4.

Beweis:

- Annahme: H hat Kreis K der Länge ≤ 4.

Dichte des Greedy 3-Spanners

Definition

Der *Girth (Taillenweite)* eines Graphen ist die Länge seines kürzesten Kreises.

Lemma

$H = (V, F)$ hat Girth > 4.

Beweis:

- Annahme: H hat Kreis K der Länge ≤ 4.
- Sei (u, v) die zuletzt hinzugefügte Kante des Kreises.

Dichte des Greedy 3-Spanners

Definition

Der *Girth (Taillenweite)* eines Graphen ist die Länge seines kürzesten Kreises.

Lemma

$H = (V, F)$ *hat Girth* > 4.

Beweis:

- Annahme: H hat Kreis K der Länge ≤ 4.
- Sei (u, v) die zuletzt hinzugefügte Kante des Kreises. Vor dem Hinzufügen: kein Weg von u nach v der Länge 3 in H. Daher:

$$|K \setminus \{(u, v)\}| > 3$$

Dichte des Greedy 3-Spanners

Definition

Der *Girth (Taillenweite)* eines Graphen ist die Länge seines kürzesten Kreises.

Lemma

$H = (V, F)$ *hat Girth* > 4.

Beweis:

- Annahme: H hat Kreis K der Länge ≤ 4.
- Sei (u, v) die zuletzt hinzugefügte Kante des Kreises. Vor dem Hinzufügen: kein Weg von u nach v der Länge 3 in H. Daher:

$$|K \setminus \{(u, v)\}| > 3$$

Andererseits:

$$|K \setminus \{(u, v)\}| = |K| - 1 \leq 4 - 1 = 3$$

Dichte des Greedy 3-Spanners

Definition

Der *Girth (Taillenweite)* eines Graphen ist die Länge seines kürzesten Kreises.

Lemma

$H = (V, F)$ *hat Girth* > 4.

Beweis:

- Annahme: H hat Kreis K der Länge ≤ 4.
- Sei (u, v) die zuletzt hinzugefügte Kante des Kreises. Vor dem Hinzufügen: kein Weg von u nach v der Länge 3 in H. Daher:

$$|K \setminus \{(u, v)\}| > 3$$

Andererseits:

$$|K \setminus \{(u, v)\}| = |K| - 1 \leq 4 - 1 = 3$$

Widerspruch!

Dichte des Greedy 3-Spanners (Fortsetzung)

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und Girth > 4 hat $O(n^{3/2})$ Kanten.

Dichte des Greedy 3-Spanners (Fortsetzung)

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und Girth > 4 hat $O(n^{3/2})$ Kanten.

Beweis:

- Sei G ein Graph mit Girth > 4 und mindestens $3n^{3/2}$ Kanten.

Dichte des Greedy 3-Spanners (Fortsetzung)

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und Girth > 4 hat $O(n^{3/2})$ Kanten.

Beweis:

- Sei G ein Graph mit Girth > 4 und mindestens $3n^{3/2}$ Kanten.
- Entferne wiederholt Knoten mit Grad $< n^{1/2} + 1$ (mit allen anliegenden Kanten), bis jeder Knoten Grad $\geq n^{1/2} + 1$ hat.

Dichte des Greedy 3-Spanners (Fortsetzung)

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und Girth > 4 hat $O(n^{3/2})$ Kanten.

Beweis:

- Sei G ein Graph mit Girth > 4 und mindestens $3n^{3/2}$ Kanten.
- Entferne wiederholt Knoten mit Grad $< n^{1/2} + 1$ (mit allen anliegenden Kanten), bis jeder Knoten Grad $\geq n^{1/2} + 1$ hat.
- Dadurch werden $\leq n \cdot (n^{1/2} + 1) \leq 2n^{3/2}$ Kanten entfernt.

Dichte des Greedy 3-Spanners (Fortsetzung)

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und Girth > 4 hat $O(n^{3/2})$ Kanten.

Beweis:

- Sei G ein Graph mit Girth > 4 und mindestens $3n^{3/2}$ Kanten.
- Entferne wiederholt Knoten mit Grad $< n^{1/2} + 1$ (mit allen anliegenden Kanten), bis jeder Knoten Grad $\geq n^{1/2} + 1$ hat.
- Dadurch werden $\leq n \cdot (n^{1/2} + 1) \leq 2n^{3/2}$ Kanten entfernt.
- Der resultierende Graph $G' = (V', E')$ hat
  - $|E'| \geq |E| - 2n^{3/2} \geq n^{3/2}$
  - wegen $|E'| \leq |V'|^2$: $|V'| \geq |E'|/|V'| \geq |E'|/n \geq n^{3/2}/n = n^{1/2} \neq 0$
  - minimalen Grad $\geq n^{1/2} + 1 \geq |V'|^{1/2} + 1$

Dichte des Greedy 3-Spanners (Fortsetzung)

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und Girth > 4 hat $O(n^{3/2})$ Kanten.

Beweis:

- Sei G ein Graph mit Girth > 4 und mindestens $3n^{3/2}$ Kanten.
- Entferne wiederholt Knoten mit Grad $< n^{1/2} + 1$ (mit allen anliegenden Kanten), bis jeder Knoten Grad $\geq n^{1/2} + 1$ hat.
- Dadurch werden $\leq n \cdot (n^{1/2} + 1) \leq 2n^{3/2}$ Kanten entfernt.
- Der resultierende Graph $G' = (V', E')$ hat
  - $|E'| \geq |E| - 2n^{3/2} \geq n^{3/2}$
  - wegen $|E'| \leq |V'|^2$: $|V'| \geq |E'|/|V'| \geq |E'|/n \geq n^{3/2}/n = n^{1/2} \neq 0$
  - minimalen Grad $\geq n^{1/2} + 1 \geq |V'|^{1/2} + 1$

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und min. Grad $\geq n^{1/2} + 1$ hat Girth ≤ 4.

Dichte des Greedy 3-Spanners (Fortsetzung)

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und Girth > 4 hat $O(n^{3/2})$ Kanten.

Beweis:

- Sei G ein Graph mit Girth > 4 und mindestens $3n^{3/2}$ Kanten.
- Entferne wiederholt Knoten mit Grad $< n^{1/2} + 1$ (mit allen anliegenden Kanten), bis jeder Knoten Grad $\geq n^{1/2} + 1$ hat.
- Dadurch werden $\leq n \cdot (n^{1/2} + 1) \leq 2n^{3/2}$ Kanten entfernt.
- Der resultierende Graph $G' = (V', E')$ hat
  - $|E'| \geq |E| - 2n^{3/2} \geq n^{3/2}$
  - wegen $|E'| \leq |V'|^2$: $|V'| \geq |E'|/|V'| \geq |E'|/n \geq n^{3/2}/n = n^{1/2} \neq 0$
  - minimalen Grad $\geq n^{1/2} + 1 \geq |V'|^{1/2} + 1$

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und min. Grad $\geq n^{1/2} + 1$ hat Girth ≤ 4.

- Somit: G' hat Girth ≤ 4

Dichte des Greedy 3-Spanners (Fortsetzung)

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und Girth > 4 hat $O(n^{3/2})$ Kanten.

Beweis:

- Sei G ein Graph mit Girth > 4 und mindestens $3n^{3/2}$ Kanten.
- Entferne wiederholt Knoten mit Grad $< n^{1/2} + 1$ (mit allen anliegenden Kanten), bis jeder Knoten Grad $\geq n^{1/2} + 1$ hat.
- Dadurch werden $\leq n \cdot (n^{1/2} + 1) \leq 2n^{3/2}$ Kanten entfernt.
- Der resultierende Graph $G' = (V', E')$ hat
  - $|E'| \geq |E| - 2n^{3/2} \geq n^{3/2}$
  - wegen $|E'| \leq |V'|^2$: $|V'| \geq |E'|/|V'| \geq |E'|/n \geq n^{3/2}/n = n^{1/2} \neq 0$
  - minimalen Grad $\geq n^{1/2} + 1 \geq |V'|^{1/2} + 1$

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und min. Grad $\geq n^{1/2} + 1$ hat Girth ≤ 4.

- Somit: G' hat Girth ≤ 4
- Da jeder Kreis in G' auch in G existiert: G hat Girth ≤ 4 **Widerspruch!**

Beweis des Lemmas

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und min. Grad $\geq n^{1/2} + 1$ hat Girth ≤ 4.

Beweis des Lemmas

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und min. Grad $\geq n^{1/2} + 1$ hat Girth ≤ 4.

Beweis:

- Angenommen, G hat Girth ≥ 5

Beweis des Lemmas

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und min. Grad $\geq n^{1/2} + 1$ hat Girth ≤ 4.

Beweis:

- Angenommen, G hat Girth ≥ 5
- G ist nicht kreisfrei ($\sum$Grade $\geq 2n \Rightarrow$ #Kanten $\geq n$)

Beweis des Lemmas

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und min. Grad $\geq n^{1/2} + 1$ hat Girth ≤ 4.

Beweis:

- Angenommen, G hat Girth ≥ 5
- G ist nicht kreisfrei ($\sum$Grade $\geq 2n \Rightarrow$ #Kanten $\geq n$)
- Sei v ein beliebiger Knoten auf Kreis der Länge ≥ 5

Beweis des Lemmas

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und min. Grad $\geq n^{1/2} + 1$ hat Girth ≤ 4.

Beweis:

- Angenommen, G hat Girth ≥ 5
- G ist nicht kreisfrei ($\sum$Grade $\geq 2n \Longrightarrow$ #Kanten $\geq n$)
- Sei v ein beliebiger Knoten auf Kreis der Länge ≥ 5
- Betrachte Breitensuchbaum der Tiefe 2 von v

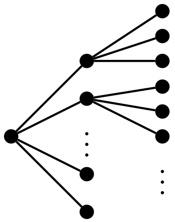
Beweis des Lemmas

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und min. Grad $\geq n^{1/2} + 1$ hat Girth ≤ 4.

Beweis:

- Angenommen, G hat Girth ≥ 5
- G ist nicht kreisfrei ($\sum$Grade $\geq 2n \implies$ #Kanten $\geq n$)
- Sei v ein beliebiger Knoten auf Kreis der Länge ≥ 5
- Betrachte Breitensuchbaum der Tiefe 2 von v



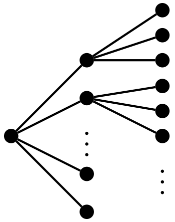
Beweis des Lemmas

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und min. Grad $\geq n^{1/2} + 1$ hat Girth ≤ 4.

Beweis:

- Angenommen, G hat Girth ≥ 5
- G ist nicht kreisfrei ($\sum$Grade $\geq 2n \Longrightarrow$ #Kanten $\geq n$)
- Sei v ein beliebiger Knoten auf Kreis der Länge ≥ 5
- Betrachte Breitensuchbaum der Tiefe 2 von v
- Keine Kanten zwischen Knoten im Baum
  (ansonsten Kreis der Länge ≤ 4)



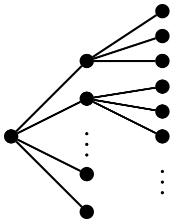
Beweis des Lemmas

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und min. Grad $\geq n^{1/2} + 1$ hat Girth ≤ 4.

Beweis:

- Angenommen, G hat Girth ≥ 5
- G ist nicht kreisfrei ($\sum$Grade $\geq 2n \Rightarrow$ #Kanten $\geq n$)
- Sei v ein beliebiger Knoten auf Kreis der Länge ≥ 5
- Betrachte Breitensuchbaum der Tiefe 2 von v
- Keine Kanten zwischen Knoten im Baum (ansonsten Kreis der Länge ≤ 4)
- Für Girth ≥ 5 muss es noch mindestens einen Knoten mit Distanz 3 zu v geben



Beweis des Lemmas

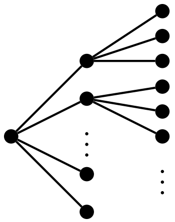
Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und min. Grad $\geq n^{1/2} + 1$ hat Girth ≤ 4.

Beweis:

- Angenommen, G hat Girth ≥ 5
- G ist nicht kreisfrei ($\sum$Grade $\geq 2n \Rightarrow$ #Kanten $\geq n$)
- Sei v ein beliebiger Knoten auf Kreis der Länge ≥ 5
- Betrachte Breitensuchbaum der Tiefe 2 von v
- Keine Kanten zwischen Knoten im Baum (ansonsten Kreis der Länge ≤ 4)
- Für Girth ≥ 5 muss es noch mindestens einen Knoten mit Distanz 3 zu v geben
- Anzahl der Knoten im Graph:

$$|V| \geq (n^{1/2})^2 + 1$$



Beweis des Lemmas

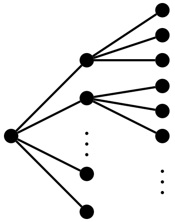
Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und min. Grad $\geq n^{1/2}+1$ hat Girth ≤ 4.

Beweis:

- Angenommen, G hat Girth ≥ 5
- G ist nicht kreisfrei ($\sum$Grade $\geq 2n \Rightarrow$ #Kanten $\geq n$)
- Sei v ein beliebiger Knoten auf Kreis der Länge ≥ 5
- Betrachte Breitensuchbaum der Tiefe 2 von v
- Keine Kanten zwischen Knoten im Baum (ansonsten Kreis der Länge ≤ 4)
- Für Girth ≥ 5 muss es noch mindestens einen Knoten mit Distanz 3 zu v geben
- Anzahl der Knoten im Graph:

$$|V| \geq (n^{1/2})^2 + 1 \geq n + 1 > n$$



Beweis des Lemmas

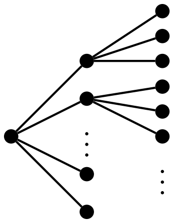
Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und min. Grad $\geq n^{1/2}+1$ hat Girth ≤ 4.

Beweis:

- Angenommen, G hat Girth ≥ 5
- G ist nicht kreisfrei ($\sum$Grade $\geq 2n \Rightarrow$ #Kanten $\geq n$)
- Sei v ein beliebiger Knoten auf Kreis der Länge ≥ 5
- Betrachte Breitensuchbaum der Tiefe 2 von v
- Keine Kanten zwischen Knoten im Baum (ansonsten Kreis der Länge ≤ 4)
- Für Girth ≥ 5 muss es noch mindestens einen Knoten mit Distanz 3 zu v geben
- Anzahl der Knoten im Graph:

$$|V| \geq (n^{1/2})^2 + 1 \geq n + 1 > n$$ **Widerspruch!**



Verallgemeinerung

Wir haben gezeigt:

Theorem

Jeder Graph G mit n Knoten hat einen 3-Spanner mit $O(n^{3/2})$ Kanten.

Verallgemeinerung

Wir haben gezeigt:

Theorem

Jeder Graph G mit n Knoten hat einen 3-Spanner mit $O(n^{3/2})$ Kanten.

Allgemein gilt:

Theorem

Für jede ganze Zahl $k \geq 2$ hat jeder Graph G mit n Knoten einen $(2k-1)$-Spanner mit $O(n^{1+1/k})$ Kanten.

Verallgemeinerung

Wir haben gezeigt:

Theorem

Jeder Graph G mit n Knoten hat einen 3-Spanner mit $O(n^{3/2})$ Kanten.

Allgemein gilt:

Theorem

Für jede ganze Zahl $k \geq 2$ hat jeder Graph G mit n Knoten einen $(2k-1)$-Spanner mit $O(n^{1+1/k})$ Kanten.

Für $k = \lceil \log n \rceil$:

Verallgemeinerung

Wir haben gezeigt:

Theorem

Jeder Graph G mit n Knoten hat einen 3-Spanner mit $O(n^{3/2})$ Kanten.

Allgemein gilt:

Theorem

Für jede ganze Zahl $k \geq 2$ hat jeder Graph G mit n Knoten einen $(2k-1)$-Spanner mit $O(n^{1+1/k})$ Kanten.

Für $k = \lceil \log n \rceil$:

$$n^{1/k} \leq n^{1/\log n}$$

Verallgemeinerung

Wir haben gezeigt:

Theorem

Jeder Graph G mit n Knoten hat einen 3-Spanner mit $O(n^{3/2})$ Kanten.

