Imagen que contiene Texto

Descripción generada automáticamente

Tecnológico de Monterrey - Campus Monterrey

Escuela de ingeniería y ciencias

Departamento regional de ciencias básicas

Solución de problemas de mecánica clásica

Grupo 201

Profesores: Drs. Carlos Manuel Hinojosa Espinosa y Alfonso Isaac Jaimes Nájera

**Campo central de fuerzas, gravitacional**

Equipo 6

Alberto Anaya Velasco A01252512

Arif Moran Velázquez A01234442

Carlos Gabriel Espinosa Contreras A01198290

Daniel Cruz Álvarez A00572205

Ishan Joel Don Wickramage Madawala Guzman A01704771

22 de abril de 2023

**1. Introducción**

En esta actividad, se ha desarrollado un código en Python para simular el movimiento de una partícula en un campo de fuerza central gravitacional generado por un elemento atractor fijo en un sistema coordenado bidimensional. Se ha utilizado la teoría de la mecánica celeste, las leyes de Kepler, la mecánica Lagrangiana y el método de Runge-Kutta de 4to orden y para integrar las ecuaciones de movimiento de la partícula.

El objetivo principal de la actividad ha sido el simular un campo que consiste en una fuerza central gravitatoria, probando diferentes condiciones iniciales para generar el movimiento de una partícula. Se exploró la precisión del método numérico de resolución de ecuaciones diferenciales de Runge-Kutta en comparación con el método de Euler para integrar las ecuaciones de movimiento de la partícula. Además, se ha visualizado la trayectoria de la partícula para un caso en el que describe una elipse de excentricidad 0.5, y se ha comparado la trayectoria resultante con la predicción teórica basada en las leyes de Kepler.

En este reporte se presentan los resultados obtenidos en la simulación, se discutirán las ventajas e inconvenientes de cada método de integración y se analizarán las posibles fuentes de error en la simulación. Además, se discutirán las implicaciones de los resultados obtenidos en el contexto de la mecánica celeste.

**2. Teoría empleada**

**Fuerza gravitatoria:** Es una fuerza atractiva que se produce entre dos objetos con masa, proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. En esta actividad, se requiere simular una fuerza central gravitatoria en un campo bidimensional.

**Funciones Lagrangianas:** En la mecánica Lagrangiana, el movimiento de un sistema físico se describe mediante una función matemática llamada Lagrangiana. La Lagrangiana representa la diferencia entre la energía cinética y potencial del sistema y se utiliza para formular las ecuaciones de movimiento.

**Integración numérica:** La integración numérica es una técnica para calcular la solución aproximada de una ecuación diferencial, dado un conjunto de condiciones iniciales. En esta actividad, se utilizará el método *leapfrog* para integrar las ecuaciones de movimiento de la partícula.

**Leyes de Kepler:** Las leyes de Kepler describen el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Establecidas en el siglo XVII por Johannes Kepler, estas ayudaron a sentar las bases para la comprensión moderna de la gravedad y las leyes del movimiento.

**Métodos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales: Euler, *Leapfrog* y Runge-Kutta de 4to orden**

Una diferencia importante entre los métodos de Euler y los métodos de *leapfrog* y Runge-Kutta es la precisión, es decir, el orden del error. Éstos dos últimos cuentan con una mayor precisión. El método de Euler toma la derivada en un paso para aproximar la solución en el siguiente paso de tiempo, y el error en la aproximación de la solución crece linealmente con el tamaño del paso; mientras que *leapfrog* toma la derivada en un paso o punto medio, por lo que el error en la aproximación es menor. Por otro lado, Runge-Kutta en lugar de tomar un punto medio toma el promedio de 4, y por ser de cuarto orden tiene un orden de error menor. Por ello se decidió por utilizar este método para la simulación de la partícula en el campo de fuerza central.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Euler | *Leapfrog* | Runge Kutta 4to |
| Orden de error |  |  |  |

Gráfico

Descripción generada automáticamente

Gráfico

Descripción generada automáticamente

Dada una función

Es decir, dada una entrada:

Por lo tanto, Runge-Kutta de 4to orden se define:

**3. Campo vectorial de fuerza central en 2 dimensiones**

Primero se grafica un campo de fuerza vectorial alrededor de un origen fijo de un sistema coordenado bidimensional que simula una fuerza central gravitatoria, a partir de la siguiente ecuación:

Gráfico

Descripción generada automáticamente

Ilustración 1.Campo de fuerza central

Al analizar el campo se puede observar, efectivamente, una fuerza central la cual actuará con la partícula

**Caso arbitrario**

Luego se admite una condición arbitraria de posición y velocidad inicial para la partícula desconocida, y se visualiza la trayectoria que la partícula sigue, junto con el vector de velocidad (tangencial) y de aceleración centrípeta en varios puntos de su trayectoria.

Gráfico

Descripción generada automáticamente

Ilustración 2.Trayectoria Arbitraria

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

Ilustración 3. Magnitud de posición, aceleración y velocidad vs tiempo

**Trayectoria de partícula en elipse de excentricidad 0.5**

A partir del método de Runge-Kutta de 4to orden, se obtuvo la siguiente trayectoria a base de prueba y error con diferentes condiciones iniciales arbitrarias. Para verificar que la excentricidad fuera lo más cercana a 0.5 se calculó en cada iteración el semi eje mayor, , y la distancia focal, .

Gráfico

Descripción generada automáticamente

Ilustración 4. Trayectoria con

Gráfico, Histograma

Descripción generada automáticamente

Ilustración 5.Magnitud de posición, aceleración y velocidad vs tiempo

**Leyes de Kepler**

Por medio de la simulación se pudo comprobar la 2da ley de Kepler. Dada la trayectoria anterior se calculó el momento angular, y se pudo encontrar que este se mantiene constante durante el tiempo de la simulación. Luego, después de resolver la integral apropiada para calcular *dA*, se encuentra que este resultado puede expresarse en términos del momento angulary se confirma que, ante una conservación de momento angular, en dos intervalos de tiempo iguales ocurre un barrido de áreas iguales.

Gráfico

Descripción generada automáticamente

Ilustración 6.Momento angular

Se observa que se conserva el momento angular

Partiendo del área en coordenadas polares

Reescribiendo :

Dentro del problema: