



Tecnológico de Monterrey - Campus Monterrey

Escuela de ingeniería y ciencias

Departamento regional de ciencias básicas

Solución de problemas de mecánica clásica

Grupo 201

Profesores: Drs. Carlos Manuel Hinojosa Espinosa y Alfonso Isaac Jaimes Nájera

### **Segundo Entregable**

#### **Campo central de fuerzas, gravitacional**

Equipo 6

Alberto Anaya Velasco A01252512

Arif Moran Velázquez A01234442

Carlos Gabriel Espinosa Contreras A01198290

Daniel Cruz Álvarez A00572205

Ishan Joel Don Wickramage Madawala Guzman A01704771

22 de abril de 2023

## Introducción

En esta actividad, se ha desarrollado un código en Python para simular el movimiento de una partícula en un campo de fuerza central gravitacional generado por un elemento atractor fijo en un sistema coordenado bidimensional. Se ha utilizado la teoría de la mecánica celeste, las leyes de Kepler, la mecánica Lagrangiana y el método de Runge-Kutta de 4to orden y para integrar las ecuaciones de movimiento de la partícula.

El objetivo principal de la actividad ha sido el simular un campo que consiste en una fuerza central gravitatoria, probando diferentes condiciones iniciales para generar el movimiento de una partícula. Se exploró la precisión del método numérico de resolución de ecuaciones diferenciales de Runge-Kutta en comparación con el método de Euler para integrar las ecuaciones de movimiento de la partícula. Además, se ha visualizado la trayectoria de la partícula para un caso en el que describe una elipse de excentricidad 0.5 aproximadamente, y se ha comparado la trayectoria resultante con la predicción teórica basada en las leyes de Kepler.

En este reporte se presentarán los resultados obtenidos en la simulación, se discutirán las ventajas e inconvenientes de cada método de integración y se analizarán las posibles fuentes de error en la simulación. Además, se discutirán las implicaciones de los resultados obtenidos en el contexto de la mecánica celeste.

## Teoría empleada

**Fuerza gravitatoria:** Es una fuerza atractiva que se produce entre dos objetos con masa, proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. En esta actividad, se requiere simular una fuerza central gravitatoria en un campo bidimensional.

**Funciones Lagrangianas:** En la mecánica Lagrangiana, el movimiento de un sistema físico se describe mediante una función matemática llamada Lagrangiana. La Lagrangiana representa la diferencia entre la energía cinética y potencial del sistema y se utiliza para formular las ecuaciones de movimiento.

**Integración numérica:** La integración numérica es una técnica para calcular la solución aproximada de una ecuación diferencial, dado un conjunto de condiciones iniciales. En esta actividad, se utilizará el método leapfrog para integrar las ecuaciones de movimiento de la partícula.

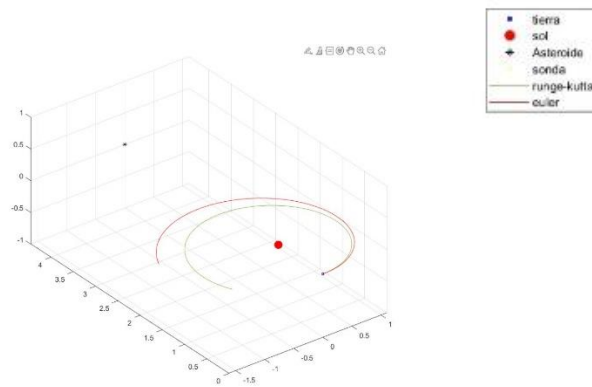
**Método leapfrog:** Es un método de integración numérica utilizado para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden. El método leapfrog se caracteriza por su precisión y estabilidad, lo que lo hace adecuado para simular sistemas dinámicos complejos. En la actividad, se explorará la estrategia leapfrog para integrar las ecuaciones de movimiento de la partícula y se comparará con el método de Euler.

**Leyes de Kepler:** Las leyes de Kepler describen el movimiento de los planetas alrededor del Sol.

## Runge Kutta, Euler y Leapfrog

En comparación al método de Euler , los métodos de leapfrog y Runge kutta es la precisión , es decir el orden del error. El método de leapfrog presenta una mayor precisión, tanto leapfrog como Runge kutta toman las derivadas o funciones en puntos medios. Por otro lado Runge Kutta en lugar de tomar un punto medio toma el promedio de 4 y tiene un orden de error menor por lo tanto se empleo este método.