Allgemein gilt:

Theorem

Für jede ganze Zahl $k \geq 2$ hat jeder Graph G mit n Knoten einen $(2k-1)$-Spanner mit $O(n^{1+1/k})$ Kanten.

Für $k = \lceil \log n \rceil$:

$$n^{1/k} \leq n^{1/\log n} = \left(2^{\log n}\right)^{1/\log n}$$

Verallgemeinerung

Wir haben gezeigt:

Theorem

Jeder Graph G mit n Knoten hat einen 3-Spanner mit $O(n^{3/2})$ Kanten.

Allgemein gilt:

Theorem

Für jede ganze Zahl $k \geq 2$ hat jeder Graph G mit n Knoten einen $(2k-1)$-Spanner mit $O(n^{1+1/k})$ Kanten.

Für $k = \lceil \log n \rceil$:

$$n^{1/k} \leq n^{1/\log n} = \left(2^{\log n}\right)^{1/\log n} = 2^{(1/\log n)\cdot \log n}$$

Verallgemeinerung

Wir haben gezeigt:

Theorem

Jeder Graph G mit n Knoten hat einen 3-Spanner mit $O(n^{3/2})$ Kanten.

Allgemein gilt:

Theorem

Für jede ganze Zahl $k \geq 2$ hat jeder Graph G mit n Knoten einen $(2k-1)$-Spanner mit $O(n^{1+1/k})$ Kanten.

Für $k = \lceil \log n \rceil$:

$$n^{1/k} \leq n^{1/\log n} = \left(2^{\log n}\right)^{1/\log n} = 2^{(1/\log n)\cdot \log n} = 2$$

Verallgemeinerung

Wir haben gezeigt:

Theorem

Jeder Graph G mit n Knoten hat einen 3-Spanner mit $O(n^{3/2})$ Kanten.

Allgemein gilt:

Theorem

Für jede ganze Zahl $k \geq 2$ hat jeder Graph G mit n Knoten einen $(2k-1)$-Spanner mit $O(n^{1+1/k})$ Kanten.

Für $k = \lceil \log n \rceil$:

$$n^{1/k} \leq n^{1/\log n} = \left(2^{\log n}\right)^{1/\log n} = 2^{(1/\log n)\cdot \log n} = 2$$

Somit: $O(n^{1+1/k}) = O(n)$

Greedy $(2k-1)$-Spanner

Ziel: Berechne $(2k-1)$-Spanner für Graph $G = (V, E)$

$F \leftarrow \emptyset$
foreach $(u, v) \in E$ **do**
  Sei $H = (V, F)$
  if $\text{dist}_H(u, v) > 2k - 1$ **then**
    $F \leftarrow F \cup \{(u, v)\}$

Greedy $(2k-1)$-Spanner

Ziel: Berechne $(2k-1)$-Spanner für Graph $G = (V, E)$

```
F ← ∅
foreach (u, v) ∈ E do
    Sei H = (V, F)
    if dist_H(u, v) > 2k − 1 then
        F ← F ∪ {(u, v)}
```

Lemma

$H = (V, F)$ ist ein $(2k-1)$-Spanner von G.

Greedy $(2k-1)$-Spanner

Ziel: Berechne $(2k-1)$-Spanner für Graph $G = (V, E)$

```
F ← ∅
foreach (u, v) ∈ E do
    Sei H = (V, F)
    if dist_H(u, v) > 2k − 1 then
        F ← F ∪ {(u, v)}
```

Lemma

$H = (V, F)$ ist ein $(2k-1)$-Spanner von G.

Beweis:

- Wie bei 3-Spanner

Dichte des Greedy $(2k-1)$-Spanners

Lemma

$H = (V, F)$ hat Girth $> 2k$.

Dichte des Greedy $(2k-1)$-Spanners

Lemma

$H=(V,F)$ hat Girth $>2k$.

Beweis:

- Annahme: H hat Kreis K der Länge $\leq 2k$.

Dichte des Greedy $(2k-1)$-Spanners

Lemma

$H = (V, F)$ hat Girth $> 2k$.

Beweis:

- Annahme: H hat Kreis K der Länge $\leq 2k$.
- Sei (u, v) die zuletzt hinzugefügte Kante des Kreises.

Dichte des Greedy $(2k-1)$-Spanners

Lemma

$H = (V, F)$ hat Girth $> 2k$.

Beweis:

- Annahme: H hat Kreis K der Länge $\leq 2k$.
- Sei (u, v) die zuletzt hinzugefügte Kante des Kreises. Vor dem Hinzufügen: kein Weg von u nach v der Länge $2k-1$ in H.

Dichte des Greedy $(2k-1)$-Spanners

Lemma

$H = (V, F)$ hat Girth $> 2k$.

Beweis:

- Annahme: H hat Kreis K der Länge $\leq 2k$.
- Sei (u, v) die zuletzt hinzugefügte Kante des Kreises. Vor dem Hinzufügen: kein Weg von u nach v der Länge $2k-1$ in H. Daher:

$$|K \setminus \{(u, v)\}| > 2k - 1$$

Dichte des Greedy $(2k-1)$-Spanners

Lemma

$H = (V, F)$ hat Girth $> 2k$.

Beweis:

- Annahme: H hat Kreis K der Länge $\leq 2k$.
- Sei (u, v) die zuletzt hinzugefügte Kante des Kreises. Vor dem Hinzufügen: kein Weg von u nach v der Länge $2k-1$ in H. Daher:

$$|K \setminus \{(u,v)\}| > 2k-1$$

Andererseits:

$$|K \setminus \{(u,v)\}| = |K| - 1 \leq 2k - 1$$

Dichte des Greedy $(2k-1)$-Spanners

Lemma

$H = (V, F)$ hat Girth $> 2k$.

Beweis:

- Annahme: H hat Kreis K der Länge $\leq 2k$.
- Sei (u, v) die zuletzt hinzugefügte Kante des Kreises. Vor dem Hinzufügen: kein Weg von u nach v der Länge $2k-1$ in H. Daher:

$$|K \setminus \{(u, v)\}| > 2k - 1$$

Andererseits:

$$|K \setminus \{(u, v)\}| = |K| - 1 \leq 2k - 1$$

Widerspruch!

Dichte des Greedy $(2k-1)$-Spanners (Fortsetzung)

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und Girth $> 2k$ hat $O(n^{1+1/k})$ Kanten.

Dichte des Greedy $(2k-1)$-Spanners (Fortsetzung)

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und Girth $> 2k$ hat $O(n^{1+1/k})$ Kanten.

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und Minimalgrad $\geq n^{1/k} + 1$ hat Girth $\leq 2k$.

Dichte des Greedy $(2k-1)$-Spanners (Fortsetzung)

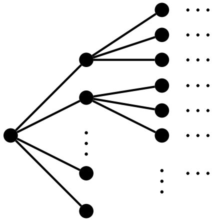
Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und Girth $> 2k$ hat $O(n^{1+1/k})$ Kanten.

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und Minimalgrad $\geq n^{1/k} + 1$ hat Girth $\leq 2k$.

Betrachte Breitensuchbaum der Tiefe k von v auf Kreis der Länge $\geq 2k+1$:



Dichte des Greedy $(2k-1)$-Spanners (Fortsetzung)

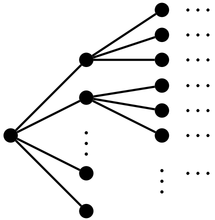
Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und Girth $> 2k$ hat $O(n^{1+1/k})$ Kanten.

Lemma

Jeder ungerichtete Graph mit n Knoten und Minimalgrad $\geq n^{1/k} + 1$ hat Girth $\leq 2k$.

Betrachte Breitensuchbaum der Tiefe k von v auf Kreis der Länge $\geq 2k + 1$:



$$|V| \geq (n^{1/k})^k + 1 = n + 1 > n$$

Vermutete Optimalität

Girth Vermutung (Erdős)

Für jedes $k \geq 2$ und jedes genügend große n gibt es einen Graph mit n Knoten und $\Omega(n^{1+1/k})$ Kanten, der keinen Kreis der Länge $\leq 2k$ besitzt.

(Bewiesen für $k = 2, 3$)

Vermutete Optimalität

Girth Vermutung (Erdős)

Für jedes $k \geq 2$ und jedes genügend große n gibt es einen Graph mit n Knoten und $\Omega(n^{1+1/k})$ Kanten, der keinen Kreis der Länge $\leq 2k$ besitzt.

(Bewiesen für $k = 2, 3$)

Lemma

Wenn die Girth Vermutung zutrifft, dann gibt es für alle genügend große n einen Graph G mit n Knoten, so dass jeder $(2k-1)$-Spanner von G mindestens $\Omega(n^{1+1/k})$ Kanten besitzt.

Vermutete Optimalität

Girth Vermutung (Erdős)

Für jedes $k \geq 2$ und jedes genügend große n gibt es einen Graph mit n Knoten und $\Omega(n^{1+1/k})$ Kanten, der keinen Kreis der Länge $\leq 2k$ besitzt.

(Bewiesen für $k = 2, 3$)

Lemma

Wenn die Girth Vermutung zutrifft, dann gibt es für alle genügend große n einen Graph G mit n Knoten, so dass jeder $(2k-1)$-Spanner von G mindestens $\Omega(n^{1+1/k})$ Kanten besitzt.

Beweis:

- Sei G wie in der Girth Vermutung: Girth $> 2k$ und $\Omega(n^{1+1/k})$ Kanten

Vermutete Optimalität

Girth Vermutung (Erdős)

Für jedes $k \geq 2$ und jedes genügend große n gibt es einen Graph mit n Knoten und $\Omega(n^{1+1/k})$ Kanten, der keinen Kreis der Länge $\leq 2k$ besitzt.

(Bewiesen für $k = 2, 3$)

Lemma

Wenn die Girth Vermutung zutrifft, dann gibt es für alle genügend große n einen Graph G mit n Knoten, so dass jeder $(2k-1)$-Spanner von G mindestens $\Omega(n^{1+1/k})$ Kanten besitzt.

Beweis:

- Sei G wie in der Girth Vermutung: Girth $> 2k$ und $\Omega(n^{1+1/k})$ Kanten
- Angenommen es gibt einen (nicht-trivialen) $(2k-1)$-Spanner H von G

Vermutete Optimalität

Girth Vermutung (Erdős)

Für jedes $k \geq 2$ und jedes genügend große n gibt es einen Graph mit n Knoten und $\Omega(n^{1+1/k})$ Kanten, der keinen Kreis der Länge $\leq 2k$ besitzt.

(Bewiesen für $k = 2, 3$)

Lemma

Wenn die Girth Vermutung zutrifft, dann gibt es für alle genügend große n einen Graph G mit n Knoten, so dass jeder $(2k-1)$-Spanner von G mindestens $\Omega(n^{1+1/k})$ Kanten besitzt.

Beweis:

- Sei G wie in der Girth Vermutung: Girth $> 2k$ und $\Omega(n^{1+1/k})$ Kanten
- Angenommen es gibt einen (nicht-trivialen) $(2k-1)$-Spanner H von G
- Sei (u, v) Kante aus $G \setminus H$: $\exists$ Pfad P der Länge $2k - 1$ von u nach v in H

Vermutete Optimalität

Girth Vermutung (Erdős)

Für jedes $k \geq 2$ und jedes genügend große n gibt es einen Graph mit n Knoten und $\Omega(n^{1+1/k})$ Kanten, der keinen Kreis der Länge $\leq 2k$ besitzt.

(Bewiesen für $k = 2, 3$)

Lemma

Wenn die Girth Vermutung zutrifft, dann gibt es für alle genügend große n einen Graph G mit n Knoten, so dass jeder $(2k-1)$-Spanner von G mindestens $\Omega(n^{1+1/k})$ Kanten besitzt.

Beweis:

- Sei G wie in der Girth Vermutung: Girth $> 2k$ und $\Omega(n^{1+1/k})$ Kanten
- Angenommen es gibt einen (nicht-trivialen) $(2k-1)$-Spanner H von G
- Sei (u, v) Kante aus $G \setminus H$: $\exists$ Pfad P der Länge $2k-1$ von u nach v in H
- $P + (u, v)$ ist Kreis der Länge $2k$ in G **Widerspruch!**

Zusammenfassung Greedy

- Liefert (vermutlich) optimalen Spanner

Zusammenfassung Greedy

- Liefert (vermutlich) optimalen Spanner
- Schnelle Impementierung im RAM Modell: $O(kn^{2+1/k})$ [Roditty/Zwick '04]

Zusammenfassung Greedy

- Liefert (vermutlich) optimalen Spanner
- Schnelle Impementierung im RAM Modell: $O(kn^{2+1/k})$ [Roditty/Zwick '04]
- Effiziente Implementierung in verteilten Modellen unklar

Zusammenfassung Greedy

- Liefert (vermutlich) optimalen Spanner
- Schnelle Impementierung im RAM Modell: $O(kn^{2+1/k})$ [Roditty/Zwick '04]
- Effiziente Implementierung in verteilten Modellen unklar
- **Ziel:** Lokale Spanner-Konstruktionen, die effiziente Implementierungen ermöglichen

Spanner-Berechnung durch Clustering

Definition

Ein Cluster ist eine Menge zusammenhängender Knoten. Ein Clustering ist eine Partition der Knoten des Graphen in Cluster.

Spanner-Berechnung durch Clustering

Definition

Ein Cluster ist eine Menge zusammenhängender Knoten. Ein Clustering ist eine Partition der Knoten des Graphen in Cluster.

Theorem ([Baswana/Sen '03])

Für jedes $k \geq 2$ kann ein $(2k-1)$-Spanner eines ungerichteten Graphen mit $O(n^{1+1/k} + kn)$ Kanten in Erwartung in $O(k^2)$ Runden im CONGEST Modell berechnet werden.

Spanner-Berechnung durch Clustering

Definition

Ein Cluster ist eine Menge zusammenhängender Knoten. Ein Clustering ist eine Partition der Knoten des Graphen in Cluster.

Theorem ([Baswana/Sen '03])

Für jedes $k \geq 2$ kann ein $(2k-1)$-Spanner eines ungerichteten Graphen mit $O(n^{1+1/k} + kn)$ Kanten in Erwartung in $O(k^2)$ Runden im CONGEST Modell berechnet werden.

Algorithmus von Baswana/Sen für gewichtete Graphen
Heute: Ungewichtete Graphen

Spanner-Berechnung durch Clustering

Definition

Ein Cluster ist eine Menge zusammenhängender Knoten. Ein Clustering ist eine Partition der Knoten des Graphen in Cluster.

Theorem ([Baswana/Sen '03])

Für jedes $k \geq 2$ kann ein $(2k-1)$-Spanner eines ungerichteten Graphen mit $O(n^{1+1/k} + kn)$ Kanten in Erwartung in $O(k^2)$ Runden im CONGEST Modell berechnet werden.

Algorithmus von Baswana/Sen für gewichtete Graphen
Heute: Ungewichtete Graphen

Ziel: Jeder Knoten weiß, welche anliegenden Kanten zum Spanner gehören

Algorithmus für 3-Spanner

$H \leftarrow (V, \emptyset)$
$Z \leftarrow \emptyset$
foreach *Knoten* $v \in V$ **do**
    Füge v zu Z mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{\sqrt{n}}$ hinzu und erstelle Cluster für v

Algorithmus für 3-Spanner

$H \leftarrow (V, \emptyset)$
$Z \leftarrow \emptyset$
foreach *Knoten* $v \in V$ **do**
    Füge v zu Z mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{\sqrt{n}}$ hinzu und erstelle Cluster für v
foreach *Knoten* $v \in V \setminus Z$ **do**
    if v *hat (mindestens) einen Nachbar aus* Z **then**
        Füge v zum Cluster eines Nachbarn aus Z in hinzu
        Füge Kante zu diesem Nachbar zu H hinzu