	Euler	Leapfrog	Runge Kutta 4to
Orden de error	$O(h)$	$O(h^2)$	$O(h^4)$



Dada una función

$$\ddot{\vec{r}} = f(x, y, v_x, v_y, t) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ a_x \\ a_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, dada una entrada:

$$f \left( \begin{bmatrix} x \\ y \\ v_y \\ v_x \\ t \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ a_x \\ a_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, Runge kutta de 4to orden se define:

$$z_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ v_y \\ v_x \\ t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{e}_1 \\ \widehat{e}_2 \\ \widehat{e}_3 \\ \widehat{e}_4 \\ \widehat{e}_5 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = f(z_0)$$

$$k_2 = f\left(z_0 + \frac{h}{2}(k_1)\right)$$

$$k_3 = f\left(z_0 + \frac{h}{2}(k_2)\right)$$

$$k_4 = f(z_0 + h(k_3))$$

$$x^{n+1} = x^n + \frac{h}{6}(k_1 \widehat{e}_1 + 2k_2 \widehat{e}_1 + 2k_3 \widehat{e}_1 + k_4 \widehat{e}_1)$$

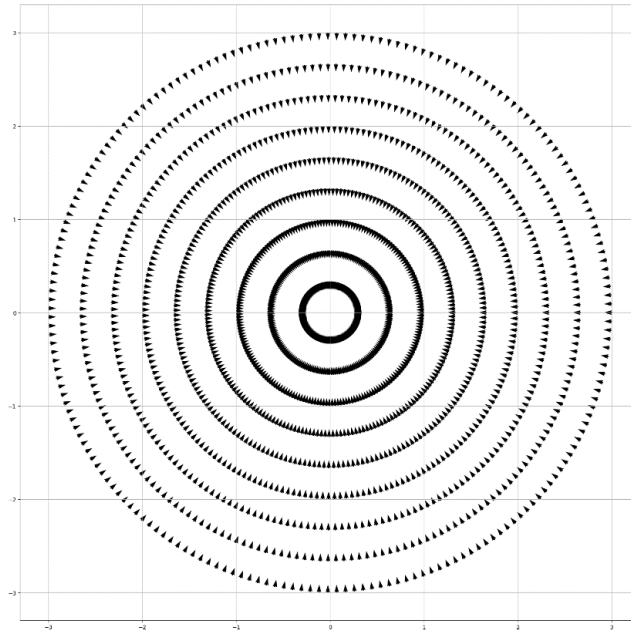
$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{6}(k_1 \widehat{e}_2 + 2k_2 \widehat{e}_2 + 2k_3 \widehat{e}_2 + k_4 \widehat{e}_2)$$

$$v_x^{n+1} = v_x^n + \frac{h}{6}(k_1 \widehat{e}_3 + 2k_2 \widehat{e}_3 + 2k_3 \widehat{e}_3 + k_4 \widehat{e}_3)$$

$$v_y^{n+1} = v_y^n + \frac{h}{6}(k_1 \widehat{e}_4 + 2k_2 \widehat{e}_4 + 2k_3 \widehat{e}_4 + k_4 \widehat{e}_4)$$

### Campo vectorial de fuerza central en 2 dimensiones

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = \frac{k}{r^2} \hat{r} = \frac{k x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{i} + \frac{k y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{j}$$



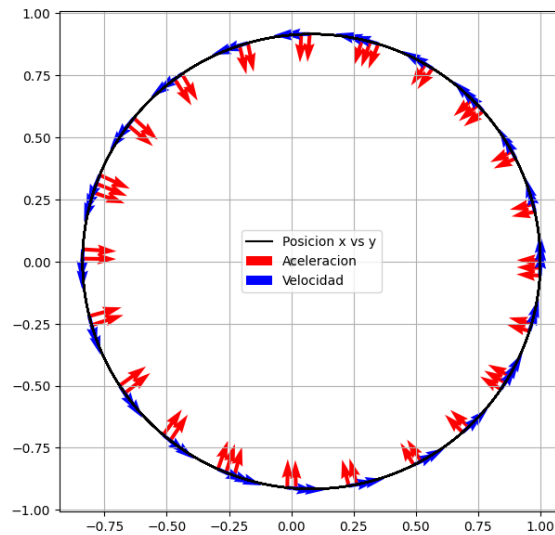
*Ilustración 1. Campo de fuerza central*

Al analizar el campo se puede observar efectivamente, una fuerza central el cual actuara en nuestra partícula

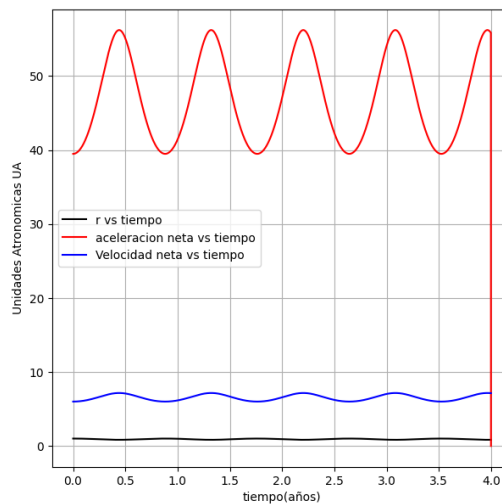
### Caso arbitrario

$$x(0) = 1; y(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = 0; \dot{y}(0) = 6$$