Algorithmus für 3-Spanner

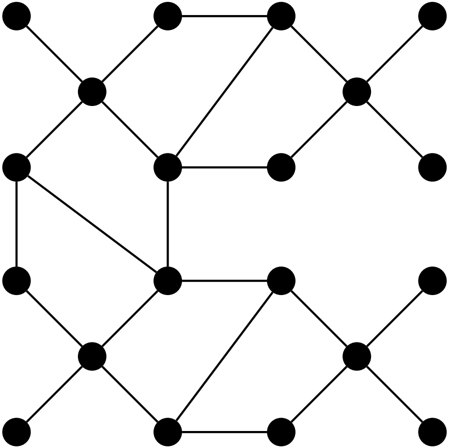
```
H ← (V, ∅)
Z ← ∅
foreach Knoten v ∈ V do
    Füge v zu Z mit Wahrscheinlichkeit p = 1/√n hinzu und erstelle Cluster für v
foreach Knoten v ∈ V \ Z do
    if v hat (mindestens) einen Nachbar aus Z then
        Füge v zum Cluster eines Nachbarn aus Z in hinzu
        Füge Kante zu diesem Nachbar zu H hinzu
foreach Knoten v ∈ V do
    if v ist Teil eines Clusters then
        Füge für jedes mit v benachbarte Cluster eine Kante zu H hinzu
    else
        Füge Kanten zu allen Nachbarn von v zu H hinzu
```

Algorithmus für 3-Spanner

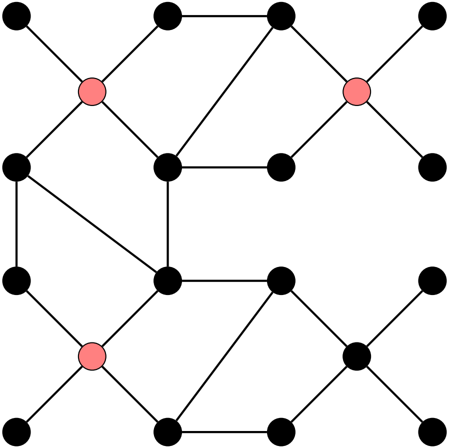
$H \leftarrow (V, \emptyset)$
$Z \leftarrow \emptyset$
foreach *Knoten* $v \in V$ **do**
    Füge v zu Z mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{\sqrt{n}}$ hinzu und erstelle Cluster für v
foreach *Knoten* $v \in V \setminus Z$ **do**
    if v *hat (mindestens) einen Nachbar aus* Z **then**
        Füge v zum Cluster eines Nachbarn aus Z in hinzu
        Füge Kante zu diesem Nachbar zu H hinzu
foreach *Knoten* $v \in V$ **do**
    if v *ist Teil eines Clusters* **then**
        Füge für jedes mit v benachbarte Cluster eine Kante zu H hinzu
    else
        Füge Kanten zu allen Nachbarn von v zu H hinzu

Laufzeit: $O(1)$ Runden

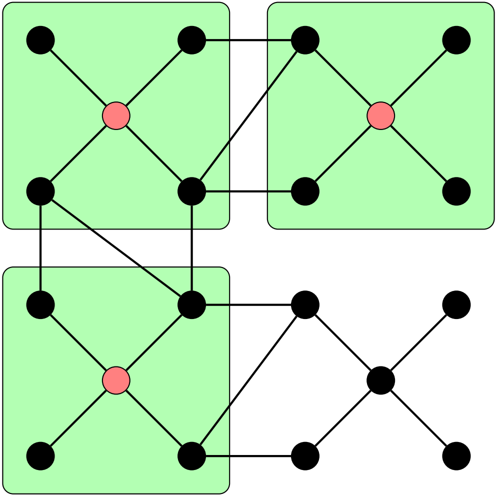
Beispiel 3-Spanner



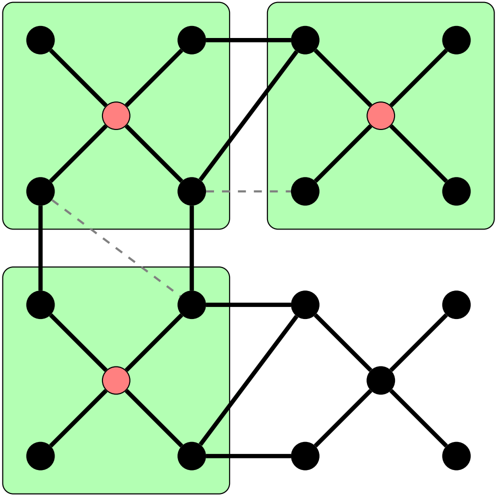
Beispiel 3-Spanner



Beispiel 3-Spanner



Beispiel 3-Spanner



Analyse des Stretch

Lemma

H hat Stretch 3.

Analyse des Stretch

Lemma

H hat Stretch 3.

Beweis:

- Sei (u, v) beliebige Kante von G

Analyse des Stretch

Lemma

H hat Stretch 3.

Beweis:

- Sei (u, v) beliebige Kante von G
- Falls u oder v nicht geclustert ist: H enthält Kante (u, v)

Analyse des Stretch

Lemma

H hat Stretch 3.

Beweis:

- Sei (u, v) beliebige Kante von G
- Falls u oder v nicht geclustert ist: H enthält Kante (u, v)
- Falls sowohl u als auch v geclustert sind:
  - Cluster von v ist zu u benachbart

Analyse des Stretch

Lemma

H hat Stretch 3.

Beweis:

- Sei (u, v) beliebige Kante von G
- Falls u oder v nicht geclustert ist: H enthält Kante (u, v)
- Falls sowohl u als auch v geclustert sind:
  - Cluster von v ist zu u benachbart
  - Daher enthält H eine Kante (u, w), wobei w ein Knoten aus dem Cluster von v ist

Analyse des Stretch

Lemma

H hat Stretch 3.

Beweis:

- Sei (u, v) beliebige Kante von G
- Falls u oder v nicht geclustert ist: H enthält Kante (u, v)
- Falls sowohl u als auch v geclustert sind:
  - Cluster von v ist zu u benachbart
  - Daher enthält H eine Kante (u, w), wobei w ein Knoten aus dem Cluster von v ist
  - Somit gibt es einen Pfad der Länge höchstens 3 von u nach v über w und das gemeinsame Zentrum des Clusters von w und v

Größe des Spanners

Drei Arten von Kanten in H:

1. Kanten zum Zentrum des Clusters für geclusterte Knoten
2. Kanten zu benachbarten Clustern für geclusterte Knoten
3. Kanten zu Nachbarn für nicht-geclusterte Knoten

Größe des Spanners

Drei Arten von Kanten in H:

1. Kanten zum Zentrum des Clusters für geclusterte Knoten
   - Höchstens eine Kante pro Knoten
2. Kanten zu benachbarten Clustern für geclusterte Knoten
3. Kanten zu Nachbarn für nicht-geclusterte Knoten

Größe des Spanners

Drei Arten von Kanten in H:

1. Kanten zum Zentrum des Clusters für geclusterte Knoten
   - Höchstens eine Kante pro Knoten
   - Höchstens n geclusterte Knoten
2. Kanten zu benachbarten Clustern für geclusterte Knoten
3. Kanten zu Nachbarn für nicht-geclusterte Knoten

Größe des Spanners

Drei Arten von Kanten in H:

1. Kanten zum Zentrum des Clusters für geclusterte Knoten
   - Höchstens eine Kante pro Knoten
   - Höchstens n geclusterte Knoten
   - $\Rightarrow O(n)$ Kanten
2. Kanten zu benachbarten Clustern für geclusterte Knoten
3. Kanten zu Nachbarn für nicht-geclusterte Knoten

Größe des Spanners

Drei Arten von Kanten in H:

1. Kanten zum Zentrum des Clusters für geclusterte Knoten
   - Höchstens eine Kante pro Knoten
   - Höchstens n geclusterte Knoten
   - $\Rightarrow O(n)$ Kanten
2. Kanten zu benachbarten Clustern für geclusterte Knoten
   - Höchstens $|Z|$ Kanten pro Knoten
3. Kanten zu Nachbarn für nicht-geclusterte Knoten

Größe des Spanners

Drei Arten von Kanten in H:

1. Kanten zum Zentrum des Clusters für geclusterte Knoten
   - Höchstens eine Kante pro Knoten
   - Höchstens n geclusterte Knoten
   - $\Rightarrow O(n)$ Kanten
2. Kanten zu benachbarten Clustern für geclusterte Knoten
   - Höchstens $|Z|$ Kanten pro Knoten
   - $\mathrm{Ex}[|Z|] = pn = \sqrt{n}$
3. Kanten zu Nachbarn für nicht-geclusterte Knoten

Größe des Spanners

Drei Arten von Kanten in H:

1. Kanten zum Zentrum des Clusters für geclusterte Knoten
   - Höchstens eine Kante pro Knoten
   - Höchstens n geclusterte Knoten
   - $\Rightarrow O(n)$ Kanten
2. Kanten zu benachbarten Clustern für geclusterte Knoten
   - Höchstens $|Z|$ Kanten pro Knoten
   - $\mathrm{Ex}[|Z|] = pn = \sqrt{n}$
   - Höchstens n geclusterte Knoten
3. Kanten zu Nachbarn für nicht-geclusterte Knoten

Größe des Spanners

Drei Arten von Kanten in H:

1. Kanten zum Zentrum des Clusters für geclusterte Knoten
   - Höchstens eine Kante pro Knoten
   - Höchstens n geclusterte Knoten
   - $\Rightarrow O(n)$ Kanten
2. Kanten zu benachbarten Clustern für geclusterte Knoten
   - Höchstens $|Z|$ Kanten pro Knoten
   - $\mathrm{Ex}[|Z|] = pn = \sqrt{n}$
   - Höchstens n geclusterte Knoten
   - $\Rightarrow O(n^{3/2})$ Kanten in Erwartung
3. Kanten zu Nachbarn für nicht-geclusterte Knoten

Größe des Spanners

Drei Arten von Kanten in H:

1. Kanten zum Zentrum des Clusters für geclusterte Knoten
   - Höchstens eine Kante pro Knoten
   - Höchstens n geclusterte Knoten
   - $\Rightarrow O(n)$ Kanten
2. Kanten zu benachbarten Clustern für geclusterte Knoten
   - Höchstens $|Z|$ Kanten pro Knoten
   - $\mathrm{Ex}[|Z|] = pn = \sqrt{n}$
   - Höchstens n geclusterte Knoten
   - $\Rightarrow O(n^{3/2})$ Kanten in Erwartung
3. Kanten zu Nachbarn für nicht-geclusterte Knoten
   - In Erwartung höchstens $\frac{1}{p} = \sqrt{n}$ Nachbarn pro Knoten

Größe des Spanners

Drei Arten von Kanten in H:

1. Kanten zum Zentrum des Clusters für geclusterte Knoten
   - Höchstens eine Kante pro Knoten
   - Höchstens n geclusterte Knoten
   - $\Rightarrow O(n)$ Kanten
2. Kanten zu benachbarten Clustern für geclusterte Knoten
   - Höchstens $|Z|$ Kanten pro Knoten
   - $\text{Ex}[|Z|] = pn = \sqrt{n}$
   - Höchstens n geclusterte Knoten
   - $\Rightarrow O(n^{3/2})$ Kanten in Erwartung
3. Kanten zu Nachbarn für nicht-geclusterte Knoten
   - In Erwartung höchstens $\frac{1}{p} = \sqrt{n}$ Nachbarn pro Knoten
     Waiting Time Bound!

Größe des Spanners

Drei Arten von Kanten in H:

1. Kanten zum Zentrum des Clusters für geclusterte Knoten
   - Höchstens eine Kante pro Knoten
   - Höchstens n geclusterte Knoten
   - $\Rightarrow O(n)$ Kanten
2. Kanten zu benachbarten Clustern für geclusterte Knoten
   - Höchstens $|Z|$ Kanten pro Knoten
   - $\mathrm{Ex}[|Z|] = pn = \sqrt{n}$
   - Höchstens n geclusterte Knoten
   - $\Rightarrow O(n^{3/2})$ Kanten in Erwartung
3. Kanten zu Nachbarn für nicht-geclusterte Knoten
   - In Erwartung höchstens $\frac{1}{p} = \sqrt{n}$ Nachbarn pro Knoten
     Waiting Time Bound!
   - Höchstens n nicht-geclusterte Knoten

Größe des Spanners

Drei Arten von Kanten in H:

1. Kanten zum Zentrum des Clusters für geclusterte Knoten
   - Höchstens eine Kante pro Knoten
   - Höchstens n geclusterte Knoten
   - $\Rightarrow O(n)$ Kanten
2. Kanten zu benachbarten Clustern für geclusterte Knoten
   - Höchstens $|Z|$ Kanten pro Knoten
   - $\mathrm{Ex}[|Z|] = pn = \sqrt{n}$
   - Höchstens n geclusterte Knoten
   - $\Rightarrow O(n^{3/2})$ Kanten in Erwartung
3. Kanten zu Nachbarn für nicht-geclusterte Knoten
   - In Erwartung höchstens $\frac{1}{p} = \sqrt{n}$ Nachbarn pro Knoten
     Waiting Time Bound!
   - Höchstens n nicht-geclusterte Knoten
   - $\Rightarrow O(n^{3/2})$ Kanten in Erwartung

Größe des Spanners

Drei Arten von Kanten in H:

1. Kanten zum Zentrum des Clusters für geclusterte Knoten
   - Höchstens eine Kante pro Knoten
   - Höchstens n geclusterte Knoten
   - $\Rightarrow O(n)$ Kanten
2. Kanten zu benachbarten Clustern für geclusterte Knoten
   - Höchstens $|Z|$ Kanten pro Knoten
   - $\mathrm{Ex}[|Z|] = pn = \sqrt{n}$
   - Höchstens n geclusterte Knoten
   - $\Rightarrow O(n^{3/2})$ Kanten in Erwartung
3. Kanten zu Nachbarn für nicht-geclusterte Knoten
   - In Erwartung höchstens $\frac{1}{p} = \sqrt{n}$ Nachbarn pro Knoten
     Waiting Time Bound!
   - Höchstens n nicht-geclusterte Knoten
   - $\Rightarrow O(n^{3/2})$ Kanten in Erwartung

$\Rightarrow$ Spanner mit $O(n^{3/2})$ Kanten in Erwartung

Algorithmus für $(2k-1)$-Spanner

$H \leftarrow (V, \emptyset)$

Sei C_0 triviales Clustering: Jedes Cluster besteht aus einem Knoten

Algorithmus für $(2k-1)$-Spanner

$H \leftarrow (V, \emptyset)$

Sei C_0 triviales Clustering: Jedes Cluster besteht aus einem Knoten

for $i = 0$ **to** $k-1$ **do**

  Arbeite auf Subgraph G_i induziert durch Knoten in C_i

  if $i = k-1$ **then**

    $C_{i+1} = \emptyset$

  else

    Füge jedes Cluster aus C_i mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n^{1/k}}$ zu C_{i+1} hinzu

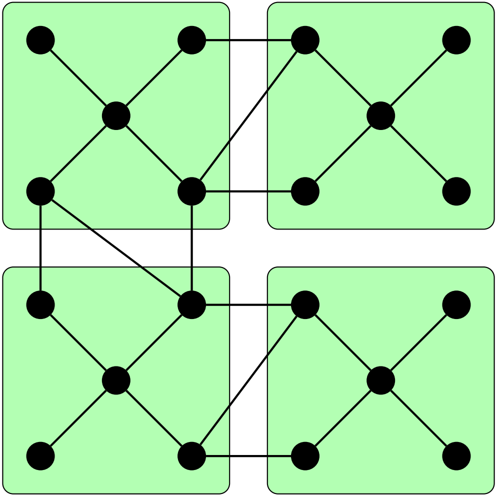
Algorithmus für $(2k-1)$-Spanner

```
H ← (V, ∅)
Sei C_0 triviales Clustering: Jedes Cluster besteht aus einem Knoten
for i = 0 to k − 1 do
    Arbeite auf Subgraph G_i induziert durch Knoten in C_i
    if i = k − 1 then
        C_{i+1} = ∅
    else
        Füge jedes Cluster aus C_i mit Wahrscheinlichkeit 1/n^{1/k} zu C_{i+1} hinzu
    foreach Knoten v aus Cluster in C_i \ C_{i+1} do
        if v hat (mindestens) einen Nachbar in einem Cluster aus C_{i+1} then
            Füge v zu einem der Nachbarcluster aus C_{i+1} hinzu
            Füge Kante zu entsprechendem Nachbar zu H hinzu
        else
```