*Ilustración 2. Trayectoria Arbitraria*



*Ilustración 3. Magnitud de posición, aceleración y velocidad vs tiempo*

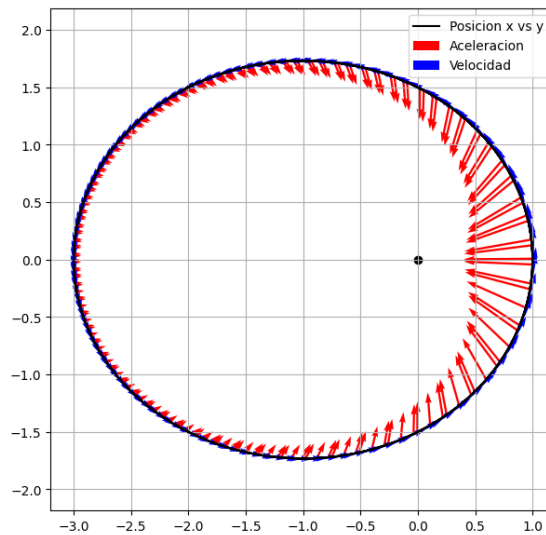
### Trayectoria de partícula en elipse de excentricidad 0.5

A partir del método de Runge kutta, se obtuvo la siguiente trayectoria a base de prueba y error de condiciones iniciales. Para ello se calculó el semi eje mayor  $a$  y la distancia focal  $c$ .

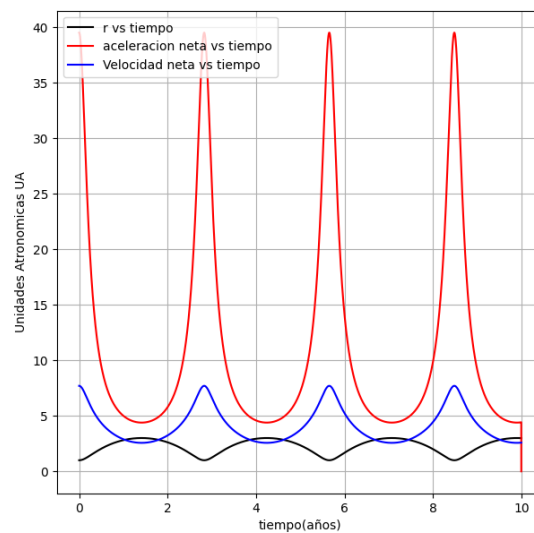
$$x(0) = 1; y(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = 0; \dot{y}(0) = 7.6952$$

$$e = \frac{c}{a} \approx 0.500023$$



*Ilustración 4. Trayectoria con  $e \approx 0.5000$*



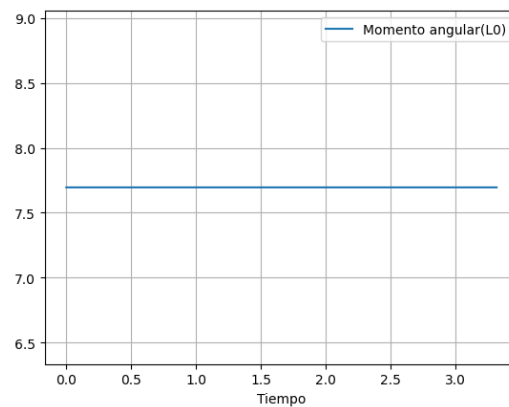
*Ilustración 5. Magnitud de posición, aceleración y velocidad vs tiempo*

## Leyes de Kepler

A lo largo de la simulación se comprobaron las últimas dos leyes de Kepler. La 2da se comprobó a través de. Dada la trayectoria anterior se calculó el momento angular y partir de ello se puede expresar el área en términos de  $L_0$ .

1. Para la tercera ley requieres crear diferentes órbitas (diversas excentricidades), sin cambiar la masa del Sol, y ver que se cumple la tercera Ley: semieje mayor al cubo entre el período orbital al cuadrado, te da siempre el mismo valor.

$$L_0 = mr^2\dot{\phi} = m(x\dot{y} - y\dot{x})\hat{z} = 7.6952$$



*Ilustración 6. Momento angular  $L_0$*

Se observa que se conserva el momento angular

Partiendo del área en coordenadas polares

$$dA = d\phi \int_0^r r dr$$

$$dA = \frac{d\phi r^2}{2}$$

Reescribiendo  $dA$ :

$$dA = \frac{1}{2}r(r d\phi)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r \left( r \frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{1}{2}r(r\dot{\phi}) = \frac{1}{2} \frac{L_0}{m}$$

$$\int dA = \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2} \frac{L_0}{m} dt$$

$$A = \frac{1}{2} \frac{L_0}{m} (t_f - t_i) = \frac{1}{2} \frac{L_0}{m} \Delta t$$

Dentro del problema:

$$A_1 = \frac{1}{2} \frac{L_0}{m} (1 - 0)_1 = \frac{1}{2} \frac{L_0}{m}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \frac{L_0}{m} (3.319 - 2.319)_2 = \frac{1}{2} \frac{L_0}{m}$$

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 \therefore A_1 = A_2$$