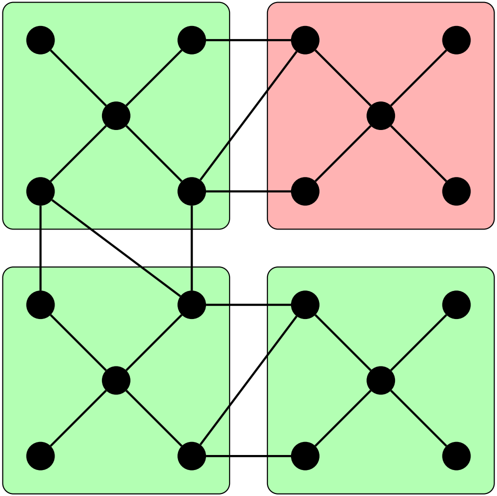
Algorithmus für $(2k-1)$-Spanner

```
H ← (V, ∅)
Sei C_0 triviales Clustering: Jedes Cluster besteht aus einem Knoten
for i = 0 to k − 1 do
    Arbeite auf Subgraph G_i induziert durch Knoten in C_i
    if i = k − 1 then
        C_{i+1} = ∅
    else
        Füge jedes Cluster aus C_i mit Wahrscheinlichkeit 1/n^{1/k} zu C_{i+1} hinzu
    foreach Knoten v aus Cluster in C_i \ C_{i+1} do
        if v hat (mindestens) einen Nachbar in einem Cluster aus C_{i+1} then
            Füge v zu einem der Nachbarcluster aus C_{i+1} hinzu
            Füge Kante zu entsprechendem Nachbar zu H hinzu
        else
            Füge für jedes mit v benachbarte Cluster aus C_i eine Kante zu H hinzu
```

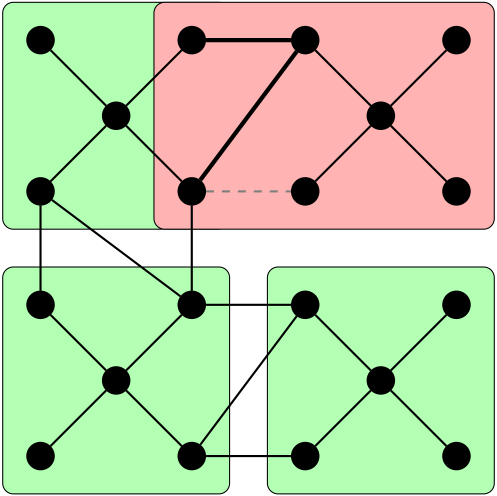
Beispiel-Iteration



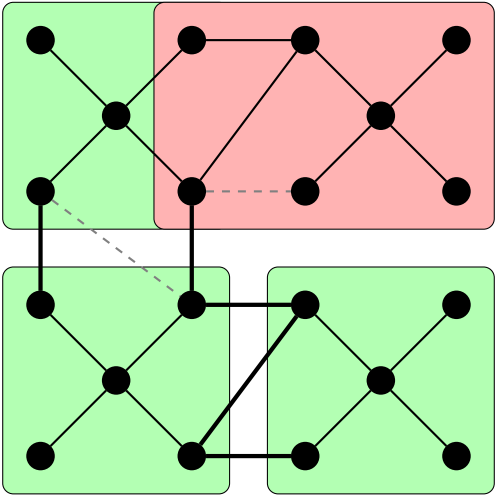
Beispiel-Iteration



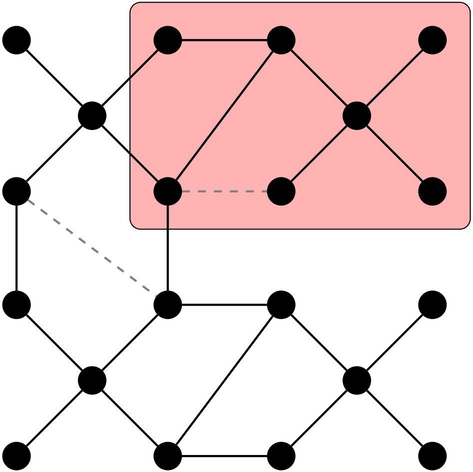
Beispiel-Iteration



Beispiel-Iteration



Beispiel-Iteration



Analyse des Stretch

Lemma

Jedes Cluster in C_i hat Radius $\leq i$.

(Es gibt einen Knoten in C_i mit Distanz $\leq i$ zu jedem anderen Knoten in C_i.)

Analyse des Stretch

Lemma

Jedes Cluster in C_i hat Radius $\leq i$.

(Es gibt einen Knoten in C_i mit Distanz $\leq i$ zu jedem anderen Knoten in C_i.)

Lemma

H hat Stretch $2k - 1$.

Beweis:

- Sei (u, v) beliebige Kante von G
- Betrachte i so dass $u \in C_i \setminus C_{i+1}$ und j so dass $v \in C_j \setminus C_{j+1}$

Analyse des Stretch

Lemma

Jedes Cluster in C_i hat Radius $\leq i$.

(Es gibt einen Knoten in C_i mit Distanz $\leq i$ zu jedem anderen Knoten in C_i.)

Lemma

H hat Stretch $2k - 1$.

Beweis:

- Sei (u, v) beliebige Kante von G
- Betrachte i so dass $u \in C_i \setminus C_{i+1}$ und j so dass $v \in C_j \setminus C_{j+1}$
- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $i \leq j$

Analyse des Stretch

Lemma

Jedes Cluster in C_i hat Radius $\leq i$.

(Es gibt einen Knoten in C_i mit Distanz $\leq i$ zu jedem anderen Knoten in C_i.)

Lemma

H hat Stretch $2k - 1$.

Beweis:

- Sei (u, v) beliebige Kante von G
- Betrachte i so dass $u \in C_i \setminus C_{i+1}$ und j so dass $v \in C_j \setminus C_{j+1}$
- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $i \leq j$
- v ist in einem Nachbarcluster C von u in C_i enthalten

Analyse des Stretch

Lemma

Jedes Cluster in C_i hat Radius $\leq i$.

(Es gibt einen Knoten in C_i mit Distanz $\leq i$ zu jedem anderen Knoten in C_i.)

Lemma

H hat Stretch $2k - 1$.

Beweis:

- Sei (u, v) beliebige Kante von G
- Betrachte i so dass $u \in C_i \setminus C_{i+1}$ und j so dass $v \in C_j \setminus C_{j+1}$
- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $i \leq j$
- v ist in einem Nachbarcluster C von u in C_i enthalten
- Im Spanner gibt es daher eine Kante (u, w) zu einem Knoten w in C

Analyse des Stretch

Lemma

Jedes Cluster in C_i hat Radius $\leq i$.

(Es gibt einen Knoten in C_i mit Distanz $\leq i$ zu jedem anderen Knoten in C_i.)

Lemma

H hat Stretch $2k - 1$.

Beweis:

- Sei (u, v) beliebige Kante von G
- Betrachte i so dass $u \in C_i \setminus C_{i+1}$ und j so dass $v \in C_j \setminus C_{j+1}$
- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $i \leq j$
- v ist in einem Nachbarcluster C von u in C_i enthalten
- Im Spanner gibt es daher eine Kante (u, w) zu einem Knoten w in C
- C hat Radius i, somit:

$$\mathrm{dist}_H(u, v) \leq 1 + i + i$$

Analyse des Stretch

Lemma

Jedes Cluster in C_i hat Radius $\leq i$.

(Es gibt einen Knoten in C_i mit Distanz $\leq i$ zu jedem anderen Knoten in C_i.)

Lemma

H hat Stretch $2k - 1$.

Beweis:

- Sei (u, v) beliebige Kante von G
- Betrachte i so dass $u \in C_i \setminus C_{i+1}$ und j so dass $v \in C_j \setminus C_{j+1}$
- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $i \leq j$
- v ist in einem Nachbarcluster C von u in C_i enthalten
- Im Spanner gibt es daher eine Kante (u, w) zu einem Knoten w in C
- C hat Radius i, somit:

$$\mathrm{dist}_H(u, v) \leq 1 + i + i = 2i + 1 \leq 2(k-1) + 1 = 2k - 1$$

Größe des Spanners

Lemma

H hat $O(n^{1+1/k} + kn)$ Kanten in Erwartung.

Größe des Spanners

Lemma

H hat $O(n^{1+1/k} + kn)$ Kanten in Erwartung.

Beweis:

- Zwei Arten von Kanten für jeden Knoten: Kanten zur Erweiterung eines Clusters und Kanten zu benachbarten Clustern

Größe des Spanners

Lemma

H hat $O(n^{1+1/k} + kn)$ Kanten in Erwartung.

Beweis:

- Zwei Arten von Kanten für jeden Knoten: Kanten zur Erweiterung eines Clusters und Kanten zu benachbarten Clustern
- In jeder der k Iteration fügt jeder der n Knoten höchstens eine Kante zur Erweiterung des Clusters zum Spanner hinzu

Größe des Spanners

Lemma

H hat $O(n^{1+1/k} + kn)$ Kanten in Erwartung.

Beweis:

- Zwei Arten von Kanten für jeden Knoten: Kanten zur Erweiterung eines Clusters und Kanten zu benachbarten Clustern
- In jeder der k Iteration fügt jeder der n Knoten höchstens eine Kante zur Erweiterung des Clusters zum Spanner hinzu
- Für $0 \leq i \leq k-2$: Knoten in $C_i \setminus C_{i+1}$ hat in Erwartung $O(n^{1/k})$ benachbarte Cluster aus C_i

Größe des Spanners

Lemma

H hat $O(n^{1+1/k} + kn)$ Kanten in Erwartung.

Beweis:

- Zwei Arten von Kanten für jeden Knoten: Kanten zur Erweiterung eines Clusters und Kanten zu benachbarten Clustern
- In jeder der k Iteration fügt jeder der n Knoten höchstens eine Kante zur Erweiterung des Clusters zum Spanner hinzu
- Für $0 \leq i \leq k-2$: Knoten in $C_i \setminus C_{i+1}$ hat in Erwartung $O(n^{1/k})$ benachbarte Cluster aus C_i

  Waiting Time Bound!

Größe des Spanners

Lemma

H hat $O(n^{1+1/k} + kn)$ Kanten in Erwartung.

Beweis:

- Zwei Arten von Kanten für jeden Knoten: Kanten zur Erweiterung eines Clusters und Kanten zu benachbarten Clustern
- In jeder der k Iteration fügt jeder der n Knoten höchstens eine Kante zur Erweiterung des Clusters zum Spanner hinzu
- Für $0 \leq i \leq k-2$: Knoten in $C_i \setminus C_{i+1}$ hat in Erwartung $O(n^{1/k})$ benachbarte Cluster aus C_i

  Waiting Time Bound!
- Somit: Jeder Knoten in Clustering $C_i \setminus C_{i+1}$ (für $i \leq k-2$) fügt in Erwartung $O(n^{1/k})$ Kanten zum Spanner hinzu

Größe des Spanners

Lemma

H hat $O(n^{1+1/k} + kn)$ Kanten in Erwartung.

Beweis:

- Zwei Arten von Kanten für jeden Knoten: Kanten zur Erweiterung eines Clusters und Kanten zu benachbarten Clustern
- In jeder der k Iteration fügt jeder der n Knoten höchstens eine Kante zur Erweiterung des Clusters zum Spanner hinzu
- Für $0 \leq i \leq k-2$: Knoten in $C_i \setminus C_{i+1}$ hat in Erwartung $O(n^{1/k})$ benachbarte Cluster aus C_i

  Waiting Time Bound!
- Somit: Jeder Knoten in Clustering $C_i \setminus C_{i+1}$ (für $i \leq k-2$) fügt in Erwartung $O(n^{1/k})$ Kanten zum Spanner hinzu
- Erwartete Anzahl an Clustern in C_{k-1}: $\frac{n}{(n^{1/k})^{k-1}} = \frac{n}{n^{k-1/k}} = n^{1/k}$

Größe des Spanners

Lemma

H hat $O(n^{1+1/k} + kn)$ Kanten in Erwartung.

Beweis:

- Zwei Arten von Kanten für jeden Knoten: Kanten zur Erweiterung eines Clusters und Kanten zu benachbarten Clustern
- In jeder der k Iteration fügt jeder der n Knoten höchstens eine Kante zur Erweiterung des Clusters zum Spanner hinzu
- Für $0 \leq i \leq k-2$: Knoten in $C_i \setminus C_{i+1}$ hat in Erwartung $O(n^{1/k})$ benachbarte Cluster aus C_i

  Waiting Time Bound!
- Somit: Jeder Knoten in Clustering $C_i \setminus C_{i+1}$ (für $i \leq k-2$) fügt in Erwartung $O(n^{1/k})$ Kanten zum Spanner hinzu
- Erwartete Anzahl an Clustern in C_{k-1}: $\frac{n}{(n^{1/k})^{k-1}} = \frac{n}{n^{k-1/k}} = n^{1/k}$
- Jeder Knoten in Clustering C_{k-1} fügt in Erwartung $O(n^{1/k})$ Kanten zum Spanner hinzu

Größe des Spanners

Lemma

H hat $O(n^{1+1/k} + kn)$ Kanten in Erwartung.

Beweis:

- Zwei Arten von Kanten für jeden Knoten: Kanten zur Erweiterung eines Clusters und Kanten zu benachbarten Clustern
- In jeder der k Iteration fügt jeder der n Knoten höchstens eine Kante zur Erweiterung des Clusters zum Spanner hinzu
- Für $0 \leq i \leq k-2$: Knoten in $C_i \setminus C_{i+1}$ hat in Erwartung $O(n^{1/k})$ benachbarte Cluster aus C_i

  Waiting Time Bound!
- Somit: Jeder Knoten in Clustering $C_i \setminus C_{i+1}$ (für $i \leq k-2$) fügt in Erwartung $O(n^{1/k})$ Kanten zum Spanner hinzu
- Erwartete Anzahl an Clustern in C_{k-1}: $\frac{n}{(n^{1/k})^{k-1}} = \frac{n}{n^{k-1/k}} = n^{1/k}$
- Jeder Knoten in Clustering C_{k-1} fügt in Erwartung $O(n^{1/k})$ Kanten zum Spanner hinzu
- Insgesamt: $O(k \cdot n + n \cdot n^{1/k})$ Kanten in Erwartung

Laufzeitanalyse

Laufzeitanalyse

Analyse/Implementierungsdetail:

- Jede Iteration benötigt $O(i) = O(k)$ Runden um Cluster zu samplen und alle Knoten im Cluster und Nachbarn des Clusters darüber zu informieren
  (Jedes Cluster in C_i hat Radius $\leq i$)

Laufzeitanalyse

Analyse/Implementierungsdetail:

- Jede Iteration benötigt $O(i) = O(k)$ Runden um Cluster zu samplen und alle Knoten im Cluster und Nachbarn des Clusters darüber zu informieren
  (Jedes Cluster in C_i hat Radius $\leq i$)
- Somit: Laufzeit $O(k^2)$

Zusammenfassung

- Spanner komprimiert Graph mit Distanz-Approximation
- Obere Schranke: $O(n^{1+1/k})$ Kanten für $(2k-1)$-Spanner
- Untere Schranke: $\Omega(n^{1+1/k})$ Kanten für $(2k-1)$-Spanner
- Verteilter Algorithmus: $O(n^{1+1/k} + kn)$ Kanten für $(2k-1)$-Spanner in $O(k^2)$ Runden

Quellen

Der Inhalt dieser Vorlesungseinheit basiert zum Teil auf einer Vorlesungseinheit von Virginia Vassilevska Williams.

Literatur:

- Ingo Althöfer, Gautam Das, David P. Dobkin, Deborah Joseph, José Soares:. „On Sparse Spanners of Weighted Graphs“. *Discrete & Computational Geometry* 9: 81–100 (1993)
- Surender Baswana, Sandeep Sen. „A simple and linear time randomized algorithm for computing sparse spanners in weighted graphs“. *Random Structures and Algorithms* 30(4): 532–563 (2007)
- Liam Roditty, Uri Zwick. „On Dynamic Shortest Paths Problems“. *Algorithmica* 61(2): 389–401 (2011)